



**UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI PADOVA**

**FACOLTA' DI INGEGNERIA**

**CORSO DI LAUREA SPECIALISTICA IN INGEGNERIA**

**ELETTROTECNICA**

**TESI DI LAUREA**

**MODELLAZIONE E CONTROLLO ATTIVO  
DI UN SISTEMA DISTRIBUITO DI STERZATURA**

RELATORE: CH.MO PROF. GIUSEPPE BUJA

CORRELATORE: DOTT. ING. MANUELE BERTOLUZZO

LAUREANDO: MARIO ROMEO

ANNO ACCADEMICO 2009/2010

## INDICE

<b>1</b>	<b>INTRODUZIONE .....</b>	<b>5</b>
1.1	SISTEMA DISTRIBUITO DI STERZATURA.....	7
1.2	ORGANIZZAZIONE DELLA TESI .....	9
<b>2</b>	<b>LE MICROCAR .....</b>	<b>11</b>
2.1	INTRODUZIONE .....	11
2.2	LEGGI E NORMATIVE .....	11
2.3	VICTORIA GIOTTI GINKO .....	13
2.4	CARATTERISTICHE TECNICHE .....	15
<b>3</b>	<b>MODELLO MATEMATICO DEL VEICOLO .....</b>	<b>17</b>
3.1	INTRODUZIONE .....	17
3.1.1	<i>Ipotesi semplificative .....</i>	<i>19</i>
3.2	DAL VEICOLO AL MODELLO MATEMATICO .....	21
3.3	EQUAZIONI DI CONGRUENZA.....	22
3.4	EQUAZIONI DI EQUILIBRIO .....	27
3.4.1	<i>Calcolo delle accelerazioni .....</i>	<i>27</i>
3.4.2	<i>Forze e momenti .....</i>	<i>29</i>
3.5	EQUAZIONI COSTITUTIVE (MODELLO DI PNEUMATICO LINEARIZZATO) .....	32
3.6	MODELLO MONOTRACCIA DI UN AUTOVEICOLO .....	35
3.7	MODELLO MONOTRACCIA CLASSICO .....	37
3.8	MODELLO MONOTRACCIA LINEARE .....	38
3.9	MODELLO BITRACCIA LINEARE.....	41
3.10	IL CINEMATISMO DELLO STERZO.....	47
3.10.1	<i>Quadrilatero di Jeantaud .....</i>	<i>48</i>
3.10.2	<i>Realizzazione delle condizioni di Ackermann .....</i>	<i>50</i>
<b>4</b>	<b>COMPORAMENTO DIREZIONALE A REGIME.....</b>	<b>53</b>
4.1	INTRODUZIONE .....	53
4.2	COMPORAMENTO A REGIME ( <i>STEERING PAD</i> ) .....	54
4.3	COMPORAMENTO A REGIME E DEFINIZIONE DI VEICOLO SOVRA-SOTTOSTERZANTE.....	56
4.4	VELOCITÀ LIMITE E FATTORE DI STABILITÀ .....	60
4.5	MARGINE DI STABILITÀ E PUNTO NEUTRO .....	61

<b>5</b>	<b>ANALISI DINAMICA.....</b>	<b>65</b>
5.1	INTRODUZIONE .....	65
5.1.1	<i>Risposta transitoria del veicolo ad un input di sterzo .....</i>	<i>65</i>
5.1.2	<i>Pulsazione naturale e coefficiente di smorzamento .....</i>	<i>69</i>
5.2	FUNZIONE DI TRASFERIMENTO TRA ANGOLO DI STERZO E VELOCITÀ DI IMBARDATA.....	70
5.2.1	<i>Andamento della velocità di imbardata nel dominio del tempo.....</i>	<i>73</i>
5.2.2	<i>Diagrammi di Bode della funzione di trasferimento <math>G_{\delta_f}^r(j\omega)</math>.....</i>	<i>75</i>
5.3	FUNZIONE DI TRASFERIMENTO TRA ANGOLO DI ASSETTO ED ANGOLO DI STERZO.....	77
5.3.1	<i>Andamento dell'angolo di assetto nel dominio del tempo .....</i>	<i>78</i>
5.3.2	<i>Diagrammi di Bode della funzione di trasferimento <math>G_{\delta_f}^B(j\omega)</math>.....</i>	<i>80</i>
5.4	MATRICE DI TRASFERIMENTO DEL MODELLO BITRACCIA DEL VEICOLO.....	82
<b>6</b>	<b>CONTROLLO DELLA VELOCITÀ DI IMBARDATA.....</b>	<b>85</b>
6.1	INTRODUZIONE .....	85
6.2	CONTROLLO ROBUSTO CON DISACCOPIAMENTO .....	87
6.2.1	<i>Disaccoppiamento della dinamica laterale.....</i>	<i>88</i>
6.2.2	<i>Semplificazione del controllore .....</i>	<i>93</i>
6.2.3	<i>Riferimento di Yaw Rate ed Integratore Fading.....</i>	<i>95</i>
6.2.4	<i>Analisi della stabilità del sistema a catena chiusa con regolatore PID .....</i>	<i>96</i>
6.2.5	<i>Progetto del regolatore PID .....</i>	<i>99</i>
6.3	CONTROLLO DI UN SISTEMA DISTRIBUITO DI STERZATURA.....	101
6.3.1	<i>Feedforward cinematico .....</i>	<i>102</i>
6.3.2	<i>Regolatore di feedback .....</i>	<i>103</i>
6.3.3	<i>Anello di feedback per la correzione della dinamica laterale .....</i>	<i>104</i>
<b>7</b>	<b>SIMULAZIONI .....</b>	<b>107</b>
7.1	INTRODUZIONE .....	107
7.2	MODELLAZIONE DEL VEICOLO IN AMBIENTE <i>DYMOLA</i> .....	108
7.3	IMPLEMENTAZIONE DEL CONTROLLO ROBUSTO .....	109
7.3.1	<i>Simulazione di un gradino di sterzo a velocità costante .....</i>	<i>110</i>
7.3.2	<i>Simulazione manovra del colpo di sterzo a velocità costante.....</i>	<i>113</i>
7.3.3	<i>Simulazione manovra dell'alce a velocità costante .....</i>	<i>116</i>
7.3.4	<i>Simulazione di veicolo sovrasterzante .....</i>	<i>119</i>
7.3.5	<i>Simulazione di veicolo in forte sottosterzo .....</i>	<i>121</i>
7.3.6	<i>Simulazione di raffica di vento laterale.....</i>	<i>122</i>

7.4	IMPLEMENTAZIONE DEL CONTROLLO DEL SISTEMA DISTRIBUITO DI STERZATURA.....	125
7.4.1	<i>Simulazione di un gradino di sterzo a velocità costante.....</i>	126
7.4.2	<i>Simulazione manovra del colpo di sterzo a velocità costante .....</i>	128
7.4.3	<i>Simulazione manovra dell'alce a velocità costante .....</i>	131
7.4.4	<i>Simulazione di veicolo sovrasterzante .....</i>	134
7.4.5	<i>Simulazione di veicolo in forte sottosterzo .....</i>	136
7.4.6	<i>Simulazione di raffica di vento laterale .....</i>	138
7.5	CONCLUSIONI E POSSIBILI SVILUPPI FUTURI .....	141
	<b>BIBLIOGRAFIA.....</b>	<b>143</b>
	<b>APPENDICE A.....</b>	<b>147</b>
	<b>APPENDICE B .....</b>	<b>152</b>
	<b>APPENDICE C .....</b>	<b>153</b>

# 1 Introduzione

La sicurezza ed il comfort sono i due principali obiettivi dei sistemi di controllo negli autoveicoli moderni. In particolare, sta crescendo l'interesse sia da parte dei costruttori che da parte dei consumatori per i dispositivi innovativi di sicurezza attiva come i sistemi *ABS*, *ACC*, *DYC*, *ESP*<sup>®</sup>, *TCS* ed altri che vengono utilizzati per migliorare la stabilità e l'aderenza del veicolo.

Ciò ha indotto le maggiori case automobilistiche ad avviare studi riguardanti nuovi sistemi di controllo della trazione e della stabilità laterale [1].

Nel 1995 sono partiti i progetti *DSC3* (*Dynamic Stability Control*) della *BMW* ed *ESP*<sup>®</sup> (*Electronic Stability Program*) della *Mercedes*. La *Cadillac* è stata la prima casa automobilistica del Nord America ad introdurre questi sistemi, con lo *Stabilitrak System* nel 1996, seguita nell'anno successivo dalla *Chevrolet* con il sistema *AH* (*Active Handling*).

Presso la *Ford* e la *Honda* sono stati studiati rispettivamente il sistema *BSS* (*Brake Steer System*) e *DYC* (*Direct Yaw Control*) [2].

Nel 1997 Volvo ha introdotto la funzionalità di controllo di crociera adattativo *ACC* (*Adaptive Cruise Control*) con *Collision Warning* e *Brake Support* (*CWBS*).

Ulteriori sistemi di sicurezza attiva riguardano il sistema di controllo della trazione (*TCS Traction Control System*) e della frenata (*ABS* commercializzato già dal 1978 da *Bosch*) che sono utilizzati per garantire l'aderenza degli pneumatici con una opportuna ripartizione delle coppie sulle ruote.

*DSA-DSAC* (*Dynamic Steering Angle Control*) [29] è una funzione integrata al sistema *ESP Premium*<sup>1</sup>, che migliora la correzione della sbandata del veicolo attraverso il controllo dell'angolo di sterzata, disaccoppiando le ruote anteriori dal volante in modo da compensare le situazioni di sottosterzo e

---

<sup>1</sup> Evoluzione del sistema *ESP*.

sovrasterzo. Sostanzialmente è un sistema elettronico di controllo della sensibilità dello sterzo in base alla velocità. Il rapporto di trasmissione dello sterzo variabile accresce il comfort di guida e la stabilità. La regolazione dell'angolo di imbardata migliora inoltre la marcia in rettilineo, in situazioni per cui i due lati della vettura si trovano su diversi fondi stradali (frenata asimmetrica).

Il sistema *DST* (*Dynamic Steering Torque*) ideato da *Bosch* è stato utilizzato di recente dall'*Alfa Romeo*. Questo sistema di sicurezza esegue automaticamente le correzioni al moto di imbardata e controlla anche il sovrasterzo su fondi a bassa aderenza, interagendo con il correttore di sbandata che in questo caso è costituito dal sistema *VDC* (*Vehicle Dynamic Control*), del tutto analogo all'*ESP*<sup>®</sup>. Inoltre, la funzione *MCF* ( *$\mu$ -split Control Function*) interviene in caso di marcia sui fondi ad aderenza differenziata. In questo caso particolare il sistema *DST* permette un controsterzo automatico che consente di controllare la vettura (evitando un testacoda) e nel contempo di fermarsi nel minor spazio possibile (lo spazio di frenata si riduce del 10%). Dunque, il *DST* migliora sia la sicurezza di marcia sia le prestazioni di *handling*.

La maggior parte di questi sistemi hanno come obiettivo il controllo della stabilità del veicolo utilizzando la retroazione della velocità di imbardata e la frenata differenziale gestita elettronicamente. Quindi il momento di imbardata correttivo viene elaborato dal sistema di controllo della stabilità (*ESP*, *DSC*, *VDC*..) ed attuato tramite il sistema *ABS* con la gestione della frenata delle quattro ruote e la modulazione della farfalla dell'acceleratore. L'idea di base è che il guidatore rimanga nell'anello di controllo dell'autoveicolo e che ogni sforzo di controllo migliori solo la tenuta laterale dello stesso. Tuttavia, il modo che risulta più naturale per generare l'azione di controllo sulla dinamica laterale è quello del controllo attivo dello sterzo [11].

Come esempio possiamo considerare l'*Active Steering* che la *BMW* ha introdotto nel 2003 sui modelli della *Serie 5*. L'idea è quella di accoppiare il comando di sterzo del guidatore a quello addizionale del controllo per via meccanica, in modo da consentire il pieno governo sul veicolo da parte del guidatore nel caso in cui venga meno l'azione del sistema di controllo.

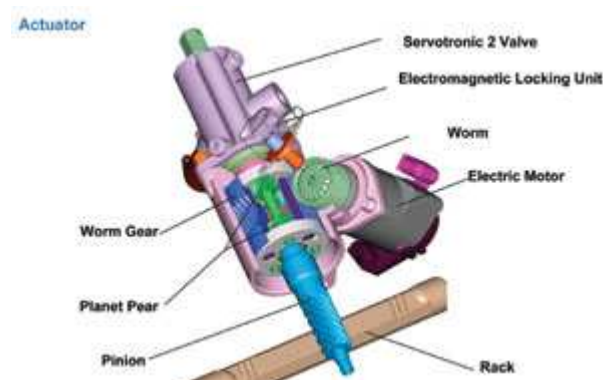


Figura 1.1 Sistema di attuazione dell'*Active Steering* BMW.

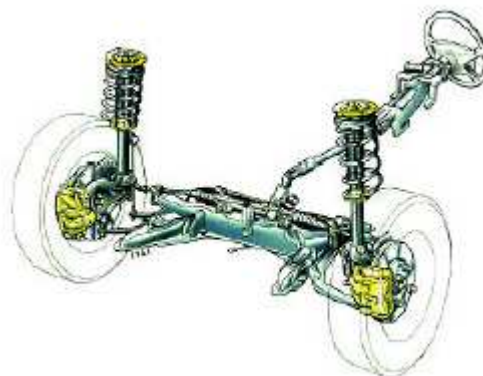
In questo caso l'*Active Steering* è interfacciato con il sistema di controllo della stabilità (*Dynamic Stability Control*). Tale sistema elettronico permette all'impianto sterzante di modificare in modo

mirato l'angolo di sterzata impostato dal guidatore, stabilizzando la vettura più rapidamente di quanto non possa fare il conducente stesso. L'elemento centrale è il cosiddetto sterzo in sovrapposizione, costituito da un ingranaggio planetario integrato nel piantone dello sterzo diviso in due metà, completo di due alberi di entrata ed uno di uscita. Uno degli alberi di entrata è collegato allo sterzo, mentre il secondo viene azionato da un motore elettrico attraverso un ingranaggio elicoidale autobloccante di demoltiplicazione. L'angolo complessivo di sterzata generato all'albero di uscita è composto dall'angolo imposto dal guidatore più o meno l'angolo imposto dal motore elettrico, elaborato da una centralina dedicata e da una serie di sensori che possono rilevare anche le condizioni della superficie stradale. Questo sterzo attivo si coordina anche con il sistema di servosterzo *Servotronic* e consente quindi di avere uno sterzo leggero nel traffico ed uno sterzo più pesante a velocità più elevate.

## 1.1 Sistema distribuito di sterzata

Il progetto di un sistema distribuito di sterzata, il cui controllo costituisce l'argomento principale del presente lavoro, consiste nell'equipaggiare il veicolo in esame di un sistema di sterzata totalmente elettrico, che sia in grado di garantire la stabilità e la manovrabilità del veicolo in presenza di disturbi (come raffiche di vento laterali), ed in caso di condizioni non ottimali di aderenza (causate per esempio da asfalto ghiacciato).

L'idea di base è quella di rimuovere l'impianto sterzante del veicolo originale, costituito dal cinematismo di sterzo a quadrilatero di *Jeantaud* (si veda Paragrafo 3.10 per la trattazione teorica), grazie al quale viene ottenuta l'azione sterzante per mezzo del collegamento meccanico tra il volante e la cremagliera del cinematismo.

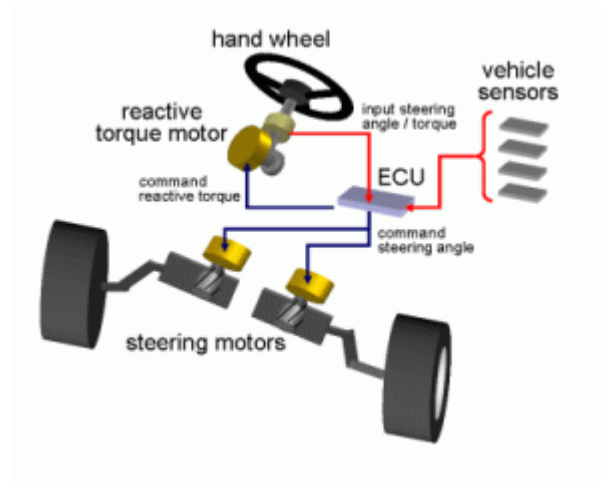


**Figura 1.2** Impianto sterzante convenzionale con cinematismo di Jeantaud.

Una volta rimosso l'impianto sterzante preesistente, la nuova configurazione prevede l'utilizzo di una coppia di attuatori elettrici che consentono di sterzare il veicolo secondo un modello di riferimento, attraverso la rotazione coordinata delle ruote anteriori.

Quello che si richiede ad un siffatto sistema, oltre a consentire la sterzata in normali condizioni di guida, è una ottima reiezione ai disturbi del moto di imbardata, con conseguenti miglioramenti sulla sicurezza attiva, e un miglioramento della stabilità durante la percorrenza di una curva rispetto ad un veicolo convenzionale

Lo schema di principio di un sistema distribuito di sterzata è riportato in Figura 1.3.



**Figura 1.3 Schema di principio di un sistema distribuito di sterzata.**

Con riferimento alla Figura sopra riportata, l'obiettivo principale sarà quello di generare i comandi (*command steering angle*) di attuazione dei due attuatori di sterzata (*steering motors*) a partire dall'angolo di sterzo generato dal guidatore (*input steering angle*) attraverso il movimento del volante (*hand wheel*). In questo caso, il collegamento meccanico previsto dalla soluzione di Figura 1.1 viene rimosso. La tecnica che consente di svincolarsi dal cinematismo meccanico dello sterzo presenta diversi punti a favore tra i quali:

- I. Possibilità di un controllo della sterzata molto raffinato e rapido;
- II. Possibilità di controllare indipendentemente le due ruote anteriori e di disporre di una tipologia di attuazione valida sia per le ruote anteriori che posteriori (estensione alle quattro ruote sterzanti);
- III. Possibilità di particolari configurazioni che portano alla realizzazione di ruote sterzanti per angoli molto ampi (vicino ai 90 gradi) con movimenti innovativi come il *lateral parking* e maggiore finestra di controllo del moto;
- IV. Riduzione dello spazio richiesto all'interno del vano motore e dei pesi.

Una possibile configurazione alternativa alle precedenti, prevede il mantenimento del quadrilatero di *Jeantaud* come organo meccanico di conversione del movimento rotatorio del piantone dello sterzo nel movimento delle ruote. Il piantone però verrebbe rimosso ma si manterrebbe l'accoppiamento cremagliera-pignone. Tale meccanismo potrà essere azionato da un motore elettrico opportunamente comandato in base ai sensori presenti sull'organo di guida.



Questa soluzione, senz'altro più semplice dal punto di vista dell'impatto sulla produzione in serie, possiede alcuni punti a sfavore, in particolare perché i legami meccanici non garantiscono la sufficiente precisione richiesta da un controllo fine della traiettoria.

Infine, la sensoristica necessaria (*vehicle sensors*) per tutti i veicoli dotati di questi sistemi, è maggiore rispetto ai veicoli tradizionali e consiste in genere, in quattro sensori di velocità per le ruote, un sensore di imbardata, un sensore di posizione per lo sterzo ed un accelerometro laterale [3].

## 1.2 Organizzazione della tesi

Premesso ciò, il presente lavoro è stato articolato come segue:

Nel Capitolo 2 è stata fatta una descrizione delle minicar. In particolare, dopo aver riportato gli aspetti normativi che ne definiscono le categorie di omologazione, è stato preso come riferimento il modello *Ginko* della casa costruttrice *Victoria Giotti* e ne sono state riportate le specifiche tecniche.

Nel Capitolo 3 è stato ricavato il modello matematico del veicolo, necessario per poter descrivere la dinamica laterale e poter implementare il sistema di controllo. Attraverso alcune ipotesi semplificative, le più importanti delle quali sono quelle di considerare sospensioni infinitamente rigide, piccoli angoli di sterzo ed accelerazioni di modesta entità, è stato ricavato un semplice modello di veicolo (*modello monotraccia*), che ben si presta a descrivere il moto in direzione trasversale della minicar in esame, viste le limitate prestazioni richieste a questo tipo di veicoli. In particolare è stato poi ricavato un modello matematico che consente di avere come ingressi gli angoli di sterzo delle due ruote dell'assale anteriore (*modello bitraccia*), anziché l'angolo di sterzo del modello monotraccia. Infine è stata riportata la teoria relativa al cinematismo di sterzo a quadrilatero proposto da *Jeantaud*, che rappresenta il meccanismo che più si avvicina a realizzare le condizioni di sterzata cinematica.

Nel Capitolo 4 è stato descritto il moto in curva a regime, necessario per potersi formare una conoscenza dettagliata del sistema da controllare ed utile al fine dell'implementazione del controllo, quindi ne è stata discussa la stabilità statica con l'introduzione della *velocità critica*.

Nel Capitolo 5 è stata invece riportata l'analisi del comportamento dinamico del veicolo. Dopo aver discusso delle condizioni di stabilità dinamica del moto in curva, sono state ricavate le funzioni di trasferimento tra l'ingresso del sistema, rappresentato dall'angolo di sterzo, e le due uscite costituite rispettivamente dalla velocità di imbardata (*yaw rate*) e dall'angolo di assetto (*sideslip angle*). Successivamente è stato riportato lo studio del comportamento dinamico nel dominio della frequenza, con l'ausilio del software *MATLAB*, e nel dominio del tempo, attraverso il software di modellazione e simulazione *DYMOLA/MODELICA*.

Nel Capitolo 6 è stata esposta la trattazione relativa al controllo della velocità di imbardata per mezzo del sistema di sterzata attiva. Il primo passo è stato quello di ricavare una legge di controllo che consenta di considerare un solo angolo di sterzo come ingresso del sistema. Dopodiché è stato proposto un sistema di controllo per un sistema di sterzata distribuito. Con ciò intendiamo che il veicolo sia privo del cinematismo di sterzo e la sterzata sia realizzata per mezzo di due attuatori elettrici, posti in corrispondenza delle due ruote anteriori sterzanti. Per far sì che la sterzata delle due ruote dell'assale anteriore sia coordinata, è stato realizzato un controllo basato sull'imposizione delle condizioni di sterzata cinematica attraverso un feedforward cinematico, mentre per il controllo della velocità di imbardata è stato utilizzato un controllore in retroazione.

Nel Capitolo 7 sono state riportate le simulazioni del controllo ed i relativi risultati. Dopo aver modellato il veicolo, sono state implementate entrambe le tecniche di controllo di cui sopra, attraverso il programma di modellazione e simulazione *DYMOLA/MODELICA*. In particolare, i risultati ottenuti sono stati confrontati con quelli del veicolo privo del sistema di controllo. Infine, sulla base dei risultati delle simulazioni, sono state riportate brevemente le conclusioni sull'efficacia dell'azione di controllo e sono stati proposti possibili scenari di continuazione del presente lavoro.

## 2 Le Microcar

### 2.1 Introduzione

Da qualche anno a questa parte, la necessità di migliorare la qualità dell'aria delle nostre città, ha ravvivato la discussione sull'introduzione di veicoli ecologici. A tal fine una soluzione attuata da diverse case costruttrici è quella della commercializzazione delle microcar. Si tratta di particolari quadricicli a motore equiparati ai ciclomotori. Il codice della strada detta limiti precisi, superati i quali il veicolo non è più considerato un quadriciclo, ma un autoveicolo.

### 2.2 Leggi e normative

L'art 53, comma 1h del Codice della Strada definisce:

*“I motoveicoli sono veicoli a motore, a due, tre o quattro ruote, dei quali fanno parte i quadricicli a motore cioè veicoli a quattro ruote destinati al trasporto di cose con al massimo una persona oltre al conducente nella cabina di guida, ai trasporti specifici e per uso speciale, la cui massa a vuoto non superi le 0,55 t, con esclusione della massa delle batterie se a trazione elettrica, capaci di sviluppare su strada orizzontale una velocità massima fino a 80 km/h. Le caratteristiche costruttive sono stabilite dal regolamento. Detti veicoli, qualora superino anche uno solo dei limiti stabiliti sono considerati autoveicoli “.*

Il comma deve essere integrato e modificato secondo quanto stabilito dall'art. 1, comma 2 e 3, del D.M. 31 gennaio 2003, in SOGU 29/5/2003, Recepimento della Direttiva n. 2002/24 del 18 marzo 2002, relativa all'omologazione dei veicoli a motore a due o tre ruote. Si distinguono:

- I quadricicli leggeri, la cui massa a vuoto è inferiore o pari a 350 kg (categoria L6e), esclusa la massa delle batterie per i veicoli elettrici, la cui velocità massima per costruzione è inferiore o uguale a 45 km/h. Inoltre deve rispettare una delle seguenti caratteristiche:

- I. la cilindrata del motore è inferiore o pari a 50 c.c. per i motori ad accensione comandata;
- II. la potenza massima netta è inferiore o uguale a 4 kW per gli altri motori a combustione interna;
- III. la cui potenza nominale continua massima è inferiore o uguale a 4 kW per i motori elettrici.

Tali veicoli sono conformi alle prescrizioni tecniche applicabili ai ciclomotori a tre ruote della categoria L2e salvo altrimenti disposto da una direttiva CE particolare.

- I quadricicli diversi da quelli di cui sopra, la cui massa a vuoto è inferiore o pari a 400 kg (categoria L7e) (550 kg per i veicoli destinati al trasporto di merci), esclusa la massa delle batterie per i veicoli elettrici, e la cui potenza massima netta del motore è inferiore a 15 kW. Tali veicoli sono considerati come tricicli e sono conformi alle prescrizioni tecniche applicabili ai tricicli della categoria L5e salvo altrimenti disposto da una direttiva CE particolare

Le dimensioni massime autorizzate dei veicoli a motore a due o tre ruote sono le seguenti:

- I. lunghezza: 4,00 m;
- II. larghezza: 1,00 m per i ciclomotori a due ruote;
- III. larghezza: 2,00 m per gli altri veicoli;
- IV. altezza: 2,50 m.

La massa massima dei veicoli a motore a due ruote è la massa tecnicamente ammissibile dichiarata dal costruttore.

Le masse massime a vuoto dei veicoli a motore a quattro ruote sono le seguenti:

- I. 350 kg per i quadricicli leggeri;
- II. 400 kg per i quadricicli diversi da quelli leggeri, destinati al trasporto di persone;
- III. 550 kg per i quadricicli diversi da quelli leggeri, destinati al trasporto di merci

(non sono prese in considerazione le masse delle batterie di propulsione dei veicoli elettrici).

Il limite di peso previsto dalla normativa vuole che per questi veicoli i telai siano necessariamente costruiti con metalli leggeri e che le carrozzerie, anch'esse votate alla massima leggerezza, siano necessariamente in materiali plastici o alluminio o simili, quali ad esempio la vetroresina.

Il carico utile<sup>2</sup> dichiarato del costruttore per i veicoli a motore a tre o quattro ruote non deve essere superiore a:

- I. 200 kg per i quadricicli leggeri;

---

<sup>2</sup> in una automobile in viaggio su strada, il carico utile è costituito dai passeggeri e dal loro bagaglio, mentre l'automobile stessa viene spostata solo strumentalmente al trasporto del carico utile.

II. 1000 kg per i quadricicli diversi da quelli leggeri destinati al trasporto di merci;

III. 200 kg per i quadricicli diversi da quelli leggeri destinati al trasporto di persone.

I veicoli a motore a due, tre o quattro ruote possono essere autorizzati a rimorchiare una massa dichiarata dal costruttore che non deve essere superiore al 50 % della massa a vuoto del veicolo.

Rimanendo nell'ambito normativo è interessante rilevare che le MicroCar rientranti nella categoria dei quadricicli leggeri possono essere guidate a partire da quattordici anni con il Certificato di Idoneità alla Guida di ciclomotori (C.I.G, C.I.G.C o patentino). Rimane non consentito il trasporto di un eventuale passeggero fino a conseguimento della patente categoria A per il quale è richiesta la maggiore età. I quadricicli diversi da quelli leggeri (quadricicli pesanti) possono essere guidati con il possesso della patente sottocategoria A1 a partire dai sedici anni di età. Per il trasporto di un eventuale passeggero rimane il vincolo sopra citato.

Tutti i nuovi modelli di MicroCar sono omologati per il trasporto di 2 o di 4 persone. Per quest'ultime, il trasporto di più passeggeri è consentito solo con il possesso della patente di categoria B.

### 2.3 Victoria Giotti Ginko

Le MicroCar sono un'idea viaggiante, un'esemplificazione perfetta del concetto di dimensioni ridotte al minimo. Grazie a questa peculiarità il loro utilizzo è particolarmente indicato nelle grandi città, dove il traffico veicolare rappresenta un aspetto critico per la viabilità.



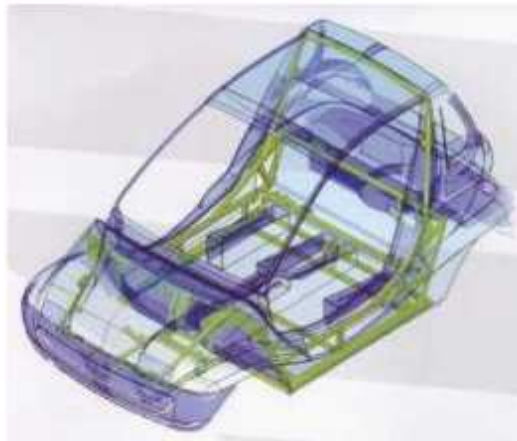
Figura 2.1 Victoria Giotti Ginko.

Il primo modello di MicroCar, attribuito ad un italiano, fu un veicolo a tre ruote chiamato *Sulky* e fece la sua prima apparizione al salone di Milano del 1969. Dal 1973 quel veicolo sbarcò anche in Francia e piacque al punto tale che vi aggiunsero una ruota per dar vita alle microcar a quattro ruote del giorno d'oggi. Sono quasi trecentomila i quadricicli leggeri che circolano in Europa, di cui quarantamila in Italia. Nel 2003 ne sono stati venduti diecimila, duemilacinquecento in più dell'anno precedente.

Una di queste è la *Ginko, city car* della casa costruttrice *Victoria Giotti* ed illustrata in Figura 2.1. Caratterizzata da una apertura ad elitra delle porte è costruita con ben tre diversi sistemi di propulsione.

Un motore diesel da 440 [cc] di potenza 4 [kW] a 3600 [rpm] in grado di sviluppare una coppia di 20 [Nm] a 1600 [rpm]. Una versione a benzina da 505 [cc] di potenza 15 [kW] e coppia 32 [Nm] ad una velocità rispettivamente di 5100 [rpm] e 2150 [rpm]. L'ultimo modello in questione è la *Ginko* elettrica equipaggiata di un motore elettrico a corrente continua ad eccitazione separata con tensione di 48 [V]. La potenza in gioco è quella che consente l'omologazione del veicolo come quadriciclo leggero, cioè 4 [kW] a 3600 [rpm]. La coppia sviluppata è 34 [Nm] a 2260 [rpm].

Un aspetto che non viene trascurato è quello della sicurezza. Un adeguato livello di protezione della cellula dell'abitacolo è stato raggiunto grazie all'introduzione del roll-bar annegato nella vetroresina (si veda Figura 2.2). Inoltre la scocca e l'autotelaio sono stati rinforzati in modo tale da garantire maggiore rigidità e una resistenza superiore alla torsione.



**Figura 2.2** Roll bar inserito nell'autotelaio.

## 2.4 Caratteristiche tecniche

In questo Paragrafo riportiamo le specifiche tecniche del veicolo sul quale è stato svolto lo studio di applicazione di un sistema distribuito di sterzata.

Peso a vuoto (senza motore)	300 [kg]	Dimensioni	
Peso a carico	450 [kg]		
Potenza massima a 3600[rpm]	4 [kW]		
Coppia massima a 1600[rpm]	20 [Nm]	Carreggiata anteriore.	1340 [mm]
Massa motore	53 [kg]		
Coeff. di resistenza aerodinamica $C_x$	0,28	Carreggiata posteriore	1360 [mm]
Sezione frontale veicolo	2,10 [m <sup>2</sup> ]		
Coeff. di resistenza al rotolamento	0,01	Lunghezza massima	2740 [mm]
Raggio di rotolamento ruota	0,28 [m]		
Momento d'inerzia ruota	0,5 [kgm <sup>2</sup> ]	Larghezza massima	1550 [mm]
Potenza elettrica media ausiliari	500 [W]		
Rendimento totale trasmissione	0,92	Altezza massima	1480 [mm]
Rapporto di trasmissione totale	8,445:1		
Trazione	anteriore	Passo	1890 [mm]
Massa azionamento elettrico di trazione	30+14 [kg]		
Momento d'inerzia motore/i trazione	0,022 [kgm <sup>2</sup> ]	Pneumatici	
Massa batterie di trazione	160 [kg]		
Massa modulo Ucs	15 [kg]	Tipo	145/70 R13
Massa Ucs Power electronics module	5 [kg]		

**Tabella 1 Caratteristiche tecniche del veicolo.**





# 3 Modello matematico del veicolo

## 3.1 Introduzione

In tutti i tipi di veicoli vi sono due funzioni fondamentali: la propulsione ed il controllo della traiettoria. Per quanto riguarda il controllo della traiettoria, sia essa vincolata più o meno rigidamente ad una superficie o sia più in generale uno spazio tridimensionale, i veicoli possono essere distinti in due categorie:

- I. Veicoli guidati, o meglio, guidati cinematicamente, la cui traiettoria è determinata da vincoli cinematici appositamente predisposti;
- II. Veicoli non guidati cinematicamente, che possono muoversi su una superficie o in uno spazio tridimensionale, la cui traiettoria è determinata da un sistema di guida, controllato da un pilota o da un guidatore umano o da un dispositivo, generalmente elettronico - meccanico.

Nel caso di veicoli guidati la traiettoria è, come si è detto, determinata da un vincolo cinematico (perciò sono detti anche veicoli a guida vincolata), che esercita le forze necessarie a mantenere il veicolo in traiettoria. Per avere una vera guida cinematica il vincolo dovrebbe essere infinitamente rigido ed infinitamente resistente, per cui il concetto stesso di guida cinematica è un'astrazione, che però si applica in molti casi reali con buona approssimazione. Nel secondo caso la conduzione del veicolo avviene mediante l'azione di forze generate da variazioni di assetto e

dall'azionamento di opportuni dispositivi che a loro volta sono comandati dal sistema che controlla la traiettoria. Tali veicoli possono quindi essere definiti veicoli guidati dinamicamente.

E' a questo punto importante fare una distinzione: a parte i veicoli in cui le forze che devono controllare la traiettoria sono esercitate direttamente mediante propulsori a getto, in alcuni veicoli guidati dinamicamente la generazione delle forze di guida richiede notevoli variazioni dell'assetto del veicolo, in altri al contrario, tali variazioni di assetto sono molto limitate.

Alla prima categoria appartengono tutti i veicoli la cui traiettoria è controllata da forze aero- o idrodinamiche, in cui il sistema di controllo della traiettoria agisce su opportune superfici di governo che modificano l'assetto del veicolo, modificando il valore delle forze che il mezzo nel quale il veicolo si muove esercita su di esso e conseguentemente perturbando la sua traiettoria. Si pensi ad esempio ad un velivolo in volo dentro uno spazio tridimensionale.

