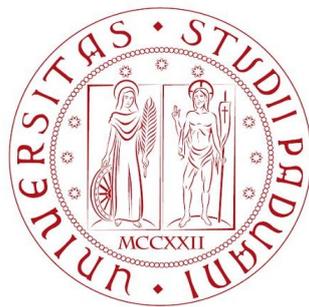


Università degli Studi di Padova  
Dipartimento di Scienze Statistiche  
Corso di Laurea Triennale in  
Statistica e Gestione delle Imprese



Relazione Finale

# NON LINEARITÀ NEL BUSINESS CYCLE

**Relatore:** Prof.ssa Luisa Bisaglia  
Dipartimento di Scienze Statistiche

**Laureando:** Federico Tasinato  
**Matricola n.** 1147864

Anno Accademico 2018/2019

# Indice

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>1</b>
1.1	<i>Business cycle</i> : una breve descrizione . . . . .	1
1.2	Approccio all'analisi . . . . .	2
1.3	Dati e trasformazioni preliminari . . . . .	2
<b>2</b>	<b>Test per la non linearità</b>	<b>3</b>
2.1	Linearità in media . . . . .	4
2.1.1	Test RESET . . . . .	5
2.1.2	Test di White . . . . .	6
2.2	Non linearità per modelli a soglia . . . . .	7
2.2.1	Test di Tsay . . . . .	9
2.3	Adeguatezza dei modelli STAR non lineari . . . . .	11
2.3.1	Test LM-STAR . . . . .	12
2.4	Presenza di comportamenti asimmetrici: il modello CDR . . . . .	15
2.4.1	Test CDR . . . . .	18
2.5	Linearità nel caso di problemi di stazionarietà . . . . .	19
2.5.1	Test $W_\lambda$ . . . . .	23
<b>3</b>	<b>Applicazione del sistema di test ad un caso reale</b>	<b>25</b>
3.1	Applicazione e risultati . . . . .	26
3.2	Considerazioni finali . . . . .	32
<b>4</b>	<b>Conclusioni</b>	<b>33</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>36</b>

# 1 Introduzione

## 1.1 *Business cycle*: una breve descrizione

Con *business cycle* ci si riferisce alle fluttuazioni a livello economico nella produzione, commercio e tutte le attività economiche in generale di un Paese. Tale ciclo può essere osservato attraverso i movimenti ascendenti e discendenti dei livelli del PIL, intendendo con “livello” del prodotto interno lordo i cambiamenti che esso subisce nel tempo attorno ad un certo trend.

Il *business cycle* viene descritto come un susseguirsi di periodi distinti, definiti come segue:

- *espansione (prosperità)*: è una fase di ascensione contraddistinta da un aumento generale dell'occupazione, con parallela crescita economica del Paese e pressione al rialzo sui prezzi di beni e servizi (inflazione);
- *picco*: è il punto più alto raggiunto dal ciclo economico, nel quale il sistema sta producendo l'output massimo raggiungibile, l'occupazione difficilmente può crescere ulteriormente e l'inflazione è accentuata in modo evidente;
- *recessione (contrazione)*: in questa fase la crescita economica rallenta fino ad osservare un significativo declino delle attività, cessa la pressione al rialzo sui prezzi e diminuisce al contempo l'occupazione;
- *depressione*: il rallentamento delle attività economiche porta al punto di minimo raggiungibile dal sistema, la disoccupazione è ad un livello significativamente alto.

Tali periodi si alternano tra loro nel tempo in maniera asimmetrica e in modo fortemente variabile, sia per durata che per intensità, andando a definire delle dinamiche specifiche che dipendono in larga misura appunto dal momento o periodo di appartenenza.

## 1.2 Approccio all'analisi

Per quanto detto nella sezione precedente, una serie caratterizzata dalla presenza del *business cycle* nel complesso rappresenta una serie storica che sembrerebbe prestarsi inadatta ad essere descritta tramite un usuale modello lineare; la presenza di asimmetrie nell'andamento generale della serie pregiudica l'efficacia di tale classe di modelli, incapaci di cogliere e descrivere in maniera adeguata l'evoluzione temporale dei dati. Se da un lato dunque si è portati a preferire l'ampia famiglia dei modelli non lineari che meglio si adattano ai dati descrivendone più efficacemente le caratteristiche, dall'altro in questo modo si sta rinunciando alla semplicità interpretativa e intrinseca che un modello lineare porta con sé. È dunque utile poter verificare l'effettiva inefficacia o viceversa l'adeguatezza di un modello lineare per descrivere i dati contro l'ipotesi al contrario che un modello non lineare sia indispensabile per poter cogliere tutti gli aspetti salienti della serie macroeconomica in esame. In altre parole, si tratta di appurare se vi sia evidenza o meno di linearità nei dati.

Il procedimento che si sceglie di seguire per raggiungere lo scopo si basa sull'approccio proposto da Lopes e Zsurkis (8, Lopes, Zsurkis. 2019), il quale *non prevede la stima di alcun modello specifico*, lineare o non, per modellare e descrivere i dati, ma poggia su un sistema di test attentamente scelti per massimizzare la potenza nel rilevare non linearità nella serie di dati oggetto di analisi.

## 1.3 Dati e trasformazioni preliminari

Facendo riferimento ad una generica Nazione, si parte considerandone la serie trimestrale destagionalizzata del PIL, la quale però non può essere utilizzata così come si presenta, ma deve essere trasformata: indicando con  $PIL_t$  la serie del PIL di partenza all'istante di tempo  $t$ , si considera la serie delle

differenze prime logaritmiche, cioè:

$$y_t = \Delta \log(PIL_t) = \Delta Y_t$$

dove  $\Delta = (1 - B)$  è l'operatore differenza prima,  $Y_t = \log(PIL_t)$  e  $B$  è tale che  $By_t = y_{t-1}$ . Da un lato l'applicazione della trasformata logaritmica serve a stabilizzare la varianza dei dati nel tempo, dall'altro la differenziazione ha un significato diverso dal semplice tentativo di rendere stazionari i dati, anche se la stazionarietà della serie sarà un aspetto utile nel seguito per convalidare l'efficacia dei test applicati. Ci si concentra sui dati differenziati in quanto è proprio il comportamento delle differenze prime della serie a caratterizzare il *business cycle* in termini di livello di aggregati di attività, consentendo di evidenziarne in maniera ottimale le fluttuazioni di breve e medio periodo (9; 10; 8, Morley, Piger. 2006; Morley *et al.*. 2012; Lopes, Zsurkis. 2019).

## 2 Test per la non linearità

In questa sezione vengono presentati i test impiegati per verificare la presenza di non linearità nei dati. Tali test sono stati scelti in base ai seguenti criteri (8, Lopes, Zsurkis. 2019):

- popolarità, semplicità e disponibilità dei valori critici asintotici con cui confrontare le statistiche test;
- potenza del test, in grado di fornire statistiche soddisfacenti anche quando l'ipotesi alternativa impiegata è diversa da quella che ha originariamente portato alla stima della statistica in questione.

Lo studio della potenza dei test non verrà trattato in maniera approfondita nel seguito, in quanto non sono oggetto di analisi in questa sede gli studi e le simulazioni Monte Carlo effettuati per documentare le peculiarità dei test utilizzati.

Il punto di partenza per calcolare i test che seguono sta nella stima preliminare di un modello autoregressivo lineare. Tale procedura non va intesa come tentativo di descrivere i dati tramite modellazione, ma deve considerarsi utile solamente in funzione dei test da applicare (8, Lopes, Zsurkis. 2019). Volendo stimare dunque un modello  $AR(p)$  adeguato, se ne dovrà scegliere l'ordine  $p$ : a tal proposito si adotta il criterio di informazione di Akaike (AIC), considerando un  $p_{MAX}$  pari a 12. È da sottolineare che la scelta di un criterio che risulti portare a stime troppo parsimoniose dell'ordine autoregressivo  $p$  può ripercuotersi in distorsioni nei test, nel senso che potrebbero essere introdotte delle evidenze spurie di non linearità laddove invece il problema è proprio l'insufficienza di parametri del modello lineare stimato in partenza (8, Lopes, Zsurkis. 2019).

## 2.1 Linearità in media

I due test di seguito presentati sono utili per verificare l'ipotesi che una serie economica risulti generata da un modello lineare, contro l'alternativa che il processo generatore dei dati (PGD) sia non lineare; per la precisione, è di interesse verificare la linearità nella media condizionata del processo. Sia  $Z_t$  una serie storica che può essere scritta come  $Z_t = (y_t, X_t)'$ , dove  $y_t$  è uno scalare e  $X_t$  è un vettore  $k \times 1$  che contiene i valori ritardati di  $y_t$  (sarebbe ininfluenza per i risultati se  $X_t$  contenesse anche una costante). Il processo  $y_t$  è lineare in media condizionatamente a  $X_t$  se

$$P[E(y_t|X_t) = X_t'\theta^*] = 1 \quad \text{per qualche } \theta^* \in \mathbb{R}^k,$$

mentre se tale probabilità risultasse essere inferiore all'unità significherebbe che il modello lineare non riesce a cogliere adeguatamente il comportamento non lineare del PGD.

I test prevedono una regressione dei residui di un modello lineare su specifiche funzioni di  $X_t$ , scelte in modo tale che riescano a catturare tracce di non linearità; l'ipotesi nulla sarà rifiutata se queste funzioni di  $X_t$  risultano

significativamente correlate con i residui: ciò comporta che il modello alternativo non lineare si presti ad essere migliore in termini previsivi.

Il punto di partenza, comune ai due test, è il seguente. Sia  $y_t$  la serie di interesse e sia  $X_t = (y_{t-1}, \dots, y_{t-p})'$  - come definito precedentemente - usato per spiegare  $y_t$ . Si parte con una regressione lineare di  $y_t$  su  $\tilde{X}_t = (1, y_{t-1}, \dots, y_{t-p})$ , producendo così delle stime dei coefficienti  $\hat{\theta}$ , una serie prevista  $f_t = \tilde{X}_t' \hat{\theta}$  e la stima dei residui  $\hat{e} = y_t - \tilde{X}_t' \hat{\theta}$ .

