



# UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Dipartimento di Fisica e Astronomia “Galileo Galilei”

Corso di Laurea Triennale in Fisica

Tesi di Laurea

Metodo WKB e risommazione di Borel

Relatore

Prof. Roberto Volpato

Laureando

Stefano Lattanzi

Anno Accademico 2022/2023



---

## Abstract

Il metodo WKB è una tecnica standard per risolvere in modo approssimato il problema agli autovalori per l'Hamiltoniana di un sistema quantistico. Tale metodo fornisce una serie perturbativa in potenze della costante di Planck che, in linea di principio, può essere calcolata ad un ordine arbitrariamente alto. È noto che, in generale, questa serie di potenze non è convergente. Tuttavia, usando metodi matematici come la risommazione di Borel, è talvolta possibile manipolare la serie perturbativa WKB fino ad ottenere delle trans-serie (serie che contengono termini esponenziali e logaritmici nella costante di Planck) che convergono esattamente alle quantità cercate. Questa tesi si propone di descrivere tali tecniche matematiche in congiunzione con il metodo WKB, e la loro applicazione ad alcuni sistemi quantistici.



# Indice

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Risommazione di Borel</b>	<b>3</b>
2.1	Serie asintotiche . . . . .	3
2.2	Somma di Borel . . . . .	3
2.3	Risorgenza . . . . .	4
2.4	Trans-serie . . . . .	6
<b>3</b>	<b>Approssimazione WKB</b>	<b>9</b>
3.1	Metodo WKB uniforme . . . . .	11
3.2	Condizioni di quantizzazione . . . . .	13
3.2.1	Condizioni di quantizzazione approssimate . . . . .	13
3.2.2	Ordini successivi al primo . . . . .	14
<b>4</b>	<b>La doppia buca di potenziale</b>	<b>15</b>
4.1	Condizioni di quantizzazione esatte . . . . .	17
4.2	Metodo WKB esatto . . . . .	20
4.3	Cancellazione delle ambiguità . . . . .	22
<b>5</b>	<b>Conclusioni</b>	<b>25</b>



# Capitolo 1

## Introduzione

L'equazione di Schrödinger si può risolvere in maniera esatta solo in numero esiguo di casi. Nella maggior parte dei casi è necessario adottare delle approssimazioni per calcolare gli autovalori e le autofunzioni di una sistema quantistico. Tra le varie approssimazioni, un ruolo molto importante è ricoperto dalle tecniche semiclassiche, nelle quali la costante di Planck ridotta  $\hbar$  viene trattata come un parametro piccolo in funzione del quale sviluppare le autofunzioni e gli autovalori in serie di potenze formali. All'interno di quest'ottica, nel 1926 viene sviluppata indipendentemente dai tre fisici Wentzel [1], Kramers [2] e Brillouin [3] una tecnica che prende il nome di *metodo WKB*.

Questo metodo permette di ricavare le autofunzioni di una data equazione di Schrödinger come serie di potenze formali, da cui si ottengono serie di potenze anche per i relativi autovalori. Sebbene il primo termine di queste serie riproduca le condizioni di quantizzazione di Bohr-Sommerfeld, il metodo WKB produce in generale serie che non convergono. Per risolvere tale problema è necessario analizzare il metodo WKB facendo uso di certe tecniche matematiche come la risommazione di Borel. Questa produce correzioni esponenzialmente piccole che sono cruciali nella risoluzioni di problemi con particolari potenziali, dal momento che tengono conto di fenomeni come l'effetto tunnel.

Il grande merito del metodo WKB è che esso permette, partendo da un'approssimazione semiclassica, di ottenere risultati esatti, ma solo se vengono considerati anche tutti quei contributi, di origine non perturbativa, che sorgono dalle risommazioni di Borel delle varie serie di potenze formali che si vengono a creare. Il formalismo che ne risulta prende il nome di *metodo WKB esatto* [6, 7], che differisce da quello tradizionale in quanto in quest'ultimo le serie asintotiche vengono troncate, ottenendo generalmente risultati piuttosto accurati ma comunque approssimati, nell'altro invece si ottengono risultati esatti.

Un'altra evoluzione del metodo WKB si ha nel cosiddetto *metodo WKB uniforme* [4, 5]. Questo permette di ottimizzare l'ansatz del metodo tradizionale adattandolo al particolare potenziale oggetto di studio in modo tale da rendere più efficiente il metodo stesso. Anche nel metodo uniforme la risommazione di Borel gioca un ruolo chiave per produrre contributi non perturbativi e trovare autovalori di energia esatti.

Questa tesi ha lo scopo di presentare queste tecniche per risolvere equazioni di Schrödinger ed applicarle ad un esempio di interesse, ossia quello della doppia buca di potenziale.

La tesi è strutturata in tre sezioni.

Nel capitolo 2 vengono presentati i principali strumenti di analisi complessa necessari per lo studio del metodo WKB, come la risommazione di Borel e la risommazione laterale di Borel. Viene, inoltre, mostrata una panoramica di quelli che sono gli strumenti afferenti al concetto di *risorgenza* e, infine, viene presentato il formalismo delle trans-serie, necessarie in quanto rappresentano la forma che assumono gli autovalori di energia ottenuti con il metodo WKB.

Nel capitolo 3 viene presentato in primo luogo il metodo WKB tradizionale e successivamente il metodo WKB uniforme. Viene poi presentata la derivazione delle condizioni di quantizzazione approssimate per il metodo WKB uniforme in un generico caso con potenziale quadratico mostrando come si ottengano le condizioni di quantizzazione di Bohr-Sommerfeld, per poi introdurre brevemente l'estensione agli ordini successivi con il formalismo del metodo WKB esatto.

Nel capitolo 4 viene affrontato un caso concreto, ovvero quello della doppia buca di potenziale. Vengono prima derivate le condizioni di quantizzazione approssimate ed esatte sfruttando il metodo WKB uniforme. In seguito, vengono brevemente derivate anche con il metodo WKB esatto. Si conclude, quindi, con la presentazione della relazione  $P/NP$ , mostrando il rapporto che intercorre tra i termini perturbativi e quelli non perturbativi delle serie di energia che costituiscono lo spettro discreto del sistema in esame. Infine, un risultato numerico mostra la validità della derivazione compiuta.



## Capitolo 2

# Risommazione di Borel

In questo capitolo verranno presentati i concetti di Somma di Borel e di risorgenza, descrivendo anche il formalismo delle trans-serie. Per ulteriori dettagli si veda [8, 9]

### 2.1 Serie asintotiche

Consideriamo una funzione  $f(z)$  ignota, il cui sviluppo in serie di Taylor attorno al punto  $z = 0$  sia ben definito. Non necessariamente, però, esso converge alla funzione nel punto. Tuttavia, i coefficienti dello sviluppo definiscono una serie formale di potenze, ossia una serie di potenze sulla quale non si fanno ipotesi di convergenza. La serie è della forma

$$\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n. \quad (2.1)$$

Chiamiamo questa una *serie asintotica* della funzione  $f(z)$ . Sia, infatti, lo sviluppo di Taylor della funzione  $f(z)$  pari a

$$f(z) = \sum_{n=0}^N \frac{f^{(n)}}{n!} z^n + o(z^N). \quad (2.2)$$

Vediamo allora che vale la seguente relazione per ogni  $N$ :

$$\lim_{z \rightarrow 0} z^{-N} \left( f(z) - \sum_{n=0}^N a_n z^n \right) = 0 \quad (2.3)$$

Questo vuol dire che le serie asintotiche sono caratterizzate dal fatto che, al variare di  $N$ , la somma parziale

$$\varphi_N(z) = \sum_{n=0}^N a_n z^n \quad (2.4)$$

tenderà al valore reale di  $f(z)$  per poi eventualmente divergere per  $N$  sufficientemente grande. Volendo trovare il valore di  $N$  che meglio approssima la funzione  $f(z)$ , è possibile utilizzare il metodo del *troncamento ottimale*: con questa procedura si conservano tutti i termini della serie fino a quello più piccolo e si scartano tutti i termini di ordine superiore. Sebbene sia utile in certe circostanze, la principale limitazione del troncamento ottimale è che vengono utilizzati solo un numero finito di termini dell'espansione asintotica, perdendo di fatti l'informazione contenuta in tutti i restanti termini dell'espansione. Una soluzione a questo problema è l'uso della risommazione di Borel.

### 2.2 Somma di Borel

Per definire cosa sia una somma di Borel, consideriamo una serie formale di potenze come espresso nell'equazione 2.1, i cui coefficienti si comportino come  $a_n \sim n!$  per  $n$  grandi. Possiamo allora definire

la *Trasformata di Borel* come una mappa

$$\begin{aligned} \mathcal{B} : \mathbb{C}[[z]] &\rightarrow \mathbb{C}[[s]] \\ z^n &\mapsto \frac{s^n}{n!} \end{aligned} \tag{2.5}$$

dove  $\mathbb{C}[[z]]$  e  $\mathbb{C}[[s]]$  sono gli insiemi delle serie formali di potenze in  $z$  ed in  $s$ . Allora la trasformata di Borel della serie formale di potenze sarà data da

$$\hat{\varphi}(s) = \mathcal{B}[\varphi](s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{n+1}}{n!} s^n. \tag{2.6}$$

Per assicurare la convergenza di questa trasformata guardiamo il raggio di convergenza della relativa serie di potenze: se la serie  $\varphi(z)$  converge per ogni  $z < 1/r$ , allora la sua trasformata di Borel  $\mathcal{B}[\varphi]$  è una funzione intera limitata esponenzialmente ossia tale che  $|\mathcal{B}[\varphi]| \leq C e^{1/R|s|}$ , dove  $1/R < 1/r$  è il raggio di convergenza della trasformata. Possiamo dire di più: definiamo *Gevrey-1* quelle serie formali di potenze i cui coefficienti crescono come  $a_n \sim A^n n!$  per  $n \gg 1$ . Queste serie sono analitiche in un intorno di  $s = 0$ . In particolare una trasformata di Borel ha raggio di convergenza positivo se e solo se la corrispondente serie formale di potenze senza termini costanti è Gevrey-1. Tipicamente sul bordo definito dal raggio di convergenza sarà presente una singolarità, come un polo o un punto di ramificazione, ma potrà essere continuata analiticamente ad un dominio maggiore.

Supponiamo quindi che la trasformata di Borel  $\hat{\varphi}(s)$  ammetta una continuazione analitica in un intorno del semiasse positivo. Possiamo allora applicare la trasformata di Laplace alla funzione  $\hat{\varphi}(s)$  ottenendo

$$\mathcal{S}(\varphi) = \mathcal{L}(\hat{\varphi}(s)) = \int_0^{\infty} e^{-s/z} \hat{\varphi}(s) ds. \tag{2.7}$$

Se questo integrale converge, ossia se non ci sono singolarità sul contorno di integrazione definito sull' $s$ -piano complesso, detto *piano di Borel*, diciamo che la serie formale  $\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  è Borel-sommabile ad una funzione  $\varphi(z)$  la cui espansione asintotica coincide con la relativa serie formale di potenze.