Dato che spesso in tali veicoli le variazioni di assetto sono notevoli e che vi è un sensibile ritardo di tempo tra l'azionamento delle superfici di governo e l'effettiva generazione delle forze di guida, la percezione del fatto che il controllo della traiettoria avviene in modo dinamico, cioè che la traiettoria è prodotta dalle forze agenti sul veicolo, è generalmente immediata. Si possono definire tali veicoli pilotati e l'azione di controllo della traiettoria può essere indicata come pilotaggio.

Nel caso invece che le forze di guida siano dovute (almeno prevalentemente) alle forze di contatto *ruota-suolo*, come avviene negli autoveicoli, tale percezione è spesso meno facile. Il controllo della traiettoria avviene con le stesse modalità che caratterizzano i veicoli pilotati: il sistema di guida modifica l'assetto delle ruote direttrici, portandole ad un definito *angolo di deriva* e tale manovra modifica l'assetto di tutto il veicolo rispetto alla direzione di marcia, mettendo in deriva anche le rimanenti ruote e generando così le forze di guida necessarie. La linearità, almeno iniziale, tra l'angolo di deriva e le forze trasversali e l'elevato valore della *rigidezza di deriva* delle ruote (si veda Paragrafo 3.5), fa sì che la percezione del guidatore sia quella di una guida più di tipo cinematico che dinamico. Sembra cioè che le ruote siano in rotolamento puro e che la traiettoria sia rigidamente vincolata alla posizione dei piani medi delle ruote. I veicoli in cui si verifica questa circostanza possono essere definiti guidati dinamicamente e l'azione di controllo della traiettoria può essere definita guida.

Questa particolarità ha a lungo influenzato lo studio del comportamento dell'autoveicolo, dando origine al concetto di sterzata cinematica e, in un certo qual modo, nascondendo la vera natura dei fenomeni in gioco.

La percezione che il guidatore ha del comportamento del veicolo coincide in realtà con questa impostazione cinematica, almeno fino al raggiungimento di elevati valori dell'angolo di deriva. Oltre tali valori il guidatore ha l'impressione di perdere il controllo del mezzo, in particolare se ciò avviene in modo improvviso ed inaspettato. Questa sensazione è confermata dalla circostanza che, in normali condizioni della strada ed in particolare nel caso di pneumatici radiali, gli angoli di deriva divengono di valore apprezzabile solo in prossimità del raggiungimento dei valori limite della forza trasversale [4].

Per lo sviluppo del modello dell'autoveicolo è stata innanzitutto caratterizzata la sua cinematica, attraverso le equazioni di congruenza, poi sono state scritte le equazioni di equilibrio, che ne definiscono la dinamica, ed infine sono state imposte le equazioni costitutive, che vanno a modellare il comportamento di alcuni componenti fondamentali come ad esempio le ruote. Per comprendere i principali aspetti del comportamento direzionale del veicolo automobile è bene considerare modelli molto semplici, con pochissimi *g.d.l.*, ma che permettono ugualmente di descrivere gli aspetti salienti del moto, anche se solo in particolari condizioni di impiego.

### 3.1.1 Ipotesi semplificative

E' sempre bene avere presenti le ipotesi fatte nello sviluppo di un modello matematico. Si eviterà così di impiegare il modello in modo inappropriato, ossia per studiare casi che non verificano adeguatamente le ipotesi fatte. Per gli scopi sopra specificati è stato sviluppato un modello dinamico piuttosto semplice dell'autovettura in questione, accettando l'approssimazione di descrivere solo moti piani dello chassis, seguendo l'approccio descritto in [5] e [6].

Per prima cosa si può supporre che il veicolo si muova su strada piana e orizzontale, assimilabile ad un piano geometrico. Essendo interessati al solo comportamento direzionale, si può inoltre assumere di evitare repentine frenature ed accelerazioni, ovvero di avere un velocità di avanzamento poco variabile. Queste ipotesi permettono di trascurare i moti di scuotimento e beccheggio della carrozzeria, che è supposta perfettamente rigida.

Tuttavia il rollio della carrozzeria è più delicato da trascurare. Anche percorrendo una curva a velocità costante e su strada piana, un po' di rollio è sempre presente. Per avere piccole inclinazioni laterali della carrozzeria si è costretti a porre delle limitazioni sulla accelerazione trasversale, ammettendo di percorrere solo curve ad ampio raggio ed a velocità non troppo elevata. I limiti effettivi dipendono fortemente dalla rigidità al rollio dell'automobile in esame. Una ovvia conseguenza di questa ipotesi è che ogni punto della carrozzeria si mantiene sempre alla stessa distanza dalla strada, come se le sospensioni fossero infinitamente rigide<sup>3</sup>. Si ha quindi un moto piano.

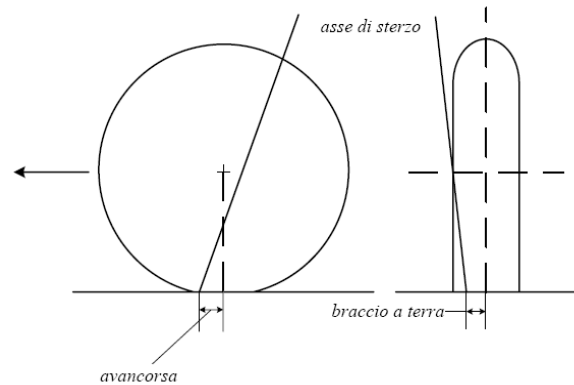
Evitando brusche frenate ed accelerazioni, si hanno piccoli scorrimenti longitudinali degli pneumatici rispetto alla strada. Così piccoli da poter essere trascurati. La velocità di rotazione delle ruote è quindi univocamente determinata dalla velocità di avanzamento del veicolo ed in ogni caso, l'inerzia delle stesse ruote ha piccola influenza sulla dinamica dell'intero veicolo.

Le ruote anteriori sono anche sterzanti e, a rigore, a causa dell'elasticità della tiranteria di sterzo e dei braccetti delle sospensioni, il valore dell'angolo di sterzo delle ruote non è univocamente determinato dalla posizione del volante. Per semplicità si può supporre di avere un sistema di guida perfettamente rigido. In tal modo la posizione angolare delle ruote sterzanti è data e non costituisce una variabile. Inoltre, le ruote anteriori hanno massa molto inferiore rispetto al resto del veicolo. Pertanto il loro movimento di sterzata non ha influenza apprezzabile sulla posizione del baricentro del veicolo stesso.

---

<sup>3</sup> L'ipotesi di poter supporre infinitamente rigide le sospensioni può essere accettata a causa delle limitate prestazioni richieste alle microcar [7].

Per mantenere piana la cinematica del modello, si assimila l'asse di sterzo di ciascuna ruota anteriore ad un asse verticale alla strada. In realtà è un asse sghembo la cui intersezione con la strada dista, dal centro dell'impronta dello pneumatico, dell'avancorsa in direzione longitudinale e del braccio a terra in direzione trasversale, come illustrato in Figura 3.1. Entrambe queste lunghezze però non sono superiori a qualche centimetro e vengono per il momento trascurate supponendo che l'asse di sterzo di ciascuna ruota passi per il centro dell'impronta a terra.



**Figura 3.1** Asse di sterzo e definizione di avancorsa e braccio a terra.

Ultima, ma non meno importante, è l'ipotesi di piccoli gradi di sterzo delle ruote, che ben si concilia con la precedente ipotesi di curve a largo raggio. In definitiva ne risulta un modello con tre soli gradi di libertà, in cui il veicolo è schematizzato come un unico corpo rigido in moto piano. Ognuna delle precedenti ipotesi può essere rimossa, ma spesso il prezzo da pagare in termini di complicazione del modello è abbastanza alto.

### 3.2 Dal veicolo al modello matematico

Sulla base delle precedenti ipotesi, si procede a formulare matematicamente un modello del veicolo in questione mediante i seguenti tre gruppi di equazioni, fra loro distinti: equazioni di congruenza, equazioni di equilibrio ed equazioni costitutive.

Un possibile schema è rappresentato in Figura 3.2. Si tratta di un unico corpo rigido di massa  $m$  e baricentro  $G$ . In realtà il veicolo dispone di due ruote sterzanti, ma, come già detto, si assume che la loro massa sia così piccola da non influenzare la posizione del baricentro. Per consuetudine, si definisce un sistema di riferimento cartesiano solidale al veicolo. L'asse  $x$  viene assunto parallelo alla strada e diretto in avanti, l'asse  $z$  ortogonale alla strada e diretto verso l'alto e l'asse  $y$  perpendicolare agli altri due e diretto verso sinistra (terna destrogira).

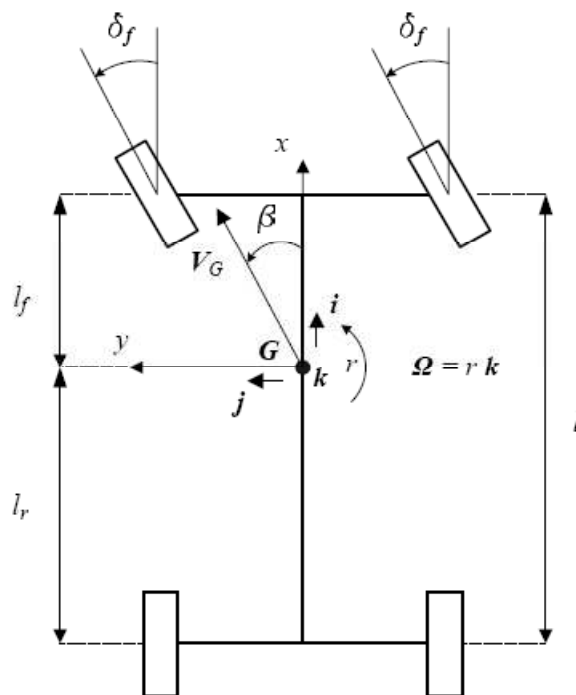


Figura 3.2 Modello di veicolo a tre gradi di libertà.

In generale questo sistema di riferimento non coincide con la terna centrale di inerzia (si veda Appendice A).

Se però si assume che il veicolo sia simmetrico rispetto al piano longitudinale contenente i due assi  $x$  e  $z$ , almeno l'asse  $y$  è centrale di inerzia e quindi si annullano i prodotti di inerzia  $J_{xy}$  e  $J_{yz}$  mentre è in generale non nullo il prodotto d'inerzia  $J_{zx}$ . Sono sempre non nulli i tre momenti d'inerzia  $J_x$ ,  $J_y$  e  $J_z$ . Si indica con  $\boldsymbol{\Omega} = r \cdot \mathbf{k}$  la *velocità di imbardata* (yaw rate) del veicolo, dove  $\mathbf{k}$  è un versore ortogonale al piano stradale e diretto verso l'alto. Pertanto,  $r$  è positiva se il corpo ruota in senso

antiorario. La velocità assoluta del baricentro è indicata con  $V_G$  e la posizione di questo rispetto al veicolo è definita dalle lunghezze  $l_f$  e  $l_r$  (dette *semipassi*). Con  $l = l_f + l_r$  e  $t$  si indicano rispettivamente il *passo* (*wheelbase*) e la *carreggiata* (*track*) del veicolo, entrambe misurate dai centri delle ruote. Carreggiata anteriore e posteriore sono supposte uguali.

### 3.3 Equazioni di congruenza

Come accennato, l'angolo di deriva  $\alpha$  individua la direzione della velocità del centro della ruota rispetto al piano di simmetria longitudinale della ruota stessa. Esso viene quindi assunto positivo se diretto in senso orario.

Avendo schematizzato il veicolo come un unico corpo rigido, la velocità del baricentro  $V_G$  e la velocità di imbardata  $r$  determinano univocamente gli angoli di deriva delle quattro ruote.

Come indicato in Figura 3.3, è conveniente esprimere la velocità assoluta  $V_G$  del baricentro  $G$  utilizzando un sistema di riferimento cartesiano  $x, y, z$ ;  $G$  solidale con il veicolo e quindi detto sistema di assi corpo, in cui il versore  $\mathbf{i}$  sia diretto longitudinalmente verso la direzione di avanzamento, il versore  $\mathbf{j}$  sia diretto trasversalmente verso sinistra e il terzo asse, individuato da  $\mathbf{k}$ , sia ortogonale alla strada e diretto verso l'alto, come già accennato. Di solito si pone l'origine di questo sistema di assi in  $G$ . Si ha in questo modo  $V_G = (u, v, 0)$ , ovvero

$$V_G = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} \quad (3.1)$$

La componente  $u$  è detta velocità di avanzamento mentre la componente  $v$  è detta velocità laterale del veicolo. Essendo l'origine del sistema di riferimento solidale al veicolo, fissato nel baricentro, l'espressione precedente non esprime la velocità del baricentro rispetto a questo riferimento, ma solo le componenti della velocità assoluta di  $G$  in direzione longitudinale e trasversale al veicolo.

Nel sistema di riferimento prescelto, la velocità angolare del veicolo ha, nelle ipotesi fatte, due componenti nulle; si ha cioè solo imbardata senza beccheggio e rollio

$$\boldsymbol{\Omega} = (0, 0, r) \quad (3.2)$$

A questo punto consideriamo le velocità assolute dei centri delle ruote, in modo da legare gli angoli di deriva alla velocità di imbardata  $r$  ed alle componenti  $u$  e  $v$ .

Con riferimento alla Figura 3.3, i centri di entrambe le ruote hanno velocità in senso trasversale pari a  $v + rl_f$ , così come quelli delle ruote posteriori hanno una velocità trasversale pari a  $v - rl_r$ . In senso longitudinale, i centri delle due ruote sul fianco sinistro hanno velocità pari a  $u - \frac{rt}{2}$ , mentre quelli delle ruote sul fianco destro hanno velocità pari a  $u + \frac{rt}{2}$ , cioè

$$\begin{aligned} V_{f1} &= \left( u - \frac{rt}{2}, v + rl_f \right) \\ V_{f2} &= \left( u + \frac{rt}{2}, v + rl_f \right) \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} V_{r1} &= \left( u - \frac{rt}{2}, v - rl_r \right) \\ V_{r2} &= \left( u + \frac{rt}{2}, v - rl_r \right) \end{aligned} \quad (3.4)$$

Ne seguono subito le seguenti relazioni rigorose, in cui le prime due sono relative alle ruote anteriori e le altre alle ruote posteriori:

$$\begin{aligned} \tan(\delta_f - \alpha_{f1}) &= \frac{v + rl_f}{u - \frac{rt}{2}} \\ \tan(\delta_f - \alpha_{f2}) &= \frac{v + rl_f}{u + \frac{rt}{2}} \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} \tan(-\alpha_{r1}) &= \frac{v - rl_r}{u - \frac{rt}{2}} \\ \tan(-\alpha_{r2}) &= \frac{v - rl_r}{u + \frac{rt}{2}} \end{aligned} \quad (3.6)$$

dove con  $\delta_f$  si è indicato l'angolo di sterzo, supposto per il momento uguale per entrambe le ruote dell'assale anteriore. Se si tiene conto che in normali condizioni di esercizio  $u \gg |r| t/2$ , si ottiene l'importante risultato che le due ruote di uno stesso assale lavorano con angoli di deriva quasi uguali. Si può allora indicare con  $\alpha_f$  l'angolo di deriva delle ruote anteriori e con  $\alpha_r$  l'angolo di deriva delle ruote posteriori.

Tenuto conto di questa approssimazione, le precedenti relazioni si riducono a due

$$\begin{aligned} \tan(\delta_f - \alpha_f) &= \frac{v + rl_f}{u} \\ \tan(-\alpha_r) &= \frac{v - rl_r}{u} \end{aligned} \quad (3.7)$$

Nella realtà, in condizioni di normale funzionamento l'angolo di deriva della ruota esterna alla curva è lievemente inferiore rispetto a quello della ruota interna. Ciò discende da considerazioni puramente cinematiche.

Infatti, come mostrato in Figura 3.4, la posizione del centro di istantanea rotazione definisce univocamente tutti gli angoli di deriva, note che siano le posizioni delle ruote, ovvero i loro angoli di sterzata e di convergenza.

Per semplificare ulteriormente, si può considerare il fatto che la velocità di avanzamento  $u$  è, di norma, ben più elevata della velocità laterale  $v$  e delle velocità dovute alla presenza di  $r$ . Si ha cioè che  $u \gg |v + rl_f|$  e  $u \gg |v - rl_r|$ .

E' quindi legittimo confondere, nelle relazioni sopra, l'arco con la tangente ed ottenere le seguenti equazioni di congruenza linearizzate

$$\begin{aligned}\delta_f - \alpha_f &= \frac{v + rl_f}{u} \\ -\alpha_r &= \frac{v - rl_r}{u}\end{aligned}\quad (3.8)$$

che legano le velocità  $u, v, r$  agli angoli di deriva  $\alpha_f$  e  $\alpha_r$ . Se valgono le stesse ipotesi, anche l'angolo di assetto  $\beta = \tan^{-1}(\frac{v}{u})$  di Figura 3.3 può essere valutato mediante una relazione linearizzata

$$\beta = \frac{v}{u} \quad (3.9)$$

Si ricorda che, mentre le (3.5) e (3.6) valgono sempre, le (3.8) possono essere utilizzate solo quando c'è preponderanza di  $u$  rispetto a tutte le altre velocità. A meno che non venga espressamente dichiarato il contrario, da questo punto in poi si dà per scontato di trovarsi in condizioni normali di funzionamento, con questa ipotesi perfettamente verificata.

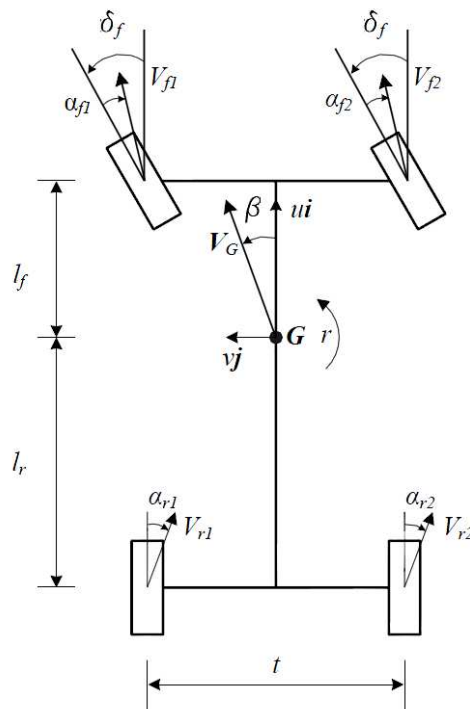


Figura 3.3 Definizione delle grandezze cinematiche nel modello di veicolo.

Sottraendo membro a membro le due equazioni di congruenza (3.8) si ottiene l'importante relazione cinematica

$$\delta_f = (l_f + l_r) \frac{r}{u} + \alpha_f - \alpha_r = \frac{l}{R} + \alpha_f - \alpha_r \quad (3.10)$$

dove si è introdotta la lunghezza (con segno)



$$R = \frac{u}{r} \quad (3.11)$$

La lunghezza  $R$  rappresenta semplicemente la distanza del centro di istantanea rotazione  $C$  dall'asse del veicolo di Figura 3.4. Il punto  $A$  sull'asse del veicolo ottenuto portando la perpendicolare da  $C$  ha infatti velocità laterale nulla e velocità assoluta pari ad  $u$ .

La lunghezza  $R$  è positiva se  $C$  si trova sulla sinistra del veicolo ( $r > 0$ ), come in Figura 3.4.

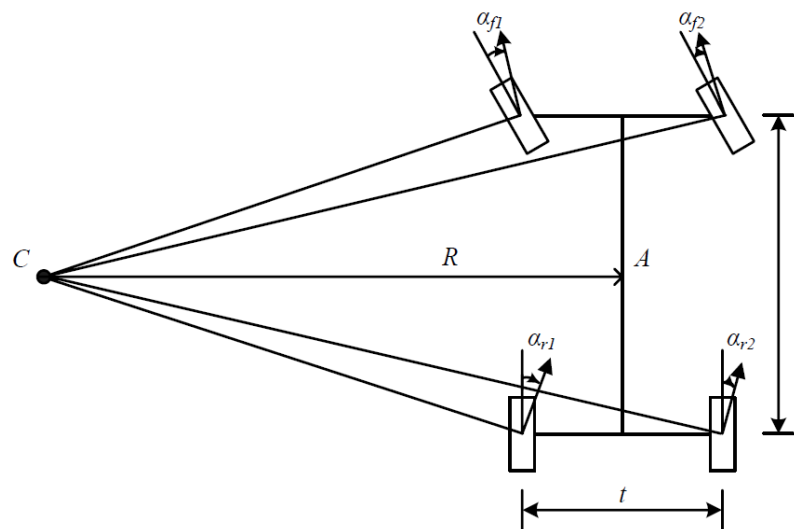
Le equazioni di congruenza possono essere espresse in una forma alternativa utilizzando le definizioni di  $\beta$  ed  $R$ , cioè

$$\begin{aligned} \delta_f - \alpha_f &= \beta + \frac{l_f}{R} \\ -\alpha_r &= \beta - \frac{l_r}{R} \end{aligned} \quad (3.12)$$

da cui è immediato ricavare la relazione seguente

$$\beta = \frac{1}{l} [l_r (\delta_f - \alpha_f) - l_f \alpha_r] \quad (3.13)$$

in generale vale  $\beta R = \frac{v}{r}$ . Si parla di condizioni stazionarie di funzionamento se le grandezze in gioco ( $u, v, r, \delta$  e quindi anche  $\alpha_f$  e  $\alpha_r$ ) rimangono costanti nel tempo. In questo caso, tutti i punti del veicolo percorrono traiettorie circolari con centro  $C$ , che rimane fisso avendo, oltre alla velocità, anche accelerazione nulla<sup>4</sup>. In queste e sole particolari condizioni di funzionamento, la distanza  $R$  rappresenta anche il raggio di curvatura della traiettoria del punto  $A$  sull'asse del veicolo che ha la minima distanza da  $C$ .



**Figura 3.4** Relazione tra gli angoli di deriva delle quattro ruote e la posizione del centro di istantanea rotazione.

<sup>4</sup> Si tratta della cosiddetta manovra di “steering pad”.

La quantità  $\delta_0 = \frac{l}{R}$  è detta *angolo di Ackermann* (si veda Paragrafo 3.10.2) e rappresenta l'angolo di sterzo necessario per percorrere una curva di raggio costante pari ad  $R$ , supponendo di avere angoli di deriva nulli (*sterzata cinematica*). In altre parole è quell'angolo compreso tra l'angolo di sterzo esterno e l'angolo di sterzo interno alla curva, in condizioni di sterzata cinematica.

Infine vale la pena osservare che, a causa della presenza dell'angolo di deriva le ruote non impongono la direzione delle velocità dei centri delle ruote stesse. Lo sarebbero solo in condizioni di sterzata cinematica (angoli di deriva nulli).

### 3.4 Equazioni di equilibrio

Per scrivere le equazioni di equilibrio occorre effettuare due operazioni distinte: il calcolo delle accelerazioni e la valutazione delle forze e momenti agenti.

#### 3.4.1 Calcolo delle accelerazioni

L'espressione dell'accelerazione del baricentro si ottiene derivando la velocità  $\mathbf{V}_G$  rispetto al tempo  $t$ . Occorre però tener presente che i versori cambiano direzione durante il moto per cui  $\frac{d\mathbf{i}}{dt} = r\mathbf{j}$  e  $\frac{d\mathbf{j}}{dt} = -r\mathbf{i}$ . Pertanto si ha

$$\mathbf{a}_G = \frac{d\mathbf{V}_G}{dt} = \dot{u}\mathbf{i} + ur\mathbf{j} + \dot{v}\mathbf{j} - vr\mathbf{i} \quad (3.14)$$

Raccogliendo i termini in  $\mathbf{i}$  e  $\mathbf{j}$  è possibile scomporre l'accelerazione nelle due componenti longitudinale  $a_x$  e laterale  $a_y$  rispetto all'asse del veicolo. Infatti

$$\mathbf{a}_G = (\dot{u} - vr)\mathbf{i} + (\dot{v} + ur)\mathbf{j} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} \quad (3.15)$$

L'accelerazione laterale può essere scritta in funzione di  $R$

$$a_y = \dot{v} + ur = \dot{v} + \frac{u^2}{R} \quad (3.16)$$

e a regime vale

$$\tilde{a}_y = ur = \frac{u^2}{R} \quad (3.17)$$

così da avere  $a_y = \dot{v} + \tilde{a}_y$ . Se si rapporta  $\tilde{a}_y$  all'accelerazione di gravità  $g$  si ottiene

$$k = \frac{\tilde{a}_y}{g} \quad (3.18)$$

il cui valore massimo è spesso detto *tenuta in curva*.

Se si considera che la traiettoria del baricentro  $G$  è sempre tangente a  $\mathbf{V}_G$ , si può scomporre  $\mathbf{a}_G$  in accelerazione normale o centripeta  $a_n$  e in accelerazione tangenziale  $a_t$ . Più precisamente, si ha

$$\mathbf{a}_G = a_t\mathbf{t} + a_n\mathbf{n} \quad (3.19)$$

dove si sono usati i versori  $\mathbf{t} = (\cos\beta, \sin\beta)$  e  $\mathbf{n} = (-\sin\beta, \cos\beta)$  parallelo e normale a  $\mathbf{V}_G$ .

Si noti che per portare  $\mathbf{t}$  su  $\mathbf{n}$  è necessaria una rotazione antioraria di  $90^\circ$ . Le due componenti sono allora date da

$$a_t = \mathbf{a}_G \cdot \mathbf{t} = a_x \sin \beta + a_y \cos \beta = \frac{\dot{u} u + \dot{v} v}{\sqrt{u^2 + v^2}} \quad (3.20)$$

e

$$a_n = \mathbf{a}_G \cdot \mathbf{n} = -a_x \cos \beta + a_y \sin \beta = \frac{r(u^2 + v^2) + \dot{v} u - \dot{u} v}{\sqrt{u^2 + v^2}} \quad (3.21)$$

dove si è tenuto conto che  $\sin \beta = v/V_G$  e  $\cos \beta = u/V_G$ .

A questo punto, è immediato ricavarsi anche l'espressione generale del raggio di curvatura  $R_G$  della traiettoria di  $G$

$$R_G = \frac{V_G^2}{a_n} = \frac{(u^2 + v^2)^{3/2}}{r(u^2 + v^2) + \dot{v} u - \dot{u} v} = \frac{V_G}{r - \frac{\dot{u} v}{V_G^2} + \frac{\dot{v} u}{V_G^2}} \quad (3.22)$$

Si tratta di una quantità con segno:  $R_G$  è positivo se il centro di curvatura si trova sulla sinistra del veicolo, negativo in caso contrario. Poiché nella maggioranza delle manovre standard l'accelerazione longitudinale è sempre molto bassa, si può assumere  $\dot{u} = 0$ . Considerando poi che  $\frac{u}{V_G} \cong 1$ , si perviene alla seguente relazione approssimata per il raggio di curvatura della traiettoria del baricentro, valida anche in condizioni di moto vario

$$R_G \cong \frac{V_G}{r + \frac{\dot{v}}{V_G}} \cong \frac{u}{r + \frac{\dot{v}}{u}} \quad (3.23)$$

La presenza di  $\dot{v}$  può rendere  $R_G$  ben diverso da  $R = u/r$ .

Nel caso di moto in condizioni stazionarie, ovvero con  $\dot{u} = \dot{v} = 0$ , l'accelerazione di  $G$  è solo centripeta, ovvero  $a_t = 0$  ed  $a_n = V_G r$ . Rispetto al riferimento  $x, y, z; G$  solidale al veicolo, si hanno a regime  $a_x = -v r$  e  $a_y = \tilde{a}_y = u r = \frac{u^2}{R}$ . Infine l'accelerazione angolare è data semplicemente da  $\dot{\boldsymbol{\Omega}} = (0, 0, \dot{r})$ .

### 3.4.2 Forze e momenti

Su qualsiasi veicolo terrestre agiscono tre tipi di forze: la forza peso dovuta alla gravità, le reazioni sulle quattro ruote dovute al contatto pneumatico-strada e le forze aerodinamiche dovute alla presenza dell'aria. Le azioni esterne agenti sul veicolo danno luogo, in ogni istante, ad una forza risultante agente lungo una certa retta di applicazione. Rispetto al sistema di riferimento di assi corpo  $x, y, z; G$ , si indicano con  $X, Y, Z$  le tre componenti della forza risultante agente globalmente sul veicolo e con  $L, M, N$  le sue tre componenti di momento.

Le tre equazioni di equilibrio dell'unico corpo rigido in moto piano (come abbiamo schematizzato il nostro autoveicolo grazie alle ipotesi semplificative), di massa  $m$  e momento d'inerzia  $J = J_z$  rispetto all'asse verticale passante per  $G$ , si possono quindi indicare sinteticamente nel modo seguente

$$\begin{aligned} m a_x &= X \\ m a_y &= Y \\ J \dot{r} &= N \end{aligned} \quad (3.24)$$

dove si è indicato con  $X$  la sommatoria delle forze longitudinali, con  $Y$  la sommatoria delle forze laterali e con  $N$  la sommatoria dei momenti rispetto all'asse  $z$ .

Le espressioni delle accelerazioni longitudinale e laterale sono state ricavate nel paragrafo precedente. A rigore, nella prima equazione si dovrebbe utilizzare la massa apparente traslante  $m_{at}$  che tiene conto anche dell'inerzia delle masse in moto rispetto alla cassa del veicolo (ruote, motore, etc.) in base alla relazione

$$T = \frac{1}{2} m_{at} u^2 \quad (3.25)$$

in cui  $T$  indica l'energia cinetica globale del veicolo. Nelle marce lunghe la massa apparente traslante è di poco superiore alla massa totale indicata con  $m$ , mentre in prima marcia  $m_{at}$  può essere anche due volte più grande rispetto ad  $m$ , soprattutto a causa dell'inerzia dell'albero del motore e della sua notevole velocità di rotazione<sup>5</sup>. Si ricordi che l'equazione di equilibrio alla rotazione è così semplice solo quando il punto scelto è il baricentro del sistema, oppure è un punto fisso.

Nell'ambito del modello piano in esame, le principali forze agenti sul veicolo sono le forze trasmesse dagli pneumatici, come indicato in Figura 3.5, la quale servirà anche a definire le direzioni positive delle singole componenti delle forze.

A queste si possono aggiungere la resistenza aerodinamica  $X_a = -0.5\rho S C_x u^2$  e l'eventuale spinta laterale del vento. Indichiamo con  $F_{x_{ij}}$  le componenti longitudinali e con  $F_{y_{ij}}$  le componenti trasversali delle forze trasmesse dalla strada alle quattro ruote e con i pedici

<sup>5</sup> Dato che gli studi sulla guidabilità riguardano velocità di avanzamento abbastanza elevate, ottenibili solo con marce lunghe, è lecito utilizzare  $m$  anche nella prima equazione delle (3.24).

$i = (f(\text{anteriore}), r(\text{posteriore}))$  e  $j = (1(\text{interna}), 2(\text{esterna}))$ . I termini longitudinale e trasversale sono qui relativi alla ruota e non al veicolo. Per semplicità si suppongono nulli tutti i momenti di autoallineamento  $M_{z_{ij}}$  (si veda Paragrafo 3.5). Infatti, lo spostamento di pochi centimetri della retta di applicazione delle forze laterali avrebbe ben poca influenza sulla dinamica globale del veicolo. Nelle  $F_{x_{ij}}$  vengono inglobate le forze di trazione e le resistenze di rotolamento, anche se queste ultime sono spesso di entità trascurabile durante il moto in curva.

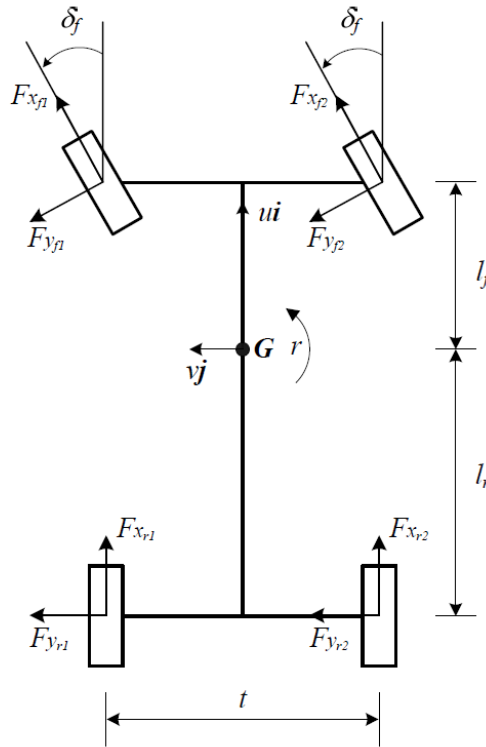


Figura 3.5 Forze agenti sul modello di veicolo.

Con riferimento alla Figura 3.5, tenendo conto che per angoli di sterzo fino a  $15^\circ$  è lecito porre  $\cos \delta_f \cong 1$  e  $\sin \delta_f \cong \delta_f$ , si ottengono le tre equazioni di equilibrio approssimate

$$\begin{aligned}
 m(\dot{u} - vr) &= (F_{x_{f1}} + F_{x_{f2}}) - (F_{y_{f1}} + F_{y_{f2}})\delta_f + (F_{x_{r1}} + F_{x_{r2}}) - \frac{1}{2}\rho S C_x u^2 \\
 m(\dot{u} + vr) &= (F_{x_{f1}} + F_{x_{f2}})\delta_f + (F_{y_{f1}} + F_{y_{f2}}) + (F_{y_{r1}} + F_{y_{r2}}) \\
 J\dot{r} &= \left[ (F_{x_{f1}} + F_{x_{f2}})\delta_f + (F_{y_{f1}} + F_{y_{f2}}) \right] l_f - (F_{y_{r1}} + F_{y_{r2}})l_r \\
 &\quad - \left[ (F_{x_{f1}} - F_{x_{f2}}) + (F_{x_{r1}} - F_{x_{r2}}) - (F_{y_{f1}} - F_{y_{f2}})\delta_f \right] \frac{t}{2}
 \end{aligned} \tag{3.26}$$

Per compattare la notazione è conveniente sommare i contributi delle due ruote di uno stesso asse ponendo

$$\begin{aligned}
 F_{x_f} &= F_{x_{f1}} + F_{x_{f2}} \\
 F_{x_r} &= F_{x_{r1}} + F_{x_{r2}}
 \end{aligned} \tag{3.27}$$

$$\begin{aligned} F_{y_f} &= F_{y_{f1}} + F_{y_{f2}} \\ F_{y_r} &= F_{y_{r1}} + F_{y_{r2}} \end{aligned} \quad (3.28)$$

Nel caso in cui la ripartizione della coppia motrice fra le due ruote dello stesso asse avvenga mediante l'uso di un differenziale ordinario (e quindi non autobloccante<sup>6</sup>), si ha che  $F_{x_{f1}} = F_{x_{f2}}$  ed  $F_{x_{r1}} = F_{x_{r2}}$ , con il conseguente annullamento di parte dell'ultima riga della terza equazione in (3.26). Rimane però il termine  $\left[-(F_{y_{f1}} - F_{y_{f2}})\delta_f\right]\frac{t}{2}$  che per comodità di trattazione è prassi trascurare<sup>7</sup>. Ciò limiterebbe l'uso del modello a manovre con piccole accelerazioni laterali, anche se ciò viene spesso disatteso nella pratica corrente. In definitiva, in base a quanto detto, si possono scrivere le equazioni di equilibrio nella seguente forma

$$\begin{aligned} m(\dot{u} - vr) &= F_{x_f} - F_{y_f}\delta_f + F_{x_r} - \frac{1}{2}\rho S C_x u^2 \\ m(\dot{v} + ur) &= F_{x_f}\delta_f + F_{y_f} + F_{y_r} \\ J\dot{r} &= (F_{x_f}\delta_f + F_{y_f})l_f - F_{y_r}l_r \end{aligned} \quad (3.29)$$

nelle quali compaiono le componenti longitudinali e laterali delle forze esercitate globalmente da ciascun assale.