### 2.1.1 Test RESET

A partire dalle stime  $\hat{\theta}$  dei coefficienti e dalla serie prevista  $f_t$ , si può scrivere un modello del tipo (7, Lee *et al.* 1993)

$$y_t = \tilde{X}_t' \hat{\theta} + a_2 f_t^2 + a_3 f_t^3 + \nu_t ,$$

fermandosi al terzo ordine del polinomio. L'ipotesi nulla da verificare è  $H_0 : a_2 = a_3 = 0$  contro l'alternativa che almeno uno tra  $a_2$  e  $a_3$  sia diverso da zero. In questo modo, quindi, se l'ipotesi nulla risultasse vera si sarebbe portati a dire che un modello lineare è sufficiente per descrivere la serie, mentre al contrario ci sarebbe evidenza di autocorrelazione nei residui del modello stimato, portando dunque a concludere che un modello non lineare si adatta meglio ai dati.

Indicando con  $\hat{e} = (\hat{e}_1, \dots, \hat{e}_n)$  e con  $\hat{\nu} = (\hat{\nu}_1, \dots, \hat{\nu}_n)$  i residui stimati dei due modelli, la statistica test è

$$RESET = \frac{(\hat{e}' \hat{e} - \hat{\nu}' \hat{\nu}) / (k - 1)}{(\hat{\nu}' \hat{\nu}) / (n - k)} ,$$

e sotto l'ipotesi nulla vale l'approssimazione

$$RESET \sim F_{k-1, n-k} .$$

### 2.1.2 Test di White

Il test considerato nel seguito, chiamato anche test della matrice di informazione dinamica (7, Lee *et al.* 1993), è un test diagnostico ideato per individuare l'errata specificazione di un modello per i dati a disposizione, ossia per capire se il modello stimato sui dati sia adatto a descriverli o se viceversa sia necessaria un'ulteriore specificazione per ottenere risultati soddisfacenti. Si basa sul risultato secondo il quale, per un modello correttamente specificato, le componenti dello *score* sono incorrelate. Come per il test precedente, anche questo prevede, per la costruzione della statistica test, una regressione dei minimi quadrati ordinari ausiliaria.

Per il modello lineare normale

$$y_t = \tilde{X}_t' \theta + e_t, \quad e_t \sim N(0, \sigma^2)$$

dal quale poi si otterranno delle stime di  $\theta$ ,  $\hat{\theta}$ , si impiega la sua funzione di log-verosimiglianza

$$l_t(x_t, \theta, \sigma) = \text{costante} - \log(\sigma) - (y_t - \tilde{X}_t' \theta)^2 / 2\sigma^2$$

per ottenere una stima di quasi massima verosimiglianza di  $\sigma$ , detta  $\hat{\sigma}$ . Indicando quindi con  $u_t = (y_t - \tilde{X}_t' \theta) / \sigma$  i residui standardizzati del modello di regressione e ottenuta una loro stima  $\hat{u}_t = (y_t - \tilde{X}_t' \hat{\theta}) / \hat{\sigma}$ , si procede con una regressione di questi ultimi  $\hat{u}_t$  su  $\tilde{X}_t$  e  $\hat{k}_t$ . Tale ultimo parametro deve essere stimato e deve soddisfare la condizione  $\hat{m}_t = \hat{k}_t \hat{u}_t$ , dove

$$\hat{m}_t = \hat{\sigma}^{-2} (\hat{u}_t \hat{u}_{t-1}, \tilde{X}_t \hat{u}_t \hat{u}_{t-1}, \tilde{X}_{t-1} \hat{u}_t \hat{u}_{t-1}, \tilde{X}_t' \tilde{X}_{t-1} \hat{u}_t \hat{u}_{t-1}) .$$

Da quest'ultima regressione si otterrà un coefficiente di determinazione  $R^2$ , che viene impiegato per il calcolo della statistica test:

$$WHITE = nR^2 .$$

Sotto ipotesi nulla di corretta specificazione del modello lineare per i dati, la statistica test *WHITE* si distribuisce come una variabile  $\chi^2$ :

$$WHITE \sim \chi_{(q)}^2 ,$$

con  $q$  che denota la dimensione di  $\hat{m}_t$

## 2.2 Non linearità per modelli a soglia

Per poter cogliere gli andamenti ciclici nelle serie storiche, spesso si fa ricorso ai modelli non lineari a soglia (11, Tong. 2011). Questi prevedono l'uso di un insieme finito di modelli  $AR$  lineari per rappresentare un processo caratterizzato dalla presenza di componenti cicliche: il PGD seguirà un comportamento diverso a seconda della fase che sta attraversando in un dato intervallo temporale. Questo significa che i modelli autoregressivi a soglia (*Threshold Autoregressive, TAR*) sono lineari localmente ma non globalmente. Un'importante sottoclasse dei modelli  $TAR$  è composta dai modelli  $SETAR$  (*Self Exciting TAR models*). La differenza tra i due modelli sta nella specificazione della variabile soglia utilizzata per distinguere i diversi regimi seguiti dalla serie, ossia per capire quale funzione autoregressiva stia seguendo il processo al tempo  $t$ . Mentre per i modelli  $TAR$  la variabile soglia è esogena, per i  $SETAR$  è rappresentata dalla variabile stessa di interesse ritardata di  $d$  periodi, con  $d$  denominato pertanto parametro di ritardo della variabile di soglia.

Un modello  $SETAR$  in cui si ipotizzino solamente due regimi che seguono rispettivamente due modelli  $AR(p)$  diversi (ma considerati qui dello stesso ordine), può dunque essere espresso nella seguente forma:

$$y_t = \begin{cases} \phi_0^{(1)} + \sum_{i=1}^p \phi_i^{(1)} y_{t-i} + \varepsilon_t & \text{se } y_{t-d} \leq c \\ \phi_0^{(2)} + \sum_{i=1}^p \phi_i^{(2)} y_{t-i} + \varepsilon_t & \text{se } y_{t-d} > c \end{cases}$$

dove  $c \in \mathbb{R}$  è un numero reale finito detto parametro di soglia,  $y_{t-d}$  rappresenta la variabile soglia che, assieme a  $c$ , serve a capire quale processo stia seguendo la serie nell'istante temporale corrente ed in base a questo poter fare delle previsioni accurate utilizzando il modello  $AR$  adeguato. Per

la valutazione del regime da considerare si esamina il valore assunto dalla variabile soglia ritardata di  $d$  periodi:  $d$  perciò rappresenta il parametro di ritardo della variabile soglia. Infine,  $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$  *i.i.d.*

Il modello *SETAR* può essere, quindi, considerato nella rappresentazione a due regimi proposta per descrivere il caso di interesse del *business cycle*, per poter così definire in modo adeguato le sue due principali fasi: espansione e regressione. In questo modo, a seconda che il ciclo stia seguendo una fase piuttosto che un'altra, sarà possibile modellare diversamente i due andamenti ascendente e discendente.

Il modello *SETAR* così come descritto può però venire riorganizzato per ottenerne un'espressione equivalente ma che più si confà alla costruzione del test d'interesse; la riscrittura del modello che viene di seguito illustrata prende il nome di autoregressione ordinata (12, Tsay. 1989). Siano  $(y_1, \dots, y_n)$  le osservazioni di cui si dispone; queste si possono ordinare in ordine crescente rispetto alla variabile soglia  $y_{t-d}$ : ciò significa che basandosi sul valore assunto dalla variabile soglia si ordineranno le osservazioni  $y_t$  in modo che la prima osservazione corrisponda al rispettivo valore più piccolo osservato della variabile soglia, identificata da un valore ritardato della serie. In questo modo,  $y_{t-d}$  assume valori compresi in  $(y_h, \dots, y_{n-d})$ , con  $h = \max\{1, p + 1 - d\}$  specificata in modo che  $y_{t-d}$  sia sempre definita. Indicando dunque con  $(y_{(1)}, \dots, y_{(r)}, \dots, y_{(n-d-h+1)})$  la nuova serie ordinata ottenuta così come descritto, con  $(r)$  che indica l'indice della  $r$ -esima osservazione più piccola, un modello *SETAR* ordinato può essere scritto come:

$$y_{(r+d)} = \begin{cases} \phi_0^{(1)} + \sum_{j=1}^p \phi_j^{(1)} y_{(r+d-j)} + \varepsilon_{(r+d)} & \text{se } r \leq s \\ \phi_0^{(2)} + \sum_{j=1}^p \phi_j^{(2)} y_{(r+d-j)} + \varepsilon_{(r+d)} & \text{se } r > s \end{cases}$$

con  $s$  che appunto discrimina tra i due regimi e tale che soddisfi  $y_{(s)} < c \leq y_{(s+1)}$ . Con questa formulazione è importante sottolineare che non si perdono

l'autocorrelazione tra i dati e la configurazione di serie storica originale degli stessi: il modello così costruito infatti non altera i dati di partenza ma, a partire da una serie ordinata secondo un certo criterio e prestando attenzione agli indici della variabili nel modello, è possibile constatare che l'autoregressione ottenuta fa corrispondere ad una generica  $y_t$  i suoi valori ritardati come erano in partenza, senza che vi sia concretamente influenza dell'ordinamento effettuato. Effettuare questa operazione di ordinamento comporta di fatto un vantaggio ai fini della verifica della presenza di non linearità nella serie: in questo modo verificare la linearità coincide col verificare che vi sia un unico regime nel PGD, ossia che i dati seguano tutti un unico processo  $AR$  lineare. La serie ordinata che si ottiene infatti risulta avere tutti i valori appartenenti ad un regime in un primo blocco di  $s$  elementi e i rimanenti appartengono di conseguenza al secondo regime; pertanto, discriminare tra un regime ed un altro si riduce a sapere quante osservazioni appartengono al primo blocco e tale valore  $s$  è l'unico che in questa specificazione dipende dalla soglia  $c$  (12, Tsay. 1989).