In generale, però, è possibile che ad una certa espansione asintotica corrispondano diverse funzioni. Per assicurarsi che l'integrale  $\mathcal{S}(\varphi)$  coincida effettivamente con  $\varphi(z)$  dobbiamo assumere determinate condizioni. In particolare è necessario che  $\hat{\varphi}(s)$  sia analitica in una qualche striscia  $S_\sigma = \{t : \text{dist}(t, \mathbb{R}_+) < 1/\sigma\}$  e che lì valga la disuguaglianza  $\hat{\varphi}(s) \leq \exp(|t|/R)$ . In questo caso  $\mathcal{S}(\varphi)$  è una funzione analitica nel disco  $C_R = \{z : \Re z^{-1} < R^{-1}\}$ .

Notiamo, quindi, che, essendo la risommazione di Borel una trasformata di Laplace, se questa converge per un certo  $z = z_0 \neq 0$ , cioè l'integrale converge sul semiasse positivo del piano di Borel, allora converge per ogni  $z$  tale che  $\Re z^{-1} < \Re z_0^{-1}$ , ossia su un disco tangente all'asse immaginario in 0. Più semplicemente, se si riesce a scrivere la funzione  $\varphi(z)$  direttamente come l'integrale allora la regolarità nel semiasse reale positivo della trasformata di Borel è una condizione sufficiente affinché  $\varphi(z)$  sia la funzione cercata.

La somma di Borel può essere anche calcolata integrando su un qualsiasi contorno del piano di Borel che vada da zero a infinito lungo una retta inclinata di un certo angolo  $\theta$  rispetto all'asse dei numeri reali positivi  $\mathbb{R}_+$  e viene indicata con

$$\mathcal{S}_\theta(\varphi) = \int_0^{e^{i\theta}\infty} \mathcal{B}[\varphi](s) e^{-s/z} ds. \tag{2.8}$$

### 2.3 Risorgenza

In generale una trasformata di Borel  $\hat{\varphi}$  non è una funzione intera ma avrà un certo numero di singolarità isolate nel piano di Borel e in particolare sul cammino di integrazione considerato. In questi casi, però, la procedura di risommazione non è più ben definita ed è necessario aggirare le singolarità affinché la somma di Borel sia calcolabile. Prima di descrivere le tecniche che permettono di calcolare una somma di Borel lungo un contorno che presenta delle singolarità isolate diamo alcune utili definizioni.

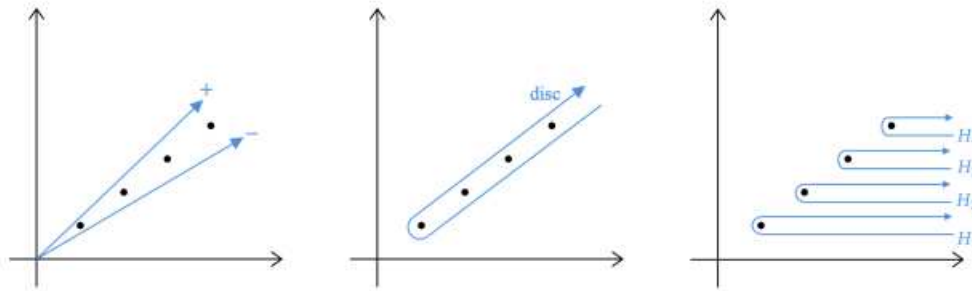


Figura 2.1: Il piano di Borel di  $\mathcal{B}[\varphi]$ . A sinistra le due somme laterali di Borel; al centro la discontinuità prodotta dalla loro differenza; a destra la stessa discontinuità suddivisa in contorni di Hankel. Figura tratta da [11].

**Definizione 1.** Una funzione viene detta *risorgente* (resurgent) se è una serie Gevrey-1 la cui trasformata di Borel, discontinua lungo certo angolo  $\theta$  a causa della presenza di alcune singolarità, può essere continuata analiticamente lungo contorno ottenuto deformando, da sopra o da sotto, il precedente. In particolare una *funzione risorgente* viene detta semplice quando le sue singolarità consistono solo di poli semplici o punti di ramificazione logaritmici.

La risoluzione a questo problema sta nel deformare leggermente il cammino di integrazione, come descritto in figura.

**Definizione 2.** La *somma di Borel laterale* lungo la direzione  $\theta$  è data da:

$$\mathcal{S}_{\theta\pm}(\varphi) = \int_0^{e^{i\theta}(\infty \pm i\epsilon)} \mathcal{B}[\varphi](s) e^{-s/z} ds \quad (2.9)$$

**Definizione 3.** Considerando le somme di Borel laterali è possibile definire l'*Automorfismo di Stokes*  $\mathfrak{S}_\theta : \mathbb{C}[[z]] \rightarrow \mathbb{C}[[z]]$  tale che

$$\mathcal{S}_{\theta+} = \mathcal{S}_{\theta-} \circ \mathfrak{S}_\theta \quad (2.10)$$

$$\mathcal{S}_{\theta+} - \mathcal{S}_{\theta-} = \text{disc}_\theta. \quad (2.11)$$

Se  $\mathcal{S}_{\theta+}(\varphi) = \mathcal{S}_{\theta-}(\varphi)$  allora:

$$\mathfrak{S}_\theta \varphi = \varphi \quad (2.12)$$

e  $\varphi$  viene chiamata *resurgence constant*. Questo vuol dire che la trasformata di Borel di  $\varphi$  non ha singolarità lungo la direzione individuata dall'angolo  $\theta$  ed è quindi una serie convergente. In questo caso l'integrale di Laplace della trasformata di Borel non è ambiguo e ci restituisce la risommissione dell'originale serie di potenze formale.

Il ruolo dell'automorfismo di Stokes è quello di quantificare la discontinuità presente nella risommissione di Borel dovuta alle singolarità che si trovano sul contorno. Supponiamo che nel piano di Borel siano presenti delle singolarità isolate e sia  $\Omega_\theta$  la collezione di etichette con cui indichiamo le singolarità sul piano di Borel, ossia per ogni  $\omega \in \Omega_\theta$  è presente una singolarità in  $s = \mathcal{A}_\omega$  con  $\arg(\mathcal{A}_\omega) = \theta$ .

Per studiare quantitativamente l'azione dell'automorfismo di Stokes è necessario introdurre il concetto di *alien calculus* tramite gli operatori di derivata  $\Delta_{\mathcal{A}_\omega}$  chiamati *alien derivatives*. Questi operatori sono indicizzati dalle singolarità del piano di Borel e agiscono su serie di potenze formali producendo nuove serie di potenze formali:

$$\Delta_\omega : \mathbb{C}[[x]] \mapsto \mathbb{C}[[x]]. \quad (2.13)$$

Essi possiedono particolari proprietà: in primo luogo soddisfano la regola di Leibnitz quando agiscono sulle serie formali di potenze; inoltre l'automorfismo di Stokes può essere decomposto in termini di questi nuovi operatori:

$$\mathfrak{S}_\theta = \exp\left(\sum_{\omega \in \Omega_\theta} e^{-\mathcal{A}_\omega/z} \Delta_{\mathcal{A}_\omega}\right); \quad (2.14)$$

per la terza proprietà introduciamo la *pointed alien derivative*

$$\dot{\Delta}_{\mathcal{A}_\omega} \equiv e^{-\mathcal{A}_\omega/x} \Delta_{\mathcal{A}_\omega}. \quad (2.15)$$

Questo operatore ha l'utile proprietà di commutare con la derivata rispetto alla variabile  $z$ :

$$\left[ \dot{\Delta}_{\mathcal{A}_\omega}, \frac{\partial}{\partial z} \right] = 0. \quad (2.16)$$

Nell'ambito della *risorgenza* definiamo infine il concetto di *minimal resurgence trans-serie*. La trasformata di Borel di una serie formale di potenze che presenta un punto singolare in  $\mathcal{A}_\omega$  si può scrivere come

$$\hat{\varphi}(s) = S_\omega \frac{\log(s - \mathcal{A}_\omega)}{2\pi i} + \hat{\varphi}_\omega(s - \mathcal{A}_\omega) + \dots \quad (2.17)$$

dove i termini non espressi sono regolari in  $(s - \mathcal{A}_\omega)$ . In questa espansione la funzione

$$\hat{\varphi}_\omega(s - \mathcal{A}_\omega) = \sum_{n \geq 0} \hat{a}_{n,\omega} z^n \quad (2.18)$$

è analitica in un intorno di  $s - \mathcal{A}_\omega = 0$  e la possiamo considerare come la trasformata di Borel della serie

$$\varphi_\omega = \sum_{n \geq 0} a_{n,\omega} z^n, \quad a_{n,\omega} = n! \hat{a}_{n,\omega}. \quad (2.19)$$

Notiamo che a partire da una sola serie formale di potenze, ne abbiamo ottenuto una famiglia guardando solamente il comportamento della prima attorno alle singolarità della sua trasformata di Borel. Denotiamo questa famiglia con il simbolo

$$\mathfrak{B}_\varphi = \{\varphi_\omega(z)\}_{\omega \in \Omega_\theta} \quad (2.20)$$

che prende il nome di *minimal resurgent structure*.

## 2.4 Trans-serie

**Definizione 4.** Un *trans-monomiale senza logaritmi* è un simbolo dato da

$$\mathfrak{g} = z^a e^T \quad (2.21)$$

dove  $a \in \mathbb{R}$  e  $T$  è una trans-serie puramente larga, ossia tale che  $\mathfrak{g}_j \gg 1$  per ogni trans-monomiale  $\mathfrak{g}_j$  in  $T$ .

Questi trans-monomiali sono gli elementi fondamentali per costruire una trans-serie, e soddisfano la relazione

$$z^{a_1} e^{T_1} \gg z^{a_2} e^{T_2} \quad (2.22)$$

se  $T_1 > T_2$  o se  $T_1 = T_2$  e  $a_1 > a_2$ .

**Definizione 5.** Una *trans-serie senza logaritmi* è una serie formale data da

$$T = \sum_j c_j \mathfrak{g}_j \quad (2.23)$$

dove  $c_j \in \mathbb{R}$  sono coefficienti e i  $\mathfrak{g}_j$  sono trans-monomiali senza logaritmi.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Abbiamo appena definito le trans-serie e i trans-monomiali in termini l'uno dell'altro. È possibile vederne una definizione più rigorosa in[.], ma per gli scopi di questa tesi non è necessario un tale livello di rigore matematico.