<sup>6</sup> A differenza di un differenziale ordinario, un differenziale autobloccante consente di diversificare la coppia trasmissibile ai due semiassi in funzione della coppia motrice.

<sup>7</sup> Ciò equivale a considerare  $F_{y_{f1}} \cong F_{y_{f2}}$ , ma, come mostrano le relazioni (3.3) e (3.4), anche se le ruote dello stesso asse lavorano con angoli di deriva quasi uguali questo non basta per avere forze laterali quasi uguali.

### 3.5 Equazioni costitutive (modello di pneumatico linearizzato)

Lo pneumatico è uno dei componenti fondamentali dell'autoveicolo. La sua caratteristica fondamentale è la deformabilità che, accompagnata ad una relativa leggerezza, rende possibile il mantenimento del contatto *ruota-strada* anche in presenza di piccole asperità. In presenza di una adeguata pressione di gonfiaggio, esso è in grado di trasmettere forze considerevoli al cerchio cui è fissato e quindi al veicolo.

Le prestazioni di un autoveicolo sono largamente influenzate dalle caratteristiche di aderenza e deformabilità degli pneumatici utilizzati. Le forze che consentono di guidarlo nascono infatti nelle zone di contatto fra pneumatici e strada (*impronte di contatto*).

Per completare il modello del veicolo, non resta quindi che definire il comportamento di ciascun pneumatico.

La forza laterale  $F_{y_{ij}}$ , esercitata dalla strada su ciascuna ruota, dipende principalmente dal corrispondente angolo di deriva  $\alpha_{ij}$ , ma non solo. Anche considerando noto il coefficiente di aderenza, si ha una influenza non trascurabile del carico verticale  $F_{z_{ij}}$ , ed anche *dell'angolo campanatura*  $\gamma_{ij}$  e della forza longitudinale  $F_{x_{ij}}$ . Tener conto di tutti questi fattori non è facile e non esiste una soluzione ottimale, ma sono utilizzati vari compromessi tra semplicità e completezza.

Per ciò che riguarda l'influenza dell'angolo di camber, c'è da dire che la presunta trascurabilità del moto di rollio rende trascurabili anche le variazioni di angolo di camber delle singole ruote. Dato che in marcia rettilinea le due ruote di un assale hanno angoli opposti ( $\gamma_{i1} = -\gamma_{i2}$ ), si ha l'annullamento reciproco della spinta di camber quando si considera la somma  $F_{y_i}$  delle forze laterali agenti sulle due ruote di uno stesso assale.

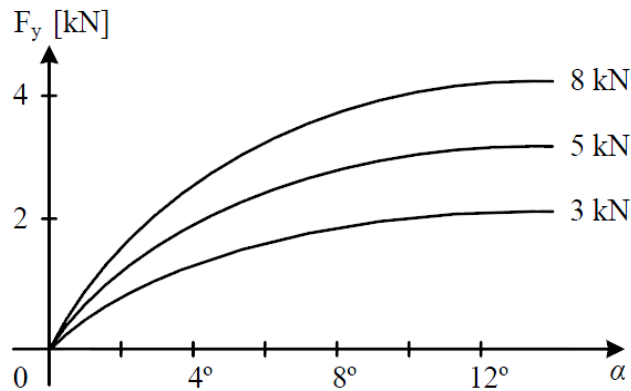
Premesso ciò, in questa trattazione utilizzeremo il modello di pneumatico linearizzato, il modello più semplice, in quanto ipotizza un legame lineare tra forza laterale ed angolo di deriva. In realtà, il modulo della forza  $F_{y_{ij}}$  cresce all'aumentare dell'angolo  $\alpha_{ij}$ , dapprima linearmente, poi, all'approssimarsi delle condizioni limite di aderenza, sempre più lentamente sino a rimanere quasi costante o a mostrare una leggera diminuzione in condizioni di forte strisciamento. L'andamento della forza trasversale in funzione dell'angolo di deriva, per uno pneumatico radiale, è mostrato nella Figura 3.6. La pendenza della curva nell'origine viene di solito definita rigidità di deriva ed indicata con il simbolo  $C_\alpha$ . La forza di deriva può essere espressa per bassi valori di  $\alpha$  come

$$F_{y_{ij}} = C_{\alpha_{ij}} \alpha_{ij} \quad (3.30)$$

da cui, grazie al fatto che  $\alpha_{i1} = \alpha_{i2}$ , è immediato ottenere

$$F_{y_i} = (C_{\alpha_{i1}} + C_{\alpha_{i2}}) \alpha_i \quad (3.31)$$





**Figura 3.6** Forza laterale per pneumatici radiali 145 R13, con  $F_z = 3, 5, 8 \text{ kN}$ ,  $p = 170 \text{ kPa}$  e  $V_G = 40 \left[ \frac{\text{km}}{\text{h}} \right]$ .

La (3.31) è assai utile per studiare il comportamento dinamico dei veicoli nell'ipotesi di piccoli angoli di deriva, come accade effettivamente nelle normali condizioni di marcia ed è inoltre essenziale nello studio della stabilità mediante l'uso di modelli linearizzati. Infatti, come si può osservare dalla Figura 3.6, il campo di impiego è limitato a quei casi in cui gli angoli di deriva non superano i  $2^\circ$  su strada asciutta<sup>8</sup>. Se vale ciò, ne segue che anche il trasferimento di carico verticale in curva  $\Delta F_{z_{ij}}$ , non riportato nella trattazione, fra le due ruote di uno stesso assale sarà contenuto. Si può allora linearizzare anche la dipendenza delle rigidità di deriva  $C_{\alpha_{ij}}$  da  $\Delta F_{z_{ij}}$ , a partire dal valore  $C_{\alpha_{ij}}^0$  che la rigidità di deriva assume in corrispondenza del carico verticale agente sullo pneumatico, quando il veicolo è in moto rettilineo uniforme con velocità  $u$ , cioè

$$C_{\alpha_{ij}} \cong C_{\alpha_{ij}}^0 + k \Delta F_{z_{ij}} \quad (3.32)$$

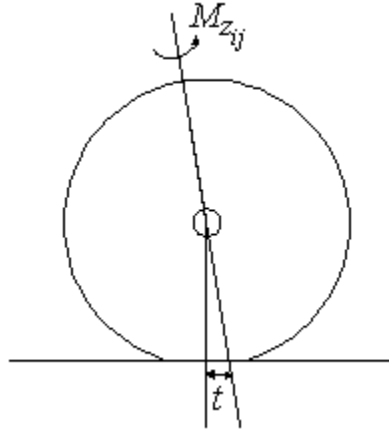
Di solito, la forza verticale a cui corrisponde  $C_{\alpha_{ij}}^0$  è chiamata *carico statico*, ma non è detto che corrisponda al carico in condizioni di veicolo fermo. Vanno infatti considerati anche gli effetti delle forze di origine aerodinamica (resistenza all'avanzamento, portanza-deportanza). Dato che le due ruote sono uguali e che  $\Delta F_{z_{i1}} \cong -\Delta F_{z_{i2}}$ , si ha la compensazione degli effetti del trasferimento del carico fra ruota esterna ed interna alla curva, così da ottenere finalmente il modello linearizzato per ogni assale ( $i = f, r$ )

$$F_{y_i} = C_i \alpha_i \quad (3.33)$$

dove con  $C_i = 2C_{\alpha_{i1}}^0 = 2C_{\alpha_{i2}}^0$  si è indicata la *rigidità di deriva dell'assale*, pari al doppio della rigidità di deriva di ogni singola ruota sotto carico statico, e con  $\alpha_i$  il corrispondente angolo di deriva.

<sup>8</sup> Su strada scivolosa, il campo lineare è ancora più limitato.

Risulta importante, quando si studia il meccanismo di sterzo, tenere conto del fatto che la risultante  $F_{y_i}$  non è applicata al centro della zona di contatto, ma in un punto posto ad una certa distanza  $t$  dal centro. Nasce quindi un momento  $M_{z_{ij}} = F_{y_{ij}} t$  che viene detto *momento autoallineante* in quanto tende a portare il piano di simmetria della ruota nella direzione della velocità  $V_f$ .



**Figura 3.7** Componente del momento di autoallineamento dovuta all'impronta di contatto.

Anche il momento di autoallineamento può essere espresso da una legge lineare

$$M_{z_{ij}} = (M_{z_{ij}})_{,\alpha} \alpha_{ij} \quad (3.34)$$

dove  $(M_{z_{ij}})_{,\alpha}$  è la derivata  $\frac{\partial M_{z_{ij}}}{\partial \alpha_{ij}}$  calcolata per  $\alpha$  e  $\gamma$  nulli ed è definita *rigidezza di autoallineamento*.

### 3.6 Modello monotraccia di un autoveicolo

Sulla base di quanto ricavato fin qui supponiamo, per generalità, che anche le ruote posteriori possano sterzare con angolo  $\delta_r$  (positivo se antiorario). Con  $\delta_f = \delta$  indichiamo ancora l'angolo di sterzo anteriore. Si hanno le seguenti equazioni di equilibrio, nelle quali si tiene conto dell'angolo di sterzo posteriore appena introdotto

$$\begin{aligned} m(\dot{u} - vr) &= F_{x_f} + F_{x_r} - F_{y_f}\delta_f - F_{y_r}\delta_r - \frac{1}{2}\rho SC_x u^2 \\ m(\dot{v} + ur) &= F_{x_f}\delta_f + F_{x_r}\delta_r + F_{y_f} + F_{y_r} \\ J\dot{r} &= (F_{x_f}\delta_f + F_{y_f})l_f - (F_{y_r} + F_{x_r}\delta_r)l_r \end{aligned} \quad (3.35)$$

e le equazioni di congruenza per  $u > 0$

$$\begin{aligned} \alpha_f &= \delta_f - \frac{v + rl_f}{u} \\ \alpha_r &= \delta_r - \frac{v - rl_r}{u} \end{aligned} \quad (3.36)$$

cui vanno affiancate le equazioni costitutive per un certo modello di pneumatico.

Tutte queste equazioni sono alla base del *modello monotraccia*<sup>9</sup> (*single-track model*), illustrato in Figura 3.8. E' importante osservare che solo dopo una attenta discussione delle ipotesi si può accettare il modello monotraccia come una valida schematizzazione di un autoveicolo a quattro ruote. Fondamentali a tal riguardo sono tutti i passaggi che portano all'accorpamento delle caratteristiche delle due ruote sullo stesso assale.

Nella figura è evidenziato il legame puramente cinematico fra la posizione del centro di istantanea rotazione  $C$  ed i due angoli di deriva  $\alpha_f$  ed  $\alpha_r$ . La posizione di  $C$  (e quindi anche la sua distanza dall'asse del veicolo) è univocamente determinata dalla direzione della velocità di due punti del corpo rigido costituito dall'elemento rettilineo di lunghezza  $l$ .

La velocità di tutti gli altri punti discende di conseguenza. Una volta fissato il modello non resta che stabilire cosa considerare noto e cosa incognito. La scelta più naturale [5] è supporre assegnate le forze longitudinali  $F_{x_f}(t)$ ,  $F_{x_r}(t)$  e gli angoli di sterzo  $\delta_f(t)$  e  $\delta_r(t)$ .

Nel caso dell'utilizzo di un modello lineare dello pneumatico, rimangono incognite le tre funzioni  $u(t)$ ,  $v(t)$  ed  $r(t)$ .

In base alle equazioni di congruenza si possono esprimere gli angoli di deriva come  $\alpha_f = \alpha_f(u, v, r, t)$  e  $\alpha_r = \alpha_r(u, v, r, t)$ , e quindi anche le forze laterali  $F_{y_f}$  ed  $F_{y_r}$  diventano funzioni di  $u, v, r$  e  $t$ .

<sup>9</sup> Impropriamente chiamato in gergo *modello a bicicletta*, anche se non ha niente della dinamica di un veicolo a due ruote.

Si perviene così ad un sistema di tre equazioni differenziali del primo ordine nelle variabili di stato  $u(t)$ ,  $v(t)$  ed  $r(t)$

$$\begin{aligned} \dot{u} &= \frac{1}{m} \left[ F_{x_f} + F_{x_r} - F_{y_f} \delta - F_{y_r} \delta_r - \frac{1}{2} \rho S C_x u^2 \right] + vr = f_1(u, v, r, t) \\ \dot{v} &= \frac{1}{m} \left[ F_{x_f} \delta + F_{x_r} \delta_r + F_{y_f} + F_{y_r} \right] - ur = f_2(u, v, r, t) \\ \dot{r} &= \frac{1}{J} \left[ (F_{x_f} \delta + F_{y_f}) l_f - (F_{y_r} + F_{x_r} \delta_r) l_r \right] = f_3(u, v, r, t) \end{aligned} \quad (3.37)$$

Siccome le variabili del sistema dipendono dal tempo è detto non autonomo.

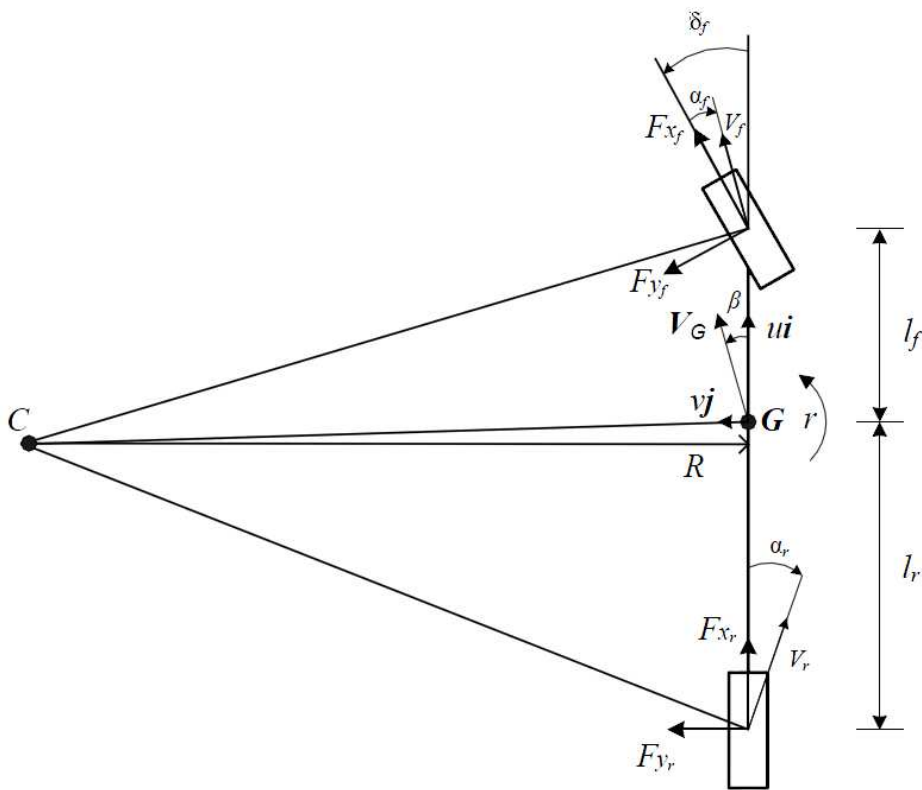


Figura 3.8 Modello monotraccia di un autoveicolo.

### 3.7 Modello monotraccia classico

Un'ulteriore fondamentale semplificazione delle equazioni di equilibrio del modello monotraccia di un autoveicolo, la si ottiene supponendo assegnata la velocità di avanzamento, ossia la funzione  $u(t)$ . In questo modo la prima equazione del modello diventa una equazione algebrica nella nuova incognita, che sarà necessariamente una delle due forze longitudinali.

Se si considera un veicolo a trazione posteriore, con sterzata solo sulle ruote anteriori ( $\delta_r = 0$ ), e si pone  $F_{x_f} = 0$  trascurando le forze di rotolamento, si perviene alla massima semplificazione delle equazioni di equilibrio. Infatti la prima equazione del modello diventa l'espressione di  $F_{x_r}(t)$

$$F_{x_r} = m(\dot{u} - vr) + F_{y_f}\delta + \frac{1}{2}\rho SC_x u^2 \quad (3.38)$$

e nelle restanti due equazioni differenziali non compare la funzione incognita  $F_{x_r}(t)$

$$\begin{aligned} m(\dot{v} + ur) &= F_{y_f} + F_{y_r} \\ J\dot{r} &= F_{y_f}l_f - F_{y_r}l_r \end{aligned} \quad (3.39)$$

In definitiva, il sistema dinamico è governato da due sole equazioni differenziali in  $v(t), r(t)$ . Si noti che in queste equazioni non compare la forza longitudinale. Questo disaccoppiamento, cioè il fatto che le (3.39) presentano a secondo membro solo le forze laterali degli pneumatici, si ha solo se trazione e sterzata sono su assali differenti.

Nel caso di veicoli a trazione anteriore o integrale la situazione è un po' più complicata. Infatti, non si ha più questo disaccoppiamento<sup>10</sup>. Per un veicolo a trazione anteriore trascurando in questo caso  $F_{x_r}$ , si ottiene, dalla prima equazione del modello (3.35)

$$F_{x_f} = m(\dot{u} - vr) + F_{y_f}\delta + \frac{1}{2}\rho SC_x u^2 \quad (3.40)$$

Tuttavia la funzione  $F_{x_f}(t)$  compare anche nelle restanti due equazioni di equilibrio, che, in base alla precedente espressione, diventano

$$\begin{aligned} m(\dot{v} + ur) &= \left[ m(\dot{u} - vr) + F_{y_f}\delta + \frac{1}{2}\rho SC_x u^2 \right] \delta + F_{y_f} + F_{y_r} \\ J\dot{r} &= \left[ m(\dot{u} - vr) + F_{y_f}\delta + \frac{1}{2}\rho SC_x u^2 \right] l_f \delta + F_{y_f}l_f - F_{y_r}l_r \end{aligned} \quad (3.41)$$

<sup>10</sup> In generale si ha disaccoppiamento solo se trazione e sterzata sono su assali differenti.

Anche in questo caso il sistema dinamico è governato da due sole equazioni differenziali in  $v(t)$  e  $r(t)$ , che sono però più complicate rispetto al caso di trazione posteriore. Tuttavia, visto che i termini che compaiono in più sono sempre moltiplicati per l'angolo di sterzo  $\delta_f$ , si può ritenere che abbiano scarsa influenza finché questo è piccolo.

Inoltre, con  $u(t)$  assegnata, le equazioni di congruenza diventano un legame lineare fra  $(\alpha_1, \alpha_2)$  e  $(v, r)$ , quindi facile da invertire

$$\begin{aligned} v &= \frac{u}{l} [l_r(\delta_f - \alpha_f) + l_f(\delta_r - \alpha_r)] \\ r &= \frac{u}{l} [(\delta_f - \alpha_f) - (\delta_r - \alpha_r)] \end{aligned} \quad (3.42)$$

Si ha quindi la possibilità di scegliere fra  $(v, r)$  e  $(\alpha_f, \alpha_r)$  quali variabili di stato del sistema.

Il modello monotraccia più classico utilizza le due equazioni di equilibrio (3.39), oltre alle equazioni di congruenza (3.8) e ad un modello di pneumatico. Si tratta quindi di un sistema dinamico a due variabili di stato.

### 3.8 Modello monotraccia lineare

Si tratta del modello più semplice, ma costituisce la base per modelli più complessi. Se ci si limita a simulare manovre che comportino angoli di deriva molto piccoli (circa 2° per autovetture medie su strada aderente, di meno su strada scivolosa), si può far uso del modello lineare per i pneumatici. Introducendo le equazioni di congruenza (3.8) nelle (3.33) si ottengono le relazioni seguenti

$$\begin{aligned} F_{y_f} &= C_f \alpha_f = C_f \left( \delta_f - \frac{v + r l_f}{u} \right) \\ F_{y_r} &= C_r \alpha_r = C_r \left( -\frac{v - r l_r}{u} \right) \end{aligned} \quad (3.43)$$

che legano linearmente le forze laterali alle variabili di stato  $(v, r)$ . Se si sostituiscono queste espressioni nelle due equazioni di equilibrio (3.39) si ottiene il seguente sistema di equazioni differenziali lineari del primo ordine, non omogeneo, che descrive completamente il modello di veicolo in esame<sup>11</sup>

$$\begin{aligned} \dot{v} &= -\left( \frac{C_f + C_r}{mu} \right) v - \left( \frac{C_f l_f - C_r l_r}{mu} + u \right) r + \frac{C_f}{m} \delta_f \\ \dot{r} &= -\left( \frac{C_f l_f - C_r l_r}{ju} \right) v - \left( \frac{C_f l_f^2 + C_r l_r^2}{ju} \right) r + \frac{C_f l_f}{J} \delta_f \end{aligned} \quad (3.44)$$

I coefficienti a secondo membro vengono spesso indicati con il termine di *derivate di stabilità* (*stability derivatives*).

<sup>11</sup> Si osservi che nel caso di trazione anteriore si sarebbero ottenute delle equazioni differenziali non lineari a causa della non linearità delle relative equazioni di equilibrio.

Introducendo la notazione matriciale, il sistema di due equazioni differenziali si può riscrivere come

$$\dot{\mathbf{w}} = \mathbf{A}\mathbf{w} + \mathbf{b} \quad (3.45)$$

dove  $\mathbf{w}(t) = (v(t), r(t))$  rappresenta il vettore delle variabili di stato, il vettore dei termini noti è dato da  $\mathbf{b}(t) = \left(\frac{C_f}{m}, \frac{C_f l_f}{J}\right) \delta_f(t)$  e

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}(u(t)) = - \begin{bmatrix} \frac{C_f + C_r}{mu} & \frac{C_f l_f - C_r l_r}{mu} + u \\ \frac{C_f l_f - C_r l_r}{Ju} & \frac{C_f l_f^2 + C_r l_r^2}{Ju} \end{bmatrix}$$

è la matrice dei coefficienti. In definitiva, il modello monotraccia lineare è rappresentato dal sistema di equazioni

$$\begin{bmatrix} \dot{v} \\ \dot{r} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{C_f + C_r}{mu} & \frac{C_f l_f - C_r l_r}{mu} + u \\ \frac{C_f l_f - C_r l_r}{Ju} & \frac{C_f l_f^2 + C_r l_r^2}{Ju} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{C_f}{m} \\ \frac{C_f l_f}{J} \end{bmatrix} \delta_f \quad (3.46)$$

È importante notare che la matrice  $\mathbf{A}$  dipende dalla velocità di avanzamento  $u$ , ma non dall'angolo di sterzo  $\delta_f$ . Il contrario vale per il termine noto  $\mathbf{b}$ . Le variabili di stato non sono spostamenti, ma velocità. In effetti, la posizione assoluta del veicolo sul piano è del tutto inessenziale.

Rimanendo nell'ambito di modelli lineari, è spesso conveniente [8] descrivere il moto del veicolo usando come variabile di stato l'angolo di deriva del centro di gravità del veicolo  $\beta$  (o angolo di assetto)

$$\beta = \tan^{-1} \frac{v}{u} \quad (3.47)$$

Se la velocità con cui si muove il veicolo è costante,  $V_G = \sqrt{v^2 + u^2}$  sarà pure costante.

Con riferimento alle considerazioni svolte nel paragrafo 3.4.1 si ha,  $\sin \beta = v/V_G$  e  $\cos \beta = u/V_G$  e se l'angolo  $\beta$  è piccolo si può scrivere  $\beta \approx \frac{v}{u}$ .

Infatti

$$\begin{aligned} u &= V_G \cos \beta \approx V_G \\ v &= V_G \sin \beta \approx V_G \beta \end{aligned} \quad (3.48)$$

Differenziando le espressioni precedenti si ottiene

$$\begin{aligned} \dot{u} &= -V_G \dot{\beta} \sin \beta \approx -V_G \dot{\beta} \\ \dot{v} &= V_G \dot{\beta} \cos \beta \approx V_G \dot{\beta} \end{aligned} \quad (3.49)$$

Considerando valida questa approssimazione e riprendendo le equazioni differenziali del moto in direzione trasversale si ottiene

$$\begin{aligned} m(\dot{v} + ur) &\approx mV_G(\dot{\beta} + r) = F_{y_f} + F_{y_r} \\ J\dot{r} &= F_{y_f}l_f - F_{y_r}l_r \end{aligned} \quad (3.50)$$

e le equazioni di congruenza (3.36) particolarizzate secondo le (3.48) e  $\delta_r = 0$ diventano

$$\begin{aligned} \alpha_f &= \delta_f - \frac{V_G\beta + rl_f}{V_G} \\ \alpha_r &= -\frac{V_G\beta - rl_r}{V_G} \end{aligned} \quad (3.51)$$

Utilizzando anche in questo caso un modello lineare di pneumatico, riprendendo le considerazioni già svolte all'inizio del paragrafo, si ottiene il modello monotraccia lineare che utilizza come variabile di stato l'angolo di assetto  $\beta$ , oltre alla velocità di imbardata

$$\begin{aligned} mV_G(\dot{\beta} + r) &= C_f\left(\delta_f - \beta - \frac{l_f}{V_G}r\right) + C_r\left(-\beta + \frac{l_r}{V_G}r\right) \\ J\dot{r} &= C_f\left(\delta_f - \beta - \frac{l_f}{V_G}r\right)l_f + C_r\left(\beta - \frac{l_r}{V_G}r\right)l_r \end{aligned} \quad (3.52)$$

Infine, raccogliendo e riordinando i termini, si ottiene utilizzando la notazione matriciale

$$\begin{bmatrix} \dot{\beta} \\ \dot{r} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{C_f + C_r}{mV_G} & 1 + \frac{C_f l_f - C_r l_r}{mV_G^2} \\ \frac{C_f l_f - C_r l_r}{J} & \frac{C_f l_f^2 + C_r l_r^2}{JV_G} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta \\ r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{C_f}{mV_G} \\ \frac{C_f l_f}{J} \end{bmatrix} \delta_f \quad (3.53)$$

del quale la Figura 3.9 ne è uno schema rappresentativo.

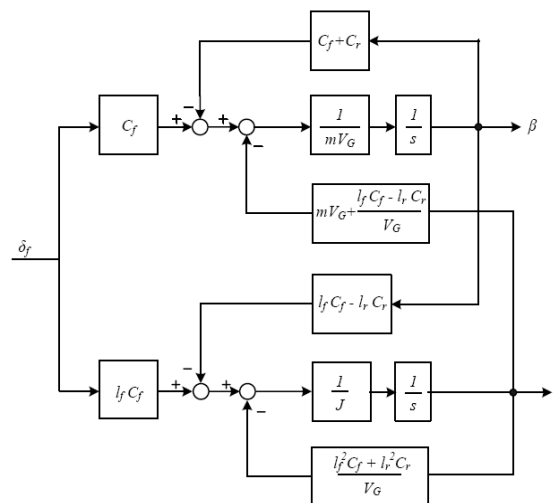


Figura 3.9 Schema a blocchi del comportamento direzionale del veicolo.



### 3.9 Modello bitraccia lineare

Le ipotesi semplificative che portano all'accoppiamento delle caratteristiche delle due ruote che si trovano sullo stesso assale non consentono di poter mettere in evidenza gli angoli che assumono le due ruote durante la sterzata. Non consentono quindi di considerare il caso che i due treni di ruote, destro e sinistro, abbiano comportamento differente.

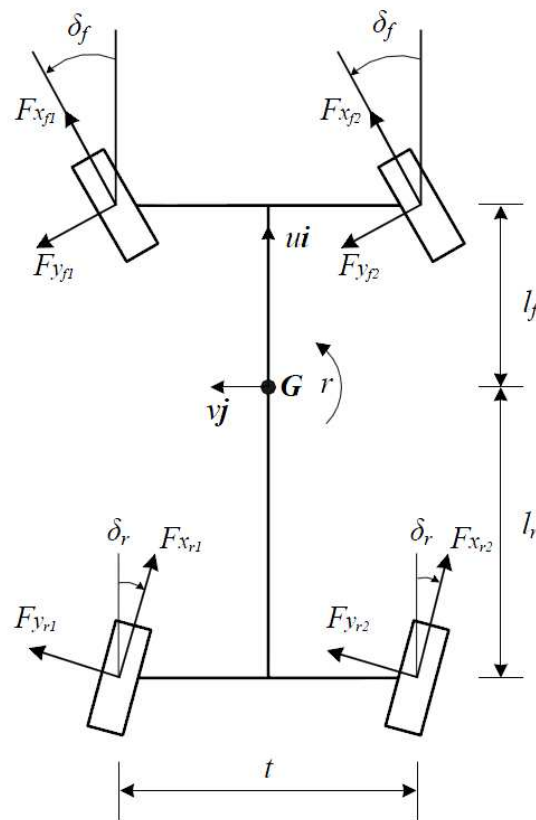


Figura 3.10 Modello del veicolo con quattro ruote sterzanti.

Indicando con  $\delta_f$  e  $\delta_r$ , rispettivamente l'angolo di sterzo delle ruote anteriori e quello delle ruote posteriori, supponendo quindi che anche le ruote posteriori possano sterzare, le equazioni di equilibrio rigorose sono

$$m(\dot{u} - vr) = (F_{x_{f1}} + F_{x_{f2}}) \cos \delta_f - (F_{y_{f1}} + F_{y_{f2}}) \sin \delta_f + (F_{x_{r1}} + F_{x_{r2}}) \cos \delta_r - (F_{y_{r1}} + F_{y_{r2}}) \sin \delta_r - X_a$$

$$m(\dot{u} + vr) = (F_{x_{f1}} + F_{x_{f2}}) \sin \delta_f + (F_{y_{f1}} + F_{y_{f2}}) \cos \delta_f + (F_{y_{r1}} + F_{y_{r2}}) \cos \delta_r + (F_{x_{r1}} + F_{x_{r2}}) \sin \delta_r - Y_a$$

$$\begin{aligned}
J\dot{r} = & \left[ (F_{x_{f1}} + F_{x_{f2}}) \sin \delta_f + (F_{y_{f1}} + F_{y_{f2}}) \cos \delta_f \right] l_f \\
& - \left[ (F_{y_{r1}} + F_{y_{r2}}) \cos \delta_r + (F_{x_{r1}} + F_{x_{r2}}) \sin \delta_r \right] l_r \\
& - \left[ (F_{x_{f1}} - F_{x_{f2}}) \cos \delta_f - (F_{y_{f1}} - F_{y_{f2}}) \sin \delta_f + (F_{x_{r1}} \right. \\
& \left. - F_{x_{r2}}) \cos \delta_r - (F_{y_{r1}} - F_{y_{r2}}) \sin \delta_r \right] \frac{t}{2}
\end{aligned} \tag{3.54}$$

$$\begin{aligned}
X_a &= -0.5\rho SC_x u^2 \\
Y_a &\cong 0
\end{aligned} \tag{3.55}$$

Se ora rimuoviamo l'ipotesi di ruote posteriori sterzanti ( $\delta_r = 0$ ) si ottiene

$$\begin{aligned}
m(\dot{u} - vr) &= (F_{x_{f1}} + F_{x_{f2}}) \cos \delta_f - (F_{y_{f1}} + F_{y_{f2}}) \sin \delta_f + (F_{x_{r1}} + F_{x_{r2}}) \\
&\quad - 0.5\rho SC_x u^2 \\
m(\dot{u} + vr) &= (F_{x_{f1}} + F_{x_{f2}}) \sin \delta_f + (F_{y_{f1}} + F_{y_{f2}}) \cos \delta_f + (F_{y_{r1}} + F_{y_{r2}}) \\
J\dot{r} &= \left[ (F_{x_{f1}} + F_{x_{f2}}) \sin \delta_f + (F_{y_{f1}} + F_{y_{f2}}) \cos \delta_f \right] l_f - [(F_{y_{r1}} + F_{y_{r2}})] l_r \\
&\quad - \left[ (F_{x_{f1}} - F_{x_{f2}}) \cos \delta_f - (F_{y_{f1}} - F_{y_{f2}}) \sin \delta_f + (F_{x_{r1}} - F_{x_{r2}}) \right] \frac{t}{2}
\end{aligned} \tag{3.56}$$

Siccome le due ruote anteriori possono sterzare in modo indipendente, indicando con  $\delta_i$  l'angolo di sterzo della ruota interna alla curva e con  $\delta_e$  l'angolo di sterzo della ruota esterna si ottiene, con riferimento alla Figura 3.5

$$\begin{aligned}
m(\dot{u} - vr) &= (F_{x_{f1}} \cos \delta_i + F_{x_{f2}} \cos \delta_e) - (F_{y_{f1}} \sin \delta_i + F_{y_{f2}} \sin \delta_e) + (F_{x_{r1}} + F_{x_{r2}}) \\
&\quad - 0.5\rho SC_x u^2 \\
m(\dot{u} + vr) &= (F_{x_{f1}} \sin \delta_i + F_{x_{f2}} \sin \delta_e) + (F_{y_{f1}} \cos \delta_i + F_{y_{f2}} \cos \delta_e) + (F_{y_{r1}} + F_{y_{r2}}) \\
J\dot{r} &= \left[ (F_{x_{f1}} \sin \delta_i + F_{x_{f2}} \sin \delta_e) + (F_{y_{f1}} \cos \delta_i + F_{y_{f2}} \cos \delta_e) \right] l_f - [(F_{y_{r1}} + F_{y_{r2}})] l_r \\
&\quad - \left[ (F_{x_{f1}} \cos \delta_i - F_{x_{f2}} \cos \delta_e) - (F_{y_{f1}} \sin \delta_i - F_{y_{f2}} \sin \delta_e) + (F_{x_{r1}} \right. \\
&\quad \left. - F_{x_{r2}}) \right] \frac{t}{2}
\end{aligned} \tag{3.57}$$

Tenendo conto che per angoli di sterzo fino a  $15^\circ$  è lecito porre  $\cos \delta \cong 1$  e  $\sin \delta \cong \delta$ , si ottiene

$$m(\dot{u} - vr) = (F_{x_{f1}} + F_{x_{f2}}) - (F_{y_{f1}} \delta_i + F_{y_{f2}} \delta_e) + (F_{x_{r1}} + F_{x_{r2}}) - 0.5\rho SC_x u^2$$

$$\begin{aligned}
m(\dot{u} + vr) &= (F_{x_{f1}} \delta_i + F_{x_{f2}} \delta_e) + (F_{y_{f1}} + F_{y_{f2}}) + (F_{y_{r1}} + F_{y_{r2}}) \\
J\dot{r} &= \left[ (F_{x_{f1}} \delta_i + F_{x_{f2}} \delta_e) + (F_{y_{f1}} + F_{y_{f2}}) \right] l_f - [(F_{y_{r1}} + F_{y_{r2}})] l_r \\
&\quad - \left[ (F_{x_{f1}} - F_{x_{f2}}) - (F_{y_{f1}} \delta_i - F_{y_{f2}} \delta_e) + (F_{x_{r1}} - F_{x_{r2}}) \right] \frac{t}{2}
\end{aligned} \tag{3.58}$$