### 2.2.1 Test di Tsay

Per procedere alla stima del modello  $SETAR$  ordinato si impiega il metodo dei minimi quadrati ricorsivi (8, Lopes, Zsurkis. 2019); tale procedimento non è illustrato nel seguito in quanto non ritenuto oggetto di discussione (per un approfondimento, si rimanda a Garofalo F., Iannelli L., Vasca F., “*Ottimizzazione e Identificazione dei Modelli*”, Springer, Gennaio 2016, cap. 6.5). Volendo dunque procedere alla stima del modello, l'algoritmo di calcolo ricorsivo può essere avviato disponendo di  $b$  osservazioni iniziali; solitamente  $b$  è scelto di modo che corrisponda al 15-20% del numero totale di osservazioni disponibili della serie storica, così da ottenere stime abbastanza accurate dei parametri per entrambi i regimi. Di conseguenza, se in partenza si avevano a disposizione  $n - d - h + 1$  osservazioni (ordinate), utilizzando i minimi quadrati ricorsivi si otterranno  $n - d - b - h + 1$  stime dei residui per il mo-

dello previsto; siano tali stime indicate con  $\hat{\epsilon}_{(r+d)}$ , per  $r = b+1, \dots, n-d-h+1$ .

Considerando queste premesse, si può dire che la linearità del modello può essere verificata testando l'ipotesi che i parametri  $\phi_j^{(1)}$  e  $\phi_j^{(2)}$ ,  $i = 1, \dots, p$ , dei due regimi possano essere considerati significativamente uguali, ovvero non esiste una significativa differenza nel comportamento della serie tra un regime ed un altro; in altri termini, ciò significa che la divisione in regimi definiti da processi diversi e fonte di non linearità è superflua. Tale ipotesi può essere formulata in termini di confronto tra devianze residue di due diversi modelli: il *SETAR* ordinato stimato tramite ricorsione ed una regressione lineare semplice aggiuntiva fine allo scopo. Più precisamente, dati i residui  $\hat{\epsilon}_{(r+d)}$ , si conduce la seguente regressione lineare:

$$\hat{\epsilon}_{(r+d)} = \omega_0 + \sum_{i=1}^p \omega_i y_{(r+d-i)} + \epsilon_{(r+d)}, \quad r = b+1, \dots, n-d-h+1$$

e siano  $\hat{\epsilon}_{(r+d)}$  le stime dei residui della regressione. Con tale modello supplementare si vuole verificare che i residui del modello *SETAR* ordinato stimato siano indipendenti dai regressori  $\{y_{(r+d-i)} | i = 1, \dots, p\}$ , in quanto tale indipendenza non sarà soddisfatta laddove il vero modello dei dati sia un *SETAR* non lineare. Infatti, in questo modo si sta verificando se l'autoregressione mediante l'utilizzo delle osservazioni ordinate secondo la variabile soglia  $y_{t-d}$  sia o meno significativa, e in questa seconda eventualità i residui del modello non lineare ordinato e quelli della regressione ausiliaria effettuata saranno correlati.

Il test da condurre è pertanto un test F, specificato come segue:

$$F_{TSAY} = \frac{(\sum \hat{\epsilon}_t^2 - \sum \hat{\epsilon}_t^2)/(p+1)}{\sum \hat{\epsilon}_t^2/(n-d-b-p-h)}.$$

Tale statistica test, sotto ipotesi nulla di linearità, ovvero  $H_0 : y_t \sim AR(p)$ , si distribuisce come una F di Fisher con  $p+1$  e  $n-d-b-p-h$  gradi di libertà:

$$F_{TSAY} \sim F_{p+1, n-d-b-p-h}.$$

Va sottolineato che per il calcolo di tale statistica test e per le stime dei modelli presentati in questa sezione, il parametro di ritardo viene scelto essere  $d = 1$ , dunque la variabile di soglia diviene  $y_{t-1}$ .

### 2.3 Adeguatezza dei modelli STAR non lineari

Nonostante in questo caso non si tratti di una procedura rigorosamente libera da modellazione dei dati, essa porta alla costruzione di un test particolarmente potente ed efficace nell'individuare non linearità nei dati. Nel seguito vengono impiegati i modelli *STAR* (*Smooth Transition Autoregressive*), dei modelli a soglia che differiscono dai precedenti *TAR* in quanto la discriminazione tra un regime ed un altro non avviene in maniera rigida, distinguendo nettamente i due processi, ma viene introdotta grazie all'impiego di una funzione  $F(\cdot)$  che lisci tale passaggio (11, Tong. 2011). Questa funzione deve essere tale che assuma valori compresi tra 0 e 1, in cui gli estremi dell'intervallo denotano i casi particolari in cui la distinzione tra regimi è la stessa che per i modelli *TAR*. Si consideri dunque un modello non lineare per serie storiche *STAR*:

$$y_t = \tilde{\pi}' \tilde{X}_t + \tilde{\theta}' \tilde{X}_t F(z_{t-d}, \gamma, c) + u_t$$

dove  $y_t$  è uno scalare con  $t = 1, \dots, n$ ;  $\tilde{X}_t = (1, y_{t-1}, \dots, y_{t-p}) = (1, X_t)$ ;  $\tilde{\pi}' = (\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_p) = (\pi_0, \pi')$ ;  $\tilde{\theta}' = (\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_p) = (\theta_0, \theta')$ ;  $u_t$  rappresenta la componente erratica e perciò è interpretabile come un processo *white noise* con varianza  $\sigma^2$  incognita;  $F(\cdot)$  rappresenta la funzione di transizione, che per assunzione viene scelta in modo che sia quattro volte differenziabile e che le sue derivate siano continue (5, Escribano, Jordá. 2001). Nel seguito verrà considerata la forma logistica:

$$F(z_{t-d}, \gamma, c) = \frac{1}{1 + e^{-\gamma(z_{t-d}-c)}} - \frac{1}{2}$$

dove il termine  $\frac{1}{2}$  è stato qui aggiunto solo per convenienza e non influenza i risultati che si ottengono. Chiarendo gli argomenti della funzione, si ha che  $z_{t-d}$  è la variabile di soglia e nel seguito essa sarà scelta pari a  $y_{t-d}$ ;  $d$  rappresenta il parametro di ritardo della variabile soglia e per un modello

correttamente specificato vale  $1 \leq d \leq p$ ;  $\gamma$  è il parametro di scala della transizione, è positivo ( $\gamma > 0$ ) e determina il lisciamiento del passaggio da un regime ad un altro: quanto più è grande tanto più  $F(\cdot)$  determinerà un passaggio rigido come nel caso dei *TAR*; infine  $c$  è la soglia.

Si sceglie di considerare un modello *STAR* logistico (*LSTAR*, dove *L* sta per *Logistic*) in quanto esso è in grado di descrivere comportamenti asimmetrici della serie e pertanto si presta ad essere particolarmente adatto nel caratterizzare dati macroeconomici che presentano i *business cycle*. Inoltre, dal momento che non si intende stimare un modello che sia il migliore possibile per i dati a disposizione e poichè si impiegano anche altre statistiche test, per prevenire un numero troppo elevato di falsi rifiuti dell'ipotesi nulla di linearità, si decide di condurre il test solamente per  $d = 1$  (8, Lopes, Zsurkis. 2019).

Pertanto, il test che si sta per costruire è basato su un modello *LSTAR* del tipo

$$y_t = \tilde{\pi}' \tilde{X}_t + \tilde{\theta}' \tilde{X}_t \left( \frac{1}{1 + e^{-\gamma(y_{t-1} - c)}} - \frac{1}{2} \right) + u_t ,$$

$$t = 1, \dots, n; \quad \gamma > 0; \quad u_t \sim WN(0, \sigma^2).$$

È importante notare per quanto segue che  $F(y_{t-1}, \gamma, c) \rightarrow 0$  per  $\gamma \rightarrow 0$ , e dunque per  $\gamma = 0$  la seconda parte (non lineare) del modello *LSTAR* si annulla, portando così  $y_t$  ad essere descritto da un semplice *AR(p)* lineare; allo stesso modo, il medesimo risultato si ottiene se  $\tilde{\theta}' = 0$ .

### 2.3.1 Test LM-STAR

Verificare la linearità del modello *LSTAR* di interesse, viste le osservazioni appena fatte, significa verificare l'ipotesi nulla  $H_0 : \tilde{\theta}' = 0$ ; questo però porta ad un problema di identificazione del modello nullo, in quanto sotto  $H_0$  i parametri  $c$  e  $\gamma$  non sono correttamente specificati. Sempre tenendo conto delle osservazioni di cui sopra si può allora riscrivere in modo diverso

l'ipotesi di interesse come  $H_0^* : \gamma = 0$ , ma anche in questo caso si ricade nello stesso problema, infatti ora sono  $\tilde{\theta}'$  e  $c$  a non essere identificati sotto  $H_0$ . Una soluzione, proposta da Luukkonen *et al.* (si rimanda a Luukkonen R., Saikkonen P., e Teräsvirta T., “*Testing linearity against smooth transition autoregressive models*”, in *Biometrika*, 1988, n. 75, sez. 3, 491?499), consiste nel sostituire la funzione di transizione  $F(y_{t-1}, \gamma, c)$  con un appropriato sviluppo in serie di Taylor fino al terzo ordine attorno  $\gamma = 0$ :

$$\begin{aligned} y_t &= \tilde{\pi}' \tilde{X}_t + \tilde{\theta}' \tilde{X}_t \left[ \gamma \frac{\partial F(\cdot)}{\partial \gamma} + \gamma^2 \frac{\partial^2 F(\cdot)}{\partial \gamma^2} + \gamma^3 \frac{\partial^3 F(\cdot)}{\partial \gamma^3} \right] + u_t \\ &= \tilde{\pi}' \tilde{X}_t + \tilde{\theta}' \tilde{X}_t (\gamma F_\gamma^{(1)} + \gamma^2 F_\gamma^{(2)} + \gamma^3 F_\gamma^{(3)}) + u_t \\ &= \beta'_0 \tilde{X}_t + \beta'_1 X_t y_{t-1} + \beta'_2 X_t y_{t-1}^2 + \beta'_3 X_t y_{t-1}^3 + u_t \end{aligned}$$

dove si è scelto di indicare con  $F_\gamma^{(i)}$  la derivata  $i$ -esima di  $F$ ,  $i = 1, 2, 3$  e i parametri  $\beta_j$  per  $j = 0, 1, 2, 3$  sono il risultato di una riparametrizzazione, ottenuta raccogliendo a fattor comune i parametri in base alla potenza che caratterizza la variabile  $y_{t-1}$ . Si è così giunti ad ottenere un modello lineare per spiegare  $y_t$  più agevole da stimare rispetto al precedente *LSTAR* non lineare e su cui poter fare opportune verifiche di ipotesi. L'ipotesi nulla di linearità risulta ora essere  $H_0 : \beta'_1 = \beta'_2 = \beta'_3 = 0$ .