Per dare un significato alla disuguaglianza precedente tra trans-serie, diciamo che una trans-serie non nulla  $T = \sum_j c_j \mathfrak{g}_j$  ha un termine principale, chiamato *dominanza* (dominance),  $\text{dom}(T) = c_0 \mathfrak{g}_0$ , tale che il relativo trans-monomiale principale, chiamato *magnitudine* (magnitude),  $\text{mag}(T) = \mathfrak{g}_0$ , soddisfi  $\mathfrak{g}_0 \gg \mathfrak{g}_j$  per ogni  $\mathfrak{g}_j$  presente in  $T$ . Allora se il coefficiente  $c_0$  è positivo diremo che  $T > 0$ . In questo modo possiamo definire la relazione tra due trans-serie dicendo che  $T > S$  se e solo se  $T - S > 0$ . Infine, con il termine *altezza* (height) di un trans-monomiale indichiamo quante volte componiamo il simbolo dell'esponenziale: ad esempio il trans-monomiale  $ze^{e^z+z}$  ha altezza pari a due.

Una trans-serie generica, essendo costituita sia da termini esponenziali che logaritmici, è ottenuta componendo una trans-serie senza logaritmi  $T$  con il logaritmo

$$T \circ \log_m \quad (2.24)$$

dove  $m \in \mathbb{N}$  è il numero di volte in cui il logaritmo è composto con se stesso e prende il nome di *profondità* (depth) della trans-serie.

A questo punto mostriamo la tipologia di trans-serie di interesse per questa tesi. Queste conterranno trans-monomiali di altezza pari a 1 della forma

$$e^{-\mathcal{A}_\omega/z} \varphi_\omega, \quad (2.25)$$

dove  $\varphi_\omega$  è l'espansione perturbativa della serie attorno al  $\omega$ -esima singolarità, come definito dalla 2.19. Ci aspettiamo allora la presenza di effetti non perturbativi che modifichino la serie di potenze formale in una trans-serie della forma

$$\hat{\varphi}(z) = \varphi(z) + \sum_{\omega \in \Omega_\theta} \varphi_\omega(z) e^{-\mathcal{A}_\omega/z}. \quad (2.26)$$

In realtà siamo interessati a trans-serie che dipendono anche da dei parametri  $\sigma_\omega$  chiamati *parametri di trans-serie*, ottenendo una famiglia a un parametro di trans-serie

$$\hat{\varphi}(\vec{\sigma}, z) = \varphi(z) + \sum_{\omega \in \Omega_\theta} \sigma_\omega \varphi_\omega(z) e^{-\mathcal{A}_\omega/z}. \quad (2.27)$$

Infine, saremo interessati a serie formali di potenze in cui i coefficienti dipendono da qualche parametro  $y$

$$\varphi(y; z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(y) z^n. \quad (2.28)$$

Sostituendo ad  $y$  una serie formale di potenze in  $z$ ,  $\phi(z) = \sum_{n \geq 0} b_n z^n$ , otteniamo una nuova serie formale di potenze  $\chi(z) = \varphi(\phi(z); z)$  che, ha proprietà completamente diverse rispetto alla precedente ma, la pointed alien derivative agisce su di essa in maniera analoga alla regola della catena nel calcolo ordinario. Si ha infatti

$$\dot{\Delta}_{\mathcal{A}\chi}(z) = \left( \dot{\Delta}_{\mathcal{A}\varphi(z)} \right) (y; z) \Big|_{y=\phi(z)} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}(\phi(z); z) \dot{\Delta}_{\mathcal{A}\phi(z)}. \quad (2.29)$$

Considerando nuovamente l'automorfismo di Stokes, avendo definito il concetto di trans-serie, è possibile descriverne il suo utilizzo, ovvero il risultato della sua applicazione ad una serie formale di potenze. Considerando la  $\text{disc}_\theta$  definita in 3, questa quantità può essere interpretata come una somma infinita di contributi calcolati lungo contorni di Hankel attorno ad ognuna delle singolarità presenti lungo la direzione  $\theta$ . Per molte funzioni risorgenti la trasformata di Borel attorno ad ogni punto singolare  $\mathcal{A}_\omega$  è pari a

$$\mathcal{B}[\varphi](s) \simeq \frac{S_\omega a_{\omega,0}}{2\pi i (s - \mathcal{A}_\omega)} + \frac{S_\omega \log(s - \mathcal{A}_\omega)}{2\pi i} \mathcal{B}[\varphi_\omega](s - \mathcal{A}_\omega) + \text{regolare} \quad (2.30)$$

dove  $a_{\omega,0}$  e  $S_\omega$  sono costanti e  $\mathcal{B}[\varphi_\omega](s)$  è una funzione analitica. Possiamo allora sommare i contributi di tutti i contorni di Hankel e otteniamo

$$\text{disc}_\theta \varphi(z) = \sum_{\omega \in \Omega_\theta} S_\omega e^{-\mathcal{A}_\omega/x} \mathcal{S}_\theta - \varphi_\omega(z). \quad (2.31)$$

Le serie  $\varphi_\omega = \sum_{n \geq 0} a_{\omega,n} z^n$  sono nuove serie formali di potenze divergenti che sono *resurged* dal piano di Borel, e chiamiamo le  $S_\omega$  *costanti di Stokes*. Utilizzando la 2.11 possiamo riscrivere l'equazione precedente evidenziando l'azione dell'automorfismo di Stokes:

$$\mathfrak{S}_\theta \varphi(z) = \varphi(z) + \sum_{\omega \in \Omega_\theta} S_\omega \varphi_\omega(x) e^{-A_\omega/z}. \quad (2.32)$$

A questo punto, estendendo l'idea dell'espansione asintotica da una serie di potenze ad una trans-serie come quella in 2.27, possiamo interpretare l'automorfismo di Stokes come un'operazione che agisce su una famiglia di trans-serie nel seguente modo:

$$\mathfrak{S}_0 \hat{\varphi}(\vec{\sigma}, z) = \hat{\varphi}(g(\vec{\sigma}), z). \quad (2.33)$$

## Capitolo 3

# Approssimazione WKB

L'obiettivo di questo capitolo è descrivere l'approssimazione WKB, descrivendo anche il metodo WKB uniforme. Verranno poi derivate le condizioni di quantizzazione per un generico potenziale quadratico sfruttando il metodo WKB uniforme.

L'approssimazione WKB, che prende il nome dai fisici Wentzel, Kramer e Brillouin, è una tecnica che permette di calcolare soluzioni approssimate dell'equazione di Schrödinger in una dimensione nel caso di potenziali che variano lentamente. Per descrivere questa tecnica si considera l'equazione di Schrödinger in una dimensione

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} + V(x)\psi = E\psi(x). \quad (3.1)$$

Per potenziali costanti  $V(x) = V$  la soluzione dell'equazione di Schrödinger è l'onda piana

$$\psi(x) = e^{\pm ikx} \quad (3.2)$$

dove  $k$  è definito come

$$\begin{aligned} k &= \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} (E - V)^{1/2}} && \text{per } E > V \\ k &= i\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} (V - E)^{1/2}} && \text{per } E < V \end{aligned} \quad (3.3)$$

Nel caso di potenziali che variano lentamente anche il vettore d'onda  $k$  varia lentamente ed è ragionevole provare a risolvere l'equazione di Schrödinger usando la soluzione

$$\psi(x) = e^{\pm i \int^x k(x') dx'}. \quad (3.4)$$

Sostituendo la 3.4 nell'equazione di Schrödinger si ottiene

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + k(x)^2\psi = \left( \frac{d^2}{dx^2} + k^2 \right) e^{\pm i \int^x k(x') dx'} = \pm i k'(x) e^{\pm i \int^x k(x') dx'}. \quad (3.5)$$

Si nota che questa soluzione risolve l'equazione solo nel caso in cui la derivata prima del vettore d'onda  $k(x)$  sia nulla, ossia  $k(x)$  sia costante. In realtà questa soluzione è una buona approssimazione nel caso in cui  $k'(x)$  sia trascurabile, ovvero se vale la condizione

$$|k'| \ll k^2, \quad (3.6)$$

che è proprio la condizione definita in precedenza, ossia che il potenziale  $V(x)$  vari lentamente. Il metodo WKB è un'approssimazione di tipo semiclassico, ossia  $\hbar$  viene trattato come un parametro piccolo e viene operata un'espansione in serie di  $\hbar$  attorno a  $\hbar = 0$ . Tuttavia se consideriamo l'equazione

di Schrödinger 3.1 è evidente che non possiamo calcolare direttamente il limite per  $\hbar \rightarrow 0$  in quanto l'equazione diventerebbe algebrica. Per derivare l'approssimazione WKB assumiamo che la soluzione dell'equazione di Schrödinger sia data da

$$\psi(x) = \exp \left[ \frac{i}{\hbar} \int^x Y(x') dx' \right], \quad (3.7)$$

dove  $Y(x)$  è una qualche funzione complessa. In questo modo l'equazione di Schrödinger viene trasformata in un'equazione di Riccati in  $Y(x)$ ,

$$Y^2(x) - i\hbar \frac{dY(x)}{dx} = p^2(x), \quad (3.8)$$

dove  $p(x) = \sqrt{2m(E - V(x))}$ , che può essere risolta come un'espansione in serie di potenze di  $\hbar$ :

$$Y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n(x) \hbar^n. \quad (3.9)$$

Consideriamo in principio questa come una serie formale di potenze come definito in precedenza, ossia non facciamo ipotesi di convergenza. Le funzioni  $Y_n$  possono essere calcolate ricorsivamente partendo da

$$Y_0 = \pm p(x) \quad (3.10)$$

mediante la formula

$$Y_{n+1}(x) = \frac{1}{2Y_0} \left( i \frac{dY_n(x)}{dx} - \sum_{k=1}^n Y_k(x) Y_{n+1-k}(x) \right) \quad (3.11)$$

da cui si ottiene

$$Y_1 = \frac{i}{2} \frac{Y_0'(x)}{Y_0(x)}. \quad (3.12)$$

Le due diverse possibilità per  $Y_0(x)$  ci danno due soluzioni indipendenti dell'equazione di Schrödinger. Possiamo a questo punto suddividere la serie in due serie rispettivamente delle potenze pari e dispari in  $\hbar$

$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} Y_{2n} \hbar^{2n}, \quad Y_{odd}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} Y_{2n+1}(x) \hbar^{2n+1} \quad (3.13)$$

tali che  $Y(x) = P(x) + Y_{odd}(x)$ . L'equazione di Riccati si divide a sua volta in due differenti equazioni:

$$\begin{aligned} \text{pari: } & Y_{odd}^2(x) + P^2(x) - i\hbar Y_{odd}'(x) = p^2(x), \\ \text{dispari: } & 2Y_{odd}(x)P(x) - i\hbar P'(x) = 0. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Possiamo risolvere la seconda equazione per  $Y_{odd}$  in maniera non ricorsiva:

$$Y_{odd} = \frac{i\hbar}{2} \frac{P'(x)}{P(x)} = \frac{i\hbar}{2} \frac{d}{dx} \log P(x). \quad (3.15)$$