Nel caso in cui la ripartizione della coppia motrice fra le due ruote dello stesso asse avvenga mediante l'uso di un differenziale ordinario, si ha che  $F_{x_{f1}} = F_{x_{f2}}$  ed  $F_{x_{r1}} = F_{x_{r2}}$ , allora

$$\begin{aligned}
m(\dot{u} - vr) &= (F_{x_{f1}} + F_{x_{f2}}) - (F_{y_{f1}} \delta_i + F_{y_{f2}} \delta_e) + (F_{x_{r1}} + F_{x_{r2}}) - 0.5\rho SC_x u^2 \\
m(\dot{u} + vr) &= (F_{x_{f1}} \delta_i + F_{x_{f2}} \delta_e) + (F_{y_{f1}} + F_{y_{f2}}) + (F_{y_{r1}} + F_{y_{r2}}) \\
J\dot{r} &= \left[ (F_{x_{f1}} \delta_i + F_{x_{f2}} \delta_e) + (F_{y_{f1}} + F_{y_{f2}}) \right] l_f - [(F_{y_{r1}} + F_{y_{r2}})] l_r \\
&\quad - \left[ -(F_{y_{f1}} \delta_i - F_{y_{f2}} \delta_e) \right] \frac{t}{2}
\end{aligned} \tag{3.59}$$

Supponendo accelerazioni laterali di modesta entità, ripercorrendo le stesse ipotesi introdotte nei paragrafi precedenti, si accetta generalmente di trascurare l'ultimo termine delle (3.59), ottenendo in definitiva le seguenti equazioni di equilibrio

$$\begin{aligned}
m(\dot{u} - vr) &= (F_{x_{f1}} + F_{x_{f2}}) - (F_{y_{f1}} \delta_i + F_{y_{f2}} \delta_e) + (F_{x_{r1}} + F_{x_{r2}}) - 0.5\rho SC_x u^2 \\
m(\dot{u} + vr) &= (F_{x_{f1}} \delta_i + F_{x_{f2}} \delta_e) + (F_{y_{f1}} + F_{y_{f2}}) + (F_{y_{r1}} + F_{y_{r2}}) \\
J\dot{r} &= \left[ (F_{x_{f1}} \delta_i + F_{x_{f2}} \delta_e) + (F_{y_{f1}} + F_{y_{f2}}) \right] l_f - [(F_{y_{r1}} + F_{y_{r2}})] l_r
\end{aligned} \tag{3.60}$$

Per ciò che riguarda le equazioni di congruenza, seguendo l'impostazione data nel Paragrafo 3.3, consideriamo le velocità assolute dei centri delle ruote in modo da legare gli angoli di deriva alla velocità di imbardata *red* alle componenti *u* e *v*. I centri di entrambe le ruote hanno velocità in senso trasversale pari a  $v + rl_f$ , così come quelli delle ruote posteriori hanno una velocità trasversale pari a  $v - rl_r$ . In senso longitudinale, i centri delle due ruote sul fianco sinistro hanno velocità pari a  $u - rt/2$ , mentre quelli delle ruote sul fianco destro hanno velocità pari a  $u + rt/2$ . Ne seguono subito le seguenti relazioni rigorose, in cui le prime due sono relative alle ruote anteriori e le altre alle ruote posteriori

$$\begin{aligned}
\tan(\delta_i - \alpha_{f1}) &= \frac{v + rl_f}{u - \frac{rt}{2}} \\
\tan(\delta_e - \alpha_{f2}) &= \frac{v + rl_f}{u + \frac{rt}{2}}
\end{aligned} \tag{3.61}$$

$$\begin{aligned}\tan(-\alpha_{r1}) &= \frac{v - rl_r}{u - \frac{rt}{2}} \\ \tan(-\alpha_{r2}) &= \frac{v - rl_r}{u + \frac{rt}{2}}\end{aligned}\quad (3.62)$$

Una volta fissato il modello e supposte assegnate le forze longitudinali e gli angoli di sterzo  $\delta_i(t)$  e  $\delta_e(t)$ , con l'utilizzo di un modello lineare dello pneumatico, rimangono incognite le tre funzioni  $u(t)$ ,  $v(t)$  ed  $r(t)$ .

$$\begin{aligned}\dot{u} &= \frac{1}{m} \left[ (F_{x_{f1}} + F_{x_{f2}}) - (F_{y_{f1}} \delta_i + F_{y_{f2}} \delta_e) + (F_{x_{r1}} + F_{x_{r2}}) - 0.5\rho SC_x u^2 \right] + vr = f_1(u, v, r, t) \\ \dot{v} &= \frac{1}{m} \left[ (F_{x_{f1}} \delta_i + F_{x_{f2}} \delta_e) + (F_{y_{f1}} + F_{y_{f2}}) + (F_{y_{r1}} + F_{y_{r2}}) \right] - ur = f_2(u, v, r, t) \\ \dot{r} &= \frac{1}{J} \left[ \left[ (F_{x_{f1}} \delta_i + F_{x_{f2}} \delta_e) + (F_{y_{f1}} + F_{y_{f2}}) \right] l_f - \left[ (F_{y_{r1}} + F_{y_{r2}}) \right] l_r \right] = f_3(u, v, r, t)\end{aligned}\quad (3.63)$$

Un'ulteriore fondamentale semplificazione delle equazioni di equilibrio del modello la si ottiene supponendo assegnata la velocità di avanzamento, ossia la funzione  $u(t)$ . In questo modo la prima equazione del modello diventa una equazione algebrica nella nuova incognita, che sarà necessariamente una delle due forze longitudinali.

Se si considera un veicolo a trazione posteriore, e si pone  $F_{x_f} = 0$  trascurando le perdite per rotolamento, si perviene alla massima semplificazione delle equazioni di equilibrio. Infatti la prima equazione del modello diventa

$$F_{x_{r1}} + F_{x_{r2}} = F_{x_r} = m(\dot{u} - vr) + F_{y_{f1}} \delta_i + F_{y_{f2}} \delta_e + \frac{1}{2} \rho SC_x u^2 \quad (3.64)$$

e nelle restanti due equazioni differenziali non compare la funzione incognita  $F_{x_2}(t)$

$$\begin{aligned}m(\dot{v} + ur) &= F_{y_f} + F_{y_r} \\ J\dot{r} &= F_{y_f} l_f - F_{y_r} l_r\end{aligned}\quad (3.65)$$

Dalle (3.61) e (3.62), confondendo l'arco con la tangente si ottiene

$$\begin{aligned}\delta_i - \alpha_{f1} &= \frac{v + rl_f}{u - \frac{rt}{2}} \\ \delta_e - \alpha_{f2} &= \frac{v + rl_f}{u + \frac{rt}{2}}\end{aligned}\quad (3.66)$$

$$\begin{aligned} -\alpha_{r1} &= \frac{v - rl_r}{u - \frac{rt}{2}} \\ -\alpha_{r2} &= \frac{v - rl_r}{u + \frac{rt}{2}} \end{aligned} \quad (3.67)$$

Se si tiene conto che in normali condizioni di esercizio  $u \gg |r| t/2$ , si ottiene l'importante risultato che le due ruote di uno stesso asse lavorano con angoli di deriva quasi uguali, infatti

$$\begin{aligned} \delta_i - \alpha_{f1} &= \frac{v + rl_f}{u} \\ \delta_e - \alpha_{f2} &= \frac{v + rl_f}{u} \\ -\alpha_{r2} = -\alpha_{r1} &= \frac{v - rl_r}{u} \end{aligned} \quad (3.68)$$

Utilizzando il modello di pneumatico linea rizzato

$$F_{y_{ij}} = C_{\alpha_{ij}} \alpha_{ij} \quad (3.69)$$

si ha

$$\begin{aligned} F_{y_f} &= C_{\alpha_{f1}} \alpha_{f1} + C_{\alpha_{f2}} \alpha_{f2} = C_{\alpha_{f1}} \left( \delta_i - \frac{v + rl_f}{u} \right) + C_{\alpha_{f2}} \left( \delta_e - \frac{v + rl_f}{u} \right) \\ F_{y_r} &= C_{\alpha_{r1}} \alpha_{r1} + C_{\alpha_{r2}} \alpha_{r2} = -C_{\alpha_{r1}} \left( \frac{v - rl_r}{u} \right) - C_{\alpha_{r2}} \left( \frac{v - rl_r}{u} \right) \end{aligned} \quad (3.70)$$

che legano linearmente le forze laterali alle variabili di stato  $(v, r)$ .

Se si sostituiscono queste espressioni nelle due equazioni di equilibrio (3.65) si ottiene il seguente sistema di equazioni differenziali lineari del primo ordine, non omogeneo, che descrive completamente il modello di veicolo in esame

$$\begin{aligned} \dot{v} &= - \left( \frac{C_{\alpha_{f1}} + C_{\alpha_{f2}} + C_{\alpha_{r1}} + C_{\alpha_{r2}}}{mu} \right) v - \left( \frac{(C_{\alpha_{f1}} + C_{\alpha_{f2}})l_f - (C_{\alpha_{r1}} + C_{\alpha_{r2}})l_r}{mu} + u \right) r + \frac{C_{\alpha_{f1}}}{m} \delta_i \\ &\quad + \frac{C_{\alpha_{f2}}}{m} \delta_e \\ \dot{r} &= - \left( \frac{(C_{\alpha_{f1}} + C_{\alpha_{f2}})l_f - (C_{\alpha_{r1}} + C_{\alpha_{r2}})l_r}{Ju} \right) v - \left( \frac{(C_{\alpha_{f1}} + C_{\alpha_{f2}})l_f^2 + (C_{\alpha_{r1}} + C_{\alpha_{r2}})l_r^2}{Ju} \right) r \\ &\quad + \frac{C_{\alpha_{f1}}l_f}{J} \delta_i + \frac{C_{\alpha_{f2}}l_f}{J} \delta_e \end{aligned} \quad (3.71)$$

Introducendo la notazione matriciale, il sistema di due equazioni differenziali può essere riscritto come

$$\dot{\mathbf{w}} = \mathbf{A}\mathbf{w} + \mathbf{b}$$

Dove  $\mathbf{w}(t) = (v(t), r(t))$  rappresenta il vettore delle variabili di stato, il vettore dei termini noti è dato da  $\mathbf{b}(t)$  che contiene i valori di angolo di sterzo delle due ruote anteriori.

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}(u(t)) = - \begin{bmatrix} \frac{C_{\alpha_{f1}} + C_{\alpha_{f2}} + C_{\alpha_{r1}} + C_{\alpha_{r2}}}{mu} & \frac{(C_{\alpha_{f1}} + C_{\alpha_{f2}})l_f - (C_{\alpha_{r1}} + C_{\alpha_{r2}})l_r}{mu} + u \\ \frac{(C_{\alpha_{f1}} + C_{\alpha_{f2}})l_f - (C_{\alpha_{r1}} + C_{\alpha_{r2}})l_r}{Ju} & \frac{(C_{\alpha_{f1}} + C_{\alpha_{f2}})l_f^2 + (C_{\alpha_{r1}} + C_{\alpha_{r2}})l_r^2}{Ju} \end{bmatrix}$$

è la matrice dei coefficienti.

In definitiva, il modello che consente di disaccoppiare gli angoli di sterzo delle due ruote dell'assale anteriore, è rappresentato dal sistema di equazioni

$$\begin{bmatrix} \dot{v} \\ \dot{r} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{C_{\alpha_{f1}} + C_{\alpha_{f2}} + C_{\alpha_{r1}} + C_{\alpha_{r2}}}{mu} & \frac{(C_{\alpha_{f1}} + C_{\alpha_{f2}})l_f - (C_{\alpha_{r1}} + C_{\alpha_{r2}})l_r}{mu} + u \\ \frac{(C_{\alpha_{f1}} + C_{\alpha_{f2}})l_f - (C_{\alpha_{r1}} + C_{\alpha_{r2}})l_r}{Ju} & \frac{(C_{\alpha_{f1}} + C_{\alpha_{f2}})l_f^2 + (C_{\alpha_{r1}} + C_{\alpha_{r2}})l_r^2}{Ju} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{C_{\alpha_{f1}}}{m} & \frac{C_{\alpha_{f2}}}{m} \\ \frac{l_f}{J} C_{\alpha_{f1}} & \frac{l_f}{J} C_{\alpha_{f2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_i \\ \delta_e \end{bmatrix} \quad (3.72)$$

dove è sottintesa la dipendenza dal tempo ed i coefficienti  $C_{\alpha_{ij}}$  rappresentano le rigidzze di deriva delle singole ruote.

Nel paragrafo che segue viene mostrato come è possibile ricavare il valore dell'angolo di sterzata della ruota esterna alla curva  $\delta_e$ , una volta fissato il valore dell'angolo di sterzo della ruota interna  $\delta_i$ , secondo la soluzione proposta da *Jeantaud*.

### 3.10 Il cinematismo dello sterzo

La sterzata cinematica è il moto del veicolo su una traiettoria curva determinato dal puro rotolamento delle ruote. La velocità dei centri delle ruote è contenuta nel loro piano medio e gli angoli di deriva  $\alpha_{ij}$  sono nulli. In queste condizioni le ruote non possono applicare forze trasversali per equilibrare la forza centrifuga, dovuta alla curvatura della traiettoria. Considerando il veicolo in Figura 3.11, a due assi di cui uno sterzante, perché la condizione di sterzata cinematica sia rispettata, l'angolo  $\delta_i$  della ruota interna alla curva deve essere ovviamente maggiore di quello della ruota esterna  $\delta_e$  secondo le relazioni

$$\tan(\delta_i) = \frac{l}{R_1 - \frac{t}{2}}, \quad \tan(\delta_e) = \frac{l}{R_1 + \frac{t}{2}} \quad (3.73)$$

La precedente dovrebbe contenere, al posto della carreggiata  $t$ , la distanza tra gli assi di sterzata delle ruote. Eliminando  $R_1$  tra le due equazioni, si ottiene una relazione tra gli angoli  $\delta_i$  e  $\delta_e$

$$\frac{t}{l} = \frac{1}{\tan(\delta_e)} - \frac{1}{\tan(\delta_i)} \quad (3.74)$$

Angoli di sterzo, che permettano di rispettare esattamente questa condizione vengono normalmente definiti *angoli di Ackermann*.

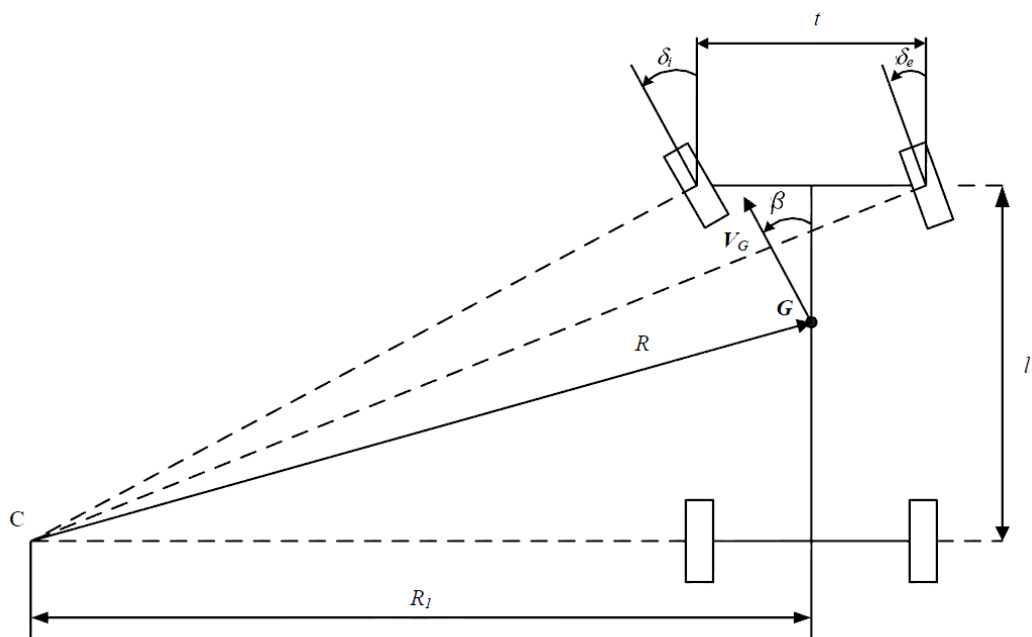


Figura 3.11 Sterzata cinematica per un veicolo a quattro ruote.

Tuttavia, nessun dispositivo reale, neppure quello proposto da *Jeantaud*, è in grado di seguire questa legge e quindi si può definire un errore di sterzata come la differenza tra il  $\delta_e$  ottenuto realmente, e quello calcolabile tramite la (3.74) per un fissato  $\delta_i$ .

### 3.10.1 Quadrilatero di *Jeantaud*

Si consideri, ad esempio, un meccanismo di sterzo costituito dal semplice quadrilatero articolato piano di Figura 3.12 [9]. In questo semplice cinematismo, il tirante  $AB$ , che permette di sterzare le ruote in modo coordinato, prende il nome di barra di accoppiamento. Per ricavare la relazione che lega  $\delta_i$  e  $\delta_e$  è sufficiente eseguire alcune considerazioni geometriche.

La lunghezza della barra di accoppiamento  $AB$

$$\overline{AB} = l_1 - 2l_2 \sin \sigma \quad (3.75)$$

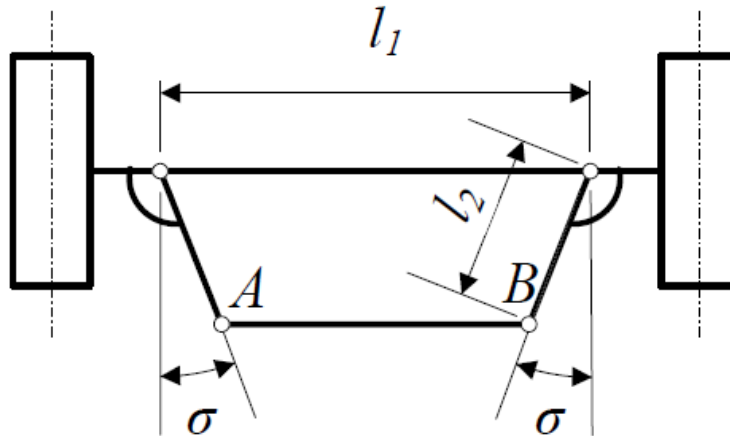


Figura 3.12 Meccanismo di sterzo a quadrilatero articolato.

Quando lo sterzo è ruotato (si veda la Figura 3.13), le coordinate dei punti  $A'$  e  $B'$  in un sistema di riferimento centrato in  $O_1$  con l'asse  $x$  posto in direzione trasversale sono

$$\overline{A'O_1} = \begin{cases} l_2 \sin(\sigma + \delta_i) \\ -l_2 \cos(\sigma + \delta_i) \end{cases} \quad (3.76)$$

$$\overline{B'O_1} = \begin{cases} l_1 - l_2 \sin(\sigma - \delta_e) \\ -l_2 \cos(\sigma - \delta_e) \end{cases} \quad (3.77)$$

Il quadrato della distanza tra  $A'$  e  $B'$  è quindi

$$\overline{A'B'}^2 = [l_2 \sin(\sigma + \delta_i) + l_2 \sin(\sigma - \delta_e) - l_1]^2 + [l_2 \cos(\sigma + \delta_i) - l_2 \cos(\sigma - \delta_e)]^2$$



Uguagliando la distanza tra  $A'$  e  $B'$  e quella tra  $A$  e  $B$  si ottiene, infine, la relazione che lega  $\delta_i$  e  $\delta_e$

$$\sin(\sigma - \delta_e) + \sin(\sigma + \delta_i) = \frac{l_1}{l_2} - \sqrt{\left[\frac{l_1}{l_2} - 2\sin\sigma\right]^2 - [\cos(\sigma - \delta_e) - \cos(\sigma + \delta_i)]^2} \quad (3.78)$$

cioè

$$1 + \sin(\sigma - \delta_e) \sin(\sigma + \delta_i) - \lambda \sin(\sigma - \delta_e) - \lambda \sin(\sigma + \delta_i) + [\lambda - 2\sin\sigma] \sin\sigma - \cos(\sigma - \delta_e) \cos(\sigma + \delta_i) = 0$$

dove  $\lambda = \frac{l_1}{l_2}$ .

La (3.78) può essere risolta in forma chiusa in modo da ottenere  $\delta_e$  una volta fissato  $\delta_i$ . Attraverso calcoli piuttosto laboriosi si ottiene l'equazione

$$A \sin^2(\sigma - \delta_e) + B \sin(\sigma - \delta_e) + C = 0 \quad (3.79)$$

dove

$$\begin{aligned} A &= 1 + \lambda^2 - 2\sin(\sigma + \delta_i) \\ B &= 2D[\sin(\sigma + \delta_i) - \sigma] \\ C &= D^2 - \cos^2(\sigma - \delta_i) \\ D &= 1 - \lambda \sin(\sigma + \delta_i) + [\sigma - 2\sin\sigma] \sin\sigma \end{aligned}$$

che permette di calcolare  $\delta_e$ .

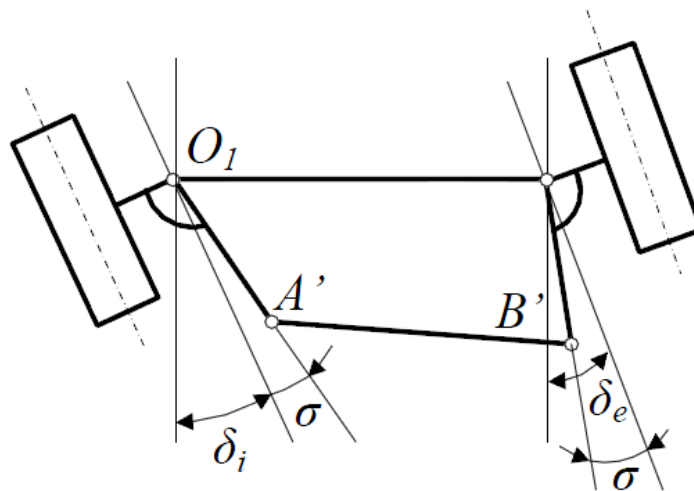


Figura 3.13 Meccanismo di sterzo a quadrilatero articolato con angolo di sterzo positivo.

Se, come proposto da *Jeantaud*, i due bracci dello sterzo convergono sul centro del retrotreno, l'angolo  $\sigma$  vale

$$\sigma = \tan^{-1} \frac{\delta_i}{2l} \quad (3.80)$$

ed  $l$  rappresenta il passo del veicolo. L'errore di sterzata  $\Delta\delta_e = \delta_e - \delta_{e_c}$  può essere calcolato per ogni valore di  $\delta_i$ . L'errore diminuisce per bassi valori dell'angolo di sterzo al crescere di  $\sigma$ . Tuttavia, bassi valori dell'errore, in condizioni di bassi angoli di sterzo, sono accompagnati da elevati errori in caso di forte sterzata, per cui è necessario un compromesso.

In passato, sono stati fatti molti sforzi per minimizzare l'errore di sterzata; tuttavia, l'importanza del rispetto delle condizioni di sterzata cinematica per ottenere un buon comportamento direzionale del veicolo è stata spesso approssimata.

Si consideri infatti che si deve tener conto dei seguenti fenomeni

- I. E' sempre presente un angolo di deriva;
- II. La maggior parte delle sospensioni causa una certa sterzata per effetto del rollio;
- III. Nella maggior parte dei casi le ruote sterzanti devono avere una certa convergenza;
- IV. Lo scuotimento delle sospensioni induce piccoli angoli di sterzo, che dipendono dalle forze scambiate tra le ruote ed il suolo.

Tutti questi fattori riducono l'importanza di piccoli errori dell'angolo di sterzata e suggeriscono di considerare il problema da un punto di vista più ampio.

### 3.10.2 Realizzazione delle condizioni di *Ackermann*

Riprendendo le equazioni (3.73-74), il raggio di curvatura della traiettoria del baricentro del veicolo vale, nel caso di sterzata cinematica

$$R = \sqrt{l_r^2 + R_1^2} = \sqrt{l_r^2 + l^2 \cot^2 \delta_f} \quad (3.81)$$

Dove  $\delta_f$  è l'angolo di sterzo di un veicolo a due ruote equivalenti (si veda il modello monotraccia). La relazione precedente è stata ricavata sostituendo a  $\cot\delta_f$  la seguente espressione

$$\cot\delta_f = \frac{R_1}{l} = \frac{\cot(\delta_i) + \cot(\delta_e)}{2} \quad (3.82)$$

Benché a rigore sia necessario eseguire la media delle cotangenti degli angoli di sterzo delle due ruote, non si commette un errore notevole eseguendo semplicemente la media degli angoli<sup>12</sup>. Pertanto,

<sup>12</sup>Per un veicolo con baricentro al centro del passo, su una traiettoria con  $R = 10$  m, i valori corretti degli angoli di sterzo sono  $\delta_i = 15,090^\circ$ ,  $\delta_e = 13,305^\circ$  e  $\delta = 14,142^\circ$ . La media degli angoli di sterzo è  $\delta = 14,197^\circ$  con un errore quindi dello 0,36%.

convenzionalmente, l'angolo di sterzo  $\delta_f$  del modello monotraccia è la media dell'angolo di sterzo delle ruote del veicolo a cui si riferisce.

Se il raggio di curvatura è grande rispetto al passo del veicolo (che quantitativamente vuol dire  $R_1 \gg l$ ) la (3.81) si riduce a

$$R \approx l \cot \delta_f \approx \frac{l}{\delta_f} \quad (3.83)$$

e quindi

$$\frac{1}{R\delta_f} = \frac{1}{l} \quad (3.84)$$

in cui il primo membro ha un importante significato fisico: è il rapporto della risposta del veicolo, in termini della curvatura della traiettoria del baricentro  $\frac{1}{R}$ , e  $\delta_f = \delta_0$ , angolo di sterzo, l'input che ne è la causa. Esso viene definito *guadagno della curvatura della traiettoria* e rappresenta una sorta di funzione di trasferimento per il comportamento direzionale del veicolo. In condizioni cinematiche esso è dunque uguale al reciproco del passo. Un'altra importante funzione di trasferimento è il rapporto  $\beta/\delta_f$  che può essere definito *guadagno dell'angolo di deriva*.

L'angolo di assetto del veicolo riferito al baricentro, può essere espresso in funzione del raggio di curvatura della traiettoria  $R$  nella forma

$$\beta = \tan^{-1} \left( \frac{l_r}{\sqrt{R^2 + l_r^2}} \right) \quad (3.85)$$

da cui, linearizzando e introducendo l'espressione precedente si ottiene

$$\frac{\beta}{\delta_f} = \frac{l_r}{l} \quad (3.86)$$

che rappresenta appunto il guadagno dell'angolo di deriva.



# 4 Comportamento direzionale a regime

## 4.1 Introduzione

La comprensione teorica del comportamento di un sistema meccanico è normalmente ottenuta risolvendo analiticamente le equazioni del moto sotto determinate condizioni. Tuttavia, la soluzione analitica potrebbe non essere possibile o potrebbe essere estremamente complicata. Ciò renderebbe difficile interpretare il moto del sistema. Alternativamente è possibile risolvere queste equazioni per via numerica, ma anche in questo caso la comprensione del moto è alquanto complicata.

Esistono a tal fine diversi approcci che non necessitano di una diretta soluzione di date equazioni. Uno di questi riguarda l'analisi delle condizioni stazionarie del sistema meccanico, mentre un altro approccio riguarda l'analisi delle caratteristiche dinamiche dall'esame delle radici dell'equazione caratteristica e dalla risposta del sistema ad un ingresso esterno.

Cominciamo allora a considerare le caratteristiche statiche in modo da analizzare il regime stazionario del sistema.

## 4.2 Comportamento a regime (*steering pad*)

In normali condizioni, un veicolo a velocità costante e con angolo di sterzo mantenuto fisso percorrerà una traiettoria circolare di raggio costante. Questa manovra è chiamata *curvatura a regime stazionario*.

A partire dalle equazioni del moto (3.52) ricavate nel capitolo precedente, possiamo descrivere il comportamento direzionale del veicolo in queste particolari condizioni di funzionamento.

Durante una curva a regime stazionario l'angolo di assetto  $\beta$  e la velocità di imbardata  $r$  rimangono costanti. In altre parole si ha  $\dot{\beta} = \frac{d\beta}{dt} = 0$  ed  $\dot{r} = \frac{dr}{dt} = 0$ . Considerando allora le (3.52) e riordinando si ottiene

$$\begin{aligned} (C_f + C_r)\beta + \left[ mV_G + \frac{1}{V_G}(l_f C_f - l_r C_r) \right] r &= C_f \delta_f \\ (l_f C_f - l_r C_r)\beta + \frac{l_f^2 C_f + l_r^2 C_r}{V_G} r &= l_f C_f \delta_f \end{aligned} \quad (4.1)$$

Le soluzioni per  $\beta$  ed  $r$  con angolo di sterzo costante e pari a  $\delta_{f,c}$  sono

$$\beta = \det \begin{bmatrix} C_f & mV_G + \frac{1}{V_G}(l_f C_f - l_r C_r) \\ l_f C_f & \frac{(l_f^2 C_f + l_r^2 C_r)}{V_G} \end{bmatrix} \frac{\delta_{f,c}}{\Delta} \quad (4.2)$$

$$r = \det \begin{bmatrix} (C_f + C_r) & C_f \\ (l_f C_f - l_r C_r) & l_f C_f \end{bmatrix} \frac{\delta_{f,c}}{\Delta} \quad (4.3)$$

dove

$$\Delta = \det \begin{bmatrix} (C_f + C_r) & mV_G + \frac{1}{V_G}(l_f C_f - l_r C_r) \\ (l_f C_f - l_r C_r) & \frac{(l_f^2 C_f + l_r^2 C_r)}{V_G} \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

Sostituendo l'espressione di  $\Delta$  nelle (4.2) e (4.3) si ottiene

$$\beta = \left( \frac{1 - \frac{ml_f}{l_r C_r} V_G^2}{1 - \frac{m(l_f C_f - l_r C_r)}{l^2 C_f C_r} V_G^2} \right) \frac{l_r}{l} \delta_{f,c} \quad (4.5)$$

$$r = \left( \frac{1}{1 - \frac{m(l_f C_f - l_r C_r)}{l^2} V_G^2} \right) \frac{V_G}{l} \delta_{f,c} \quad (4.6)$$

Se il veicolo, come detto, viaggia a velocità costante ed  $r$  è la velocità di imbardata in condizioni stazionarie, la distanza tra l'asse del veicolo ed il centro di istantanea rotazione, che in questo caso è proprio pari al raggio di curvatura, è

$$R_p = \frac{V_G}{r} = \left( 1 - \frac{m(l_f C_f - l_r C_r)}{l^2} V_G^2 \right) \frac{l}{\delta_{f,c}} \quad (4.7)$$

Le equazioni (4.5), (4.6) e (4.7) descrivono il moto a regime permanente del veicolo in curva, con angolo di sterzo e velocità di avanzamento costanti.

Se introduciamo l'ulteriore ipotesi di veicolo in moto a velocità molto basse ( $V_G \approx 0$ ), il termine  $V_G^2$  può essere trascurato e le relazioni di cui sopra diventano

$$\beta_{(V_G \approx 0)} = \frac{l_r}{l} \delta_{f,c} \quad (4.8)$$

$$r_{(V_G \approx 0)} = \frac{V_G}{l} \delta_{f,c} \quad (4.9)$$

$$R_{p(V_G \approx 0)} = R = \frac{l}{\delta_{f,c}} \quad (4.10)$$

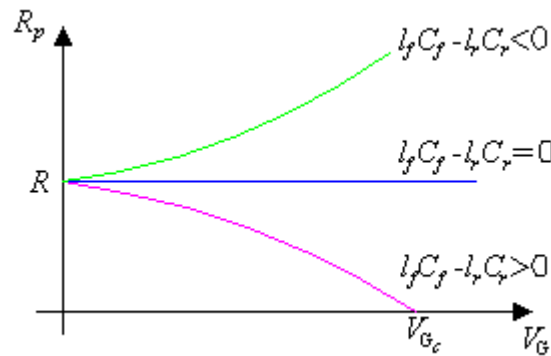
Le equazioni (4.8-10) mostrano come variano in condizioni di regime, le grandezze che caratterizzano il comportamento del veicolo in curva al variare della velocità di percorrenza  $V_G$ . Si noti che l'espressione geometrica del raggio di curvatura (4.10) ottenuta per basse velocità, è quella che determina l'angolo di Ackermann  $\delta_0$  ricavato nel Capitolo 3 a partire da considerazioni puramente geometriche.

### 4.3 Comportamento a regime e definizione di veicolo sovra-sottosterzante

In questo paragrafo viene messa in evidenza l'influenza dei parametri del veicolo sul moto in curva a regime. Consideriamo a tal fine l'espressione del raggio di curvatura per un fissato angolo di sterzo  $\delta_{f,c}$

$$R_p = \left(1 - \frac{m(l_f C_f - l_r C_r)}{l^2 C_f C_r} V_G^2\right) \frac{l}{\delta_{f,c}} \quad (4.11)$$

La Figura 4.1 mostra come varia il raggio di curvatura in funzione della velocità e del termine  $(l_f C_f - l_r C_r)$ .



**Figura 4.1** Relazione tra raggio di curvatura e velocità del veicolo con angolo di sterzo costante.

Come si può osservare, se l'angolo di sterzo viene mantenuto costante ed il termine  $l_f C_f - l_r C_r = 0$ , il raggio di curvatura non dipende dalla velocità. In pratica il raggio di curvatura ha un valore costante e pari ad  $R = \frac{l}{\delta_{f,c}}$  per ogni valore di velocità.

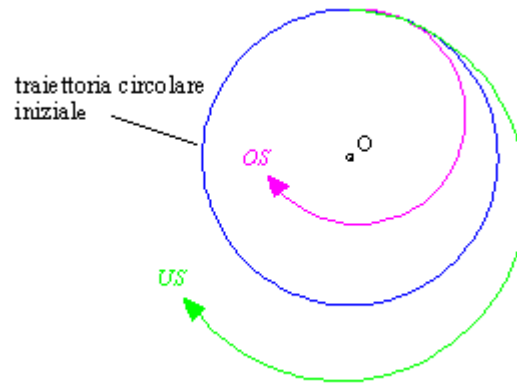
Se  $l_f C_f - l_r C_r < 0$  il raggio di curvatura del veicolo cresce con la velocità. Ciò vuol dire che se la velocità cresce con un fissato angolo di sterzo, il veicolo con  $l_f C_f - l_r C_r < 0$  a partire da una traiettoria circolare iniziale compirà una traiettoria circolare con raggio di curvatura più grande.