Il test da condurre è basato sui moltiplicatori di Lagrange - per questo dunque detto test di tipo LM (*Lagrange Multiplier*) - che vengono utilizzati per ottenere delle stime ottimali dei parametri  $\beta_j$  della regressione ottenuta sviluppando  $F(\cdot)$ , vincolata sotto  $H_0$ . Un test LM generico infatti ha il vantaggio di poter essere computato a partire direttamente dal modello stimato sotto  $H_0$  e dunque non richiede alcuna stima dei parametri non vincolati; in questo specifico caso ciò implica che non è necessario procedere ad una stima del modello non lineare *LSTAR*.

Nel verificare il sistema di ipotesi, si procede secondo quanto segue (5, Escribano, Jordá. 2001).

- i. Si stima il modello nullo con il metodo dei minimi quadrati ordinari; in questo modo si ottiene una stima dei residui  $\hat{u}_t$  e conseguentemente si calcola la somma dei quadrati dei residui:

$$SSE_0 = \sum_{t=1}^n \hat{u}_t^2 .$$

- ii. Usando i residui stimati al punto precedente come risposta, si stima un modello che utilizza gli stessi regressori del modello lineare completo ottenuto in seguito allo sviluppo di Taylor, ossia  $(\tilde{X}_t, X_t y_{t-1}, X_t y_{t-1}^2, X_t y_{t-1}^3)$ . Ancora una volta, si stimano i residui di tale nuovo modello - siano questi detti  $\hat{r}_t$  - e si calcola la somma dei quadrati dei residui:

$$SSE_1 = \sum_{t=1}^n \hat{r}_t^2 .$$

- iii. La statistica test di tipo LM è calcolata come:

$$\chi_{LM}^2 = n \frac{SSE_0 - SSE_1}{SSE_0}$$

La statistica test appena calcolata si distribuisce asintoticamente come un  $\chi^2$  con tanti gradi di libertà quanti sono i vincoli imposti sotto  $H_0$ ; dato che  $\beta_j$  è un vettore  $p$ -dimensionale risulta allora che il numero di vincoli è  $3p$ . Si può quindi scrivere  $\chi_{LM}^2 \sim \chi_{3p}^2$ . Nella pratica però, visto che si lavora con campioni finiti e la distribuzione asintotica può portare a problemi di potenza del test, si preferisce impiegare la statistica test appena descritta nella sua forma approssimata ad una distribuzione F di Fisher, in quanto garantisce migliori performance. Nella pratica dunque si preferirà utilizzare

$$F_{LM} = \frac{(SSE_0 - SSE_1)/3p}{SSE_0/(n - 4p - 1)}$$

tenendo presente che

$$F_{LM} \sim F_{3p, n-4p-1} ,$$

dove  $4p + 1$  rappresenta il numero di parametri del modello di regressione completo stimato al punto (ii.) di cui sopra.

È utile fare un'ultima osservazione per questo test. Nel verificare l'ipotesi nulla di linearità così come è stato descritto, si è limitato lo studio al caso di un modello *LSTAR* e dunque verificare la linearità dei dati considerando tale modello come l'unica alternativa non lineare sembrerebbe essere restrittivo. Si può però dimostrare che un rifiuto di  $H_0$  implica la possibile adeguatezza anche di altri modelli non lineari *STAR*, come ad esempio uno *STAR* esponenziale (*ESTAR*) ed altri modelli ancora (4; 8, Eitrheim, Teräsvirta. 1996; Lopes, Zsurkis. 2019). La dimostrazione di tale affermazione non è oggetto di discussione nel seguito, ma viene comunque ritenuto utile sottolineare che in virtù di quanto appena detto, il test *LM-STAR* risulta essere efficace contro un'ampia gamma di alternative.

## 2.4 Presenza di comportamenti asimmetrici: il modello CDR

Un'ulteriore possibile fonte di non linearità può essere data dalla presenza di comportamenti asimmetrici nella serie; nello specifico caso in esame, ciò si traduce nella ricerca di diversità nei comportamenti del *business cycle* in espansione e recessione. È lecito infatti chiedersi se in queste due fasi caratterizzanti del ciclo la serie segua andamenti significativamente differenti e correlati alla natura del periodo in esame. Per poter descrivere queste asimmetrie, Beaudry e Koop hanno proposto un modello specificatamente costruito per dati di tipo macroeconomico, che sia in grado di cogliere asimmetrie persistenti nel tempo; questo è denominato modello CDR (1, Beaudry, Koop. 1993).

Si consideri un generico *ARMA*:

$$\Phi(B)y_t = \phi_0 + \Theta(B)\varepsilon_t$$

dove  $\varepsilon_t \sim WN(0, \sigma^2)$ . Dal momento che ci sono molteplici modi di introdurre non linearità nella rappresentazione *ARMA*, e dato che lo scopo è esaminare se i periodi di recessione siano egualmente persistenti a quelli di espansione,

viene ritenuto utile sfruttare l'informazione data dal grado corrente di recessione. Si definisce pertanto una nuova variabile, detta appunto variabile della profondità attuale della recessione ed indicata con  $CDR$  (*Current Depth of Recession*); essa misura la distanza tra il valore dell'output al tempo  $t$ , ovvero  $Y_t$ , e l'ultimo massimo storico raggiunto dall'economia nel corso della sua storia. Si può dunque scrivere

$$CDR_t = \max\{Y_{t-j}\}_{j \geq 0} - Y_t ,$$

dove è importante notare che per la sua definizione si confrontano i valori logaritmici del PIL che *non* sono stati differenziati, infatti  $Y_t = \log(PIL_t)$  ed inoltre è utile sottolineare che, dato che i confronti avvengono per valori logaritmici della serie iniziale, essi non subiranno distorsioni d'ordine ma solo di scala, in quanto l'applicazione della trasformata logaritmica è monotona. Tali trasformazioni peraltro sono necessarie in quanto in questo modo, essendo la serie  $y_t$  modellata e basata anch'essa su dati logaritmici - seppur differenziati -, vi è coerenza nella scala tra variabili risposta ed esplicative.

Nel seguito verrà considerata la generalizzazione di un modello *ARMA* privo della componente a media mobile e dunque, di fatto, di un modello autoregressivo di ordine  $p$ . Considerando queste premesse, un modello  $CDR$  può allora essere scritto come segue:

$$y_t = \phi_0 + \sum_{i=1}^p \phi_i y_{t-i} + \sum_{j=1}^q \delta_j CDR_{t-j} + \varepsilon_t ,$$

con  $\varepsilon_t \sim WN(0, \sigma^2)$  come definiti per il modello *ARMA* normale; inoltre, per la costruzione del test viene considerato solamente il caso in cui  $q = 2$ .

Per fornire un'interpretazione del modello, si consideri il caso in cui  $q = 1$  e che il parametro  $\delta_1$  sia stimato positivo. In questo caso si avrà  $CDR_{t-1} = \max\{Y_{t-1-j}\}_{j \geq 0} - Y_{t-1} \neq 0$  solamente nel caso in cui  $Y_{t-1}$  sia strettamente minore dell'ultimo picco osservato nella storia della serie fino a  $t - 1$  (ossia  $\max\{Y_{t-j}\}_{j \geq 0}$ ). Questo vuol dire che se  $Y_{t-1}$  non è un nuovo

punto di massimo relativo della serie considerata fino all'istante  $t - 1$ , cioè se non è maggiore del precedente picco registrato, allora  $CDR_{t-1} = 0$ . È da notare poi che  $CDR_{t-1}$  non può mai assumere valori negativi: infatti tale eventualità verrebbe verificata nel solo caso in cui  $\max\{Y_{t-1-j}\}_{j \geq 0} < Y_{t-1}$ .

Ora, considerando che tra i valori all'interno dell'operatore  $\max\{\cdot\}$  compare anche il valore al secondo termine della disuguaglianza appena espressa, si possono verificare due casi: o  $Y_{t-1}$  non è un nuovo picco e quindi esso sarà minore per definizione del valore restituito da  $\max\{Y_{t-1-j}\}_{j \geq 0}$ , o  $Y_t$  è di contro un nuovo picco raggiunto dalla serie e in quest'ultimo caso allora si avrà che il picco più vicino è proprio l'osservazione stessa in questione. In entrambi i casi, la disuguaglianza che funge da condizione necessaria per avere  $CDR_{t-1} < 0$  non viene verificata. Procedendo oltre, a seconda del valore assunto da  $CDR_{t-1}$  si possono fornire diverse interpretazioni:

- $CDR_{t-1} = 0$ : si verifica quando l'economia è in fase di costante espansione oltre il livello del periodo precedente, ogni nuova osservazione rappresenta in questa fase un nuovo picco relativo:  $\max\{Y_{t-1-j}\}_{j \geq 0} = Y_{t-1}$ . La risposta del sistema economico è più lenta, in quanto  $y_t$  in questo caso è visto come somma dei contributi delle sole sue variabili ritardate. È importante osservare che shock positivi che ridefiniscono continuamente in espansione i nuovi picchi determinano cambiamenti più persistenti nel tempo, in quanto portano ad un incremento permanente del livello definito come "base" al quale si tende a tornare dopo una recessione.
- $CDR_{t-1} > 0$ : ciò indica che ci si trova in una fase recessiva, in quanto le differenze tra l'output  $Y_{t-1}$  ed il picco precedente non sono nulle. Allo stesso modo però tali valori della variabile possono verificarsi in una fase di ripresa dopo aver raggiunto una depressione, e dunque possono altresì indicare che l'economia si sta espandendo, seppure ad un livello inferiore al picco raggiunto in precedenza. Avendo ipotizzato  $\delta_1 > 0$  poi, questo comporta che una crescita di  $y_t$  sarà tanto più veloce quanto

più  $CDR_{t-1}$  aumenta; ciò significa che la risposta del sistema economico in fase di recessione, o comunque in un periodo in cui l'output stia al di sotto del livello raggiunto in un periodo precedente, è più veloce rispetto al caso in cui  $CDR_{t-1} = 0$ . Di conseguenza, data la crescita più rapida di  $y_t$  in recessione (o recupero), si avrà che gli shock negativi saranno perlopiù temporanei, tendenti a tornare rapidamente al livello "base" (2, Bradley, Jansen. 1997).