Allora l'esponente della 3.7 diventa

$$\frac{i}{\hbar} \int^x Y(x') dx' = -\frac{1}{2} \log P(x) + \frac{i}{\hbar} \int^x P(x') dx', \quad (3.16)$$

da cui otteniamo una funzione d'onda della forma

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{P(x)}} \exp \left( \frac{i}{\hbar} \int^x P(x') dx' \right). \quad (3.17)$$

Introducendo la funzione

$$S(x) = \int^x P(x') dx', \quad (3.18)$$



definita a meno di una costante additiva, la funzione d'onda assume la forma

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{S'(x)}} \exp\left(\frac{i}{\hbar} S(x)\right). \quad (3.19)$$

Dalla prima equazione in 3.14 e sfruttando la condizione 3.15 ottenuta dalla seconda equazione in 3.14 è facile notare che la funzione  $S(x)$  soddisfa l'equazione non lineare del secondo ordine

$$(S'(x)) + \frac{\hbar^2}{2} \{S(x), x\} = 2m(E - V(x)), \quad (3.20)$$

dove  $\{S(x), x\}$  rappresenta l'operatore di derivata Schwarziana dato da

$$\{S(x), x\} = \frac{S'''(x)}{S'(x)} - \frac{3}{2} \left( \frac{S''(x)}{S'(x)} \right)^2 = -2\sqrt{S'(x)} \frac{d^2}{dx^2} \left( \frac{1}{\sqrt{S'(x)}} \right). \quad (3.21)$$

Poiché  $S(x)$  può essere scritto come una serie formale di potenze e dalla 3.10 sappiamo che il primo termine dell'espansione coincide con il momento classico del sistema, troncando l'espansione di  $S(x)$  a quel termine otteniamo due funzioni (a seconda del segno scelto per  $p(x)$ ) che prendono il nome di *soluzioni WKB fondamentali*:

$$\psi_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{p(x)}} \exp \left\{ \pm \frac{i}{\hbar} \int^x p(x') dx' \right\}. \quad (3.22)$$

Nel metodo WKB tradizionale, quindi, si ottiene una soluzione dell'equazione di Schrödinger sfruttando l'approssimazione

$$S(x) \approx S_0(x), \quad (3.23)$$

dove  $S_0(x) = \int^x p(x') dx'$ , che è una condizione equivalente a trascurare la derivata Schwarziana nell'equazione 3.20.

In generale, quindi, è possibile ottenere funzioni d'onda che sono combinazioni lineari delle soluzioni WKB fondamentali, distinguendo tra le regioni classicamente proibite e quelle classicamente permesse: nel primo caso abbiamo un momento  $p(x)$  immaginario che ci restituisce degli esponenziali reali del tipo:

$$\psi(x) = \frac{A}{\sqrt{p_1(x)}} e^{\frac{1}{\hbar} \int_{x_0}^x p_1(x') dx'} + \frac{B}{\sqrt{p_1(x)}} e^{-\frac{1}{\hbar} \int_{x_0}^x p_1(x') dx'} \quad (3.24)$$

con  $p_1(x) = ip(x) = \sqrt{2m(V(x) - E)} \in \mathbb{R}$ .

Nel secondo invece sono soluzioni oscillanti della forma

$$\psi(x) = \frac{A}{\sqrt{p(x)}} e^{\frac{i}{\hbar} \int_{x_0}^x p(x') dx'} + \frac{B}{\sqrt{p(x)}} e^{-\frac{i}{\hbar} \int_{x_0}^x p(x') dx'}. \quad (3.25)$$

### 3.1 Metodo WKB uniforme

Guardando le funzioni d'onda precedenti si nota subito che l'approssimazione WKB non è più valida nei pressi dei punti di inversione del moto, ovvero dove  $p(x) = 0$  ed è quindi utile solo lontano da tali punti. Per sfruttare l'approssimazione WKB anche vicino ai punti di inversione è possibile utilizzare il *metodo WKB uniforme*. Al contrario della semplice approssimazione WKB, che tenta di trovare una soluzione approssimata dell'equazione di Schrödinger perturbando una soluzione di tipo onda piana, il metodo uniforme si propone di perturbare una soluzione di oscillatore armonico. In analogia con 3.19 consideriamo il seguente ansatz:

$$\psi(z) = \frac{1}{\sqrt{\phi'(z)}} f(\phi(z)), \quad (3.26)$$

dove imponiamo che  $f(\phi)$  sia una soluzione di oscillatore armonico, ossia soddisfi l'equazione differenziale del secondo ordine:

$$f''(\phi) + \frac{1}{\hbar^2} \Pi_\nu^2(\phi) f(\phi) = 0 \quad (3.27)$$

dove  $\Pi_\nu^2(\phi)$  è un certo polinomio di  $\phi$  che dipende dal parametro  $\nu$ .

È possibile, inoltre, derivare delle condizioni sulla funzione  $\phi(z)$  risolvendo l'equazione di Schrödinger con l'ansatz 3.26; si ottiene così l'equazione differenziale non lineare:

$$\Pi_\nu^2(\phi)(\phi'(x))^2 + \frac{\hbar^2}{2} \{\phi(x), x\} = 2m(E - V(x)), \quad (3.28)$$

dove  $\{\phi(x), x\}$  è la derivata Schwarziana definita in precedenza.

Notiamo che dalle condizioni definite fino a questo punto è possibile tornare all'approssimazione WKB tradizionale scegliendo  $\Pi_\nu(\phi)^2 = 1$ ; risolvendo, infatti, l'equazione 3.27 con questa scelta si ottiene come soluzione un'onda piana della forma

$$f(\phi) = e^{i\phi/\hbar}. \quad (3.29)$$

In generale la scelta di  $\Pi_\nu^2(\phi)$  è determinata dalla forma del potenziale trattato, in modo tale da poter risolvere  $f(\phi)$  in maniera esatta. Per esempio è conveniente scegliere una dipendenza lineare o quadratica di  $\Pi_\nu^2(\phi)$  da  $\phi$  se il potenziale è lineare o quadratico nei pressi del punto considerato. In particolare, attorno ad un punto di inversione nel caso quadratico una scelta ottimale è quella di prendere

$$\Pi_\nu^2(\phi) = \hbar^2(2\nu - \phi^2). \quad (3.30)$$

La funzione  $f(\phi)$  risolve l'equazione

$$f''(\phi) + (2\nu - \phi^2)f(\phi) = 0 \quad (3.31)$$

la cui soluzione generica può essere scritta come una combinazione lineare di funzioni paraboliche del cilindro

$$f(\phi) = AD_{\nu-1/2}(\sqrt{2}\phi) + BD_{-\nu-1/2}(-i\sqrt{2}\phi). \quad (3.32)$$

A questo punto è necessario imporre il decadimento di  $f(\phi)$  quando  $\phi \rightarrow \pm\infty$  in modo da rendere questa soluzione fisicamente valida. Per farlo consideriamo in particolare l'espansione asintotica della funzione parabolica del cilindro.

Prendendo un settore del piano complesso tale che  $|\arg(z)| < \frac{\pi}{2}$ , ovvero un settore che includa solo l'asse positivo dei numeri reali, l'espansione asintotica di  $D_{\nu-1/2}(z)$  è

$$D_{\nu-1/2}(z) \sim z^{\nu-1/2} e^{-z^2/4} {}_2F_0\left(\frac{1}{4} - \frac{\nu}{2}, \frac{3}{4} - \frac{\nu}{2}; ; -2z^2\right). \quad (3.33)$$

Per includere anche l'asse negativo estendiamo ad un settore delimitato da  $0 < \pm \arg z < \frac{\pi}{2}$  ottenendo

$$\begin{aligned} D_{\nu-1/2}(ze^{\mp i\pi}) &\sim \frac{(2\pi)^{1/2}}{\Gamma(1/2 - \nu)} z^{-\nu-1/2} e^{z^2/4} {}_2F_0\left(\frac{1}{4} + \frac{\nu}{2}, \frac{3}{4} + \frac{\nu}{2}; ; 2z^{-2}\right) \\ &\quad \pm i e^{\mp i\nu\pi} z^{\nu-1/2} e^{-z^2/4} {}_2F_0\left(\frac{1}{4} - \frac{\nu}{2}, \frac{3}{4} - \frac{\nu}{2}; ; -2z^2\right) \end{aligned} \quad (3.34)$$

dove sono state introdotte le serie formali di potenze

$${}_2F_0(a, b; ; z) = \sum_{k \geq 0} (a)_k (b)_k \frac{z^k}{k!} \quad (3.35)$$

che sono note come *serie ipergeometriche generalizzate*.

Il simbolo  $(a)_k$  è chiamato *simbolo di Pochhammer* ed indica un prodotto del tipo

$$(a)_k = a(a+1) \cdots (a+k-1).$$

In primo luogo notiamo che per  $z \rightarrow \infty$  otteniamo

$$D_{-\nu-1/2}(-iz) \sim z^{-\nu-1/2} e^{+z^2/4}; \quad (3.36)$$

quindi, per avere una soluzione che decada quando  $\phi \rightarrow \infty$  dobbiamo imporre nell'equazione 3.32 la condizione  $B = 0$ .

Analizzando, invece, il limite per  $z \rightarrow -\infty$ , otteniamo dall'espansione asintotica in 3.34 che la funzione  $f(\phi)$  cresce all'infinito se  $\frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2}-\nu)} \neq 0$ . Dobbiamo allora imporre che l'argomento della funzione Gamma di Eulero sia un numero intero ottenendo

$$\nu = n + \frac{1}{2}, \quad n = 0, 1, 2 \dots \quad (3.37)$$

che coincide proprio con le condizioni di quantizzazione dell'oscillatore armonico.

## 3.2 Condizioni di quantizzazione

Uno dei principali successi del metodo WKB è stato quello di fornire una derivazione delle condizioni di quantizzazione di Bohr-Sommerfeld per stati legati. In particolare, mostra che queste condizioni sono solo un'approssimazione che si può ricavare prendendo in considerazione solo il primo termine dell'espansione di  $P(x)$  ed è possibile ottenere delle correzioni che conducono alle condizioni di quantizzazione esatte considerando tutti i termini dell'espansione WKB opportunamente risommata.