Viceversa, se  $l_f C_f - l_r C_r > 0$  il raggio di curvatura diminuisce all'aumentare della velocità<sup>13</sup>, cioè un veicolo con  $l_f C_f - l_r C_r > 0$ , percorrerà una traiettoria interna a quella iniziale determinata da raggi di curvatura sempre più piccoli. Infine, quando la velocità raggiunge il valore  $V_{G_c}$  (velocità critica),  $R_p = 0$  e non c'è curvatura.

<sup>13</sup> Il altre parole,  $l_f C_f - l_r C_r > 0$ , sta ad indicare che la capacità direttiva  $l_f C_f$  dell'avantreno è maggiore della capacità direttiva  $l_r C_r$  del retrotreno.



In altre parole, con riferimento alla Figura 4.2 quando  $l_f C_f - l_r C_r < 0$ , se l'angolo di sterzo viene mantenuto e la velocità è crescente, ci sarà un insufficiente angolo di sterzo per mantenere la traiettoria originale. Questa caratteristica dove l'angolo di sterzo è insufficiente a mantenere la traiettoria in caso di velocità crescente è detta di *sottosterzo* (*US Under-Steer*).



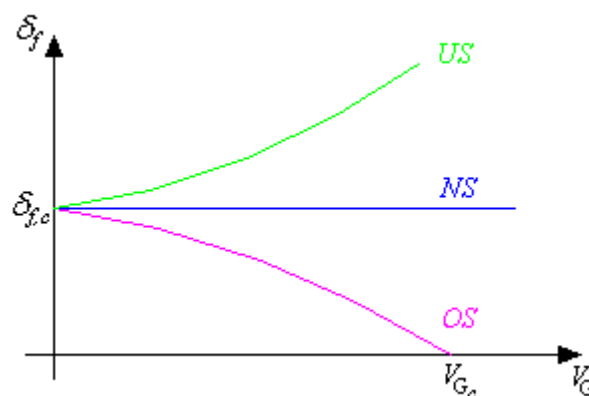
**Figura 4.2** Variazione del raggio di curvatura per velocità crescenti.

Quando invece  $l_f C_f - l_r C_r > 0$ , se l'angolo di sterzo è mantenuto costante e la velocità aumenta, l'angolo di sterzo sarà eccessivo per mantenere la traiettoria originale. Questa caratteristica con angolo di sterzo eccessivo, con riferimento a velocità crescenti è chiamata di *sovrasterzo* (*OS Over-Steer*). Infine, come già accennato, quando  $l_f C_f - l_r C_r = 0$  il raggio di curvatura non dipende dalla velocità ed il veicolo presenta caratteristiche neutre di sterzo (*NS Neutral-Steer*).

L'angolo di sterzo necessario a mantenere il veicolo su una traiettoria circolare di raggio costante, a regime e per diverse velocità, può essere ricavato a partire dalla (4.11). Infatti preso  $R_p = R_{p,c} = \text{cost}$ , si ottiene

$$\delta_f = \left( 1 - \frac{m(l_f C_f - l_r C_r)}{l^2 C_f C_r} V_G^2 \right) \frac{l}{R_{p,c}} \quad (4.12)$$

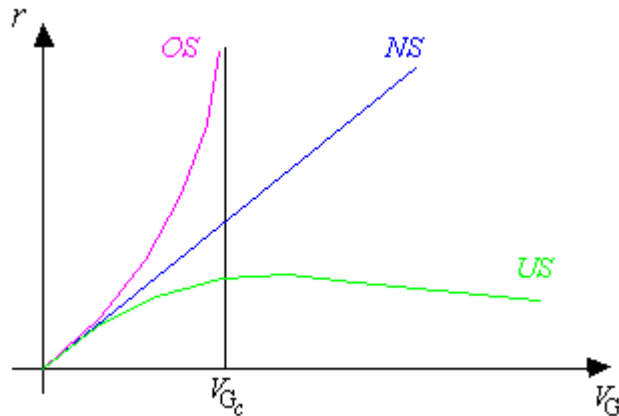
la cui espressione è formalmente uguale alla (4.11). La relazione tra  $\delta_f$  e  $V_G$  è mostrata nella Figura 4.3.



**Figura 4.3** Relazione tra angolo di sterzo e velocità del veicolo con raggio di curvatura costante.

In definitiva, se si vuole che il veicolo mantenga una traiettoria circolare di raggio costante, l'angolo di sterzo  $\delta_f$  deve essere aumentato al crescere della velocità se  $l_f C_f - l_r C_r < 0$ . Viceversa, quando  $l_f C_f - l_r C_r > 0$  deve essere diminuito all'aumentare della velocità. Infine, se  $l_f C_f - l_r C_r = 0$  l'angolo di sterzo non dipende dalla velocità.

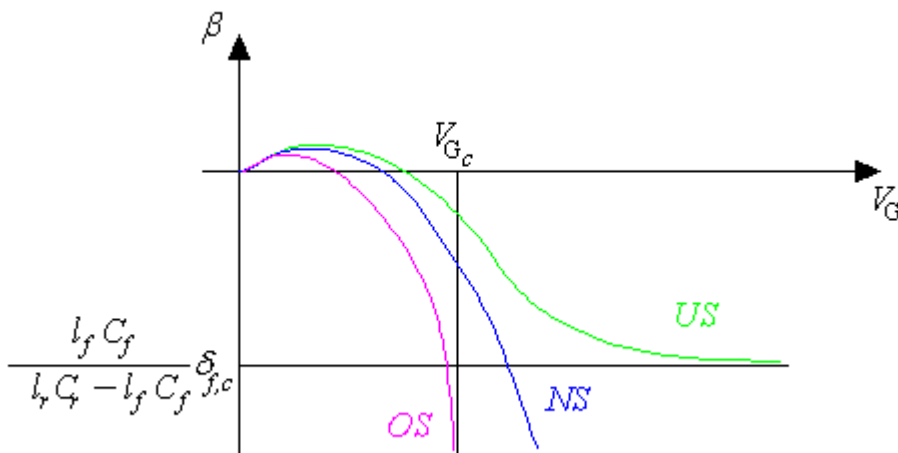
Premesso ciò, è interessante capire come varia la velocità di imbardata  $r$  in condizioni di regime ed in funzione delle caratteristiche di sterzo del veicolo.



**Figura 4.4** Velocità di imbardata a regime in funzione della velocità del veicolo

Come si può vedere dalla (4.6) e dalla Figura 4.4, che rappresenta la relazione qualitativa tra  $r$  e  $V_G$  a regime, la velocità di imbardata di un veicolo con caratteristiche neutre di sterzo cresce linearmente con la velocità assoluta. Se il veicolo presenta caratteristiche di sottosterzo, almeno inizialmente la velocità di imbardata cresce linearmente con velocità assoluta, ma poi tende a zero come  $1/V_G$  all'aumentare della velocità.

Nel caso di caratteristiche di sovrasterzo la velocità di imbardata cresce rapidamente con la velocità assoluta del baricentro e tende ad infinito in corrispondenza della velocità critica  $V_{Gc}$ .



**Figura 4.5** Angolo di assetto in funzione della velocità del veicolo a regime

Detto della velocità di imbardata a regime non ci resta che capire come varia l'angolo di assetto  $\beta$  in funzione della velocità, sempre in condizioni di regime stazionario. L'espressione di  $\beta$  in funzione della velocità è data dalla (4.5).

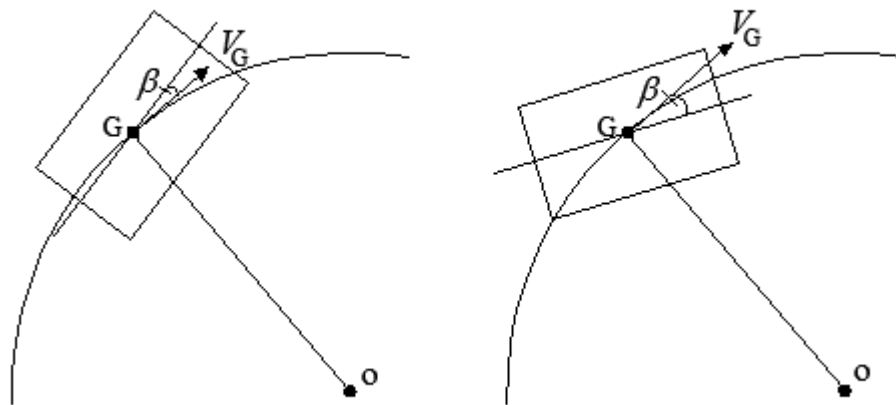
La Figura 4.5, insieme alla relazione (4.5) mostra come l'angolo di assetto decresce con la velocità indipendentemente dalle caratteristiche di sterzo del veicolo.

Dopo una certa velocità,  $\beta$  diventa negativo ed il suo valore assoluto cresce continuamente. Se il veicolo presenta caratteristiche di sottosterzo,  $\beta$  raggiungerà il valore massimo ad alte velocità, mentre con caratteristiche di sovrasterzo tende ad infinito in corrispondenza della velocità critica. Infine, se il veicolo presenta caratteristiche neutre di sterzo, cioè  $l_f C_f - l_r C_r = 0$  la (4.5) diventa

$$\beta = \left(1 - \frac{ml_f}{l l_r C_r} V_G^2\right) \frac{l_r}{l} \delta_{f,c} \quad (4.13)$$

che mette in evidenza come  $\beta$  non rimane costante con l'angolo di sterzo ma cresce in valore assoluto con il quadrato della velocità.

L'angolo di assetto del veicolo, indipendentemente dalle caratteristiche di sterzo dello stesso, cambia con la velocità a causa della necessità della forza laterale di bilanciare la forza centrifuga. Come noto,  $\beta$  è l'angolo sotteso tra la direzione longitudinale del veicolo e la direzione effettiva del centro di gravità dello stesso, cioè la tangente alla traiettoria circolare. Il fatto che tale angolo diventi negativo e cresca in valore assoluto con la velocità significa che quando il veicolo aumenta la velocità, tende a puntare la parte interna della traiettoria circolare, come mostrato in Figura 4.6.



**Figura 4.6** Comportamento del veicolo con riferimento ad una traiettoria circolare: a basse velocità ed alte velocità rispettivamente figura a sinistra e figura a destra.

Questa tendenza risulta ancora più evidente per veicoli con caratteristiche di sovrasterzo.

#### 4.4 Velocità limite e fattore di stabilità

Quando il veicolo presenta caratteristiche di sovrasterzo e l'angolo di sterzo viene mantenuto costante, il raggio di curvatura diventa zero quando la velocità raggiunge un valore limite. Per di più, la velocità di imbardata e l'angolo di assetto tendono ad infinito. Quando la velocità supera questo valore critico, il raggio di curvatura  $R_p$ , l'angolo di assetto  $\beta$  e la velocità di imbardata  $r$  perdono pertanto il loro significato fisico. Allora il valore della velocità critica  $V_{G_c}$  rappresenta quel valore di velocità che annulla il denominatore della (4.5) o della (4.6) e può essere ricavato a partire dall'equazione

$$1 - \frac{m(l_f C_f - l_r C_r)}{l^2 C_f C_r} V_G^2 = 0 \quad (4.14)$$

Se  $l_f C_f - l_r C_r > 0$ , allora il veicolo ha caratteristiche di sovrasterzo ed esiste un valore reale di velocità che soddisfa alla (4.14), dato da

$$V_{G_c} = \sqrt{\frac{l^2 C_f C_r}{m(l_f C_f - l_r C_r)}} = \sqrt{\frac{l C_f C_r}{m(C_f + C_r)}} \left(-\frac{1}{SM}\right) \quad (4.15)$$

Sopra questa velocità il moto circolare non è più possibile<sup>14</sup>. La velocità critica  $V_{G_c}$  aumenta man mano che la differenza  $l_f C_f - l_r C_r$  diventa piccola e diminuisce all'aumentare della massa  $m$ .

Quando il veicolo presenta caratteristiche di sovrasterzo è importante notare che il moto per velocità superiori a quella critica dipende dall'angolo di sterzo delle ruote anteriori inizialmente fissato. Questo non vuol dire che il veicolo non può essere mantenuto in traiettoria al di sopra di questa velocità, ma questa possibilità dipende dalla capacità di controllo del conducente. Comunque a causa del limite teorico di stabilità, i veicoli vengono progettati in modo da non presentare caratteristiche di sovrasterzo ed è raro trovare veicoli intenzionalmente progettati per esibire forti caratteristiche di sovrasterzo. Se si definisce *fattore di stabilità* il coefficiente

$$A = -\frac{m(l_f C_f - l_r C_r)}{l^2 C_f C_r} \quad (4.16)$$

l'equazione (4.14) diventa

$$1 + AV_G^2 = 0 \quad (4.17)$$

Se  $A < 0$ ,  $V_{G_c}$  può essere scritta come

<sup>14</sup> Per la definizione del *margin di stabilità*  $SM$  che compare nella (4.17), si veda il Paragrafo 4.5.

$$V_{Gc} = \sqrt{-\frac{1}{A}} \quad (4.18)$$

e quando  $A > 0$  viene introdotta la *velocità caratteristica* definita come

$$V_{Gch} = \sqrt{\frac{1}{A}} \quad (4.18')$$

che rappresenta la velocità alla quale il rapporto tra la velocità di imbardata e l'angolo di sterzo (*yaw velocity gain*) raggiunge il valore massimo.

Utilizzando la definizione di  $A$ , le relazioni tra  $\beta$ ,  $r$ ,  $R_p$  e  $\delta_{f,c}$ , a regime stazionario, possono essere scritte come

$$\beta = \left( \frac{1 - \frac{ml_f}{l_r C_r} V_G^2}{1 + AV_G^2} \right) \frac{l_r}{l} \delta_{f,c} \quad (4.19)$$

$$r = \left( \frac{1}{1 + AV_G^2} \right) \frac{V_G}{l} \delta_{f,c} \quad (4.20)$$

$$R_p = \frac{V_G}{r} = (1 + AV_G^2) \frac{l}{\delta_{f,c}} \quad (4.21)$$

Dalla (4.21) è immediato ricavare che alla velocità caratteristica si ha  $\delta_{f,c} = 2l/R_p$ , cioè l'angolo di sterzo è esattamente il doppio di quello necessario nel caso di condizioni cinematiche.

Il segno di  $A$  controlla le caratteristiche di sterzo del veicolo. Infatti, rappresenta un indice del grado di variazione del regime stazionario del veicolo in curva in funzione della velocità. In particolare, come si vede dalle relazioni sopra riportate, il regime stazionario del veicolo in curva varia con il quadrato della velocità e con il coefficiente  $A$ .

## 4.5 Margine di stabilità e punto neutro

Le caratteristiche di sterzo del veicolo, determinate dal segno della differenza tra la capacità direttiva anteriore e la capacità direttiva posteriore, cioè dalla differenza  $l_f C_f - l_r C_r$ , hanno una influenza notevole sul regime stazionario in curva. E' quindi chiaro come il concetto di *US*, *OS* e *NS* è estremamente importante nella discussione delle prestazioni dinamiche del veicolo.

Supponiamo che inizialmente il veicolo si trovi con  $\delta_f = 0$  ma per alcune ragioni si viene a creare un angolo di assetto diverso da zero. Lo stesso angolo viene prodotto sulle ruote anteriori e

posteriori e per questo si verificherà una certa forza sugli pneumatici. Queste forze laterali producono un momento di imbardata che agisce intorno all'asse verticale  $z$  passante per il centro di gravità  $G$ .

Il moto di imbardata generato da questo momento, in base alla seconda delle (3.52) e nell'ipotesi di angolo di sterzo nullo è descritto dall'espressione

$$J \frac{dr}{dt} + \frac{l_f^2 C_f + l_r^2 C_r}{V_G} r = -(l_f C_f - l_r C_r) \beta \quad (4.22)$$

Con riferimento alle convenzioni assunte nel capitolo precedente per quanto riguarda il segno delle varie grandezze che caratterizzano il moto, se  $\beta$  è positivo e la differenza  $l_f C_f - l_r C_r$  è pure positiva, il momento agente attorno al centro di gravità da luogo ad una velocità  $r$  negativa. Se  $l_f C_f - l_r C_r = 0$  il momento è nullo e non c'è moto di imbardata ed infine se  $l_f C_f - l_r C_r < 0$  il momento agente produce una velocità  $r$  positiva.

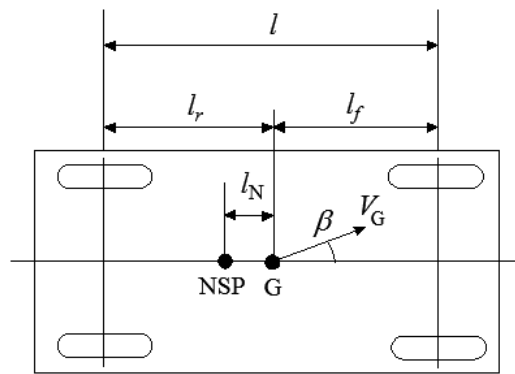


Figura 4.7 Definizione di punto neutro (NSP).

In altre parole, se  $l_f C_f - l_r C_r > 0$  la risultante delle forze laterali prodotte dagli pneumatici anteriori e posteriori agisce in un punto posto davanti al centro di gravità ed è tale da dar luogo ad una velocità di imbardata negativa; se  $l_f C_f - l_r C_r < 0$  la risultante delle forze laterali agisce in un punto posto dietro al centro di gravità; se  $l_f C_f - l_r C_r = 0$  questa risultante agisce proprio in corrispondenza del centro di gravità (si veda Figura 4.7).

Questo punto, dove agisce la forza risultante prodotta dagli pneumatici è chiamato *punto neutro* (*Neutral Steer Point NSP*).

Se il centro di gravità possiede un certo angolo di assetto  $\beta$ , le forze laterali agenti sugli pneumatici anteriori e posteriori saranno  $C_f \beta$  e  $C_r \beta$  rispettivamente.

Chiamando  $l_N$  la distanza del punto neutro dal centro di gravità del veicolo, con riferimento ad un NSP posto dietro rispetto a  $G$  come mostrato nella Figura 4.7, l'equilibrio dei momenti è dato dall'espressione seguente

$$(l_f + l_N) C_f \beta = (l_r - l_N) C_r \beta \quad (4.23)$$

Da questa equazione di equilibrio è possibile ricavare l'espressione della distanza del *NSP* da *G*, cioè

$$l_N = \frac{l_r C_r - l_f C_f}{C_r + C_f} = - \frac{l_f C_f - l_r C_r}{C_r + C_f} \quad (4.24)$$

Il punto neutro è davanti al centro di gravità quando  $l_f C_f - l_r C_r$  è positivo, mentre quando  $l_f C_f - l_r C_r$  è negativo,  $l_N$  si trova dietro al centro di gravità. Quando  $l_f C_f - l_r C_r = 0$  il punto neutro coincide con il centro di gravità.

La quantità adimensionale definita dal rapporto tra  $l_N$  ed il passo del veicolo  $l$ , è detta *margin* di *stabilità* (*Static Margin*) precedentemente indicata con *SM*

$$SM = \frac{l_N}{l} = - \frac{l_f C_f - l_r C_r}{l(C_r + C_f)} \quad (4.25)$$

oppure

$$SM = - \frac{l_f}{l} + \frac{C_r}{(C_r + C_f)} \quad (4.26)$$

L'espressione (4.25) contiene la quantità  $l_f C_f - l_r C_r$ , che determina le caratteristiche di sterzo del veicolo. Allora tali caratteristiche possono essere riepilogate in funzione del margine di stabilità, quindi

quando  $SM > 0$ ,  $l_f C_f - l_r C_r < 0$  ed il veicolo è sottosterzante *US*,

quando  $SM = 0$ ,  $l_f C_f - l_r C_r = 0$  ed il veicolo è neutro *NS*,

quando  $SM < 0$ ,  $l_f C_f - l_r C_r > 0$  ed il veicolo è sovrasterzante *OS*.

Le caratteristiche in curva a regime del veicolo sono state studiate a partire dalle equazioni del moto. Tali equazioni sono state ricavate nell'ipotesi che le forze laterali esercitate dagli pneumatici siano proporzionali ai rispettivi angoli di deriva e pertanto mantengono la loro validità solo in questa particolare situazione.





## 5 Analisi Dinamica

### 5.1 Introduzione

Nel capitolo precedente si sono descritte le caratteristiche base del moto con riferimento al regime stazionario. I risultati ottenuti possono essere classificati come caratteristiche statiche, ovvero come caratteristiche del moto a regime stazionario. Tuttavia, per comprendere a fondo le caratteristiche del moto è necessario considerare anche le caratteristiche dinamiche. In questo modo è possibile analizzare il comportamento transitorio del veicolo in risposta ad un comando di sterzo da parte del conducente.

#### 5.1.1 Risposta transitoria del veicolo ad un input di sterzo

In questo sottoparagrafo viene descritta la risposta transitoria e la stabilità direzionale del veicolo ad un comando di sterzo [10].

Riprendiamo le equazioni del moto (3.52) ricavate nel Paragrafo 3.8 del capitolo precedente, ossia

$$\begin{aligned} mV_G(\dot{\beta} + r) &= C_f \left( \delta_f - \beta - \frac{l_f}{V_G} r \right) + C_r \left( -\beta + \frac{l_r}{V_G} r \right) \\ J\dot{r} &= C_f \left( \delta_f - \beta - \frac{l_f}{V_G} r \right) l_f + C_r \left( \beta - \frac{l_r}{V_G} r \right) l_r \end{aligned} \quad (3.52)$$

Riordiniamo i termini portando al secondo membro l'ingresso  $\delta_f$ , si ottiene

$$\begin{aligned} mV_G \dot{\beta} + (C_f + C_r)\beta + \left[ mV_G + \frac{1}{V_G}(l_f C_f - l_r C_r) \right] r &= C_f \delta_f \\ (l_f C_f - l_r C_r)\beta + J\dot{r} + \frac{l_f^2 C_f + l_r^2 C_r}{V_G} r &= l_f C_f \delta_f \end{aligned} \quad (5.1)$$

La risposta del veicolo all'ingresso  $\delta_f$  può essere ottenuta risolvendo le equazioni del moto sotto determinate condizioni. Essendo il sistema lineare, il comportamento dinamico può essere espresso dalla risoluzione delle equazioni del moto in direzione laterale, o investigando gli autovalori delle equazioni caratteristiche. L'equazione caratteristica del sistema che è oggetto di studio può essere ricavata dalle (5.1) passando nel dominio di Laplace, cioè

$$\begin{bmatrix} mV_G s + (C_f + C_r) & mV_G + \frac{1}{V_G}(l_f C_f - l_r C_r) \\ (l_f C_f - l_r C_r) & Js + \frac{l_f^2 C_f + l_r^2 C_r}{V_G} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta(s) \\ r(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_f \\ l_f C_f \end{bmatrix} \delta_f(s) \quad (5.2)$$

dove con  $\beta(s)$ ,  $r(s)$  e  $\delta_f(s)$  si sono indicate le Laplace trasformate di  $\beta$ ,  $r$  e  $\delta_f$  rispettivamente.

L'equazione caratteristica la si ottiene annullando il determinante della matrice del sistema (5.2) di cui sopra, ossia

$$\det \begin{bmatrix} mV_G s + (C_f + C_r) & mV_G + \frac{1}{V_G}(l_f C_f - l_r C_r) \\ (l_f C_f - l_r C_r) & Js + \frac{l_f^2 C_f + l_r^2 C_r}{V_G} \end{bmatrix} = 0 \quad (5.3)$$

e dopo qualche passaggio si ottiene

$$mV_G J \left[ s^2 + \frac{m(l_f^2 C_f + l_r^2 C_r) + J(C_f + C_r)}{mV_G J} s + \frac{C_r C_f l^2}{mV_G^2 J} - \frac{(l_f C_f - l_r C_r)}{J} \right] = 0 \quad (5.4)$$

oppure

$$s^2 + 2Ds + P = 0 \quad (5.5)$$

dove si è indicato

$$\begin{aligned} 2D &= \frac{m(l_f^2 C_f + l_r^2 C_r) + J(C_f + C_r)}{mV_G J} \\ P &= \frac{C_r C_f l^2}{mV_G^2 J} - \frac{(l_f C_f - l_r C_r)}{J} \end{aligned} \quad (5.6)$$

La risposta del sistema può essere espressa nella forma  $C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$ , con  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  radici dell'equazione caratteristica, ossia

$$\lambda_{1,2} = -D \pm \sqrt{D^2 - P} \quad (5.7)$$

Le caratteristiche della risposta transitoria e la stabilità del sistema dipendono dal valore delle radici. Cioè, a seconda che esse siano reali o complesse, dal segno se sono reali, o dal segno della parte reale se sono complesse. Come si vede dalla (5.7), i valori di  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  dipendono da  $D$  e  $P$ .

Dall'equazione (5.6) si nota che  $D$  esprime sempre una quantità positiva. Le caratteristiche della risposta e la stabilità del moto del veicolo possono essere classificate a seconda del segno dell'argomento sotto radice della (5.7), che quindi dipenderà esclusivamente dal segno e dal valore di  $P$ .

Detto questo, possiamo scrivere:

- I. Quando  $D^2 - P \geq 0, P > 0$ , allora  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  sono reali negative ed il moto converge senza oscillazioni (*stabile*).
- II. Quando  $D^2 - P < 0, P > 0$ , allora  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  sono complesse con parte reale negativa ed il moto converge con oscillazioni (*stabile*).
- III. Quando  $P < 0$  allora  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  sono reali, una negativa e l'altra positiva ed il moto diverge senza oscillazioni (*instabile*).

Tutto ciò vale nell'ipotesi che la sterzata non cambi in funzione del comportamento del veicolo. Va comunque detto che questa ipotesi non sempre può essere verificata perché di fatto il conducente gioca un ruolo fondamentale sulla stabilità del moto.

La risposta del veicolo può essere studiata distinguendo tre casi che ora verranno esaminati.

Nel primo caso, dalla seconda equazione delle (5.6), essendo il primo termine a secondo membro  $C_r C_f l^2 / m V_G^2 J$  sempre positivo, per ottenere  $P \leq 0$  e quindi rendere il moto instabile, il secondo termine a secondo membro deve essere necessariamente negativo. In altre parole  $l_f C_f - l_r C_r$  deve essere maggiore di zero. Indicando con  $V_{Gc}$  come la velocità che annulla  $P$ , si ottiene

$$1 - \frac{m(l_f C_f - l_r C_r)}{C_r C_f l^2} V_{Gc}^2 = 0 \quad (5.8)$$

perciò

$$V_{Gc} = \sqrt{\frac{l^2 C_r C_f}{m(l_f C_f - l_r C_r)}} = \sqrt{\frac{l C_r C_f}{m(C_r + C_f)} \left(-\frac{1}{SM}\right)} \quad (5.9)$$

Per tutte le velocità maggiori di  $V_{Gc}$ ,  $P \leq 0$ . Questa è la condizione per l'instabilità statica del sistema meccanico, come descritto nel Paragrafo 4.3.

Quando il veicolo esibisce caratteristiche di sovrasterzo, il moto laterale diventa instabile alla velocità  $V_G$  e diverge senza oscillazioni in risposta ad un fissato comando di sterzo. Come si potrebbe vedere dalla (4.37), questo limite di stabilità è fortemente dipendente dal margine di stabilità  $SM$ .

Se  $l_f C_f - l_r C_r < 0$ , cioè il veicolo presenta caratteristiche di sottosterzo, oppure rivela caratteristiche di sovrasterzo ma  $V_G < V_{G_c}$ , allora  $P$  è sempre maggiore di zero ed il moto del veicolo è stabile. Queste due situazioni corrispondono rispettivamente al secondo e terzo caso in esame.

A questo punto utilizzando le equazioni (5.6) è possibile calcolare la differenza  $D^2 - P$ , cioè

$$D^2 - P = \left[ \frac{m(l_f^2 C_f + l_r^2 C_r) + J(C_f + C_r)}{2mV_G J} \right]^2 - \frac{C_r C_f l^2}{mV_G^2 J} + \frac{(l_f C_f - l_r C_r)}{J} \quad (5.10)$$

Oppure, mettendo in evidenza il coefficiente di  $1/V_G^2$  si ottiene

$$D^2 - P = \frac{(l_f C_f - l_r C_r)}{J} + \left\{ \left[ \frac{m(l_f^2 C_f + l_r^2 C_r) + J(C_f + C_r)}{2mJ} \right]^2 - \frac{C_r C_f l^2}{mJ} \right\} \frac{1}{V_G^2} \quad (5.11)$$

Se il coefficiente di  $1/V_G^2$  è sempre positivo e se il primo termine a secondo membro è sempre positivo o zero, allora  $D^2 - P$  sarà anche positivo o zero. Quindi, in altre parole, se le caratteristiche del veicolo sono rispettivamente di sovrasterzo e neutre, la risposta transitoria sarà sempre senza oscillazioni, stabile oppure no.

Quando invece  $l_f C_f - l_r C_r < 0$ , la differenza  $D^2 - P$  dipende dal valore di  $V_G$  e sopra un certo valore  $V_{G_s}$ , ricavabile peraltro dalla (5.10), cambia di segno passando da un valore positivo ad un valore negativo. Allora, quando il veicolo presenta caratteristiche di sottosterzo la risposta transitoria ad un comando di sterzo sarà senza oscillazioni per velocità inferiori a  $V_{G_s}$ , ma al di sopra di questa velocità la risposta del sistema diventa oscillante. Tutto questo può essere riassunto in Figura 5.1.

caratteristiche di sterzo	risposta transitoria	
sottosterzo <i>US</i>	$0 \leq V_G \leq V_{G_s}$	② smorzato con oscillazioni per $V_G \geq V_{G_s}$
neutre <i>NS</i>	① smorzato senza oscillazioni	
sovrasterzo <i>OS</i>	$0 \leq V_G \leq V_{G_c}$	③ divergente $V_G \geq V_{G_c}$

Figura 5.1 Caratteristiche di sterzo e risposte transitorie del veicolo

Questa analisi ha messo in evidenza come la risposta transitoria di un veicolo ad un comando di sterzo sia influenzata dalla velocità e dalle caratteristiche di sterzo.

Il problema della stabilità del moto è chiamato *stabilità direzionale del veicolo*. L'andamento qualitativo della risposta del veicolo ad un comando di sterzo è mostrato nella Figura 5.2.

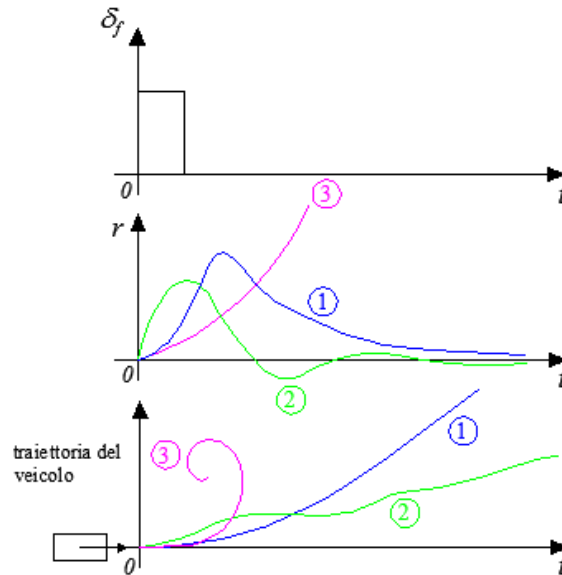


Figura 5.2 Andamenti qualitativi della risposta transitoria del veicolo ad un input di sterzo

### 5.1.2 Pulsazione naturale e coefficiente di smorzamento

In questo sottoparagrafo si calcola la frequenza naturale ed il coefficiente di smorzamento della risposta del veicolo ad un comando di sterzo, in funzione delle caratteristiche tecniche del veicolo e della velocità assoluta del baricentro.

Se  $\omega_n$  è la pulsazione naturale e  $\zeta$  il coefficiente di smorzamento, l'equazione caratteristica (5.5) può essere riscritta nel modo seguente

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0 \quad (5.12)$$

dove

$$\begin{aligned} \omega_n^2 &= P \\ 2\zeta\omega_n &= 2D \end{aligned} \quad (5.13)$$

Utilizzando poi le espressioni (5.6) si ottiene

$$\begin{aligned} \omega_n &= \sqrt{P} = \sqrt{\frac{C_f C_r l^2}{J m V_G^2} - \frac{C_f l_f - C_r l_r}{J}} \\ &= \frac{\sqrt{C_f C_r} l}{\sqrt{m J}} \frac{1}{V_G} \sqrt{1 + \frac{m}{l} \left( \frac{C_f + C_r}{C_f C_r} \right) V_G^2 S M} \end{aligned} \quad (5.14)$$

e

$$\zeta = \frac{D}{\sqrt{P}} = \frac{(C_f + C_r)J + (C_f l_f^2 + C_r l_r^2)m}{2\sqrt{Jm} \sqrt{C_f C_r l^2 - mV_G^2 (l_f C_f - l_r C_r)}} \quad (5.15)$$

ed esprimendolo in funzione di  $SM$  si ha

$$\zeta = \frac{D}{\sqrt{P}} = \frac{(C_f + C_r)J + (C_f l_f^2 + C_r l_r^2)m}{2\sqrt{Jm} l \sqrt{1 + \frac{m}{l} \frac{C_f + C_r}{C_f C_r} SM V_G^2}} \quad (5.15')$$

Dalla (5.14) si vede come la pulsazione naturale decresce con la velocità assoluta ed aumenta leggermente all'aumentare del margine di stabilità. Per quanto concerne  $\zeta$ , dalla (5.15') si vede che lo smorzamento diminuisce all'aumentare del margine di stabilità e quindi la risposta del sistema diventa più oscillante a parità di velocità.

Nel caso di velocità crescenti, quando il veicolo mostra caratteristiche di  $US$  lo smorzamento diminuisce, così il moto del veicolo diventa più oscillante e meno smorzato.

Quando il veicolo mostra caratteristiche di sovrasterzo, lo smorzamento aumenta e la risposta diventa maggiormente smorzata. Infine, se il veicolo esibisce caratteristiche di sterzo neutre o se la velocità di avanzamento è circa zero, lo smorzamento è circa unitario. Questa potrebbe essere considerata come una situazione critica di smorzamento.

## 5.2 Funzione di trasferimento tra angolo di sterzo e velocità di imbardata

Fin qui la caratteristica della risposta transitoria del veicolo ad un comando di sterzo è stata valutata senza una diretta soluzione delle equazioni del moto, ma solo dall'analisi delle radici dell'equazione caratteristica.

In questo paragrafo riportiamo la funzione di trasferimento tra l'ingresso del sistema  $\delta_f$  e l'uscita  $r$ . Dopodiché, riportiamo l'andamento della risposta ad un gradino di sterzo nel dominio del tempo e nel dominio della frequenza con riferimento alle caratteristiche del veicolo riportate in Appendice B.