### 2.4.1 Test CDR

Considerando il modello CDR esposto e considerando come indicato precedentemente  $q = 2$  per la costruzione nella pratica del modello, verificare la linearità della serie consiste nell'analizzare se i parametri  $\delta_i$  per  $i = 1, 2$  siano pari a zero. Questo significa che l'ipotesi nulla di interesse può essere formulata come  $H_0 : \delta_1 = \delta_2 = 0$ . Dal momento che non ci sono parametri di disturbo che rendono problematica la stima del modello sotto  $H_0$ , i modelli CDR completo e nullo vengono stimati, cosicché sia possibile costruire l'usuale statistica F per verificare la significatività congiunta dei termini CDR nell'autoregressione. In questo modo, dunque, se l'ipotesi nulla venisse accettata si sarebbe portati ad accettare che  $y_t$  possa essere descritto in maniera sufficientemente adeguata da un modello autoregressivo di ordine  $p$ .

Sia quindi

$$SSE_1 = \sum_{i=1}^n \hat{e}_t^2$$

la somma dei quadrati dei residui del modello CDR, il modello specificato sotto l'ipotesi alternativa  $H_1$  di non linearità, dove  $\hat{e}_t$  per  $t = 1, \dots, n$  sono le stime dei residui del modello. Dato poi il modello nullo

$$y_t = \phi_0 + \sum_{i=1}^p \phi_i y_{t-i} + \nu_t$$

che corrisponde ad un semplice  $AR(p)$  con costante, si calcola nuovamente la devianza residua

$$SSE_0 = \sum i = 1^n \hat{v}_t^2 ,$$

dove similmente per il caso del modello completo  $\hat{v}_t$  sono le stime dei residui. Notando poi che il numero di parametri del modello completo e del modello nullo sono, rispettivamente,  $k_1 = 1 + p + q = p + 3$  e  $k_0 = p + 1$ , si calcola che  $k_1 - k_0 = p + 3 - p - 1 = 2$ , che corrisponde al numero di vincoli posti sotto  $H_0$ . La statistica F allora per saggiare l'ipotesi nulla è dunque

$$F_{CDR} = \frac{(SSE_0 - SSE_1)/2}{SSE_0/(n - p - 3)}.$$

Come di consueto per le statistiche test di tipo F, si può dire che, sotto ipotesi nulla,  $F_{CDR}$  si distribuisce secondo una F di Fisher con 2 e  $n - p - 3$  gradi di libertà:

$$F_{CDR} \sim F_{2, n-p-3}.$$

## 2.5 Linearità nel caso di problemi di stazionarietà

In questa sezione lo studio verrà focalizzato su  $Y_t = \log(PIL_t)$ , nel tentativo di costruire un test che risulti robusto nonostante l'eventuale presenza di radici unitarie nel processo generatore della serie. Se infatti i dati fossero generati da un processo integrato di prim'ordine, indicato con  $I(1)$ , allora alcuni dei test più generali costruiti per catturare presenza di non linearità potrebbero portare ad ottenere falsi rifiuti, conducendo così a risultati, di fatto, errati. Molti test infatti poggiano sull'assunzione che la serie sia  $I(0)$  (*i.e.* stazionaria) e talvolta tale assunzione potrebbe ritenersi, se non erranea, troppo forzata o comunque discutibile. Nel tentativo dunque di superare e risolvere tale problema, si cerca di costruire un test che non richieda la specificazione o la conoscenza della reale natura  $I(0)$  o  $I(1)$  della serie per essere condotto, e che possa risultare efficace indipendentemente dall'ordine di integrazione stesso (6, Harvey *et al.* 2008).

Un punto di partenza sta nel definire due test separati, l'uno efficiente nel caso che  $Y_t$  sia  $I(0)$ , l'altro nel caso in cui la serie viceversa sia  $I(1)$ . Il punto focale starà poi nel cercare di congiungere i due test, definiti nel tentativo di ottenerne uno che sia in grado di riassumerli entrambi in maniera soddisfacente e pratica.

Si consideri quindi in questo primo caso un modello  $AR(1)$  non lineare per una serie che si sappia essere stata generata da un processo stazionario:

$$Y_t = \phi_0 + v_t$$

$$v_t = \rho v_{t-1} + \delta f(v_{t-1}, \theta) v_{t-1} + \varepsilon_t,$$

con  $\varepsilon_t \sim WN(0, \sigma^2)$  e con  $\rho$ ,  $\delta$  e la funzione  $f(\cdot, \theta)$  scelte in modo che la serie  $v_t$  nel complesso sia stazionaria. Assumendo che  $f(\cdot, \theta)$  possa essere riscritta sotto forma di serie approssimata di Taylor, si potrà scrivere

$$Y_t = \phi_0 + v_t$$

$$v_t = \delta_1 v_{t-1} + \delta_2 v_{t-1}^2 + \delta_3 v_{t-1}^3 + \varepsilon_t.$$

Alcune specificazioni tipiche di  $f(\cdot, \theta)$  sono quelle che portano alla costruzione di un modello del tipo *ESTAR* o anche *LSTAR*, del quale si è data una breve descrizione nella Sezione 2.3. Richiamando in parte i concetti espressi precedentemente dunque, l'ipotesi nulla di linearità da saggiare risulta essere  $H_0^{(0)} : \delta_2 = \delta_3 = 0$  contro l'alternativa che almeno un  $\delta_i \neq 0$ ,  $i = 1, 2$  e dove si è scelto di indicare l'ipotesi nulla nel caso di stazionarietà della serie  $Y_t$  con l'apice 0 tra parentesi tonde, che richiama l'ordine di integrazione del processo. Riscrivendo l'espressione che descrive  $Y_t$  ottenuta con gli sviluppi di Taylor, in modo da mettere in evidenza la dipendenza del valore attuale del processo dai suoi valori passati, si ottiene

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 Y_{t-1} + \beta_2 Y_{t-1}^2 + \beta_3 Y_{t-1}^3 + \varepsilon_t$$

dove

$$\beta_0 = \phi_0(1 - \delta_1 + \delta_2 \phi_0 - \delta_3 \phi_0^2), \quad \beta_1 = \delta_1 - 2\delta_2 \phi_0 + 3\delta_3 \phi_0^2, \quad \beta_2 = \delta_2 - 3\delta_3 \phi_0, \quad \beta_3 = \delta_3.$$

L'ipotesi nulla diviene, pertanto,  $H_0^{(0)} : \beta_2 = \beta_3 = 0$ . Indicando poi con  $SSE_1^{(0)}$  e con  $SSE_0^{(0)}$  le somme dei quadrati dei residui dei modelli completo e nullo sotto  $H_0^{(0)}$  specificati secondo la formulazione che vede  $Y_t$  espresso in funzione dei suoi valori passati, si ottiene la statistica test di Wald che verifica l'ipotesi nulla di linearità:

$$W_0 = n \left( \frac{SSE_0^{(0)}}{SSE_1^{(0)}} - 1 \right),$$

dove  $n$  è il numero di osservazioni disponibili. Se  $H_0^{(0)}$  è correttamente specificata, allora  $W_0$  segue asintoticamente una distribuzione chi quadro con 2 gradi di libertà:  $W_0 \sim \chi_2^2$ ; viceversa, un'evidenza di non adeguatezza dell'ipotesi nulla verso l'alternativa sarebbe fornita dal divergere verso  $\infty$  della statistica test (6, Harvey *et al.*. 2008).

Si prenda adesso in esame il caso in cui la serie sia generata da un processo  $AR(1)$  non lineare integrato di primo ordine, cioè non stazionario. Riprendendo le notazioni usate sino ad ora in questa sezione, sia

$$Y_t = \phi_0 + v_t$$

$$\Delta v_t = \tau \Delta v_{t-1} + \eta f(\Delta v_{t-1}, \theta) \Delta v_{t-1} + \varepsilon_t,$$

dove  $\tau$ ,  $\eta$  e  $f(\cdot, \theta)$  sono scelte con lo stesso criterio di prima in modo che la serie  $\Delta v_t$  sia stazionaria; è utile specificare che la funzione  $f(\cdot, \theta)$  viene usata solamente per indicare una generica funzione e pertanto non è necessario che essa sia la stessa specificata nel caso precedente. Seguendo il medesimo processo di prima, si può scrivere, utilizzando un'espansione in serie di Taylor

$$Y_t = \phi_0 + v_t$$

$$\Delta v_t = \eta_1 \Delta v_{t-1} + \eta_2 (\Delta v_{t-1})^2 + \eta_3 (\Delta v_{t-1})^3 + \varepsilon_t.$$

Riscrivendo il modello in un'unica espressione che evidenzi la dipendenza di  $Y_t$  dai suoi valori ritardati

$$\Delta Y_t = \eta_1 \Delta Y_{t-1} + \eta_2 (\Delta Y_{t-1})^2 + \eta_3 (\Delta Y_{t-1})^3 + \varepsilon_t,$$

si può enunciare l'ipotesi nulla di linearità nel caso che la serie sia generata da un processo  $I(1)$  come  $H_0^{(1)} : \eta_2 = \eta_3 = 0$ , dove l'apice 1 tra parentesi tonde richiama come nel caso precedente l'ordine di integrazione del processo considerato. La statistica test di Wald può allora essere scritta come

$$W_1 = n \left( \frac{SSE_0^{(1)}}{SSE_1^{(1)}} - 1 \right),$$

dove  $SSE_0^{(1)}$  e  $SSE_1^{(1)}$  indicano rispettivamente le devianze residue dei modelli nullo sotto  $H_0^{(1)}$  e completo, ottenuti in seguito all'approssimazione di Taylor del modello in cui  $Y_t$  è spiegato in funzione dei suoi valori passati. Se  $H_0^{(1)}$  è vera, allora  $W_1$  segue asintoticamente, come  $W_0$ , una distribuzione chi quadro con 2 gradi di libertà:  $W_1 \sim \chi_2^2$ . Viceversa, se l'ipotesi di non linearità dovesse essere rigettata, allora  $W_1$  divergerà verso  $\infty$ .