Ci concentriamo in particolar modo sul metodo WKB uniforme che si dimostra più efficace della controparte tradizionale per lo studio delle condizioni di quantizzazione esatte in presenza di una doppia buca di potenziale, problema che ci accingiamo ad affrontare.

### 3.2.1 Condizioni di quantizzazione approssimate

Consideriamo un generico potenziale quadratico. Allora, usando il metodo WKB uniforme consideriamo una funzione  $f(\phi)$  del tipo 3.32 e una funzione  $\phi(x)$  che risolve l'equazione differenziale

$$\hbar^2 (\phi'(x))^2 (2\nu - \phi^2(x)) = p^2(x) - \frac{\hbar^2}{2} \{\phi(x), x\}. \quad (3.38)$$

L'approssimazione consiste nel trascurare la derivata Schwarziana in modo tale da ricavare l'equazione

$$\hbar \int_{\phi(x_0)}^{\phi(x)} \sqrt{2\nu - \phi^2} d\phi = \int_{x_0}^x p(x') dx'. \quad (3.39)$$

Per trovare  $\phi(x)$  imponiamo che la funzione d'onda sia regolare nei pressi dei punti di inversione, in contrasto con ciò che succede normalmente con il metodo WKB. Poiché (3.38)

$$\hbar^2 \phi'(x)^2 (2\nu - \phi^2(x)) \approx p^2(x) \quad (3.40)$$

e, detti  $x_{\pm}$  i punti di inversione del moto,  $p(x_{\pm}) = 0$ , si ottiene che

$$\phi^2(x_{\pm}) = 2\nu. \quad (3.41)$$

Scegliamo allora

$$\phi(x_-) = -\sqrt{2\nu} \quad \phi(x_+) = \sqrt{2\nu} \quad (3.42)$$

e la soluzione  $\phi(x)$  deve soddisfare

$$\hbar \int_{-\sqrt{2\nu}}^{\phi(x)} \sqrt{2\nu - \phi^2(x)} d\phi = \int_{x_-}^x p(x') dx. \quad (3.43)$$

Inoltre, il valore di  $\nu$  e dell'energia  $E$  del sistema sono correlati dall'equazione

$$\hbar \int_{-\sqrt{2\nu}}^{\sqrt{2\nu}} \sqrt{2\nu - \phi^2(x)} d\phi = \int_{x_-}^{x_+} p(x') dx. \quad (3.44)$$

Risolvendo l'integrale nel membro sinistro dell'equazione precedente otteniamo

$$\int_{x_-}^{x_+} p(x) dx = \pi \hbar \nu. \quad (3.45)$$

Queste, tuttavia, non sono le reali condizioni di quantizzazione per l'energia dal momento che non abbiamo imposto le condizioni di decadimento della funzione d'onda a  $\pm\infty$ . Considerando, dunque, anche queste condizioni, si ottiene il risultato ricavato in 3.37, ossia  $\nu = n + 1/2$ . Imponendo questo nella 3.45 si ottengono le condizioni di quantizzazione di Bohr-Sommerfeld

$$\int_{x_-}^{x_+} p(x) dx = \pi \hbar \left( n + \frac{1}{2} \right). \quad (3.46)$$

### 3.2.2 Ordini successivi al primo

Per estendere la derivazione delle condizioni di quantizzazione ad ordini successivi accantoniamo momentaneamente il metodo WKB uniforme e consideriamo l'equazione 3.17, ricordando che  $P(x)$  è una serie formale di potenze sviluppata in termini di potenze pari della costante di Planck il cui primo termine è il momento classico del sistema.

In potenziali che ammettono stati legati, come, ad esempio, il quartico, le condizioni di quantizzazione approssimate sono ottenute integrando il momento classico tra i due punti di inversione  $x_{\pm}$ . Estendendo la coordinata  $x$  al piano complesso, integrare tra i due punti di inversione equivale ad integrare lungo una curva chiusa  $\mathcal{A}$  attorno al minimo di potenziale che includa i due punti di inversione, ottenendo

$$2 \int_{x_-}^{x_+} p(x) dx = \oint_{\mathcal{A}} p(x) dx = 2\pi \hbar \left( n + \frac{1}{2} \right). \quad (3.47)$$

Se sostituiamo  $p(x)$  con la serie di potenze  $P(x)$  otteniamo l'integrale

$$\Pi_{\mathcal{A}}(\hbar) = \oint_{\mathcal{A}} P(x) dx \quad (3.48)$$

che prende il nome di *periodo quantistico perturbativo*. Questi periodi quantistici sono serie formali di potenze in  $\hbar^2$  in quanto

$$\Pi_{\mathcal{A}}(\hbar) = \sum_{n \geq 0} \Pi_{\mathcal{A}}^{(n)} \hbar^{2n}, \quad \Pi_{\mathcal{A}}^{(n)} = \oint_{\mathcal{A}} Y_{2n}(x) dx \quad (3.49)$$

In realtà è necessario introdurre anche un secondo periodo quantistico, denominato  $\Pi_{\mathcal{B}}$ , che consiste in un integrale calcolato lungo un circuito chiuso che circonda un *massimo* del potenziale. Questo periodo è associato ad effetti di tunneling che è necessario tenere in considerazione per ricavare le condizioni di quantizzazione esatte per la doppia buca di potenziale.

## Capitolo 4

# La doppia buca di potenziale

In questo capitolo sarà descritta la derivazione delle condizioni di quantizzazione esatte per un sistema caratterizzato dalla presenza di una doppia buca di potenziale, come mostrato in figura 4.1. Particolare attenzione è posta sul ruolo che la risommazione di Borel ha nell'eliminare le ambiguità che nascono dalle condizioni di quantizzazione perturbative. Seguiremo la trattazione proposta in [13–15].

Consideriamo un potenziale del tipo

$$V(x) = \frac{1}{2}x^2(1 + gx)^2. \quad (4.1)$$

È facile notare che questo potenziale costituisca un oscillatore armonico perturbato dove  $g$  riveste

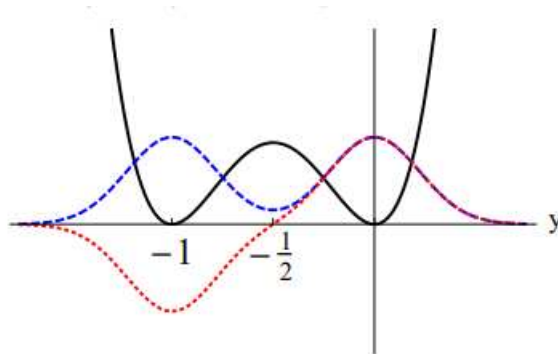


Figura 4.1: Doppia buca di potenziale. Stato pari (in blu) e dispari (in rosso). La figura è tratta da [14].

il ruolo di parametro perturbativo. Con il cambio di variabile  $z = gx$  otteniamo l'equazione di Schrödinger:

$$-\frac{g^4}{2} \frac{d^2}{dz^2} \psi(z) + \frac{1}{2} z^2 (1 + z)^2 \psi(z) = g^2 E \psi(z). \quad (4.2)$$

Poiché il potenziale è quadratico attorno al minimo, è naturale utilizzare l'approssimazione WKB uniforme, ottenendo una funzione d'onda

$$\psi(z) = \frac{1}{\sqrt{u'(z)}} D_{\nu-1/2} \left( \frac{\sqrt{2}}{g} u(z) \right). \quad (4.3)$$

Sostituendo l'ansatz precedente nell'equazione 4.2 si ottiene la seguente equazione differenziale per  $u(z)$ :

$$u'(z)^2 u^2(z) = z^2 (1 + z)^2 - 2g^2 (E - \nu u'(z)^2) + \frac{g^4}{2} \{u(z), z\}. \quad (4.4)$$

Possiamo risolvere quest'equazione espandendo la funzione  $u(z)$  e l'autovalore di energia, che dipende dal parametro  $\nu$ ,  $E(\nu)$  ottenendo

$$u(z) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(z)g^{2n}, \quad E = \sum_{n=0}^{\infty} E_n(\nu)g^{2n}. \quad (4.5)$$

Sostituendo queste espansioni asintotiche nell'equazione 4.4 ed uguagliando i termini in base alle potenze di  $g$  è possibile ottenere un sistema di equazioni differenziali che può essere risolto ricorsivamente per il termine  $u_k(z)$ .

La prima di queste equazioni è

$$\frac{d}{dz}[u_0(z)^2] = 2z(1+z) \quad (4.6)$$

che ha come soluzione

$$u_0(z) = z \left(1 + \frac{2z}{3}\right)^{1/2}. \quad (4.7)$$

I valori  $E_n(\nu)$  possono essere trovati imponendo certe condizioni di regolarità; l'equazione che ci permette di trovare  $u_1(z)$  è infatti

$$\frac{d}{dz}[u_0(z)u_1(z)] = -\frac{E_0(\nu)}{u_0(z)u_0'(z)} + \frac{\nu u_0'(z)}{u_0(z)} \quad (4.8)$$

che, integrata, restituisce l'equazione

$$u_0(z)u_1(z) = \nu \log u_0(z) - E_0(\nu)(\log z - \log(1+z)). \quad (4.9)$$

La regolarità di  $u(z)$  in  $z=0$ , ossia la richiesta che non ci siano singolarità logaritmiche in quel punto, impone che

$$E_0(\nu) = \nu, \quad (4.10)$$

ottenendo come soluzione per  $u_1(z)$

$$u_1(z) = \frac{\nu}{2} \frac{\log[(1+z)^2(1+2z/3)]}{z(1+2z/3)^{1/2}}. \quad (4.11)$$

Iterando il procedimento si trovano correzioni all'energia successive:

$$E_1(\nu) = -\left(3\nu^2 + \frac{1}{4}\right); \quad (4.12)$$

$$E_2(\nu) = -\left(17\nu^3 + \frac{19\nu}{4}\right); \quad (4.13)$$

$$E_3(\nu) = -\left(\frac{375\nu^4}{2} + \frac{459\nu^2}{4} + \frac{131}{32}\right). \quad (4.14)$$

È doveroso fare delle considerazioni riguardo lo spettro di energia appena trovato. Esso, infatti, è espresso come una serie perturbativa in potenze pari di  $g$ , con i termini  $E_n(\nu)$  polinomi in  $\nu$  di grado  $(n+1)$ . Nel limite per  $g^2 \rightarrow 0$ , il potenziale tende ad un singolo oscillatore armonico imperturbato.

Inoltre, poiché è possibile calcolare i termini dell'espansione di  $E(\nu)$  in maniera ricorsiva, si nota che questa coincide esattamente con la serie perturbativa ottenuta dalla teoria perturbativa stazionaria di Rayleigh-Schrödinger, in cui al parametro  $\nu$  è associato il numero quantico  $n$  tramite la relazione  $\nu = n + \frac{1}{2}$ .