Dalle equazioni del moto (5.1) passando alle Laplace trasformate e raccogliendo i termini nella variabile  $s$ , si hanno le equazioni del moto scritte nella forma

$$\begin{aligned} [mV_G s + (C_f + C_r)]\beta(s) + \left[ mV_G + \frac{1}{V_G} (l_f C_f - l_r C_r) \right] r(s) &= C_f \delta_f(s) \\ (l_f C_f - l_r C_r)\beta(s) + \left[ Js + \frac{l_f^2 C_f + l_r^2 C_r}{V_G} \right] r(s) &= l_f C_f \delta_f(s) \end{aligned} \quad (5.16)$$

dove  $\beta(s)$ ,  $\delta_f(s)$  e  $r(s)$  sono Laplace trasformate di  $\beta$ ,  $\delta_f$  e  $r$  rispettivamente. Risolvendo l'equazione algebrica per  $r(s)$ , si ottiene la funzione di trasferimento tra l'angolo di sterzo (grandezza di ingresso) e la velocità di imbardata (grandezza di uscita), cioè

$$G_{\delta_f}^r(s) = \frac{r(s)}{\delta_f(s)} = \frac{\det \begin{bmatrix} mV_G s + (C_f + C_r) & C_f \\ (l_f C_f - l_r C_r) & l_f C_f \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} mV_G s + (C_f + C_r) & mV_G + \frac{1}{V_G} (l_f C_f - l_r C_r) \\ (l_f C_f - l_r C_r) & Js + \frac{l_f^2 C_f + l_r^2 C_r}{V_G} \end{bmatrix}} \quad (5.17)$$

Espandendo il determinante a numeratore e denominatore, dopo semplici passaggi matematici si ottiene

$$G_{\delta_f}^r(s) = \frac{\frac{C_f l_f}{J} s + \frac{C_r C_f (l_f + l_r)}{mJ V_G}}{s^2 + \left[ \frac{(l_f^2 C_f + l_r^2 C_r)}{JV_G} + \frac{(C_f + C_r)}{mV_G} \right] s + \frac{(l_r C_r - l_f C_f)}{J} + \frac{C_f C_r l^2}{mJ V_G^2}} \quad (5.18)$$

Oppure in forma compatta

$$G_{\delta_f}^r(s) = \frac{b_1 s + b_0}{s^2 + a_1 s + a_0} \quad (5.19)$$

con

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{C_f l_f}{J} & b_0 &= \frac{C_r C_f (l_f + l_r)}{mJ V_G} \\ a_1 &= \frac{(l_f^2 C_f + l_r^2 C_r)}{JV_G} + \frac{(C_f + C_r)}{mV_G} & a_0 &= \frac{(l_r C_r - l_f C_f)}{J} + \frac{C_f C_r l^2}{mJ V_G^2} \end{aligned} \quad (5.19')$$

Inoltre, utilizzando le espressioni di  $\omega_n$  e  $\zeta$  si ha

$$G_{\delta_f}^r(s) = \frac{r(s)}{\delta_f(s)} = G_{\delta_f}^r(0) \frac{1 + T_r s}{1 + \frac{2\zeta s}{\omega_n} + \frac{s^2}{\omega_n^2}} \quad (5.20)$$

dove  $G_{\delta_f}^r(0) = \frac{1}{1 + AV_G^2} \frac{V_G}{l}$  è il guadagno di imbardata, che rappresenta il valore di  $r$  in risposta ad un angolo di sterzo  $\delta_f$  in regime stazionario e  $T_r = \frac{m l_f V_G}{l C_r}$  ha le dimensioni di un tempo.

La grandezza

$$t_e = \frac{1}{\omega_n^2 T_r} \quad (5.21)$$

è definita approssimativamente come il tempo di risposta della velocità di imbardata ad un gradino di sterzo ed è ottenuto dall'intersezione della tangente nell'origine ed il valore che la velocità di imbardata assume a regime.



### 5.2.1 Andamento della velocità di imbardata nel dominio del tempo

Riportiamo l'andamento nel dominio del tempo della velocità di imbardata (*yaw rate*) per diverse velocità di avanzamento in risposta ad un gradino di sterzo e con riferimento ai dati riportati in Appendice B.

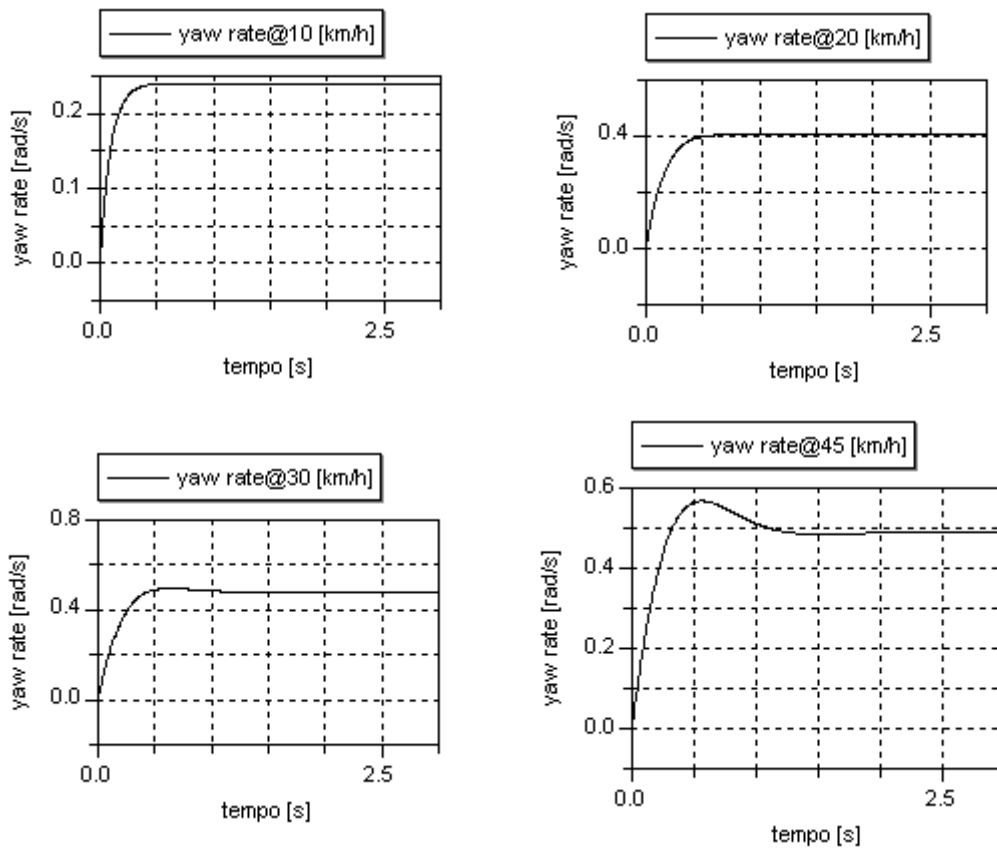


Figura 5.3 Andamento della velocità di imbardata con riferimento ai dati riportati in Appendice B per diverse velocità di avanzamento.

Mantenendo invece la velocità di avanzamento costante ma variando l'input di sterzo si ha quanto riportato nelle Figure sottostanti.

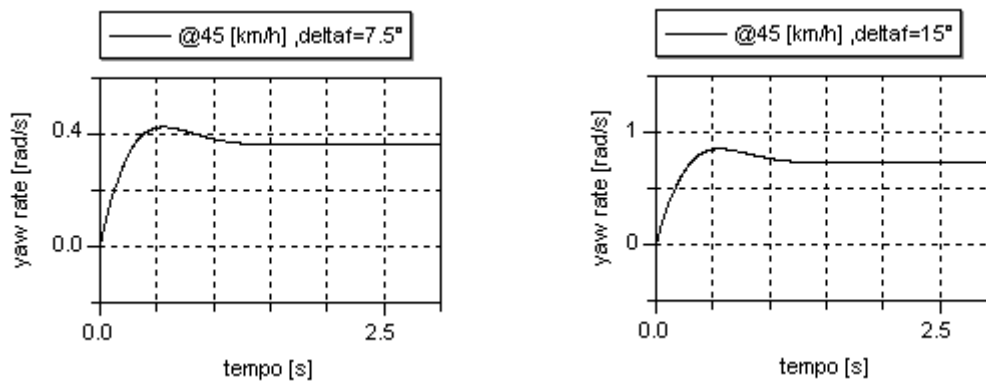
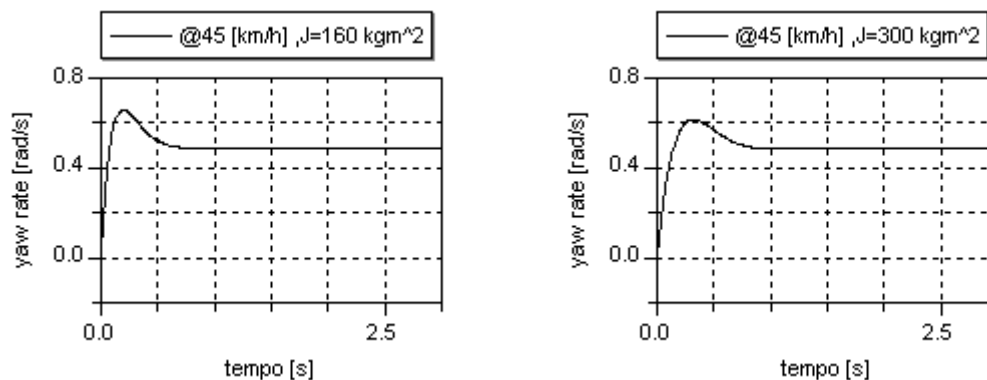


Figura 5.4 Andamento della velocità di imbardata con riferimento ai dati riportati in Appendice B per velocità costante e con angoli di sterzo differenti.

Dalla Figura 5.3 è possibile notare come l'andamento della velocità di imbardata in risposta ad un gradino di sterzo, tenda ad essere meno smorzata al crescere della velocità assoluta di avanzamento.

I valori di velocità di avanzamento considerati sono tali che la velocità di imbardata a regime sia via via crescente all'aumentare della velocità del veicolo. Tuttavia per velocità del veicolo molto elevate essa tende a zero come  $1/V_G$ .

Dalla Figura 5.4 si vede come un angolo di sterzo maggiore porti a valori di imbardata maggiori a regime. Il che è in linea con le considerazioni svolte nel capitolo precedente per quanto riguarda il comportamento a regime.



**Figura 5.5** Andamento della velocità di imbardata con riferimento ai dati riportati in Appendice B per velocità costante e differente momento di inerzia.

Se invece immaginiamo di poter variare il momento di inerzia  $J$ , dalla Figura 5.5 si vede come la risposta del sistema, a parità di altre condizioni, non sia influenzata a regime mentre varia l'andamento nei primi istanti successivi all'applicazione del gradino di sterzo. In particolare si vede come un momento di inerzia piccolo porti a tempi di risposta brevi ma nello stesso tempo aumenta la sovra elongazione rispetto al valore assunto a regime, come si riconosce dal fatto che il guadagno in continua non dipende da  $J$  mentre vi dipende  $\zeta$ .

### 5.2.2 Diagrammi di Bode della funzione di trasferimento $G_{\delta_f}^r(j\omega)$

In questo Sottoparagrafo riportiamo i diagrammi di Bode di modulo e fase della funzione di trasferimento  $G_{\delta_f}^r(j\omega)$ , con riferimento alle caratteristiche riportate in Appendice B e per diverse velocità di avanzamento.

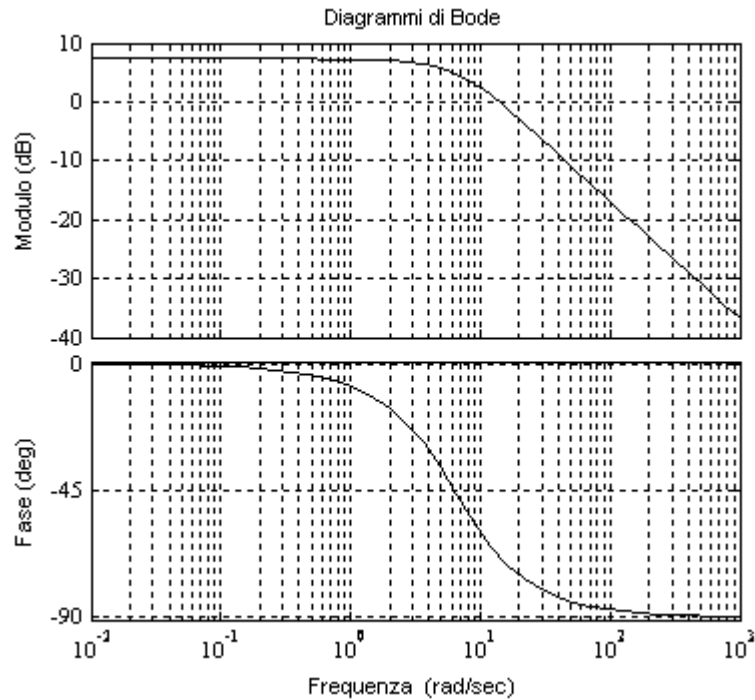


Figura 5.6 Diagramma di Bode delle FDT  $G_{\delta_f}^r(j\omega)$  a  $V_G = 20$  [km/h].

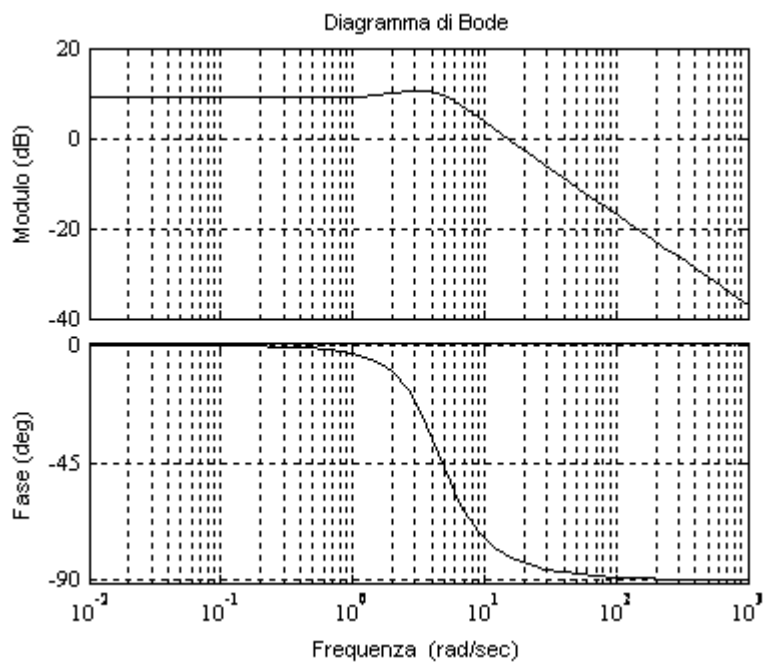
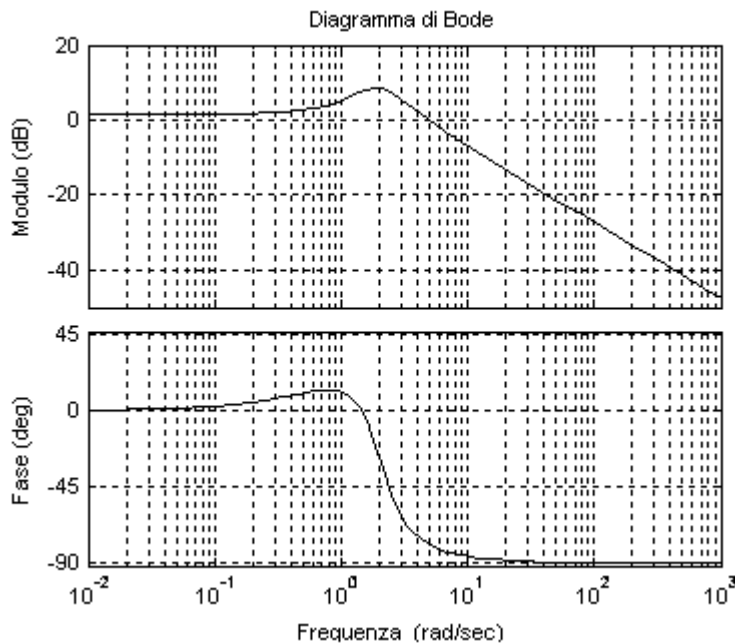


Figura 5.7 Diagramma di Bode delle FDT  $G_{\delta_f}^r(j\omega)$  a  $V_G = 45$  [km/h].

Come si può notare dai diagrammi sopra raffigurati, la risposta della velocità di imbarcata mostra una risonanza crescente all'aumentare della velocità.

La frequenza angolare di attraversamento, nel caso della massima velocità raggiungibile dal veicolo e nelle condizioni ideali di aderenza risulta pari a  $\omega_a = 14.8 [rad/s]$  con fase pari a  $\varphi_a = -80.4 [deg]$  e margine di fase  $m_\varphi = 99.6 [deg]$ .



**Figura 5.8** Diagramma di Bode della  $FDT G_{\delta_f}^r(j\omega)$  a  $V_G = 45 [km/h]$  in condizioni non ottimali di aderenza con coefficiente di attrito dinamico  $\mu = 0.3$ .

Nella Figura 5.8 è raffigurata la risposta in frequenza del sistema in condizioni di aderenza non ottimale. In questo caso si riduce il valore della frequenza angolare di attraversamento  $\omega_a' = 4.88 [rad/s]$ .

Il coefficiente di attrito dinamico  $\mu$  va a modificare il valore della rigidità di deriva dell'assale. Come conseguenza si riduce il valore della forza laterale risultante esercitata dagli pneumatici.

### 5.3 Funzione di trasferimento tra angolo di assetto ed angolo di sterzo

In questo paragrafo ricaviamo la *FDT* tra angolo di assetto e l'angolo di sterzo delle ruote anteriori. A partire dal sistema di equazioni (5.16) si ha

$$G_{\delta_f}^{\beta}(s) = \frac{\beta(s)}{\delta_f(s)} = \frac{\det \begin{bmatrix} C_f & mV_G + \frac{1}{V_G}(l_f C_f - l_r C_r) \\ l_f C_f & Js + \frac{l_f^2 C_f + l_r^2 C_r}{V_G} \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} mV_G s + (C_f + C_r) & mV_G + \frac{1}{V_G}(l_f C_f - l_r C_r) \\ (l_f C_f - l_r C_r) & Js + \frac{l_f^2 C_f + l_r^2 C_r}{V_G} \end{bmatrix}} \quad (5.22)$$

Risolvendo la (5.23) si ottiene

$$G_{\delta_f}^{\beta}(s) = \frac{C_f s + \frac{C_r C_f l_r l - l_f C_f m V_G^2}{J V_G}}{s^2 + \left[ \frac{(l_f^2 C_f + l_r^2 C_r)}{J V_G} + \frac{(C_f + C_r)}{m V_G} \right] s + \frac{(l_r C_r - l_f C_f)}{J} + \frac{C_f C_r (l_f^2 + l_r^2)}{m J V_G^2}} \quad (5.23)$$

oppure

$$G_{\delta_f}^{\beta}(s) = \frac{c_1 s + c_0}{s^2 + a_1 s + a_0} \quad (5.24)$$

dove

$$c_1 = C_f \quad c_0 = \frac{C_r C_f l_r l - l_f C_f m V_G^2}{J V_G} \quad (5.24')$$

I coefficienti che compaiono al denominatore della (5.24) sono esattamente quelli della (5.19').

Utilizzando le espressioni di  $\omega_n$  e  $\zeta$  si ha

$$G_{\delta_f}^{\beta}(s) = \frac{\beta(s)}{\delta_f(s)} = G_{\delta_f}^{\beta}(0) \frac{1 + T_{\beta} s}{1 + \frac{2\zeta s}{\omega_n} + \frac{s^2}{\omega_n^2}} \quad (5.25)$$

Dove si è indicato con

$$G_{\delta_f}^{\beta}(0) = \frac{1 - \frac{m l_f V_G^2}{l_r C_r}}{1 - \frac{m(l_f C_f - l_r C_r) V_G^2}{l^2 C_f C_r}} \frac{l_r}{l} = \frac{1 - \frac{m l_f V_G^2}{l_r C_r}}{1 + \frac{A V_G^2}{l}} \frac{l_r}{l} \quad (5.26)$$

il guadagno dell'angolo di assetto, ovvero il valore che assume tale angolo a seguito di un comando di sterzo in regime stazionario, e con  $T_\beta$

$$T_\beta = \frac{JV_G}{u_r C_r} \frac{1}{1 - \frac{m_l V_G^2}{u_r C_r}} \quad (5.27)$$

### 5.3.1 Andamento dell'angolo di assetto nel dominio del tempo

Analogamente a quanto fatto per la velocità di imbardata, in questo Sottoparagrafo riportiamo l'andamento nel tempo dell'angolo di assetto (*side-slip angle*) in risposta ad un gradino di sterzo e per diverse velocità di avanzamento, con riferimento alle caratteristiche tecniche del veicolo riportate in Appendice B.

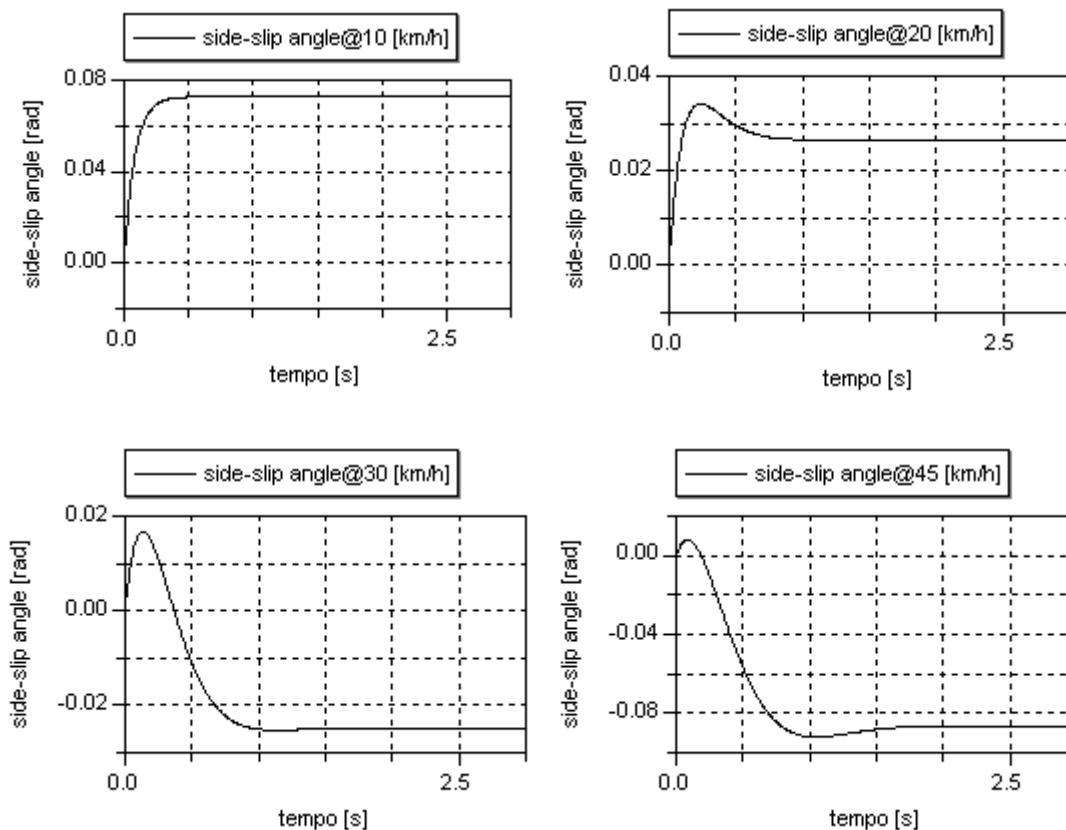


Figura 5.9 Andamento dell'angolo di assetto con riferimento ai dati riportati in Appendice B per diverse velocità di avanzamento.

Dalla Figura 5.9 si nota come alle basse velocità l'angolo di assetto si assesta su un valore positivo in quanto in queste condizioni il veicolo punta la direzione esterna alla traiettoria. Viceversa, per velocità più elevate, cresce in valore assoluto ma diventa negativo, il che significa che il veicolo punta la parte interna alla curva. Sempre dalla stessa Figura è possibile notare come, nelle condizioni ideali di aderenza, il veicolo mostri caratteristiche di sottosterzo.

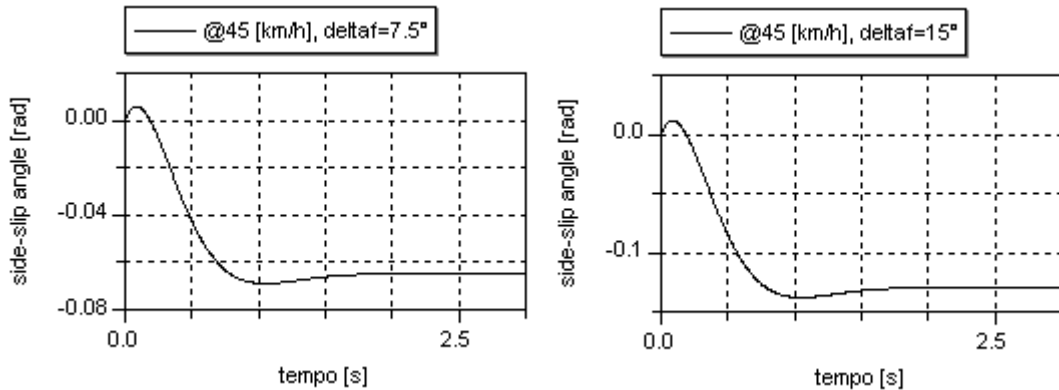


Figura 5.10 Andamento dell'angolo di assetto con riferimento ai dati riportati in Appendice B per velocità costante e con angoli di sterzo diversi.

Dalla Figura 5.10 si può invece evincere come angoli di sterzo maggiori portino a valori assoluti maggiori dell'angolo di assetto a regime.

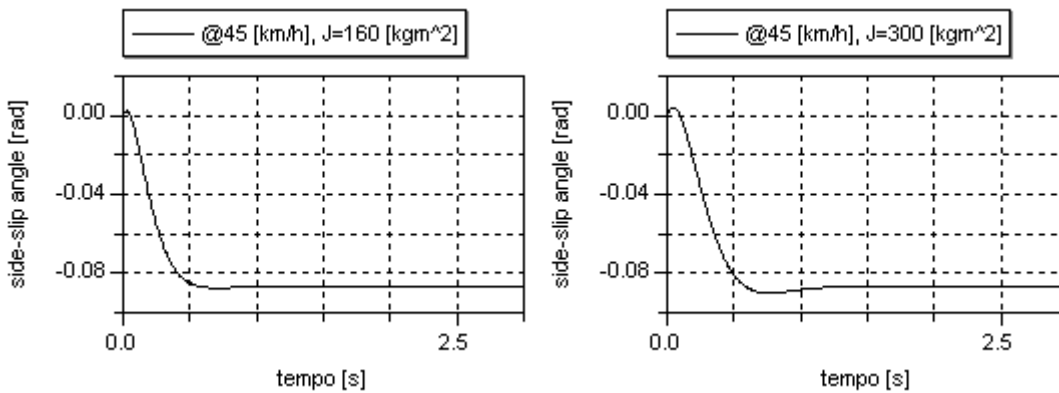


Figura 5.11 Andamento dell'angolo di assetto con riferimento ai dati riportati in Appendice B per velocità costante e differente momento di inerzia.

In Figura 5.11 infine è raffigurato l'andamento dell'angolo di assetto, nell'ipotesi di poter variare il momento di inerzia  $J$ .

Si nota come valori differenti di  $J$  non influenzano il valore che  $\beta$  assume a regime.

### 5.3.2 Diagrammi di Bode della funzione di trasferimento $G_{\delta_f}^B(j\omega)$

In questo Sottoparagrafo riportiamo i diagrammi di Bode di modulo e fase della funzione di trasferimento  $G_{\delta_f}^B(j\omega)$ , per diversi valori di velocità e con riferimento alle caratteristiche del veicolo riportate in Appendice B.

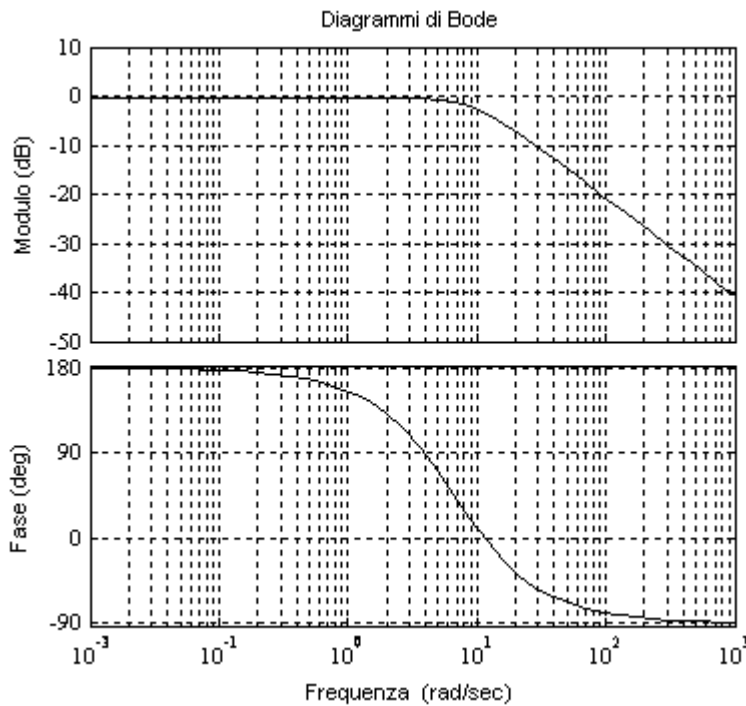


Figura 5.12 Diagrammi di Bode della FDT  $G_{\delta_f}^B(j\omega)$  alla velocità  $V_G = 20$  [km/h].

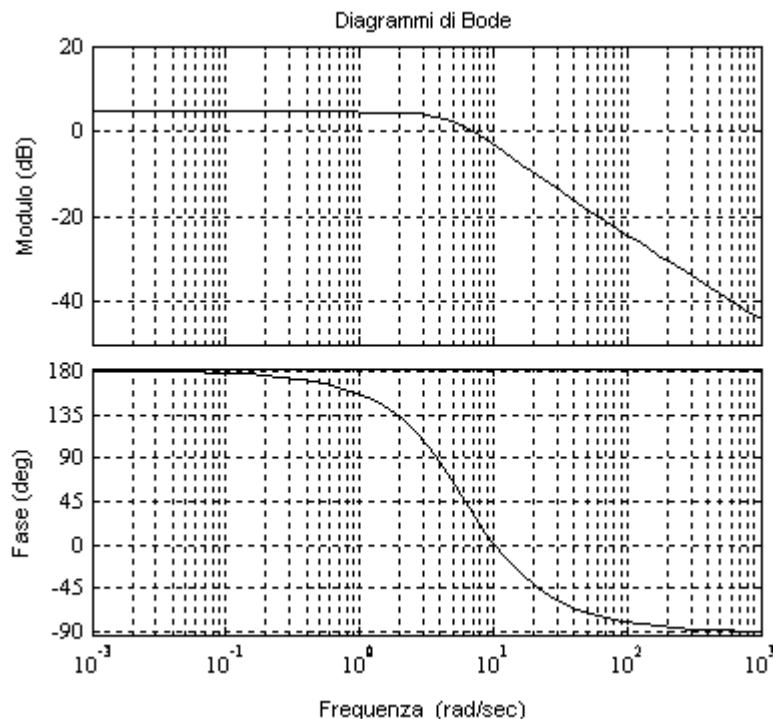


Figura 5.13 Diagrammi di Bode della FDT  $G_{\delta_f}^B(j\omega)$  alla velocità  $V_G = 30$  [km/h].



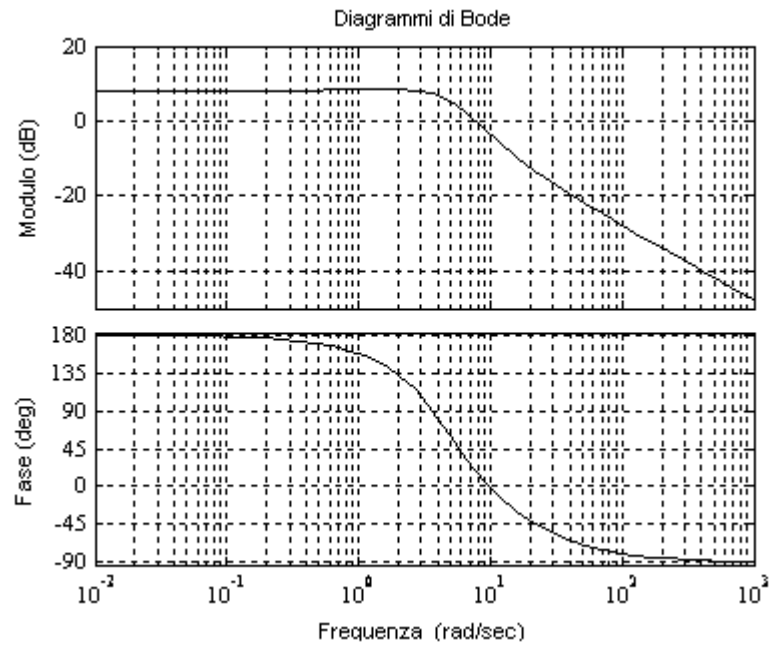


Figura 5.14 Diagrammi di Bode della  $FDT G_{\delta_f}^\beta(j\omega)$  alla velocità  $V_G = 45$  [km/h].

Dai diagrammi sopra raffigurati si evince che il guadagno statico della  $FDT G_{\delta_f}^\beta(j\omega)$  aumenta all'aumentare della velocità di avanzamento assoluta. Dalla Figura 5.14 si trova:  $\omega_a = 7.59$  [rad/s],  $\varphi_a = 19.8$  [deg] e  $m_\varphi = 200$  [deg].

Nella Figura 5.15 sono riportati infine i diagrammi di Bode nel caso di condizioni non ottimali di aderenza. In questo caso  $\omega_a' = 4.3$  [rad/s],  $\varphi_a' = 10.3$  [deg].

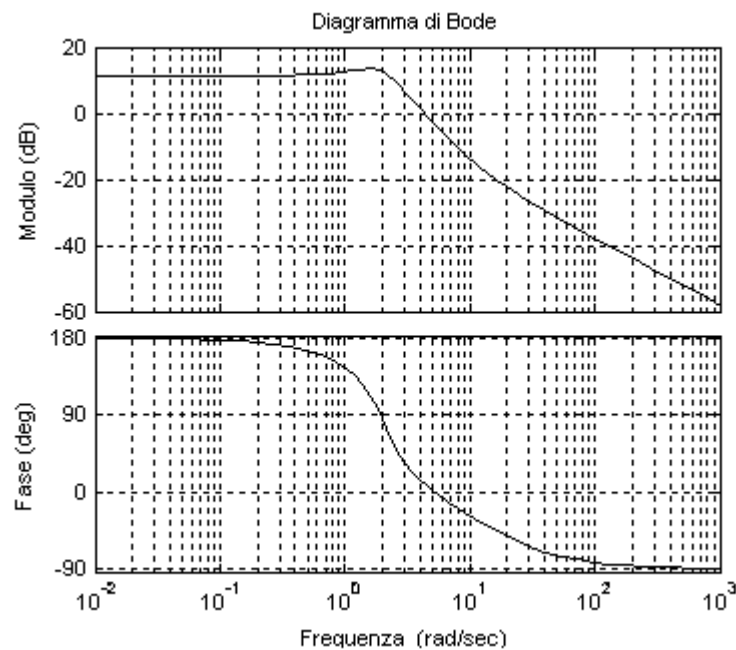


Figura 5.15 Diagramma di Bode delle  $FDT G_{\delta_f}^\beta(j\omega)$  a  $V_G = 45$  [km/h] in condizioni di aderenza non ottimali, con coefficiente di attrito dinamico  $\mu = 0.3$ .