È utile specificare che nel caso in cui il processo considerato, indipendentemente dall'ordine di integrazione dello stesso, non sia un semplice  $AR(1)$  ma piuttosto un  $AR(p)$ , tale generalizzazione che vede l'inclusione di ulteriori variabili viene fatta secondo quanto segue. Data l'espressione generica per la serie ottenuta tramite approssimazione in serie di Taylor al terzo ordine per un  $AR(1)$  non lineare

$$Y_t = \gamma_0 + \gamma_1 Y_{t-1} + \gamma_2 Y_{t-1}^2 + \gamma_3 Y_{t-1}^3 + \varepsilon_t$$

si assume che ulteriori variabili e parametri autoregressivi possano essere inclusi a questo stadio in modo lineare, aggiungendoli al modello in modo additivo; per un più generico  $AR(p)$  si otterrà allora la seguente espressione:

$$Y_t = \gamma_0 + \gamma_1 Y_{t-1} + \gamma_2 Y_{t-1}^2 + \gamma_3 Y_{t-1}^3 + \sum_{j=1}^p \gamma_{4,j} \Delta Y_{t-j} + \varepsilon_t$$

dove qui  $Y_t$  può indicare anche il caso in cui si abbia  $\Delta Y_t$  (ossia il caso  $I(1)$ ); in questa seconda eventualità le uniche differenze stanno proprio nel sostituire  $Y_t$  con  $\Delta Y_t$  nell'espressione appena enunciata, considerare la sommatoria a partire da  $j = 2$  ed eliminare l'intercetta  $\gamma_0$  (6, Harvey *et al.* 2008).

### 2.5.1 Test $W_\lambda$

Avendo costruito  $W_0$  e  $W_1$ , si tratta di riuscire ad applicare l'uno o l'altro test nel caso in cui, rispettivamente, la serie sia effettivamente generata da un processo  $I(1)$  o  $I(0)$ ; dal momento che si assume che l'ordine di integrazione non sia noto, il problema sta nel formulare un adeguato criterio di selezione tra i due test e che non richieda dunque la conoscenza dell'ordine di integrazione. Una soluzione a questo problema può essere ottenuta mediante l'utilizzo di una media pesata delle due statistiche  $W_i$  (6, Harvey *et al.* 2008):

$$W_\lambda = (1 - \lambda)W_0 - \lambda W_1$$

dove  $\lambda$  è una funzione scelta in modo tale che

$$Y_t \text{ generato da un } I(0) \Rightarrow \lambda \rightarrow 0$$

$$Y_t \text{ generato da un } I(1) \Rightarrow \lambda \rightarrow 1.$$

Sfruttando l'informazione data da statistiche per la verifica di presenza di radice unitaria e stazionarietà, si può specificare la funzione  $\lambda(\cdot)$  come segue:

$$\lambda(U, S) = \exp\left[-g\left(\frac{U}{S}\right)^2\right]$$

dove  $g$  è una costante positiva che viene scelta essere pari a 0.1, il che garantisce una potenza del test massima tra tutti i valori possibili di  $g$ ;  $U$  e  $S$  sono delle statistiche scelte in modo che se la serie è stazionaria, allora  $(U/S)^2$  diverge portando  $\lambda$  a convergere a 0, mentre viceversa se  $Y_t$  contiene una radice unitaria allora  $(U/S)^2$  tende a 0 facendo convergere  $\lambda$  a 1. Ciò garantisce che  $W_\lambda$  selezioni correttamente  $W_0$  o  $W_1$  a seconda dell'ordine di integrazione della serie.

Più precisamente,  $U$  rappresenta la statistica  $t$  per saggiare l'ipotesi nulla di un test di Dickey-Fuller aumentato (ADF) su un modello  $AR(p)$ ; per un test ADF si ha infatti che l'ipotesi nulla è formulata come  $H_0 : \gamma = 0$  (3, Di Fonzo, Lisi. 2005), dove  $\gamma$  è un coefficiente del modello che si ottiene in

seguito ai seguenti passaggi:

$$\begin{aligned}
Y_t &= \phi_0 + \sum_{i=1}^p \phi_i Y_{t-i} + \varepsilon_t \\
Y_t &= \phi_0 + \rho Y_{t-1} + \sum_{i=1}^{p-1} \beta_i \Delta Y_{t-i} + \varepsilon_t \\
\Delta Y_t &= \phi_0 + \gamma Y_{t-1} + \sum_{i=1}^{p-1} \beta_i \Delta Y_{t-i} + \varepsilon_t
\end{aligned}$$

dove, specificando, si può scrivere  $\gamma = \rho - 1 = (\phi_1 + \phi_2 + \dots + \phi_p) - 1$ . Indicando dunque con  $\hat{\gamma}$  e con  $se(\hat{\gamma})$  rispettivamente le stime di  $\gamma$  e della sua deviazione standard,  $U$  è calcolato come

$$U = t_{ADF,\gamma} = \frac{\hat{\gamma}}{se(\hat{\gamma})}.$$

La statistica  $S$  invece, calcolata nel caso di stazionarietà della serie che varia attorno ad una certa media  $\mu$  è data da

$$S = \frac{n^{-1/2} \sum_{t=k+1}^n \tilde{Y}_t \tilde{Y}_{t-k}}{\hat{\omega}(\tilde{Y}_t \tilde{Y}_{t-k})},$$

dove  $\hat{Y}_t$  indica la deviazione di  $Y_t$  dalla sua media e  $\hat{\omega}(\cdot)$  è la stima basata sul metodo del nucleo di Bartlett della varianza (6, Harvey *et al.* 2008), la cui spiegazione e procedimento di derivazione dei risultati che seguono non sono trattati; considerando la serie di variabili  $(\tilde{Y}_{k+1} \tilde{Y}_1, \tilde{Y}_{k+2} \tilde{Y}_2, \dots, \tilde{Y}_n \tilde{Y}_{n-k}) = (a_{1,k}, a_{2,k}, \dots, a_{n,k})$ , si può scrivere una formulazione che consente il calcolo di  $\hat{\omega}(a_{t,k})$ :

$$\begin{aligned}
\hat{\omega}(a_{t,k})^2 &= \hat{\xi}_0(a_{t,k}) + 2 \sum_{j=1}^l \left(1 - \frac{j}{l}\right) \hat{\xi}_j(a_{t,k}), \\
\text{con } \hat{\xi}_j(a_{t,k}) &= \frac{1}{n} \sum_{t=j+k+1}^n a_{t,k} a_{t-j,k}.
\end{aligned}$$

Per calcolare  $S$ , occorre scegliere di conseguenza i valori di  $k$  e  $l$ ; si decide di fissare  $k = \lceil (2n)^{1/2} \rceil$  e  $l = \lceil 12(n/100)^{1/4} \rceil$ , dove con  $\lceil \cdot \rceil$  si indica l'approssimazione all'intero superiore, ovvero per eccesso.

Tornando dunque alla statistica test  $W_\lambda$ , dal momento che essa seleziona le statistiche  $W_0$  o  $W_1$  a seconda dell'ordine (ignoto) di integrazione della serie, essa si distribuisce asintoticamente sotto l'ipotesi nulla di linearità come una variabile chi quadro con 2 gradi di libertà:

$$W_\lambda \sim \chi_2^2.$$

Inoltre, così come  $W_0$  e  $W_1$ , se la generica ipotesi nulla  $H_0$  di linearità dovesse non risultare accettabile, allora  $W_\lambda$  tenderebbe a  $\infty$ .

### 3 Applicazione del sistema di test ad un caso reale

Nel seguito viene presentata un'applicazione pratica del sistema di test proposto per individuare comportamenti non lineari nelle serie macroeconomiche del PIL di diversi Paesi. Il lavoro proposto è un'esposizione e rielaborazione dello studio svolto e dei risultati ottenuti da A. S. Lopes e G. F. Zsurkis, che li hanno portati allo sviluppo del loro articolo *Are linear models really unuseful to describe business cycle data?* (8, Lopes, Zsurkis. 2019), su cui inoltre è basata la relazione corrente; la procedura illustrata nelle sezioni precedenti è proposta proprio in tale articolo ed in seguito applicata, in modo da fornire evidenza di quanto esposto.

Vengono considerate le serie trimestrali destagionalizzate del PIL reale di 29 Paesi e l'Eurozona comprendente 17 Stati (nel seguito indicata come Euro Area-17, EA17), considerate tutte nello stesso intervallo temporale, a meno di qualche variazione. Nello specifico, il dataset considerato contiene i

dati riguardanti Australia, Sudafrica, 6 Stati americani (Argentina, Brasile, Canada, Cile, Messico e gli Stati Uniti d’America - nel seguito, U.S.A.), 6 Paesi asiatici (Cina, Corea del Sud, Filippine, Giappone, India e Taiwan), 15 Stati europei (Austria, Belgio, Danimarca, Finlandia, Francia, Germania, Grecia, Irlanda, Italia, Norvegia, Paesi Bassi, Portogallo, Spagna, Svizzera e Gran Bretagna - U.K. nel seguito) ed infine l’EA17 (la quale riassume in un’unica serie le informazioni riguardanti Austria, Belgio, Cipro, Estonia, Finlandia, Francia, Germania, Grecia, Irlanda, Italia, Lussemburgo, Malta, Paesi Bassi, Portogallo, Slovacchia, Slovenia e Spagna).

La maggior parte dei campioni estratti appartiene al periodo che ha inizio nel 1980:1 e termina nel 2013:4, il che porta ad ottenere serie di  $n = 136$  osservazioni; tale dimensione viene considerata ragionevole, seppur non garantisce che i test condotti in seguito abbiano la massima potenza che si potrebbe ottenere. Tali potenze tuttavia vengono ritenute sufficienti se viene considerato il fatto che i test vengono impiegati congiuntamente e non individualmente; in questo modo dunque, laddove un test potrebbe portare ad ottenere dei falsi rifiuti e dunque suggerire conclusioni errate, gli altri che sono stati condotti in parallelo sulla stessa serie potrebbero, con i loro risultati dissonanti, dar segno di questo errore e dunque correggere gli esiti. Si ritiene poi improbabile l’eventualità che tutti i sei test producano contemporaneamente statistiche che portano ad ottenere falsi rifiuti delle ipotesi nulle.

Nel seguito, in Tabella 1 vengono riportati gli intervalli temporali cui ogni serie si riferisce, ed in Figura 1 sono illustrati i grafici delle serie  $y_t = \Delta \log(PIL_t)$  riguardanti alcuni dei Paesi esaminati.