Infine si nota che i termini dell'espansione hanno tutti segno concorde e la serie è divergente e non Borel-sommabile. Per risolvere il problema è necessario fare una somma laterale di Borel deformando  $g$  e aggiungendo una componente immaginaria. Questo, insieme alle condizioni al contorno globali trattate nella sezione successiva, ci permetterà di ottenere le condizioni di quantizzazione esatte e quindi lo spettro discreto esatto per la doppia buca di potenziale.

## 4.1 Condizioni di quantizzazione esatte

Con la derivazione fatta fino a questo punto è stato trovato un spettro di energia solo *perturbativo*. Il motivo è che nella discussione è stato considerato solo un intorno di ogni singolo minimo di potenziale. Per trovare le condizioni di quantizzazione esatte è, quindi, necessario studiare in che modo siano messi in relazione i due minimi, ossia bisogna imporre delle condizioni al contorno globali. Notiamo che la funzione d'onda 4.3 decresce esponenzialmente per  $z \rightarrow \infty$ , come ci aspetteremmo; poiché la doppia buca di potenziale è simmetrica rispetto al centro, che nel nostro caso è in  $z = -1/2$ , le condizioni da imporre riguardano la funzione d'onda in quel punto.

Proprio per questa condizione di simmetria possiamo imporre che le soluzioni siano pari o dispari, il che ci porta a due condizioni al contorno differenti, come si vede in figura 4.1. Abbiamo, dunque:

$$\text{pari: } \begin{cases} \psi(-\frac{1}{2}) \neq 0 \\ \psi'(-\frac{1}{2}) = 0 \end{cases} \quad \text{dispari: } \begin{cases} \psi(-\frac{1}{2}) = 0 \\ \psi'(-\frac{1}{2}) \neq 0 \end{cases} \quad (4.15)$$

Prima di procedere con la derivazione delle condizioni di quantizzazione è necessario sottolineare delle caratteristiche delle funzioni paraboliche del cilindro. Esse infatti sono scritte in termini delle serie formali di potenze 3.35. La risommazione di Borel di tali serie, ossia delle funzioni stesse, suddivide il piano complesso in 3 settori ben separati dalle linee di Stokes  $\arg(z) = \pi, \arg(z) = \pm\frac{\pi}{2}$ . Questo vuol dire che lungo l'asse reale negativo del piano generato dalla variabile della funzione parabolica del cilindro (in questo caso  $\frac{\sqrt{2}}{g}u(z)$ ) la risommazione non è ben definita ed è necessario operare una risommazione di Borel laterale. Questa, che consiste nell'aggiungere una piccola fase all'argomento, è ambigua, dal momento che è possibile aggiungere una fase positiva o negativa.

Consideriamo allora le condizioni di quantizzazione per uno stato dispari :

$$D_{\nu-1/2} \left( \frac{\sqrt{2}}{g} u(-1/2) \right) = 0. \quad (4.16)$$

Aggiungiamo una piccola fase positiva o negativa a  $g$ , ottenendo  $\arg(g) = \pm\delta$ . Ricordando la formula 3.35, per semplificare la notazione, definiamo

$$F_1(z^2) = {}_2F_0 \left( \frac{1}{4} + \frac{\nu}{2}, \frac{3}{4} + \frac{\nu}{2}; \frac{g^2}{u^2(-1/2)} \right), \quad (4.17)$$

$$F_2(z^2) = {}_2F_0 \left( \frac{1}{4} - \frac{\nu}{2}, \frac{3}{4} - \frac{\nu}{2}; -\frac{g^2}{u^2(-1/2)} \right). \quad (4.18)$$

Imponiamo a questo punto la condizione 4.16 e, utilizzando l'espansione 3.34, otteniamo l'equazione:

$$(\pm i) \frac{(2\pi)^{1/2}}{\Gamma(\frac{1}{2} - \nu)} e^{\pm i\nu\pi} = \left( \frac{\sqrt{2}u(-1/2)}{g} \right)^{2\nu} \exp \left[ -\frac{u^2(-1/2)}{g^2} \right] \frac{F_2}{F_1}. \quad (4.19)$$

Per riordinare i termini di questa equazione in maniera più conveniente utilizziamo la seguente formula di riflessione di Eulero:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2} - \nu\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} + \nu\right) = \frac{\pi}{\cos(\pi\nu)}. \quad (4.20)$$

Definiamo la funzione  $f(\nu)$

$$f(\nu) = \frac{\mp i\sqrt{2\pi}}{\Gamma(\frac{1}{2} + \nu)} \exp \left[ -\frac{u^2(-1/2)}{g^2} \right] \left( \frac{\sqrt{2}u(-1/2)}{g} \right)^{2\nu} \frac{F_2}{F_1}. \quad (4.21)$$

Otteniamo infine la condizione di quantizzazione esatta

$$f(\nu) = 1 + e^{\pm 2\pi i \nu}. \quad (4.22)$$

Ricavare esplicitamente le condizioni di quantizzazione per gli stati pari è più tedioso, dal momento che coinvolgono la derivata prima della funzione d'onda. Si può, tuttavia, dimostrare che esse coincidono con quelle ottenute per gli stati dispari con la funzione  $f(\nu)$  moltiplicata per un fattore  $(-1)$ .

Le condizioni di quantizzazione generali, allora, possono essere scritte come

$$1 + e^{\pm 2\pi i \nu} + \epsilon f(\nu) = 0 \quad (4.23)$$

dove i segni  $\pm$  si riferiscono a quale somma laterale viene scelta, mentre la  $\epsilon$  equivale a  $+1$  per stati pari e a  $(-1)$  per stati dispari.

Notiamo subito che, trascurando il contributo della funzione  $f(\nu)$ , torniamo alle condizioni di quantizzazione approximate definite in 3.46

$$1 + e^{\pm 2\pi i \nu} = 0, \quad \text{risolta da} \quad \nu = \left(n + \frac{1}{2}\right). \quad (4.24)$$

Da un punto di vista fisico trascurare la funzione  $f(\nu)$  corrisponde a studiare le due buche di potenziale come totalmente isolate l'una dall'altra, per cui la 4.24 diventa la condizione di quantizzazione esatta per un oscillatore armonico semplice.

Queste condizioni di quantizzazione sono indipendenti dalla parità della soluzione, dunque lo spettro di energia perturbativo è doppiamente degenere.

L'equazione 4.21 mostra che  $f(\nu)$  è un contributo esponenzialmente piccolo in  $g$  per  $\Re(g) > 0$ ; allora cerchiamo una generalizzazione per  $\nu$  della forma

$$\hat{\nu} = \nu + \Delta\nu \quad (4.25)$$

con  $\Delta\nu$  che soddisfa l'equazione

$$\Delta\nu = \frac{i}{2\pi} \log(1 + i\epsilon\lambda f(\nu + \Delta\nu)), \quad (4.26)$$

ossia con  $\Delta\nu$  una serie di termini esponenziali sempre più piccoli. Il parametro  $\lambda$  è stato introdotto per espandere  $\Delta\nu$  in serie formale di potenze, e verrà posto uguale ad 1. A questo punto risolviamo l'equazione precedente trovando i coefficienti  $\Delta\nu^{(k)}$  dell'espansione

$$\Delta\nu = \sum_{k=1}^{\infty} \Delta\nu^{(k)} \lambda^k. \quad (4.27)$$

Otteniamo

$$\begin{aligned} \Delta\nu^{(1)} &= -\frac{\epsilon}{2\pi} f(\nu), \\ \Delta\nu^{(2)} &= \frac{i}{4\pi} f^2(\nu) + \frac{1}{4\pi} f'(\nu) f(\nu). \end{aligned} \quad (4.28)$$

Ricordando l'espressione per l'autovalore di energia corrispondente ad un certo valore di  $\nu$  4.5, con il nuovo contributo  $\Delta\nu$  otteniamo l'espansione in serie di Taylor

$$E_{n,\epsilon} = E(\hat{\nu}) = E(\nu) + \Delta\nu \frac{\partial E}{\partial \nu} + \frac{1}{2} (\Delta\nu)^2 \frac{\partial^2 E}{\partial \nu^2} + \dots \quad (4.29)$$

Questa serie può essere scritta come una serie in  $\lambda$

$$E_{n,\epsilon} = \sum_{k=0}^{\infty} E^{(k)} \lambda^k, \quad (4.30)$$



dove  $\lambda$ , come in precedenza, verrà posto uguale a 1.

I primi termini di questa espansione sono

$$E^{(0)} = E(\nu) \quad (4.31)$$

che corrisponde all'autovalore perturbativo ottenuto tramite la procedura descritta all'inizio del capitolo e coincide, dunque, con il valore che si ottiene dalla teoria perturbativa di Rayleigh-Schrödinger. Successivamente abbiamo

$$\begin{aligned} E^{(1)} &= -\frac{\epsilon}{2\pi} f(\nu) \frac{\partial E}{\partial \nu}, \\ E^{(2)} &= \frac{i}{4\pi} f^2(\nu) \frac{\partial E}{\partial \nu} + \frac{1}{8\pi^2} \frac{\partial}{\partial \nu} \left( f^2(\nu) \frac{\partial E}{\partial \nu} \right), \\ E^{(3)} &= \frac{\epsilon}{6\pi} f^3(\nu) \frac{\partial E}{\partial \nu} - \frac{i\epsilon}{8\pi^2} \frac{\partial}{\partial \nu} \left( f^3(\nu) \frac{\partial E}{\partial \nu} \right) - \frac{\epsilon}{48\pi^3} \frac{\partial^2}{\partial \nu^2} \left( f^3(\nu) \frac{\partial E}{\partial \nu} \right). \end{aligned} \quad (4.32)$$

Notiamo che gli ordini superiori a  $E^{(0)}(\nu)$  dipendono dalla parità dello stato considerato, quindi la degenerazione legata alla parità è rimossa solo considerando il contributo dato da  $f(\nu)$ .

Lo splitting energetico tra due livelli caratterizzati dalla stessa  $n$  e parità opposte è dato da

$$E_{n,+} - E_{n,-} = -\frac{1}{\pi} f(\nu) \frac{\partial E}{\partial \nu} + \dots \quad (4.33)$$

Vogliamo, a questo punto, rendere esplicita la forma di trans-serie dello spettro energetico esatto, ossia mostrare la comparsa dei termini esponenziali e logaritmici tipici delle trans-serie.