## 5.4 Matrice di trasferimento del modello bitraccia del veicolo

Il modello bitraccia del veicolo con angoli di sterzo delle ruote dell'assale anteriore indipendenti è stato ricavato nel Capitolo 3.

Nell'ipotesi di piccoli scorrimenti laterali del veicolo, tali per cui possano essere considerate valide le approssimazioni (3.48), il sistema di equazioni (3.72) può essere riscritto introducendo l'angolo di assetto  $\beta$  nel modo seguente

$$\begin{bmatrix} \dot{\beta} \\ \dot{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta \\ r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_i \\ \delta_e \end{bmatrix} \quad (5.28)$$

dove

$$\begin{aligned} a_{11} &= -\frac{(C_f + C_r)}{mV_G} & a_{12} &= -1 - \frac{(l_f C_f - l_r C_r)}{mV_G^2} \\ a_{21} &= -\frac{(l_f C_f - l_r C_r)}{J} & a_{22} &= -\frac{(C_f l_f^2 + C_r l_r^2)}{JV_G} \end{aligned} \quad (5.28')$$

$$\begin{aligned} b_{11} &= \frac{C_{\alpha f1}}{mV_G} & b_{12} &= \frac{C_{\alpha f2}}{mV_G} \\ b_{21} &= \frac{l_f C_{\alpha f1}}{J} & b_{22} &= \frac{l_f C_{\alpha f2}}{J} \end{aligned} \quad (5.28'')$$

La matrice di trasferimento del sistema del secondo ordine sopra riportato può essere ottenuta dal sistema

$$\begin{bmatrix} \beta(s) \\ r(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_{11}(s) & \lambda_{12}(s) \\ \lambda_{21}(s) & \lambda_{22}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_i(s) \\ \delta_e(s) \end{bmatrix} \quad (5.29)$$

con

$$\begin{aligned} \lambda_{11}(s) &= \frac{\beta(s)}{\delta_i(s)} = \frac{b_{11}s - b_{11}a_{22} + a_{12}b_{21}}{s^2 - (a_{22} + a_{11})s + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \\ \lambda_{12}(s) &= \frac{\beta(s)}{\delta_e(s)} = \frac{b_{12}s - b_{12}a_{22} + a_{12}b_{22}}{s^2 - (a_{22} + a_{11})s + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \end{aligned} \quad (5.30)$$

$$\begin{aligned} \lambda_{21}(s) &= \frac{r(s)}{\delta_i(s)} = \frac{b_{21}s + a_{21}b_{11} - b_{21}a_{11}}{s^2 - (a_{22} + a_{11})s + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \\ \lambda_{22}(s) &= \frac{r(s)}{\delta_e(s)} = \frac{b_{22}s + a_{21}b_{12} - b_{22}a_{11}}{s^2 - (a_{22} + a_{11})s + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \end{aligned} \quad (5.31)$$

I coefficienti che compaiono a numeratore e denominatore delle funzioni di trasferimento sono stati riportati in (5.28'-28''). Si noti che l'espressione del denominatore è ancora formalmente uguale a quella ricavata nel Paragrafo 5.1.2.

Infine, le (5.30-31) possono essere riscritte in funzione delle (5.28'-28'') nel modo seguente

$$\begin{aligned}\lambda_{11}(s) = \frac{\beta(s)}{\delta_i(s)} &= \frac{\frac{c_{\alpha f1}}{mV_G} s + \frac{c_{\alpha f1}(c_{\alpha r1} + c_{\alpha r2})l_r l}{mV_G^2 J} - \frac{l_f c_{\alpha f1}}{J}}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \\ \lambda_{12}(s) = \frac{\beta(s)}{\delta_e(s)} &= \frac{\frac{c_{\alpha f2}}{mV_G} s + \frac{c_{\alpha f2}(c_{\alpha r1} + c_{\alpha r2})l_r l}{mV_G^2 J} - \frac{l_f c_{\alpha f2}}{J}}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}\end{aligned}\quad (5.32)$$

$$\begin{aligned}\lambda_{21}(s) = \frac{r(s)}{\delta_i(s)} &= \frac{\frac{l_f c_{\alpha f1}}{J} s + \frac{c_{\alpha f1}(c_{\alpha r1} + c_{\alpha r2})l}{mV_G J}}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \\ \lambda_{22}(s) = \frac{r(s)}{\delta_e(s)} &= \frac{\frac{l_f c_{\alpha f2}}{J} s + \frac{c_{\alpha f2}(c_{\alpha r1} + c_{\alpha r2})l}{mV_G J}}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}\end{aligned}\quad (5.33)$$

Le *FDT* sopra riportate costituiscono gli elementi della matrice di trasferimento cercata.



# 6 Controllo della velocità di imbardata

## 6.1 Introduzione

Durante la percorrenza di una curva una vettura presenta in generale una velocità di rotazione non nulla ed un angolo di assetto (eventualmente) diverso da zero. Il controllo di queste due grandezze risulta fondamentale al fine di garantire al guidatore la padronanza del veicolo, anche in condizioni non ottimali di aderenza ed in presenza di disturbi.

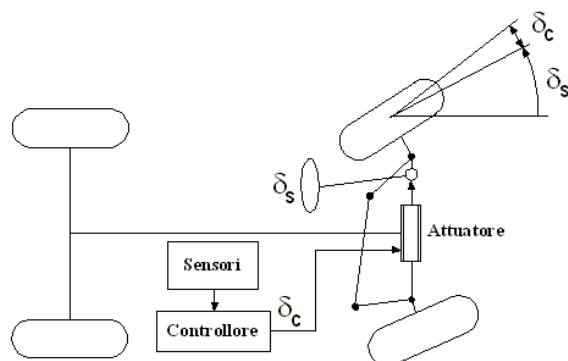
Quello che si richiede al sistema di controllo è di sviluppare istantaneamente una forza laterale ed un momento di imbardata che consentano di minimizzare l'angolo di assetto e di imprimere una velocità di rotazione coerente con il raggio di curvatura e con la velocità di percorrenza della curva.

Per far ciò è possibile agire direttamente sul sistema di sterzata attraverso una azione di controllo più precisa e veloce di un guidatore medio<sup>15</sup>, in modo da stabilizzare e migliorare il comportamento dinamico del veicolo, modificando eventualmente le caratteristiche dell'impianto di sterzo già presente. La sterzata esercitata dal sistema di controllo può aggiungersi o sottrarsi a quella esercitata dal guidatore. Nel primo caso l'obiettivo da conseguirsi sarà un aumento della manovrabilità, mentre nel secondo caso, un aumento della stabilità e della sicurezza attiva.

---

<sup>15</sup> Studi sul comportamento alla guida hanno evidenziato che un guidatore medio impiega circa un secondo per riconoscere la situazione di pericolo.

I sistemi di assistenza al guidatore producono soprattutto una coppia di compensazione ai disturbi del moto di imbardata quando si verificano inaspettate deviazioni rispetto al moto di imbardata desiderato. Ad oggi l'attuazione di questi sistemi di controllo è per lo più effettuata attraverso una opportuna distribuzione delle forze di frenatura sulle quattro ruote, ad esempio per mezzo del sistema *ABS* già presente nella maggior parte delle vetture di serie. A tal proposito il sistema *ESP*<sup>®</sup> ne è un esempio. L'intervento di questo sistema tende a modificare la forza scambiata tra lo pneumatico e la superficie stradale, generando una correzione sul momento di imbardata del veicolo.



**Figura 6.1 Schematizzazione generale del controllo con quadrilatero di Jeantaud.**

La questione che ci si pone è se il sistema di controllo attivo dello sterzo può essere considerato come alternativa o abbinato ad un sistema di frenatura differenziale attiva. La risposta a tale quesito passa attraverso un'attenta comparazione dei due sistemi.

La frenatura individuale delle ruote ha il vantaggio di poter essere introdotta in modo economicamente vantaggioso, sfruttando ad esempio il sistema *ABS* già presente. Tuttavia in confronto ad un sistema di sterzata attiva presenta degli inconvenienti di tipo concettuale. Uno di questi riguarda il fatto che in caso di frenata dissimmetrica, la frenatura individuale delle quattro ruote previene lo slittamento della macchina al prezzo di un aumento dello spazio di frenata. D'altro canto, un sistema di sterzata attiva può compensare tale coppia di disturbo, con tempi di frenata compatibili con i veicoli tradizionali<sup>16</sup>. Inoltre può operare continuamente, mentre i freni, per ragioni di consumo di energia ed usura, possono essere attivati soltanto in situazioni di emergenza. Infine, se la coppia richiesta è generata per mezzo dello sterzo piuttosto che dall'impianto frenante, è richiesta una forza inferiore (forza di tenuta laterale degli pneumatici) a parità di altre condizioni, per generare lo stesso momento di imbardata [11].

I sistemi di sterzata attiva per le applicazioni automobilistiche sono oggetto di studio da diversi anni. Già circa quarant'anni fa *Kasselmann* e *Keranen* [12] brevettarono un sistema di controllo attivo che si basava sulla misura della velocità di imbardata per mezzo di un giroscopio, e per generare il comando addizionale di sterzo per le ruote anteriori venne utilizzato un feedback di tipo proporzionale.

<sup>16</sup> Come caso estremo si pensi ad una frenata che comporti coefficiente di attrito nullo per il treno di ruote sinistro ed un coefficiente di attrito diverso da zero per il treno di ruote destro.

Questa idea, mai realizzata su un veicolo di serie, è stata presa come spunto ed è ancora rilevante per gli sviluppi attuali e futuri di un sistema di controllo attivo della sterzata delle ruote anteriori.

## 6.2 Controllo robusto con disaccoppiamento

In letteratura esiste una cospicua bibliografia riguardante il controllo attivo della dinamica laterale degli autoveicoli. A tal riguardo, diversi studi vedono coinvolte le più importanti e prestigiose case automobilistiche, mentre altri sono semplicemente mossi dallo spirito della ricerca.

Per perseguire il nostro obiettivo finale, è stata dapprima presa in considerazione la teoria che è alla base della trattazione [13], che va sotto il nome di *controllo robusto con disaccoppiamento della dinamica laterale*.

Al fine di governare la dinamica laterale del veicolo abbiamo due controllori: il guidatore *umano* ed il controllo del sistema di sterzata *automatico*. Il progetto del sistema di controllo deve essere fatto in modo che questi due anelli di feedback, uno automatico ed uno con controllore umano, non interferiscano o comunque non siano in conflitto.

Per rispondere a questa specifica è utile individuare due attività distinte. La prima attività, chiamata *path following*, consiste semplicemente nel controllo della traiettoria, mentre la seconda, chiamata *disturbance attenuation*, consiste nell'attenuazione dei disturbi.

La *prima attività*, considerando il veicolo come un punto di massa  $m$ , considera il seguente aspetto: per mantenere il veicolo sul percorso desiderato, il guidatore applica tramite l'impianto sterzante un'accelerazione laterale  $a_y$  alla massa del veicolo, in modo da orientare il vettore della velocità del baricentro nella direzione voluta e far sì che questo rimanga sempre tangente alla traiettoria da seguire.

La *seconda attività* è una conseguenza del fatto che il veicolo reale non può essere considerato come dotato di massa concentrata in un punto, e quindi presenta un momento di inerzia rispetto al centro di gravità. Inoltre, la velocità di imbardata  $r$  non è influenzata solo dall'accelerazione laterale, ma anche da eventuali coppie di disturbo  $M_{zD}$ , determinate ad esempio dal vento laterale, dalla frenata asimmetrica o da pneumatici lisci. Il conducente del veicolo deve compensare queste coppie di disturbo agendo sullo sterzo. Questa azione può essere non agevole quando tali disturbi si presentano in modo non prevedibile od improvviso. Egli infatti, come accennato, impiegherà circa un secondo per riconoscere la situazione di pericolo e successivamente potrebbe reagire in modo eccessivo (*overreaction*).

Premesso ciò, quello che ci proponiamo di fare è lasciare il controllo della traiettoria al guidatore, mentre l'attenuazione dei disturbi viene demandata ad un sistema di controllo automatico. Ciò renderebbe la guida di un veicolo semplice e certamente introduce un convincente vantaggio in termini di sicurezza attiva.

### 6.2.1 Disaccoppiamento della dinamica laterale

Consideriamo il modello monotraccia del veicolo mantenendo valide tutte le considerazioni fatte nel Capitolo 3. Il veicolo è visto come un corpo rigido di massa  $m$  e momento di inerzia  $J$  rispetto all'asse verticale passante per il centro di gravità. La velocità di imbardata deve poter essere misurata e sarà una delle variabili di stato.

Per disaccoppiare la dinamica del sistema di attenuazione dei disturbi da quella del controllo della traiettoria, bisogna fare in modo che il sistema di controllo automatico della velocità di imbardata non interferisca con la dinamica del controllo della traiettoria esercitato dal conducente del veicolo. In definitiva, si vuole rendere la velocità di imbardata inosservabile dall'accelerazione laterale  $a_y$ . Certamente ci sarà ancora una influenza di  $a_y$  su  $r$  altrimenti il guidatore non potrebbe comandare l'ingresso in curva del veicolo. Questa azione di controllo sarà esercitata indirettamente attraverso l'accelerazione laterale. In definitiva tale disaccoppiamento dovrà essere unilaterale.

Il problema è che comunque vogliamo ottenere un disaccoppiamento robusto. Ossia, robusto rispetto alle condizioni della superficie stradale ed alla velocità del veicolo. Le condizioni della sede stradale possono cambiare rapidamente e questo provoca una variazione del coefficiente di attrito dinamico  $\mu$  (parametro incerto). La velocità invece varia più lentamente ed è rilevabile per mezzo di un tachimetro o tramite il sistema di ABS.

I parametri più incerti nel modello del veicolo sono tuttavia le forze laterali  $F_{y_F}$  ed  $F_{y_R}$  che agiscono rispettivamente sull'assale anteriore e sull'assale posteriore. Entrambe dipendono dallo stato  $\mathbf{x}$  del veicolo, di cui fa parte anche  $r$ , e dal coefficiente di attrito pneumatico-strada; per tale motivo vengono considerate parametri incerti del modello. In particolare le forze laterali agenti sull'assale anteriore dipendono anche dall'angolo di sterzo  $\delta_f$ .

Per perseguire l'obiettivo di rimuovere l'influenza della velocità di imbardata sull'accelerazione laterale, possiamo scegliere di utilizzare l'accelerazione laterale del baricentro come uscita da disaccoppiare. In questo modo però non avremmo alcuna possibilità di ottenere il risultato desiderato dato che le forze laterali  $F_{y_R}(\mathbf{x})$  ed  $F_{y_F}(\mathbf{x}, \delta_f)$  non sono note.

L'idea è allora quella di scegliere una posizione sull'asse longitudinale del veicolo posto ad una distanza  $l_p$  in avanti rispetto alla posizione del baricentro, in modo che in questo punto l'accelerazione laterale  $a_{y_p}$  non dipenda da  $F_{y_R}(\mathbf{x})$ . Quindi il primo passo sarà quello di rimuovere l'influenza della forza laterale dell'assale posteriore sull'accelerazione laterale del punto  $p$ .

Per trovare la posizione di questo punto si tratta di eseguire un calcolo di poche righe. L'accelerazione nel punto  $p$  può essere scritta come

$$a_{y_p} = a_y + \dot{r}l_p \quad (6.1)$$

dove  $a_y$  rappresenta l'accelerazione laterale con riferimento al baricentro.



Inoltre considerando la Figura 6.2 può scrivere

$$a_{y_p} = \frac{F_{y_F} + F_{y_R} + F_{y_D}}{m} + \frac{F_{y_F}l_f - F_{y_R}l_r + M_{z_D}}{J}l_p \quad (6.2)$$

dove  $F_{y_D}$  è una forza laterale di disturbo. Mettendo in evidenza le forze laterali agenti sull'assale anteriore e posteriore si ottiene

$$a_{y_p} = F_{y_F} \left( \frac{1}{m} + \frac{l_f l_p}{J} \right) + F_{y_R} \left( \frac{1}{m} - \frac{l_r l_p}{J} \right) + \frac{F_{y_D}}{m} + \frac{M_{z_D}}{J} l_p \quad (6.3)$$

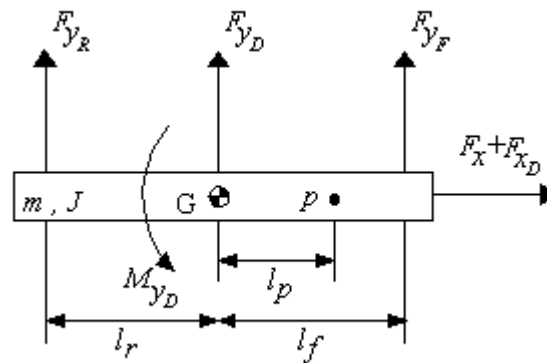


Figura 6.2 Forze agenti sul corpo rigido di massa  $m$  [14].

La dipendenza dell'accelerazione laterale nel punto  $p$  dalla forza laterale dell'assale posteriore scompare quando

$$\frac{1}{m} = \frac{l_r l_p}{J} \quad (6.4)$$

cioè

$$l_p = \frac{J}{m l_r} \quad (6.5)$$

Trascurando le forze e i momenti di disturbo, in questo punto l'accelerazione laterale è

$$a_{y_p} = \frac{l}{m l_r} F_{y_F}(\mathbf{x}, \delta_f) \quad (6.6)$$

In questo modo la velocità di imbardata influisce sull'accelerazione laterale solo attraverso la forza laterale  $F_{y_F}(\mathbf{x}, \delta_f)$ . A questo punto bisogna compensare l'influenza di  $r$  su  $F_{y_F}(\mathbf{x}, \delta_f)$  per mezzo di  $\delta_f$ . Se questo argomento non dipende da  $r$ , allora anche la forza laterale (non nota) e pertanto l'accelerazione  $a_{y_p}$  è indipendente dalla velocità di imbardata.

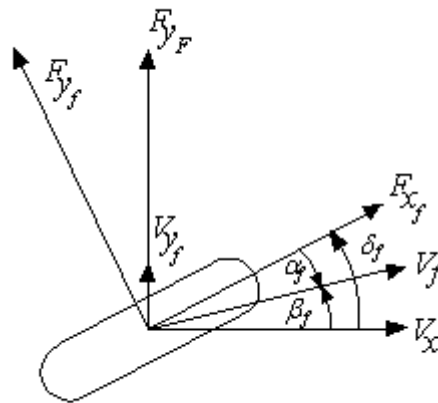
Per ottenere questo risultato è necessario fare diverse considerazioni che consentiranno, in definitiva, il disaccoppiamento della dinamica laterale del veicolo.

Come ingresso del sistema consideriamo l'angolo di sterzata delle ruote anteriori  $\delta_f$  che supponiamo composto da un angolo  $\delta_s$  comandato dal pilota e da un angolo  $\delta_c$  generato da un controllore in retroazione, vale a dire

$$\delta_f = \delta_c + \delta_s \quad (6.7)$$

Per il disaccoppiamento robusto unilaterale voluto,  $\delta_c$  deve compensare l'influenza di  $r$  su  $F_{yF}$ .

Sia  $\delta_c$  che  $r$  entrano nell'espressione di  $F_{yF}$  attraverso l'angolo di deriva  $\alpha_f$  delle ruote anteriori del modello monotraccia.



**Figura 6.3 Grandezze in gioco sulla ruota anteriore del modello monotraccia [14].**

La forza in direzione longitudinale degli pneumatici  $F_{xf}$  è governata dall'acceleratore e dal freno e non dipende dalla velocità di imbardata. La forza in direzione trasversale è invece funzione dell'angolo di deriva  $\alpha_f$ , della direzione delle ruote e della velocità locale. In altre parole, per angoli di deriva nulli, cioè quando il vettore della velocità è allineato alla direzione degli pneumatici, la forza laterale è nulla. In caso contrario possiamo ottenere solo il segno della funzione forza laterale, ossia la direzione secondo la quale agisce. Con riferimento alla Figura 6.3, la forza laterale dell'asse anteriore può essere espressa in funzione delle forze degli pneumatici nel modo seguente

$$F_{yF} = F_{yf}(\alpha_f) \cos \delta_f + F_{xf}(\alpha_f) \sin \delta_f \quad (6.8)$$

Se si assume l'ipotesi che l'angolo di sterzata sia piccolo, il che si concilia perfettamente con le ipotesi che stanno alla base del modello monotraccia, la dipendenza della forza laterale dell'assale anteriore dalla forza degli pneumatici in direzione longitudinale può essere trascurata.

In altre parole, dalla relazione precedente si ha

$$F_{yF} \approx F_{yf}(\alpha_f) \quad (6.9)$$

così che l'espressione (6.6) diventa

$$a_{yp} = \frac{l}{ml_r} F_{yf}(\alpha_f) \quad (6.10)$$

Quindi la velocità di imbardata  $r$  non influenza  $a_{yp}$  se e solo se  $r$  non influenza  $\alpha_f$ . Allora vogliamo rendere la velocità di imbardata inosservabile dall'angolo di deriva delle ruote anteriori.

Per far ciò introduciamo l'angolo di assetto  $\beta_f$  riferito all'asse anteriore, così che le variabili di stato possano essere rappresentate in un vettore colonna di tre componenti

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} v_x \\ \beta_f \\ r \end{bmatrix} \quad (6.11)$$

dove  $v_x = |v_f| \cos \beta_f$  è la componente della velocità in direzione longitudinale al veicolo (Figura 6.3). L'equazione di stato del *modello monotraccia* ha quindi la forma

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, \delta_f) \quad (6.12)$$

e noi siamo interessati all'uscita

$$\alpha_f = \delta_f - \beta_f = \delta_s + \delta_c - \beta_f \quad (6.13)$$

Purtroppo non è possibile misurare l'angolo  $\beta_f$  ad un costo ragionevole altrimenti avremmo avuto la desiderata legge di controllo  $\delta_c = \beta_f$ . Tuttavia, dall'equazione differenziale (6.12) possiamo ricavare la derivata di tale angolo di deriva  $\dot{\beta}_f$ .

Quindi lo si può compensare mandando come ingresso ad un integratore il termine  $\dot{\delta}_c$  [14]. Differenziando la (6.13) otteniamo

$$\dot{\alpha}_f = \dot{\delta}_s + \dot{\delta}_c - \dot{\beta}_f \quad (6.14)$$

Per ottenere l'espressione dell'angolo di assetto dell'assale anteriore è necessario fare alcune considerazioni [14]. Con semplici considerazioni geometriche si ottiene

$$\tan \beta_f = \frac{v_{yf}}{v_x} \quad (6.15)$$

Dopodiché considerando le relazioni

$$\begin{aligned} \dot{v}_x &= a_x + r v_y \\ \dot{v}_y &= a_y - r v_x \\ v_{yf} &= v + r l_f \end{aligned} \quad (6.16)$$

e differenziando la (6.15) si ha

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \tan \beta_f &= \frac{\dot{\beta}_f}{\cos^2 \beta_f} = \frac{\dot{v}_{y_f} v_x - v_{y_f} \dot{v}_x}{v_x^2} \\ &= \frac{v_x a_y - r v_x^2 + \dot{r} l_f v_x - v_{y_f} (a_x + r v_y)}{v_x^2} \end{aligned} \quad (6.17)$$

Per ottenere la legge di controllo desiderata è necessario manipolare il numeratore della (6.17). Infatti l'ultimo termine a numeratore del secondo membro può essere riscritto considerando la terza equazione delle (6.16), cioè

$$r v_y = r(v_y + r l_f - r l_f) = r(v_{y_f} - r l_f) \quad (6.18)$$

Riprendendo la (6.17) si ha

$$\dot{\beta}_f = \frac{\cos^2 \beta_f}{v_x^2} (a_y v_x - r v_x^2 + l_f \dot{r} v_x - v_{y_f} a_x - r v_{y_f}^2 + r^2 l_f v_{y_f}) \quad (6.19)$$

Da questa, dividendo per  $v_x^2$  e considerando la (6.15) si ha

$$\begin{aligned} \dot{\beta}_f &= -r(\cos^2 \beta_f + \sin^2 \beta_f) + \frac{\cos \beta_f}{v_x} [(a_y + l_f \dot{r}) \cos \beta_f + (l_f r^2 - a_x) \sin \beta_f] \\ &= -r + \frac{\cos \beta_f}{v_x} [(a_y + l_f \dot{r}) \cos \beta_f + (l_f r^2 - a_x) \sin \beta_f] \end{aligned} \quad (6.20)$$

Introducendo l'accelerazione  $a_{y_p}$  tramite la (6.1) si ottiene

$$\dot{\beta}_f = -r + \frac{\cos \beta_f}{v_x} [(a_{y_p} - l_p \dot{r} + l_f \dot{r}) \cos \beta_f + (l_f r^2 - a_x) \sin \beta_f] \quad (6.21)$$

cioè

$$\dot{\beta}_f = -r + \frac{\cos^2 \beta_f}{v_x} a_{y_p} (\alpha_f) + g(r) \quad (6.22)$$

nella quale è stata definita una nuova funzione della velocità di imbardata, in modo da rendere compatta la notazione.

Definiamo quindi la funzione  $g(r)$  come

$$g(r) = \frac{\cos \beta_f}{v_x} [(l_f - l_p) \dot{r} \cos \beta_f + (l_f r^2 - a_x) \sin \beta_f] \quad (6.23)$$

dove l'accelerazione longitudinale  $a_x$  può essere misurata da un accelerometro longitudinale.

A questo punto si può intuire cosa bisogna fare per cancellare tutti i termini dipendenti dalla  $r$  in  $\dot{\delta}_c - \dot{\beta}_f$  della (6.14). Il controllore deve essere scelto come [13]

$$\dot{\delta}_c = -r + g(r) + F(\delta_s) \quad (6.24)$$

E dalla sostituzione di (6.22) e (6.24) in (6.14) si ottiene

$$\dot{\alpha}_f = -\frac{\cos^2 \beta_f}{v_x} a_{yp}(\alpha_f) + F(\delta_s) + \dot{\delta}_s \quad (6.25)$$

Questa espressione può essere ulteriormente semplificata nell'ipotesi di piccoli angoli  $\beta_f$ , cioè possiamo sostituire il termine  $\cos^2 \beta_f$  con 1. Infine sostituendo la (6.10) nella (6.25), l'equazione differenziale per l'angolo di deriva della ruota anteriore del modello monotraccia diventa

$$\dot{\alpha}_f = -\frac{l}{v_x m l_r} F_{yf}(\alpha_f) + F(\delta_s) + \dot{\delta}_s \quad (6.26)$$

Così  $\alpha_f$  dipende solo dall'input  $\delta_s$  dello sterzo e non dalla velocità di imbardata  $r$ ; quest'ultima diventa quindi inosservabile dall'angolo di deriva delle ruote anteriori e dunque, anche dall'accelerazione laterale  $a_{yp}$ . Così abbiamo ottenuto il disaccoppiamento robusto unilaterale.

E' da notare come l'accelerazione laterale del punto  $p$  dipende dalla velocità di imbardata solo attraverso l'angolo di deriva dell'assale anteriore, ma non è direttamente dipendente dalla velocità di imbardata.

### 6.2.2 Semplificazione del controllore

Nel paragrafo precedente abbiamo ottenuto la legge di controllo e quindi l'espressione del controllore del primo ordine data dalla (6.24). Esprimendo allora la (6.24) in forma estesa si ha

$$\dot{\delta}_c = -r + \frac{\cos \beta_f}{v_x} [(l_f - l_p) \dot{r} \cos \beta_f + (l_f r^2 - a_x) \sin \beta_f] + F(\delta_s) \quad (6.27)$$

Da questa espressione risulta evidente la necessità di poter effettuare delle misure in modo da poter implementare il controllo. Quello che si nota è che il controllore non può operare per velocità in direzione longitudinale nulle, vale a dire per  $v_x = 0$ . Deve quindi poter essere attivato una volta raggiunta una velocità minima di avanzamento. Le misure richieste ai sensori sono le seguenti:

- I. Velocità di imbardata  $r$ ;
- II. Accelerazione di imbardata  $\dot{r} = \frac{ay_1 - ay_2}{l_a}$ , misurabile tramite due accelerometri posti a distanza  $l_a$  sull'asse del veicolo;
- III. Velocità in direzione longitudinale  $v_x$ ;

IV. Accelerazione in direzione longitudinale  $a_x$ ;

V. Angolo di sterzo del conducente  $\delta_s$ .

La presenza di tutti questi sensori rende questo tipo di controllo particolarmente costoso. Per ridimensionare il problema è necessario fare alcune semplificazioni.

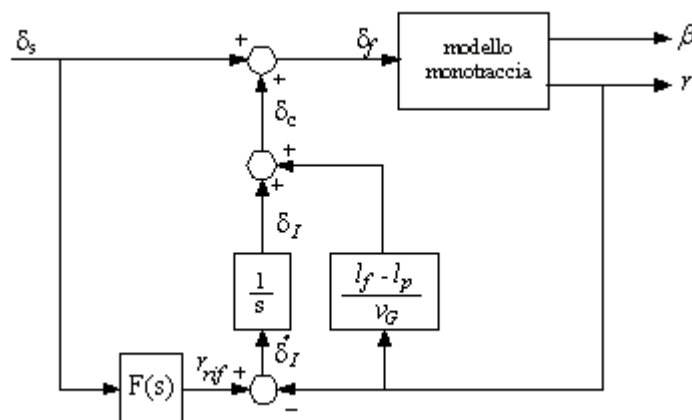
Innanzitutto si può assumere che il termine  $(l_f r^2 - a_x) \sin \beta_f$  sia molto piccolo. Ciò implica che la velocità sia costante o comunque lentamente variabile durante la sterzata e che la velocità di imbardata sia piccola. Ritenendo poi l'angolo  $\beta_f$  sufficientemente piccolo, la versione semplificata del controllore (6.24) è

$$\delta_f = \delta_c + \delta_s = \delta_I + \frac{l_f - l_p}{v_G} r + \delta_s \quad (6.28)$$

con

$$\dot{\delta}_I = -r + F(\delta_s) \quad (6.29)$$

Uno schema rappresentativo è mostrato nella Figura 6.4.



**Figura 6.4** Controllore semplificato per il disaccoppiamento robusto [13].

La misura della velocità di imbardata viene confrontata con il riferimento di imbardata prodotto dall'ingresso di sterzo del conducente, per mezzo di un prefiltro  $F(s)$ . Ciò dà al veicolo un comportamento a regime simile a quello di un veicolo convenzionale.

La deviazione della velocità di imbardata rispetto a quella desiderata viene elaborata da un integratore con guadagno unitario.

Il guadagno proporzionale invece dipende direttamente dalla distribuzione della massa del veicolo, ossia dalla differenza  $(l_f - l_p)$  e dall'inverso della velocità, pertanto solo per la parte proporzionale del controllore è richiesta la misura della velocità longitudinale  $v_x \approx v_G$ .

Il segnale di feedback in uscita dal controllore potrebbe essere sommato al segnale prodotto dal conducente anche per via meccanica, in modo che la connessione tra il volante e le ruote sterzanti sia mantenuta<sup>17</sup>.

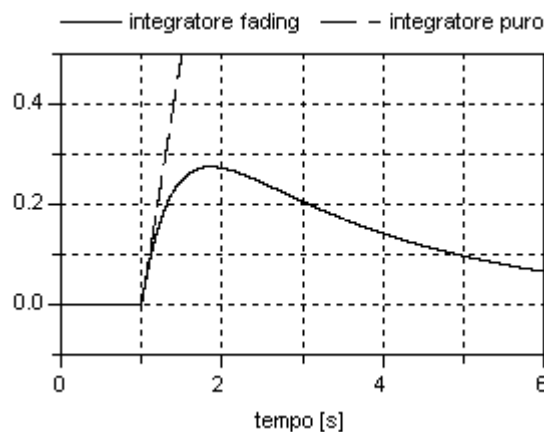
### 6.2.3 Riferimento di Yaw Rate ed Integratore Fading

Il principale vantaggio del controllo robusto con disaccoppiamento della dinamica laterale, è che può reagire più velocemente ed in modo più accurato nel caso in cui si manifesti un disturbo improvviso, rispetto ad un *conducente/controllore* umano. D'altra parte, il guidatore umano reagisce bene alle sollecitazioni che richiedono tempi di risposta dell'ordine del secondo. Allora non esiste motivo per cui il sistema di controllo debba produrre un angolo di sterzo correttivo per più di un secondo dal momento in cui si verifica il disturbo, e tanto meno nel moto a regime permanente. Quindi, dopo un rapido intervento del feedback di controllo, la piena autorità sullo sterzo dovrebbe tornare al guidatore. In definitiva si vuole che a regime stazionario l'angolo di sterzo addizionale elaborato dal controllo sia nullo.

Ciò può essere ottenuto sostituendo all'integratore puro un *integratore fading* con funzione di trasferimento data dall'espressione

$$G_{FI}(s) = \frac{s}{s^2 + 3s + 1} \quad (6.30)$$

La risposta iniziale di un siffatto integratore fading (si veda Figura 6.5), è la stessa di un integratore puro in quanto alle alte frequenze  $G_{FI}(s) \approx \frac{1}{s}$ . Dopodiché, il segnale correttivo  $\delta_I$  gradualmente torna a zero perché alle basse frequenze  $G_{FI}(s) \approx 0$ . Così,  $\delta_f$  tende asintoticamente a  $\delta_s$  ed il conducente del veicolo vede la stessa risposta a regime rispetto ad un veicolo tradizionale.



**Figura 6.5** Confronto tra un integratore ed un integratore fading in risposta ad ingresso a gradino.

In questo modo il prefiltro non ha più influenza sul comportamento a regime stazionario ma solo nel periodo transitorio, e viene scelto con lo stesso grado relativo tra numeratore e denominatore della

<sup>17</sup>In alternativa potrebbe essere realizzato un sistema totalmente elettrico, ad esempio un sistema *steer-by-wire*, dove il comando  $\delta_c + \delta_s$  viene generato da un computer di controllo.

*FDT* tra  $\delta_s$  ed  $r$ , in modo da ottenere una risposta smorzata della dinamica di imbardata ad un ingresso di sterzo.