### 3.1 Applicazione e risultati

Si sono condotti i test RESET, di White, di Tsay, LM-STAR, CDR sulle serie  $y_t$  ed il test  $W_\lambda$  sulle serie  $Y_t$  non differenziate. Prima di poter calcolare le

Tabella 1: Paesi ed intervalli di campionamento.

Paese	Intervallo	Paese	Intervallo
Argentina	1980:1-2013:3	Grecia	1980:1-2013:4
Australia	1959:3-2013:4	India	1980:1-2013:4
Austria	1980:1-2013:4	Irlanda	1980:1-2013:4
Belgio	1980:1-2013:4	Italia	1980:1-2013:4
Brasile	1980:1-2013:4	Messico	1980:1-2013:4
Canada	1980:1-2013:4	Norvegia	1978:1-2013:4
Cile	1980:1-2013:4	Paesi Bassi	1977:1-2013:4
Cina	1980:1-2013:4	Portogallo	1978:1-2013:4
Corea del Sud	1970:1-2013:3	Spagna	1980:1-2013:4
Danimarca	1980:1-2013:4	Sudafrica	1960:1-2013:4
Filippine	1980:1-2013:4	Svizzera	1980:1-2013:4
Finlandia	1980:1-2013:4	Taiwan	1980:1-2013:4
Francia	1978:1-2013:4	U.K.	1955:1-2013:4
Germania	1980:1-2013:4	U.S.A.	1947:1-2013:4
Giappone	1980:1-2013:4	EA17	1970:1:2011:4

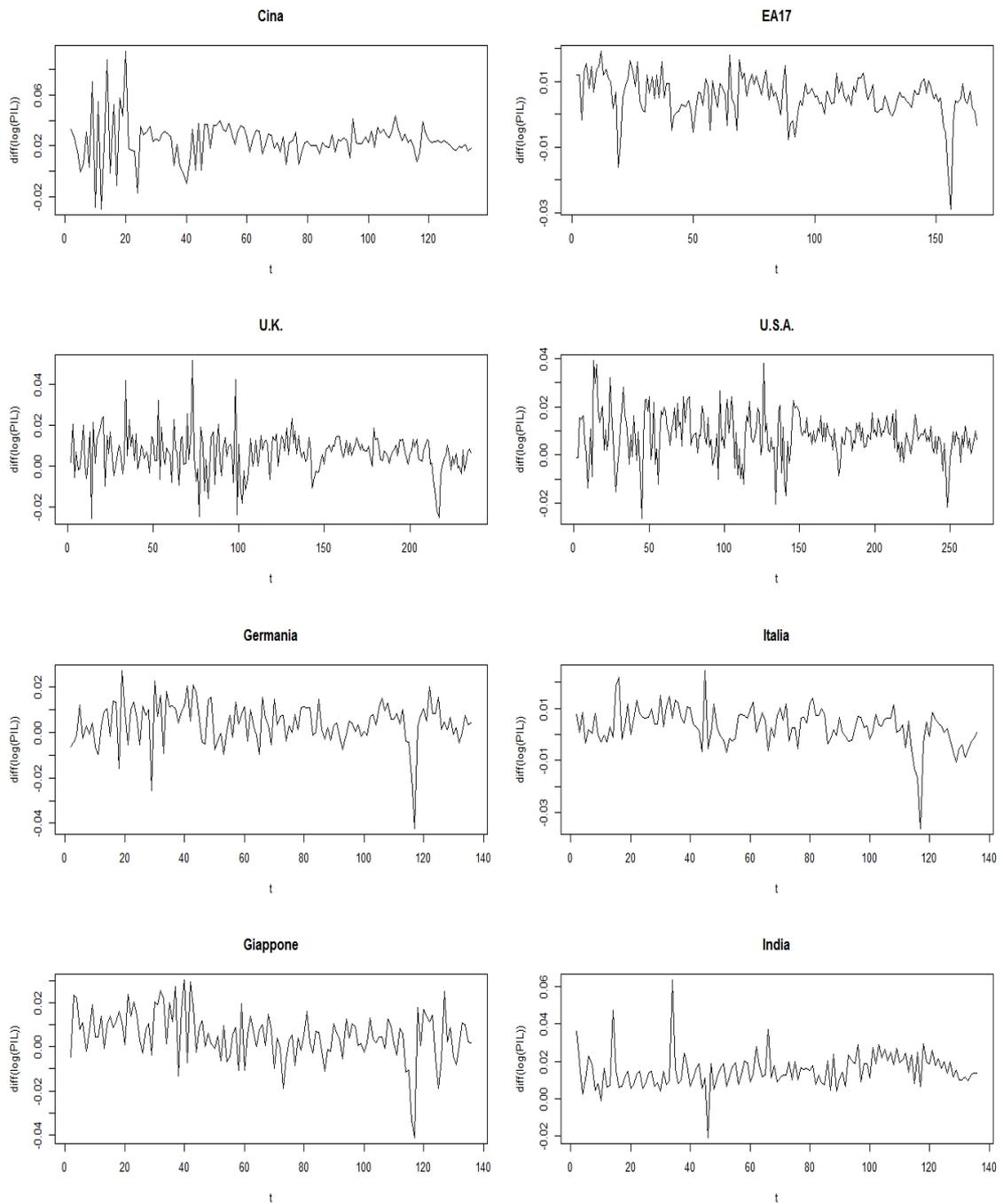


Figura 1: Serie delle differenze prime logaritmiche delle serie del PIL destagionalizzato (dati trimestrali) per Cina, EA17, U.K., U.S.A., Germania, Italia, Giappone, India.

statistiche test è necessario, come detto in apertura della sezione 2, stimare un modello  $AR(p)$  per ciascuna serie  $y_t$ . Adottando il criterio di informazione di Akaike per la scelta del modello migliore tra quelli che è possibile stimare scegliendo un ordine autoregressivo massimo pari a  $p_{MAX} = 12$ , si ottengono dei modelli autoregressivi per le serie i cui ordini  $p$  sono specificati a seguire:

Paese	$p$	Paese	$p$	Paese	$p$	Paese	$p$	Paese	$p$
Argentina	11	Cile	7	Francia	2	Italia	4	Sudafria	7
Australia	8	Cina	10	Germania	1	Messico	3	Svizzera	1
Austria	9	Corea del Sud	2	Giappone	1	Norvegia	1	Taiwan	1
Belgio	4	Danimarca	1	Grecia	5	Paesi Bassi	1	U.K.	3
Brasile	8	Filippine	1	India	1	Portogallo	3	U.S.A.	1
Canada	1	Finlandia	3	Irlanda	8	Spagna	8	EA17	1

Stimato un modello  $AR(p)$  adatto, si può ora procedere alla costruzione delle statistiche test e verificare di fatto le ipotesi nulle di interesse. Un riassunto complessivo dei risultati che si ottengono viene riportato in Tabella 2, in cui si riportano i valori delle statistiche in termini di significatività dei test. Ciò equivale a dire che i valori della tabella corrispondono approssimativamente ai p-value dei rispettivi test, con i quali si indica con che probabilità vengono rifiutate le ipotesi nulle quando esse sono vere, ossia le probabilità di errori di primo tipo. Inoltre, laddove nella tabella in corrispondenza di un valore si trovi invece la notazione “–”, significa che il valore p del test è risultato essere maggiore del 10% e dunque l’ipotesi nulla viene accettata.

Occorre comunque specificare ulteriormente il criterio in base al quale devono venire interpretati i dati; non appare logico infatti concludere che l’ipotesi di linearità della serie sia totalmente inadeguata in presenza di un singolo rifiuto tra i sei test proposti, specialmente se tale inadeguatezza di  $H_0$  sia evidenziata da un livello di significatività osservato di quell’unico test del 10%. Sarebbe più saggio allora definire un criterio alternativo per trarre

Tabella 2: Sintesi della significatività dei test condotti, p-value espresso in termini percentuali.

	RESET	White	Tsay	LM-STAR	CDR	$W_\lambda$
Argentina	–	5	–	1	5	1
Australia	–	1	1	1	10	–
Austria	10	1	5	1	–	1
Belgio	–	5	5	1	–	1
Brasile	1	1	1	1	–	5
Canada	–	–	–	–	–	5
Cile	1	10	5	1	–	10
Cina	–	1	10	1	–	10
Corea del Sud	–	–	–	–	–	–
Danimarca	–	5	–	–	–	–
Filippine	1	10	5	1	–	1
Finlandia	1	1	1	5	–	5
Francia	–	5	–	1	–	1
Germania	–	10	–	–	–	–
Giappone	–	10	–	–	–	–
Grecia	–	5	5	–	–	5
India	–	–	–	–	–	–
Irlanda	–	1	–	1	–	–
Italia	5	1	–	1	–	1
Messico	5	5	1	5	–	–
Norvegia	–	–	–	–	–	10
Paesi Bassi	10	5	–	5	–	5
Portogallo	–	–	5	–	?–	–
Spagna	5	1	1	1	1	1
Sudafrica	10	1	5	1	1	1
Svizzera	–	–	–	–	–	–
Taiwan	10	–	–	–	5	5
U.K.	5	1	1	1	–	–
U.S.A.	–	–	–	–	–	–
EA17	–	5	1	5	–	1

delle più corrette conclusioni, che tenga conto sia del numero di rifiuti dell'ipotesi di linearità per una certa serie sia della loro forza (8, Lopes, Zsurkis. 2019). Volendo spiegare quanto detto con un esempio, saranno diversi i casi in cui due serie presentano l'una cinque e l'altra solamente due rifiuti su sei; ancora, sarà diverso dire che per una serie i test rifiutano tutta la linearità al 10% che affermare che la linearità viene rifiutata sempre all'1%.

In base al criterio esposto e sulla base dei risultati ottenuti, si potranno classificare i vari *business cycles* dei diversi Paesi considerati in quattro classi o gruppi.