Iniziamo esplicitando la dipendenza da  $g$  della funzione  $f(\nu)$ . Utilizzando i valori di  $u_0(z)$  e  $u_1(z)$  ricavati in precedenza si nota che la funzione può essere scritta come

$$f(\nu) = \frac{\mp i\sqrt{2\pi}}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \nu\right)} \left(\frac{2}{g^2}\right)^\nu e^{-A(\nu)/2} \quad (4.34)$$

dove  $A(\nu)$  rappresenta una serie della forma

$$A(\nu) = \frac{1}{3g^2} + \sum_{k=1}^{\infty} F^{(k)} g^{2k}, \quad (4.35)$$

dove i coefficienti  $F^{(k)}$  sono polinomi in  $\nu$  che possono essere ricavati dalle soluzioni degli  $u_n(z)$  e non dipendono da  $z$ .

Per rendere più snella la notazione definiamo

$$\xi(n) = \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \nu\right)} \left(\frac{2}{g^2}\right)^\nu e^{-1/6g^2}. \quad (4.36)$$

Denotiamo, inoltre, con  $b_p(n)$  la famiglia di potenze formali in  $g$

$$b_p(n) \equiv \exp \left[ -\frac{p}{2} \sum_{k=1}^{\infty} F^{(k)} g^{2k} \right] \left( \frac{\partial E}{\partial \nu} \right). \quad (4.37)$$

In questo modo è possibile scrivere per il generico ordine  $E^{(k)} \propto f^k \frac{\partial E}{\partial \nu}$  la relazione

$$f^k \frac{\partial E}{\partial \nu} = \xi(n)^k b_k(n). \quad (4.38)$$

Scriviamo, infine,

$$l = \log\left(\frac{g^2}{2}\right). \quad (4.39)$$

Data la derivata prima di  $\xi(\nu)$

$$\xi'(\nu) = -\frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \nu\right)} \left(\frac{2}{g^2}\right)^\nu e^{-1/6g^2} \left[ \frac{\Gamma'\left(\frac{1}{2} + \nu\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \nu\right)} + \log\left(\frac{g^2}{2}\right) \right], \quad (4.40)$$

con le precedenti definizioni è possibile condensarla nella più maneggevole formula

$$\xi(\nu) = -[\psi(\nu + 1/2) + l]\xi(\nu), \quad (4.41)$$

dove  $\psi(\nu + 1/2)$  indica la derivata logaritmica della funzione gamma.

I primi termini dell'espansione di  $E_{n,\epsilon}$  diventano

$$E^{(1)} = \frac{-\epsilon\xi(\nu)}{2\pi} b_1(\nu), \quad (4.42)$$

$$E^{(2)} = \frac{\xi(\nu)^2}{8\pi^2} [2\pi i b_2 - 2(\psi(\nu + 1/2) + l) + b_2'], \quad (4.43)$$

$$E^{(3)} = \frac{-\epsilon\xi(\nu)^3}{48\pi^3} \{b_3'' - 6b_3'(\psi(\nu + 1/2) + l) - b_3[3\psi'(\nu + 1/2) - 9(l + \psi(\nu + 1/2))^2 + 8\pi^2] + 6\pi i[b_3' - 3b_3(l + \psi(\nu + 1/2))]\}. \quad (4.44)$$

È possibile rappresentare in questo modo tutti i termini  $E^{(k)}$ . Degno di nota è che in questa rappresentazione si vede esplicitamente la dipendenza dei termini dell'espansione da  $l = \log(g^2/2)$ . Per un certo ordine  $k$ , infatti, il termine  $E^{(k)}$  dipende da  $f(\nu)$  e dalla sua derivata fino alla  $f^{(k-1)}(\nu)$  e, poiché il termine logaritmico proviene da queste derivate, allora  $E^{(k)}$  conterrà potenze di  $l$  elevate fino all'esponente  $k - 1$ .

Raccogliendo le potenze di  $l$  ed esprimendo esplicitamente la dipendenza da  $g$ , il generico termine  $E^{(k)}$  può essere scritto come

$$E^{(k)} = \left(\frac{2}{g^2}\right)^{\nu k} e^{-k/6g^2} \sum_{m=0}^{k-1} \left[\log\left(\frac{g^2}{2}\right)\right]^m \sum_{l=0}^{\infty} c_{\nu k m l}^{(\epsilon)} g^l. \quad (4.45)$$

Notiamo, dunque, che sono presenti sia dei termini esponenziali decrescenti che dei termini logaritmici all'interno dell'espressione e nei coefficienti  $c_{\nu k m l}^{(\epsilon)}$  sono codificati tutti gli altri parametri che caratterizzano  $E^{(k)}$ , tra cui, in particolare, la dipendenza dalla parità dello stato, condizione necessaria per ottenere uno spettro non degenere, come richiesto nella derivazione di spettri esatti.

## 4.2 Metodo WKB esatto

In questa sezione discuteremo brevemente quello che viene definito metodo WKB *esatto*. Questo differisce da quello uniforme in quanto sfrutta l'approssimazione WKB tradizionale, come definita in 3.19, ma considerando tutti i termini dello sviluppo.

In questo modo, data la condizione di quantizzazione esatta ricavata in precedenza, è possibile ricavare delle informazioni riguardo la funzione  $A(\nu)$  che compare in 4.34.

Data l'equazione di Schrödinger 4.2 possiamo prendere come soluzione l'ansatz tipico del metodo WKB

$$\psi(z) = \exp\left[\frac{i}{g^2} \int^z Y(z')\right]. \quad (4.46)$$

Notiamo che vale la relazione

$$Y(z) = -ig^2 \frac{\psi'(z)}{\psi(z)}. \quad (4.47)$$

Questa funzione  $Y(z)$  soddisfa l'equazione di Riccati che si ottiene inserendo l'ansatz precedente nell'equazione di Schrödinger sopracitata. In particolare, questa funzione può essere espressa come una serie di potenze di  $g$ , analogamente a quanto avviene in 3.9. Inoltre, è possibile scomporla in due parti, rispettivamente pari e dispari, ottenendo due equazioni (analoghe a quelle presenti in 3.13) in modo tale da scrivere  $\psi(z)$  in funzione della sola componente pari. Si ottiene così

$$\psi(z) = \frac{1}{\sqrt{P(z)}} \exp \left[ \frac{i}{g^2} \int^z P(z') \right]. \quad (4.48)$$

Per determinare le condizioni di quantizzazione allora possiamo utilizzare l'equazione

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{A}} dz \frac{\psi'(z)}{\psi(z)} = N, \quad (4.49)$$

dove  $\mathcal{A}$  è un contorno che include i due punti di inversione del moto associati ad un certo impulso  $p(z)$ , che corrisponde al primo termine dell'espansione di  $Y(z)$ , e  $N$  è un numero intero che corrisponde al numero di nodi della funzione d'onda. Se poi riscriviamo l'equazione precedente esplicitando  $\psi(z)$  in termini di  $P(z)$  otteniamo l'equazione

$$\frac{1}{2\pi g^2} \oint_{\mathcal{A}} dz P(z) = N + \frac{1}{2} \quad (4.50)$$

che notiamo essere analoga all'equazione 3.47. Questa, infatti, rappresenta il periodo quantistico perturbativo, ossia proprio quello che si ottiene calcolando l'integrale attorno ad un minimo del potenziale. Notiamo, inoltre, che questa condizione può essere scritta come

$$\exp \left[ + \frac{i}{g^2} \oint_{\mathcal{A}} dz P(z) \right] + 1 = 0. \quad (4.51)$$

Se prendiamo  $N + 1/2 = \nu$ , questa condizione è equivalente a 4.24. Nel caso della doppia buca di potenziale, però, è necessario tenere in considerazione anche il contributo che deriva dall'effetto tunnel che si verifica tra i due minimi di potenziale e che è espresso da un integrale calcolato lungo un contorno che circonda il massimo relativo del potenziale

$$\Pi_{\mathcal{B}} = \oint_{\mathcal{B}} dz P(z). \quad (4.52)$$

Riprendendo l'equazione 4.23, in cui gli effetti di tunneling sono codificati all'interno della funzione  $f(\nu)$ , utilizzando il formalismo dei periodi quantistici possiamo scrivere:

$$f(\nu) = \exp \left( \frac{i}{g^2} \oint_{\mathcal{B}} dz P(z) \right). \quad (4.53)$$

La derivazione della relazione precedente non è dimostrata in questa tesi. Per ulteriori informazioni si veda [15], in cui viene sfruttata la formula di connessione di Voros-Silverstone oppure [11] in cui si sfrutta la formula di Delabaere, Dillinger e Pham.

Da questa, prendendone il logaritmo e sostituendo a  $f(\nu)$  la 4.34, otteniamo

$$\oint_{\mathcal{B}} dz P(z) \propto A(\nu) + \log \left[ \Gamma \left( \nu + \frac{1}{2} \right) \right]. \quad (4.54)$$

Questo vuol dire che per ottenere  $A(\nu)$  è necessario considerare l'espansione asintotica della funzione  $\Gamma$ , processo piuttosto laborioso. Nel paragrafo successivo mostreremo, grazie alla relazione P/NP, che in realtà tale calcolo è superfluo ed è sufficiente conoscere i termini dell'espansione perturbativa dell'energia per determinare  $A(\nu)$ .

### 4.3 Cancellazione delle ambiguità

Abbiamo, dunque, trovato le condizioni di quantizzazione esatte per la doppia buca di potenziale (4.23) che ci hanno portato ad ottenere una trans-serie per l'energia relativa al livello  $N = \nu - 1/2$ , data dallo sviluppo in serie di Taylor 4.29

$$E(\hat{\nu}) = E(\nu) + \Delta\nu \frac{\partial E}{\partial \nu} + \frac{1}{2}(\Delta\nu)^2 \frac{\partial^2 E}{\partial \nu^2} + \dots \quad (4.55)$$

Tuttavia questa presenta delle ambiguità, dal momento che il primo termine, che coincide con la serie perturbativa, non è risommabile nel senso di Borel. Per ottenere delle informazioni da questa serie è necessario fare una risommazione di Borel laterale aggiungendo un piccolo termine complesso alla costante di accoppiamento  $g$ . In questo modo l'espansione asintotica per l'energia 4.5 passa dall'essere una somma di termini reali e non alternanti, tutti di segno negativo come si può notare guardando i primi termini di tale espansione (4.12, 4.13, 4.14), ad una serie di termini alternanti in cui compaiono, tuttavia, dei contributi immaginari. Così facendo si produce un'altra ambiguità dovuta al segno della componente immaginaria che attribuiamo a  $g$ . Questo ci porta a due condizioni paradossali. In primo luogo sembra che lo spettro di energia, che è una quantità fisica, dipenda dalla scelta non fisica del segno della somma laterale di Borel scelto. In secondo luogo, l'energia deve necessariamente assumere un valore reale, mentre in questo modo sono presenti contributi immaginari.