- Il primo gruppo di Paesi comprende quelli per i quali l'evidenza di non linearità nei dati, se non inesistente, è estremamente debole, con un singolo rifiuto del set di test al 5-10%. È questo il caso di Canada, Corea del Sud, Germania, Giappone, India, Norvegia, Svizzera e U.S.A. per un totale di 8 Paesi (il 26.7% del totale).
- La seconda classe comprende gli Stati per i quali vi è un'evidenza lievemente più marcata di comportamenti non lineari nei rispettivi cicli economici, dove le ipotesi nulle sono state rifiutate al massimo tre volte, ma mai con un livello di significatività inferiore al 5%. Tale gruppo comprende Danimarca, Portogallo e Taiwan, cioè 3 Stati su 30, che corrispondono al 10% dei Paesi considerati.
- Il terzo gruppo è composto da quei Paesi per i quali l'ipotesi nulla di linearità viene rifiutata dalle 2 alle 4 volte con un livello di significatività del 5% o meno, suggerendo che un modello non lineare sembrerebbe essere necessario per poter interpretare e descrivere in maniera soddisfacente la serie. Sono qui inclusi Argentina, Belgio, Cina, Francia, Grecia, Irlanda, Italia, Paesi Bassi ed EA17; questo gruppo costituisce il 30% dei casi, comprendendo 9 Paesi.
- La quarta ed ultima classe comprende i 10 Stati rimanenti (il 33.3% del totale), ossia Australia, Austria, Brasile, Cile, Filippine, Finlandia,

Messico, Spagna, Sudafrica e U.K.; per questi Paesi la presenza di non linearità è schiacciante, eccezion fatta per uno o due test, tutti rifiutano l'ipotesi nulla con un livello di significatività quasi sempre pari o inferiore al 5%. In questi casi, i modelli non lineari sono l'unica alternativa apprezzabile nel caso in cui si voglia modellare la serie.

### 3.2 Considerazioni finali

Ciò che appare essere rilevante è che il terzo e quarto gruppo, che più o meno tenacemente supportano l'ipotesi di non linearità delle serie e dunque della necessità di adottare modelli non lineari per descrivere adeguatamente i dati, costituiscono il 63.3% dei campioni esaminati (19 Paesi su 30). Tale risultato è piuttosto importante se si considera che è generalmente ritenuto doveroso se non scontato l'impiego di modelli non lineari qualora si voglia modellare serie macroeconomiche; infatti, la proporzione di serie per le quali di fatto è necessario adottare un modello relativamente complesso non è così prevalente o dominante rispetto ai casi in cui l'ipotesi di linearità invece sembra essere accettabile. Per ben il 36.7% dei casi (11 Stati su 30) infatti, sembrerebbe che un semplice modello autoregressivo lineare sia sufficiente per descrivere in modo esauriente le serie.

Un secondo fatto interessante sta nel comportamento della serie degli U.S.A., il cui campione che ha inizio nel 1947:1 e termina nel 2013:4 corrisponde di fatto al più ampio considerato nel dataset. Per tale Paese infatti, nessuno dei test proposti individua alcuna presenza di non linearità, nè i test RESET e White che indagano il comportamento della media condizionata del processo, nè il test CDR, specificatamente progettato per cogliere asimmetrie nel comportamento di serie macroeconomiche. Tale risultato è sostenuto dalla grande numerosità campionaria della serie, che porta ad escludere che i test manchino di potenza e che quindi conducano a false accettazioni dell'ipotesi nulla. Questo dà ulteriore riprova del fatto che considerare in maniera

scontata che il ciclo economico di un Paese sia una serie non lineare è erroneo e può portare alla costruzione di modelli esageratamente complessi rispetto ad una soluzione che, di fatto, seppur più semplice, è altrettanto esauriente.

## 4 Conclusioni

In questa relazione si è cercato di verificare l'effettiva necessità di ricorrere a modelli non lineari per descrivere serie caratterizzate dalla presenza di *business cycle*. Il punto di partenza sono stati i classici modelli (autoregressivi) lineari, i quali sono stati impiegati per la costruzione del set di test scelti appositamente per verificare quale fosse la reale natura dei dati. I test utilizzati, inoltre, sono stati scelti in modo tale che fosse massima complessivamente la potenza nell'individuare comportamenti non lineari delle serie e che si basassero il meno possibile su una modellazione dei dati. Nel'approccio adottato infatti si è cercato di rimanere più svincolati possibile da delle stime di modelli specifici, sebbene comunque, per alcuni test, tale passaggio fosse irrinunciabile. Va ribadito a tal proposito che l'adattamento di un  $AR(p)$  per il ciclo economico di ciascun Paese esaminato non va inteso come una vera e propria modellazione dei dati o come un tentativo di interpretare gli stessi, ma bensì, come detto sopra, come punto di partenza necessario per poter condurre le diverse verifiche di ipotesi.

Richiamando quanto detto in chiusura della Sezione 3.1, si è scelto di valutare i risultati del test non considerando adeguato il rifiuto dell'ipotesi nulla di linearità in ogni caso in cui almeno un test presentasse evidenza di adeguatezza dell'alternativa; più prudentemente, si sono presi in considerazione sia il numero totale di rifiuti che i test davano in riferimento ad una certa serie sia la forza di tali rifiuti in termini di significatività appunto del test.

I risultati ottenuti considerando le serie dei PIL di 29 Paesi e l'Eurozona gettano seri dubbi sull'assunzione preliminare generalmente effettuata di chi si approccia allo studio del *business cycle*, secondo la quale tale tipo di serie economica richiede necessariamente ed in ogni caso l'impiego di adeguati modelli non lineari per la spiegazione dei dati e che vede di conseguenza i modelli lineari scartati a prescindere. Ciò che sembra emergere invece dallo studio condotto è che questa ipotesi che funge da base per lo studio del ciclo economico sembra essere talvolta troppo forzata o comunque non così necessaria quanto si crede. Per i due terzi dei casi considerati l'evidenza di non linearità nei dati è chiara e questo comporta l'inadeguatezza dei modelli autoregressivi semplici per la loro interpretazione; va comunque sottolineato che, sebbene tale casistica sia la predominante, essa non è così schiacciante come invece si sarebbe ritenuto sotto l'assunzione comune di non linearità generale per queste serie. Per circa un terzo dei casi considerati infatti si può notare come un modello autoregressivo lineare non possa semplicemente non venir considerato per la modellazione dei dati, in quanto sembra possedere anch'esso una certa efficacia nel cogliere l'andamento di fondo degli aggregati macroeconomici in esame.

Va comunque detto che lo studio condotto è limitato in molti modi: non vengono analizzate durata e ampiezza dei cicli e delle loro fasi, le trasformazioni dei dati, seppure utili, potrebbero aver influito in una certa misura sui risultati, o ancora la dimensione campionaria delle serie considerate potrebbe talvolta venir ritenuta insufficiente per considerare informativi i test (8, Lopes, Zsurkis. 2019). Un'ulteriore questione poi è rappresentata dal problema dell'eteroschedasticità: tale fattore infatti può produrre una distorsione dei test condotti e portare quindi verso conclusioni errate. Va comunque detto che, laddove si volesse calcolare una versione robusta dei test specificati cercando di ridurre la componente erratica della serie, i risultati risulterebbero oltremodo inattendibili, in quanto è proprio tale assenza di costanza nella variabilità a caratterizzare il comportamento della serie, ed eliminarla dun-

que significherebbe eliminare troppa informazione utile per l'interpretazione dei dati (8, Lopes, Zsurkis. 2019).

Nonostante quindi queste limitazioni e tali problemi connessi all'eteroschedasticità, considerando che una discussione sulle possibili fonti di non linearità supera chiaramente lo scopo della presente relazione, si può concludere che i modelli lineari conservano una certa utilità nel modellare, descrivere ed interpretare il *business cycle*. Questo, pur non essendo valido in assoluto ma solo per certi casi, è sufficiente per dire che tale classe di modelli non può venire semplicemente non considerata ed abbandonata a priori in favore dei più complessi modelli non lineari; l'assunzione infatti di non linearità dei dati macroeconomici, nonostante costituisca di fatto una corretta base di partenza in molte occasioni, non rappresenta l'unica soluzione perseguibile capace di portare a risultati soddisfacenti.

## Bibliografia

### Riferimenti bibliografici

- [1] Beaudry P., Koop G., “*Do recessions permanently change output?*”, in Journal of Monetary Economics, 1993, n. 31, 149-163.
- [2] Bradley M. D., Jansen D. W., “*Nonlinear Business Cycle Dynamics: Cross-Country Evidence On The Persistence Of Aggregate Shocks*”, in Economic Inquiry, 1997, n. 35, 495-509.
- [3] Di Fonzo T., Lisi F., “*Serie storiche economiche. Analisi statistiche e applicazioni*”, Roma, Carocci editore, 2005.
- [4] Eitrheim Ø., Teräsvirta T., “*Testing the adequacy of smooth transition autoregressive models*”, in Journal of Econometrics, 1996, n. 74, 59-75.
- [5] Escribano Á., Jordá O., “*Testing nonlinearity: Decision rules for selecting between logistic and exponential STAR models*”, in Spanish Economic Review, 2001, n. 3, 193-209.
- [6] Harvey D. I., Leybourne S. J., Xiao B., “*A powerful test for linearity when the order of integration is unknown*”, in Studies in Nonlinear Dynamics & Econometrics, 2008, vol. 12, sez. 3, art. 2.
- [7] Lee T.-H., White H., Granger C. W. J., “*Testing for neglected nonlinearity in time series models: a comparison of neural network methods and alternative testes*”, in Journal of Econometrics, 1993, n. 56, 269-90.
- [8] Lopes A. S., Zsurkis G. F., “*Are linear models really unuseful to describe business cycle data?*”, in Applied Economics, 2019, n. 22, 2355-2376.
- [9] Morley J., Piger J., “*The Importance of Nonlinearity in Reproducing Business Cycle Features*”, in Nonlinear Time Series Analysis of Business Cycles (Contributions to Economic Analysis), 2006, n. 276, 75-95.

- [10] Morley J., Piger J., Tien P.-L., “*Reproducing Business Cycle Features: Are Nonlinear Dynamics a Proxy for Multivariate Information?*”, in UNSW Australian School of Business Research Paper, 2012, n. 23, 1-19.
- [11] Tong H., “*Threshold models in time series analysis - 30 years on*”, in *Statistics and Its Interface*, 2011, n. 4, 107-118.
- [12] Tsay R. S., “*Testing and modeling threshold autoregressive processes*”, in *Journal of the American Statistical Association*, 1989, n. 84, 231-240.