La cosa notevole è che entrambe queste ambiguità vengono eliminate se consideriamo i termini successivi dello sviluppo, ossia quelli dovuti agli effetti non perturbativi. Innanzi tutti notiamo che questi stessi termini nascono dallo studio delle condizioni di quantizzazione esatte che, sin dal principio, sfruttano la risommazione laterale di Borel delle funzioni d'onda aggiungendo una componente immaginaria alla stessa costante di accoppiamento  $g$ . Allora se la scelta della direzione nella somma laterale di Borel è coerente, tutti i termini immaginari presenti nella componente perturbativa dell'energia vengono esattamente compensati da quelli che appartengono ai termini non perturbativi. Inoltre questo è vero qualunque sia la scelta della direzione nella somma laterale di Borel, purché sia la stessa nei due casi.

Sebbene la dimostrazione teorica di quanto appena detto sia piuttosto complessa è tuttavia prevedibile se si considera la *relazione P/NP*. Questa è un'equazione empirica che nasce dal confronto dei coefficienti dell'espansione perturbativa dell'energia  $E^{(0)}(\nu)$  con i coefficienti  $F^{(k)}(\nu)$  che compaiono nell'equazione 4.35 e sono relativi ad effetti non perturbativi. Ne riportiamo alcuni:

$$\begin{aligned} F^{(1)}(\nu) &= \frac{19}{12} + 17\nu^2, \\ F^{(2)}(\nu) &= \frac{153\nu}{4} + 125\nu^3. \end{aligned} \quad (4.56)$$

Notiamo allora che vale la relazione

$$\frac{\partial E}{\partial \nu} = -6g^2\nu - 3g^4 \frac{\partial A}{\partial g^2}. \quad (4.57)$$

È immediato verificare che ogni termine  $F^{(k)}$  dell'espansione 4.35 è esattamente determinato se si conosce il termine  $E_{k+1}$  dell'espansione perturbativa dell'energia. Questo è un risultato degno di nota, poiché rende superflua una computazione diretta di  $A(\nu)$ , molto più complessa, accennata nella sezione precedente. Dunque tutta l'informazione contenuta nei termini non perturbativi, essenziale per eliminare le ambiguità che si creano durante la derivazione delle condizioni di quantizzazione esatte e per ottenere, infine, uno spettro di energia esatto, è contenuta all'interno della serie perturbativa dell'energia.

In conclusione, mostriamo in un esempio concreto che i termini immaginari che compaiono nella trans-serie di energia si cancellano tra loro. I risultati numerici sono tratti da [15]. Prendiamo lo stato fondamentale del sistema, con  $\nu = 1/2$  e  $\epsilon = 1$ . La serie perturbativa è data da

$$E^{(0)}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - g^2 - \frac{9}{2}g^4 - \frac{89}{2}g^6 - \frac{5013}{8}g^8 - \frac{88251}{8}g^{10} + \mathcal{O}(g^{12}). \quad (4.58)$$

La prima correzione non perturbativa è data da (4.32)

$$\begin{aligned}
 E^{(1)}\left(\frac{1}{2}\right) &= -\frac{1}{\sqrt{\pi}g} e^{-\frac{1}{6g^2}} \left( \frac{\partial E^{(0)}}{\partial \nu} \right)_{\nu=1/2} \exp\left( -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} F^{(k)}(1/2) g^{2k} \right) \\
 &= -\frac{1}{\sqrt{\pi}g} e^{-\frac{1}{6g^2}} \left( 1 - \frac{71}{12}g^2 - \frac{6299}{288}g^4 - \frac{2891107}{10368}g^6 - \frac{2125346615}{497664}g^8 + \mathcal{O}(g^{10}) \right).
 \end{aligned} \tag{4.59}$$

Ovviamente è necessario procedere con la risommazione laterale di Borel della serie perturbativa per ottenere informazioni sull'energia. Scegliendo un certo valore di  $g^2$ , ad esempio  $g^2 = \frac{7}{1000}$ , la somma laterale di Borel fatta al di sopra dell'asse reale ci restituisce il seguente valore per la serie perturbativa

$$E^{(0)}\left(\frac{1}{2}\right) = 0.4927625141294221339923438509 - 2.792818158 \dots \cdot 10^{-19}i. \tag{4.60}$$

La risommazione laterale del primo contributo non perturbativo, fatta nella stessa direzione della precedente, ci restituisce il valore

$$E^{(1)}\left(\frac{1}{2}\right) = 2.9486924646 \dots \cdot 10^{-10} - 1.554 \dots \cdot 10^{-27}i. \tag{4.61}$$

Notiamo che

$$\Re\left(E^{(0)}(1/2) - E^{(1)}(1/2)\right) = 0.492762513834552888 \dots, \tag{4.62}$$

che è la corretta energia dello stato fondamentale a questa precisione. Il contributo immaginario che otteniamo si cancella se consideriamo anche i termini successivi. Dalla risommazione laterale del termine  $E^{(2)}$ , infatti, deriva un contributo immaginario pari a

$$\Im\left(E^{(2)}(1/2)\right) = 2.7928181575 \dots \cdot 10^{-19} \tag{4.63}$$

che cancella quello di  $E^{(0)}$  fino all'ordine  $10^{-27}$ . Se poi vengono considerati anche i termini non perturbativi di ordine superiore, la parte immaginaria dell'energia si cancella esattamente.



## Capitolo 5

# Conclusioni

Il metodo WKB uniforme ci ha permesso di derivare gli autovalori esatti per un sistema caratterizzato dalla presenza di una doppia buca di potenziale simmetrica, notando come essi assumano la forma di una trans-serie, come si può notare dall'equazione 4.45.

Abbiamo mostrato come questa nasca solo se affrontiamo il problema considerando le condizioni al contorno globali, e cioè non soffermandoci sullo studio dell'energia nei pressi del minimo di potenziale, come saremmo portati a fare dalla teoria perturbativa di Rayleigh-Schrödinger.

Questa trans-serie combina termini che provengono dall'espansione perturbativa con quelli che, invece, compaiono analizzando l'interazione tra i due minimi di potenziale ed esprimono i contributi legati all'effetto tunnel. Proprio tenendo in considerazione questi fattori esponenzialmente piccoli si eliminano le ambiguità che nascono dalle procedure di risommazione di Borel applicate alla trans-serie, la quale altrimenti divergerebbe. Ricordando, infatti, la serie di potenze formali 4.30, nonché la forma dei suoi termini, si è visto come la risommazione di Borel di questi produca contributi immaginari i quali, sebbene appaiano anomali all'interno di un risultato che descrive l'energia di un sistema, che deve necessariamente essere reale, si cancellano tra loro quando vengono considerati tutti i termini della trans-serie.

L'ultimo risultato di spessore ricavato riguarda la relazione P/NP. Abbiamo infatti visto che, confrontato i termini della serie perturbativa dell'energia presentati a pagina 16 con i termini della serie di potenze formale 4.56, tra di essi intercorre una semplice relazione, mostrata nell'equazione 4.57, che permette di dedurre tutti i termini non perturbativi da quelli perturbativi.

Questo risultato è particolarmente rilevante perché mostra che l'informazione contenuta nei termini non perturbativi, che sono necessari per ottenere autovalori di energia esatti, è, in realtà, tutta contenuta all'interno della serie perturbativa, che, però, considerata singolarmente, divergerebbe. Questa è una manifestazione fisica del concetto matematico della risorgenza.





# Bibliografia

- [1] G. Wentzel, “Eine Verallgemeinerung der Quantenbedingungen für die Zwecke der Wellenmechanik,” *Z. Phys.* **38** (1926) no.6, 518-529 doi:10.1007/BF01397171.
- [2] H. A. Kramers, “Wellenmechanik und halbzahlige Quantisierung,” *Z. Phys.* **39** (1926) no.10, 828-840 doi:10.1007/BF01451751.
- [3] L. Brillouin, “La mécanique ondulatoire de Schrödinger; une méthode générale de resolution par approximations successives,” *Compt. Rend. Hebd. Seances Acad. Sci.* **183** (1926) no.1, 24-26.
- [4] R.E. Langer “The asymptotic solutions of ordinary linear differential equations of the second order, with special reference to a turning point,” *Trans. Amer. Math. Soc.* **67** (1949), 461-490 doi:10.1090/s0002-9947-1949-0033420-2.
- [5] T.M. Cherry, “Uniform asymptotic formulae for functions with transition points,” *Trans. Amer. Math. Soc.* **68** (1950), 224-257 doi:10.1090/s0002-9947-1950-0034494-3.
- [6] A. Voros, “Spectre de l’équation de Schrödinger et méthode BKW,” *Publications Mathématiques d’Orsay* (1981).
- [7] A. Voros, “The return of the quartic oscillator. The complex WKB method,” *Inst. Henri Poincaré* **39** (1983), 211-338.
- [8] J. Fischer, “On the role of power expansions in quantum field theory,” *Int. J. Mod. Phys. A* **12** (1997), 3625-3663 doi:10.1142/S0217751X97001870 [arXiv:hep-ph/9704351 [hep-ph]].
- [9] D. Dorigoni, “An Introduction to Resurgence, Trans-Series and Alien Calculus,” *Annals Phys.* **409** (2019), 167914 doi:10.1016/j.aop.2019.167914 [arXiv:1411.3585 [hep-th]].
- [10] J. Gu and M. Marino, “Peacock patterns and new integer invariants in topological string theory,” *SciPost Phys.* **12** (2022) no.2, 058 doi:10.21468/SciPostPhys.12.2.058 [arXiv:2104.07437 [hep-th]].
- [11] A. van Spaendonck and M. Vonk, “Exact instanton transseries for quantum mechanics,” [arXiv:2309.05700 [hep-th]].
- [12] J. Zinn-Justin and U. D. Jentschura, “Multi-instantons and exact results I: Conjectures, WKB expansions, and instanton interactions,” *Annals Phys.* **313** (2004), 197-267 doi:10.1016/j.aop.2004.04.004 [arXiv:quant-ph/0501136 [quant-ph]].
- [13] G. Álvarez, “Langer–Cherry derivation of the multi-instanton expansion for the symmetric double well,” *J. Math. Phys.* **45** (2004), 3095–3108 doi:10.1063/1.1767988.
- [14] G. V. Dunne and M. Unsal, “Uniform WKB, Multi-instantons, and Resurgent Trans-Series,” *Phys. Rev. D* **89** (2014) no.10, 105009 doi:10.1103/PhysRevD.89.105009 [arXiv:1401.5202 [hep-th]].
- [15] M. Mariño, “Advanced Topics in Quantum Mechanics,” Cambridge University Press, 2021, ISBN 978-1-108-86338-4, 978-1-108-49587-5 doi:10.1017/9781108863384.
- [16] J. Zinn-Justin, “Quantum field theory and critical phenomena,” Oxford University Press, 2021, ISBN 9780198834625, 9780191872723 doi:10.1093/oso/9780198834625.001.0001.