Nello schema di controllo di Figura 6.4  $r_{rif}$  rappresenta una quantità importante per il comportamento a regime del veicolo, in quanto l'integratore elabora il termine  $\dot{\delta}_l = r_{rif} - r$ . La difficoltà nella determinazione delle caratteristiche del prefiltro nasce dal fatto che il valore di riferimento  $r_{rif}$  dipende dalle caratteristiche del veicolo e quindi va cambiato al variare del tipo di veicolo e della distribuzione delle masse. In altre parole deve essere accordato in modo tale da ottenere a regime un andamento della  $a_{yp}$  simile a quella di un veicolo tradizionale nel quale non ci sia alcun sistema di controllo. Ciò non può essere ottenuto in modo robusto perché nel prefiltro possono essere implementati solo i parametri nominali del veicolo. Una possibile *FDT* per il prefiltro è

$$F(s, v_G) = \frac{G_{\delta_f}^r(0)}{1 + T_r s} \quad (6.31)$$

dove

$$G_{\delta_f}^r(0) = \frac{v_G}{l \left[ 1 + \left( \frac{v_G}{V_{Gch}} \right)^2 \right]} \quad (6.32)$$

e  $V_{Gch}$  è la velocità caratteristica del veicolo [12]. Il valore di  $G_{\delta_f}^r(0)$  è in sostanza il guadagno statico della velocità di imbardata, ossia il valore che  $r$  assume a regime con un determinato angolo di sterzo ed è stato ricavato nel Capitolo 5 analogamente alla costante di tempo  $T_r$  [16]. L'espressione (6.32) conferisce al riferimento di imbardata un andamento smorzato.

#### 6.2.4 Analisi della stabilità del sistema a catena chiusa con regolatore *PID*

In questo Sottoparagrafo viene analizzato il feedback della velocità di imbardata in funzione dell'angolo di sterzo con controllore *PID* a guadagni positivi.

Uno dei problemi introdotti dalla retroazione puramente integrale del controllo robusto è rappresentato dal basso smorzamento alle alte velocità causato dal ritardo di fase introdotto dall'integratore puro. Per migliorare questo aspetto è possibile utilizzare un integratore fading, di cui si è parlato nel Paragrafo precedente, ma permangono i problemi di basso smorzamento della velocità di imbardata.

In alternativa è possibile utilizzare un regolatore di tipo *PID* con guadagni positivi. L'utilizzo di un siffatto controllore introduce un piccolo ritardo di fase ma ha un effetto stabilizzante sulla risposta dinamica del sistema [13]. La *FDT* tra l'angolo di sterzo delle ruote anteriori  $\delta_f$  e la velocità di imbardata  $r$  è stata ricavata nel Capitolo 5 e viene qui riportata per comodità di trattazione

$$G_{\delta_f}^r(s) = \frac{b_1 s + b_0}{s^2 + a_1 s + a_0} \quad (5.19)$$



I coefficienti che compaiono nella (5.19) sono riportati nelle (5.19') e, dipendendo dai parametri fisici del veicolo, sono costanti e positivi. La condizione di stabilità del sistema non controllato di cui al Capitolo 5, può essere riassunta come segue:

- I. *Veicolo sottosterzante* ( $l_r C_r - l_f C_f > 0$ ,  $a_0 > 0$ ): stabile per tutte le velocità;
- II. *Veicolo sovrasterzante* ( $l_r C_r - l_f C_f < 0$ ,  $a_0 > 0$  per  $V_G < V_{G_c}$ ): stabile per tutte le velocità inferiori a quella critica. Per velocità superiori a quella critica, quando  $a_0 < 0$ , il moto diventa instabile.

Immaginiamo di chiudere l'anello di controllo su un controllore *PID* con *FDT* data dalla seguente espressione

$$G_{PID}(s) = \frac{k_I}{s} + s k_D + k_P \quad (6.33)$$

con guadagni positivi, cioè  $k_I > 0$ ,  $k_D > 0$  e  $k_P > 0$ . Introducendo il controllore *PID* i criteri di stabilità del sistema devono essere riformulati. La funzione di trasferimento ad anello chiuso risulta

$$W_{\delta c}(s) = \frac{G_{\delta_f}^r(s) G_{PID}(s)}{1 + G_{\delta_f}^r(s) G_{PID}(s)} \quad (6.34)$$

Dopo semplici passaggi, il polinomio caratteristico della *FDT*  $W_{\delta c}(s)$  è

$$D(s) = s^3(1 + b_1 k_D) + s^2(b_0 k_D + a_1) + s(a_0 + b_0 k_P + b_1 k_I) + b_0 k_I \quad (6.35)$$

Il nostro obiettivo sarà trovare le condizioni che portano all'instabilità del sistema. Per far ciò utilizziamo il criterio di stabilità di *Routh-Hurwitz*.

Le prime due righe della tabella di *Routh* sono le seguenti:

$$\begin{array}{l|ll} 3 & 1 + b_1 k_D & a_0 + b_0 k_P + b_1 k_I \\ 2 & b_0 k_D + a_1 & b_0 k_I \end{array} \quad (6.36)$$

Per completare la tabella calcoliamo i restanti due elementi della prima colonna, ossia

$$\begin{aligned} \alpha_{3,1} &= - \frac{\det \begin{bmatrix} 1 + b_1 k_D & a_0 + b_0 k_P + b_1 k_I \\ b_0 k_D + a_1 & b_0 k_I \end{bmatrix}}{b_0 k_D + a_1} \\ &= \frac{(a_0 + b_0 k_P + b_1 k_I)(b_0 k_D + a_1) - b_0 k_I(1 + b_1 k_D)}{b_0 k_D + a_1} \end{aligned} \quad (6.37)$$

mentre il coefficiente  $\alpha_{4,1}$  dell'ultima riga è dato dall'espressione

$$\alpha_{4,1} = - \frac{\det \begin{bmatrix} b_0 k_D + a_1 & b_0 k_I \\ \alpha_{3,1} & 0 \end{bmatrix}}{\alpha_{3,1}} = b_0 k_I \quad (6.38)$$

Essendo  $\alpha_{4,1}$  sempre positivo, per la stabilità del sistema a catena chiusa risulta fondamentale il segno del coefficiente  $\alpha_{3,1}$ .

A questo punto distinguiamo due casi.

I. *Veicolo sottosterzante.* I coefficienti  $a_1$  e  $b_0$  che compaiono nella (6.37) sono sempre positivi e quindi il sistema è stabile se

$$(a_0 + b_0 k_P + b_1 k_I)(b_0 k_D + a_1) - b_0 k_I(1 + b_1 k_D) > 0 \quad (6.39)$$

Sviluppando e riordinando si ottiene

$$\begin{aligned} a_0 a_1 + k_I(a_1 b_1 - b_0) + k_P(a_1 b_0 + a_0 b_1) + k_D a_0 b_0 + k_I k_P b_1^2 \\ + k_P^2 b_0 b_1 + k_D k_P a_0^2 > 0 \end{aligned} \quad (6.40)$$

Il sistema diventa instabile per piccoli valori di  $k_P$  e valori sufficientemente grandi di  $k_I$  se

$$a_1 b_1 - b_0 < 0 \quad (6.41)$$

Sostituendo ai coefficienti i parametri fisici, la possibile perdita di stabilità si ha quando

$$l_r C_r - l_f C_f > \frac{m}{J} (l_f^2 C_f + l_r^2 C_r) \quad (6.42)$$

II. *Veicolo sovrasterzante.* Per velocità inferiori alla velocità critica, ossia quando  $a_0 > 0$ , i coefficienti del polinomio caratteristico sono tutti positivi, la condizione (6.42) non può verificarsi ed il sistema è sempre stabile. Ciò vuol dire che la condizione (6.40) è sempre soddisfatta.

Per velocità superiori a quella critica il sistema a catena chiusa rimane instabile per valori dei guadagni del controllore sufficientemente piccoli.

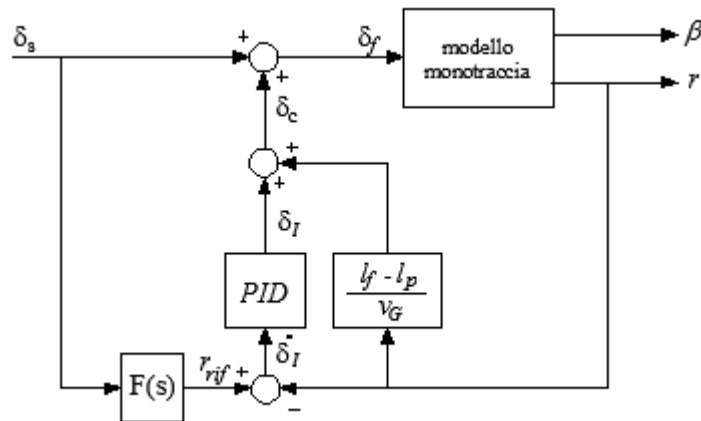


Figura 6.6 Schema del controllo semplificato con regolatore PID.

Dunque, nel caso di veicoli sovrasterzanti, l'introduzione di un controllore *PID* non comporta una diminuzione della stabilità del sistema dinamico a catena chiusa, rispetto alla stabilità del sistema a catena aperta. In definitiva, lo schema del controllo che verrà implementato sarà quello mostrato in Figura 6.6.

### 6.2.5 Progetto del regolatore *PID*

Sulla base di quanto ricavato precedentemente ed in base alle considerazioni relative al comportamento dinamico del veicolo svolte nel Capitolo 5, in questo Sottoparagrafo si riportano i valori dei guadagni e delle costanti di tempo del regolatore, ricavati attraverso lo studio della risposta in frequenza della *FDT* ad anello aperto.

Per quanto riguarda il comportamento transitorio, le specifiche prevedono che qualora si proceda in rettilineo e si sterzi improvvisamente di un certo angolo (prova del *colpo di sterzo*), il veicolo raggiunga il valore di regime della velocità di imbardata entro al massimo 1 [s], con una sovra elongazione massima del 10% rispetto a tale riferimento [24]. Per quanto riguarda la stabilità del sistema, le costanti di tempo integrale e derivativa ed il guadagno proporzionale, vengono scelti in modo da migliorare la risposta dinamica del sistema controllato, garantendo una pulsazione di taglio del sistema ad anello aperto di almeno  $30 \left[\frac{\text{rad}}{\text{s}}\right]$ , anche in condizioni limite di stabilità, ed un margine di fase di almeno 60 [deg]. Il progetto del regolatore dovrà rendere il sistema controllato asintoticamente stabile.

L'espressione della *FDT* del regolatore che consente di soddisfare alle specifiche di cui sopra è la seguente

$$G_{PID}(s) = 13.985 \frac{1 + 1 s + 1 \cdot 0.25 s^2}{s} \quad (6.43)$$

dove

$$\begin{aligned} K_p &= 13.985 \\ T_I &= 1 [s] \\ T_D &= 0.25 [s] \end{aligned} \quad (6.44)$$

Successivamente è stato utilizzato il metodo di sintonizzazione automatica di *Ziegler e Nichols* per avere un riscontro sulla validità delle (6.44).

Il metodo si articola nei seguenti passi:

- I. Si chiude l'anello di controllo con il regolatore *PID* i cui parametri devono essere sintonizzati, imponendo nulla l'azione integrale e derivativa;
- II. Partendo da valori molto piccoli di  $K_p$  si effettua un semplice esperimento, che consiste nell'applicare un piccolo gradino al sistema a catena chiusa;
- III. Si aumenta progressivamente il valore del guadagno proporzionale ripetendo di volta in volta l'esperimento finché non si instaura nell'anello un'oscillazione permanente;

- IV. Detto  $\bar{K}_p$  il valore del guadagno proporzionale corrispondente all'oscillazione permanente (detto anche *guadagno critico*) e  $\bar{T}$  il periodo di tale oscillazione, si tarano i parametri di un regolatore *PID* sulla base delle seguenti relazioni:

$$K_p = 0.6 \bar{K}_p \quad T_I = \frac{\bar{T}}{2} \quad T_D = \frac{\bar{T}}{8} \quad (6.45)$$

I diagrammi di Bode di modulo e fase relativi al comportamento in frequenza della funzione di trasferimento  $G_{\delta_f}^r(j\omega)$  (linea blu), della funzione di trasferimento ad anello aperto  $G_{\delta_f}^r \cdot G_{PID}(j\omega)$  (linea rossa) e del controllore *PID* (linea verde) sono riportati nelle Figure seguenti.

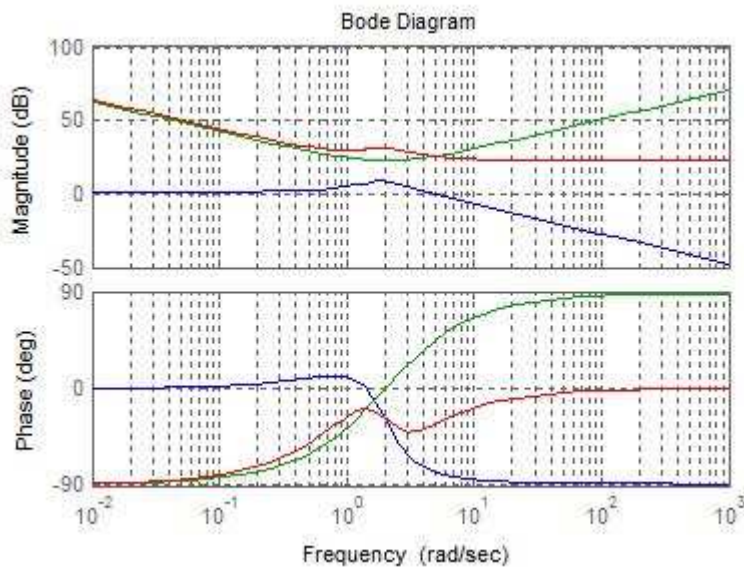


Figura 6.7 Diagrammi di Bode in condizioni di strada innevata alla velocità di  $45 \frac{km}{h}$ .

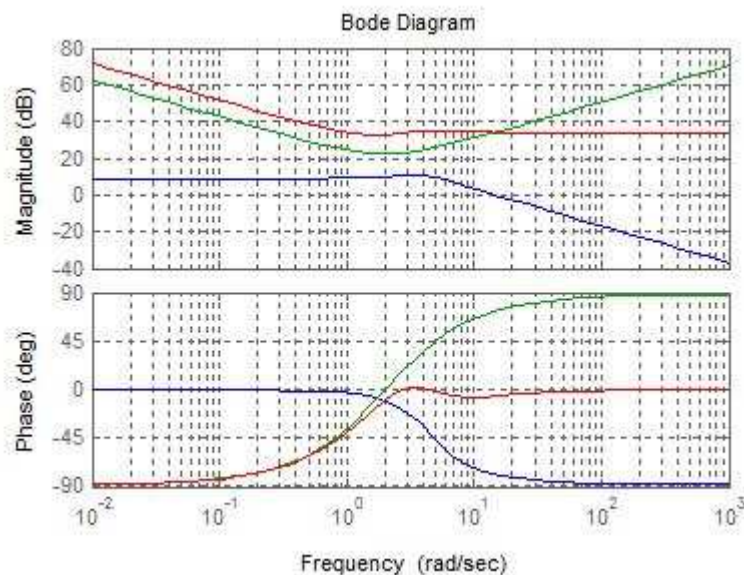


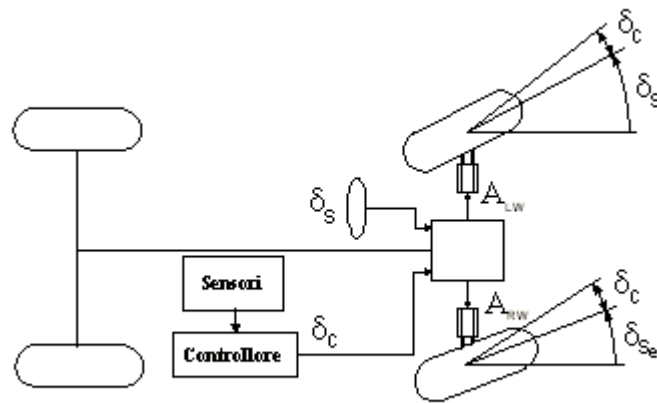
Figura 6.8 Diagrammi di Bode in condizioni ideali di aderenza alla velocità di  $45 \frac{km}{h}$ .

### 6.3 Controllo di un sistema distribuito di sterzata

In questo Paragrafo viene proposto un metodo di controllo per un sistema distribuito di sterzata, che si basa su parte delle considerazioni precedentemente svolte.

Il metodo di controllo previsto nel Paragrafo 6.2 utilizza il modello monotraccia del veicolo nel quale si suppone che alle ruote dell'assale anteriore venga imposto il medesimo angolo di sterzata.

Per poter implementare un sistema di controllo della dinamica laterale del veicolo che consenta la sterzata delle due ruote anteriori in modo coordinato e senza l'ausilio del quadrilatero di *Jeantaud*, è possibile in prima approssimazione fare riferimento allo schema di principio di Figura 6.9.



**Figura 6.9** Schema generale del controllo della sterzata di un sistema distribuito per mezzo di attuatori elettrici.

Si suppone di disporre di due attuatori elettrici, posti in corrispondenza delle due ruote, indicati in Figura 6.9 con  $A_{LW}$  e  $A_{RW}$ , che consentano di attuare il comando di sterzata.

Gli attuatori dovranno essere comandati in modo che ogni singola ruota venga sterzata a seconda del raggio di curvatura che si troverà a percorrere. Quindi risulta chiaro sin da ora che le due ruote anteriori debbano essere sterzate in modo coordinato. Per far ciò è possibile imporre matematicamente le condizioni di sterzata prodotte dal cinematismo di sterzo a quadrilatero di *Jeantaud*. Infatti come abbiamo visto nel Paragrafo 3.10.1, tale cinematismo è quello che più si avvicina a riprodurre le condizioni di sterzata cinematica. A questo punto urge fare una precisazione.

Il nostro obiettivo è quello di fare in modo che il veicolo, in qualsiasi condizione di guida, sia caratterizzato da valori delle grandezze relative al moto in direzione laterale, uguali o comunque prossimi a quelli del veicolo ideale, vale a dire uguali a quelli del veicolo caratterizzato dai parametri nominali. Tale riferimento non rappresenta un modello cinematico. Infatti, affinché si manifestino le forze di tenuta laterale degli pneumatici (che generano la forza centripeta necessaria alla curvatura), devono sussistere gli angoli di deriva degli pneumatici, che come ormai noto ci allontanano dalle

condizioni di sterzata cinematica. Affinché il conducente possa impostare l'orientamento del vettore della velocità assoluta delle ruote, bisognerebbe compensare gli angoli di deriva attraverso un anello in retroazione. Questa compensazione porterebbe ad imporre maggiori angoli di sterzo, e quindi a velocità di imbardata ed angolo di assetto più grandi rispetto a quelli caratterizzanti un veicolo passeggeri convenzionale. In definitiva, si impongono le condizioni di sterzata cinematica ma il comportamento desiderato del veicolo sarà comunque quello di tipo dinamico.

Lo schema di principio del controllo di un sistema distribuito di sterzata è riportato nella Figura sottostante.

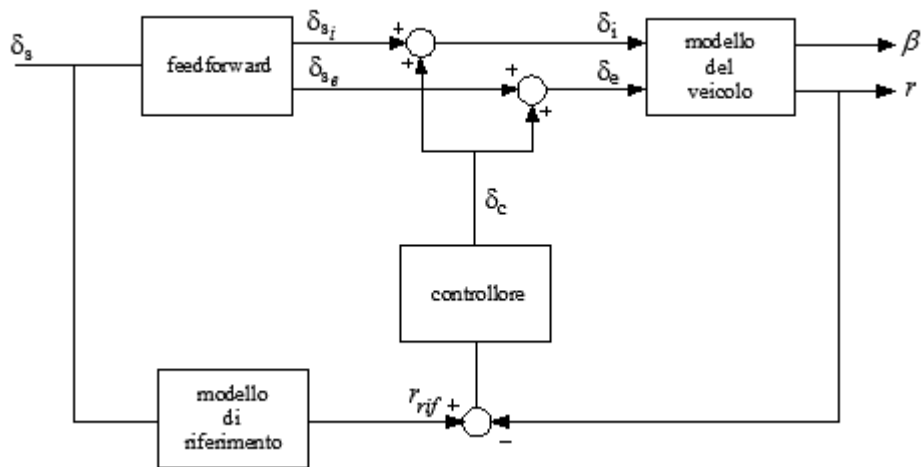


Figura 6.10 Schema di principio del controllo del sistema distribuito di sterzata.

Di seguito verranno ricavate le espressioni che compongono ciascuno dei blocchi dello schema di controllo di Figura 6.10.

### 6.3.1 Feedforward cinematico

Sulla base delle considerazioni precedentemente svolte, per ricavare una legge di controllo della sterzata, bisogna innanzitutto porre la condizione che l'angolazione assunta dalle due ruote sia congruente con il raggio di curvatura che ognuna di esse si troverà a percorrere.

Per ottenere questo risultato è possibile in prima approssimazione, applicare la condizione di sterzata cinematica di *Ackermann*, brevettata da *Rudolph Ackermann* nel lontano 1817.

A partire dal comando di sterzo  $\delta_s$  imposto dal conducente, si calcolano i valori da attribuire agli angoli di sterzata delle due ruote a partire da considerazioni geometriche relative alle condizioni cinematiche. Riscriviamo le condizioni di sterzata cinematica con riferimento ai simboli dello schema di controllo riportato in Figura 6.10, rimandando al Paragrafo 3.10 per la trattazione completa. Supponiamo che il guidatore imprima un certo angolo di sterzo  $\delta_s$ . A questo angolo corrisponde in condizioni cinematiche un raggio di curvatura che dipende dal passo del veicolo, ossia

$$R_{1,ff} = \frac{l}{\delta_s} \quad (6.46)$$

Questa espressione è legata al raggio di curvatura del baricentro dalla relazione

$$R_{1,ff} = \sqrt{R^2 - l_r^2} \quad (6.47)$$

L'espressione che lega gli angoli di sterzata delle due ruote in funzione dell'angolo imposto dal conducente<sup>18</sup> è la (3.82) e viene qui riscritta come

$$\cot \delta_s = \frac{R_{1,ff}}{l} = \frac{\cot(\delta_{s_i}) + \cot(\delta_{s_e})}{2} \quad (6.48)$$

ed inoltre la (3.74) fornisce

$$\frac{t}{l} = \frac{1}{\tan(\delta_{s_i})} - \frac{1}{\tan(\delta_{s_e})} \quad (6.49)$$

Gli angoli delle ruote sterzanti del modello bitraccia possono essere ricavati invertendo le espressioni (3.73), vale a dire

$$\delta_{s_i} = \tan^{-1} \left( \frac{l}{R_1 - \frac{t}{2}} \right), \quad \delta_{s_e} = \tan^{-1} \left( \frac{l}{R_1 + \frac{t}{2}} \right) \quad (6.50)$$

A partire dal comando di sterzo del guidatore abbiamo ricavato i componenti del vettore che definisce i riferimenti di sterzo da imporre attraverso il feedforward cinematico, cioè

$$[\delta_{s_i} \quad \delta_{s_e}]^T \quad (6.51)$$

### 6.3.2 Regolatore di feedback

Il termine correttivo proporzionale alla velocità di imbardata del controllore proposto nella trattazione [13], dipendente dalla distribuzione delle masse del veicolo, è diversi ordini di grandezza più piccolo rispetto all'uscita del regolatore *PID*, specialmente per velocità di avanzamento relativamente elevate. Per tale motivo verrà qui considerato come controllore di feedback il solo regolatore *PID* di cui si è discusso al Paragrafo 6.2.5.

Restano valide tutte le considerazioni ivi svolte, essendo le specifiche richieste al controllo praticamente invariate. Ciò è una conseguenza del fatto che rispetto al metodo di controllo proposto nel Paragrafo 6.2, i valori degli angoli di sterzo del modello bitraccia si discostano poco rispetto all'angolo di sterzo del modello monotraccia, mentre la dinamica richiesta al controllo è sostanzialmente uguale, essendo immutato il riferimento di imbardata.

<sup>18</sup> Tipicamente l'angolo imposto al volante non coincide con quello sterzante alle ruote. Quest'ultimo è più piccolo del fattore  $i_s$  detto rapporto di sterzo (*steering ratio*). Fin qui si è ipotizzato che tale rapporto sia unitario.

### 6.3.3 Anello di feedback per la correzione della dinamica laterale

Nell'introduzione al Paragrafo 6.3 si era accennato alla possibilità di realizzare un controllo che consenta di ottenere un comportamento in curva simile a quello di un veicolo cinematico. A tal proposito, in questo Sottoparagrafo proponiamo un metodo che consente di realizzare la sterzata del veicolo con un raggio di curvatura ideale.

Il modello cinematico non tiene conto della dinamica e delle forze laterali effettive che incidono sul veicolo. Per velocità abbastanza elevate l'ipotesi che il vettore della velocità di ogni ruota sia allineato con la direzione della stessa (determinata dall'angolo di sterzo) non è più valida.

Dunque, anche imponendo le condizioni di sterzata cinematica, il comportamento del veicolo in curva sarà ragionevolmente di tipo dinamico.

Per fare in modo che il veicolo abbia un comportamento in curva prossimo a quello di un veicolo cinematico, è possibile utilizzare un anello in retroazione che a partire dal riferimento di sterzo imposto dal guidatore, ricava i valori degli angoli di deriva degli pneumatici.

Per far ciò è necessaria la misura della velocità assoluta di avanzamento, della velocità di imbardata e dell'angolo di assetto, oltre che la misura dell'angolo di sterzo imposto dal guidatore. I valori degli angoli di deriva elaborati da tale blocco in retroazione possono essere poi sommati agli angoli di sterzo del feedforward cinematico. In questo modo il guidatore del veicolo può orientare effettivamente i vettori delle velocità assolute di avanzamento della ruote piuttosto che l'angolazione delle stesse. In alternativa, qualora non si disponga di sensori adatti allo scopo, per ricavare gli angoli di deriva degli pneumatici potrebbe essere utilizzato un modello di riferimento del primo ordine sia per la velocità di imbardata che per l'angolo di assetto [20]. Così facendo però la correzione sarebbe grossolana in quanto le condizioni del veicolo reale possono essere ben diverse rispetto a quelle del veicolo di riferimento.

L'uscita del feedback può essere ottenuta a partire dalle equazioni di congruenza semplificate (3.66) riscritte in funzione della velocità di avanzamento assoluta del baricentro, ossia

$$\alpha_{Fi,fb} = \delta_{si} - \frac{v_G \sin \beta_{mis} + r_{mis} l_f}{v_G \cos \beta_{mis} - \frac{r_{mis} t}{2}} \quad (6.52)$$

$$\alpha_{Fe,fb} = \delta_{se} - \frac{v_G \sin \beta_{mis} + r_{mis} l_f}{v_G \cos \beta_{mis} + \frac{r_{mis} t}{2}}$$

In questo caso i riferimenti di sterzo sono

$$[\delta_{s_i,cin} \quad \delta_{s_e,cin}]^T \quad (6.53)$$



dove

$$\delta_{s_i, cin} = \delta_{s_i} + \alpha_{F_i, fb} \quad , \quad \delta_{s_e, cin} = \delta_{s_e} + \alpha_{F_e, fb} \quad (6.54)$$

rappresentano gli angoli di sterzo della ruota interna e della ruota esterna alla curva, necessari per ottenere un comportamento del veicolo simile a quello di un veicolo cinematico. In questo caso, al fine di controllare la velocità di imbardata, il riferimento non può essere più rappresentato dalla (6.31). Può ancora essere espresso da un modello del primo ordine, ma il valore che assume a regime deve essere diverso rispetto a quello assunto dal riferimento statico (6.31). Detto in altre parole

$$F_{cin}(s, v_G) = \frac{\left(\frac{v_G}{R_{1, ff}}\right)}{1 + T_r s} \quad (6.55)$$

Il guadagno a regime è il rapporto tra la velocità assoluta di avanzamento ed il raggio di curvatura. Con questo riferimento, a parità di angolo di sterzo, il veicolo percorrerà un raggio di curvatura molto più piccolo rispetto a quello ottenibile con un riferimento dinamico. Per ottenere questo risultato, la velocità di imbardata del veicolo deve essere più elevata rispetto alla velocità di imbardata del riferimento statico. Ciò comporta anche valori di accelerazione di imbardata superiori con possibili ripercussioni sul comfort e sulla sicurezza alla guida. Per questi motivi, nel controllo del sistema distribuito di sterzata verrà utilizzato il riferimento (6.31), accettando di ottenere un comportamento dinamico in curva simile a quello di un veicolo convenzionale. Un possibile schema di controllo è riportato nella Figura 6.11 sottostante. Anche in questo caso il controllore avrà il compito di compensare eventuali deviazioni rispetto al moto di imbardata desiderato, e salvo casi di sottosterzo e sovrasterzo, non dovrà influire nel moto a regime.

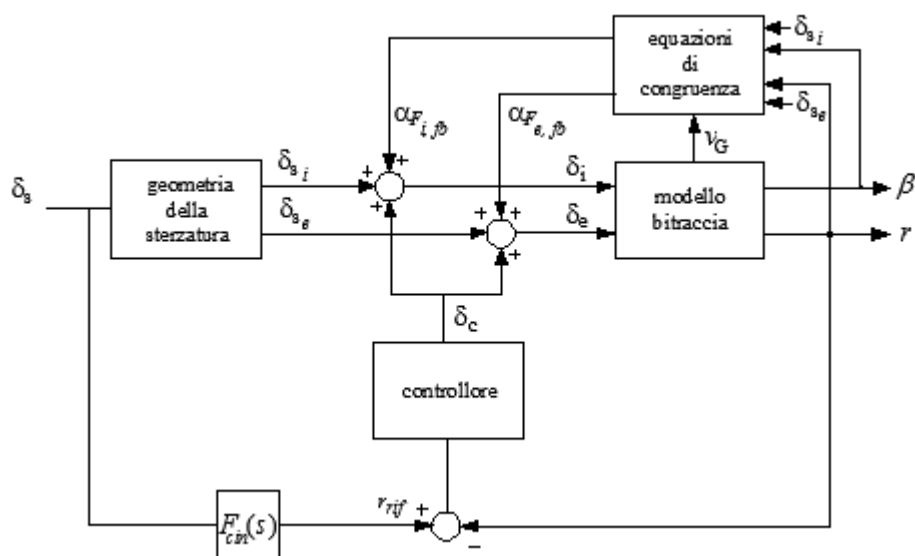


Figura 6.11 Schema di controllo per la realizzazione delle condizioni cinematiche.



# 7 Simulazioni

## 7.1 Introduzione

In questo Capitolo vengono riportati i risultati delle simulazioni del controllo della velocità di imbardata del veicolo. Il software utilizzato è *Dymola/Modelica* di *Dynasim AB © Sweden* del quale è riportata una breve descrizione in Appendice C.

Per prima cosa si è proceduto alla modellazione del veicolo attraverso il modello monotraccia, in modo da poter implementare la tecnica di controllo che prevede un solo angolo di sterzo imposto alla ruota anteriore del modello.

Dopodiché si è rappresentato il veicolo attraverso il modello bitraccia, che consente di tener conto del fatto che gli angoli di sterzo delle due ruote anteriori non sono uguali, e quindi in definitiva poter implementare la tecnica di controllo per il sistema di sterzata distribuito.

Fatto ciò e una volta implementato il controllo, si è passati alla simulazione di alcune manovre standard, come la *manovra dell'alce* e del *colpo di sterzo* e alla simulazione di disturbi laterali del moto di imbardata. Le simulazioni si riferiscono sia alla strategia di controllo esposta nel Paragrafo 6.2, che alla tecnica di controllo proposta nel Paragrafo 6.3.

Infine è stata riportata una breve discussione sui risultati ottenuti e sui possibili sviluppi futuri.

## 7.2 Modellazione del veicolo in ambiente *Dymola*

Per poter implementare il sistema di controllo della velocità di imbardata, è stato rappresentato il veicolo attraverso il modello monotraccia. In Figura 7.1 ne riportiamo la schematizzazione. L'ingresso del sistema è l'angolo di sterzo della ruota anteriore del modello monotraccia, mentre le variabili di uscita sono la velocità di imbardata (*yaw rate*) e l'angolo di assetto (*sideslip angle*).

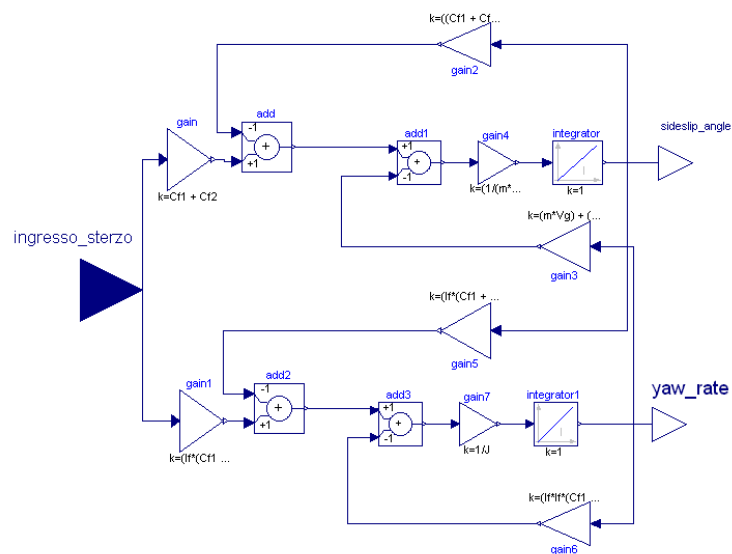


Figura 7.1 Modello monotraccia del veicolo in ambiente *Dymola*.

Il modello che consente di tener conto di due angoli di sterzo, uno per ciascuna ruota anteriore, è riportato nella Figura 7.2. In questo caso gli ingressi del sistema sono gli angoli di sterzo delle ruote sterzanti dell'assale anteriore.

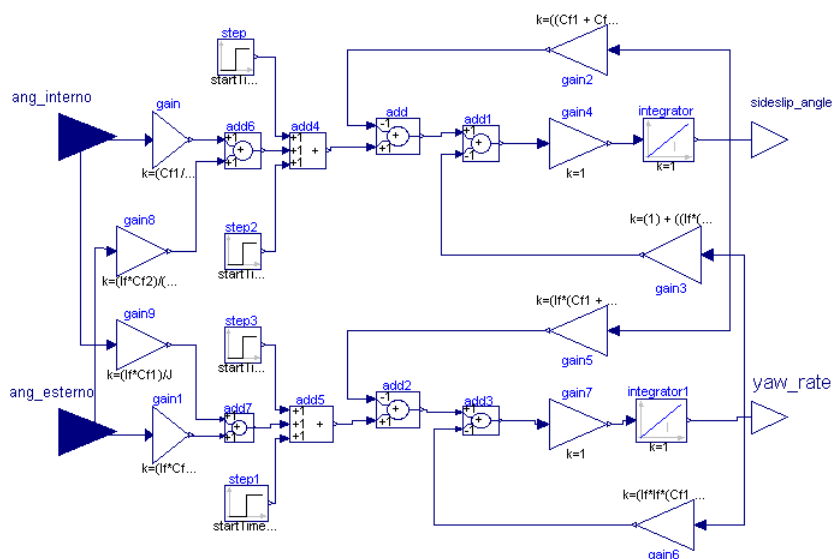


Figura 7.2 Modello bitraccia in ambiente *Dymola*.

### 7.3 Implementazione del controllo robusto

Nel Capitolo 6 abbiamo descritto la teoria che sta alla base del controllo robusto con disaccoppiamento della dinamica laterale. In questo Paragrafo riportiamo le simulazioni relative a questo tipo di controllo, confrontandole con quelle che si sarebbero ottenute a parità di altre condizioni con il veicolo nella quale non sia previsto tale controllo. Lo schema del controllo implementato in *Dymola* è riportato in Figura 7.3.

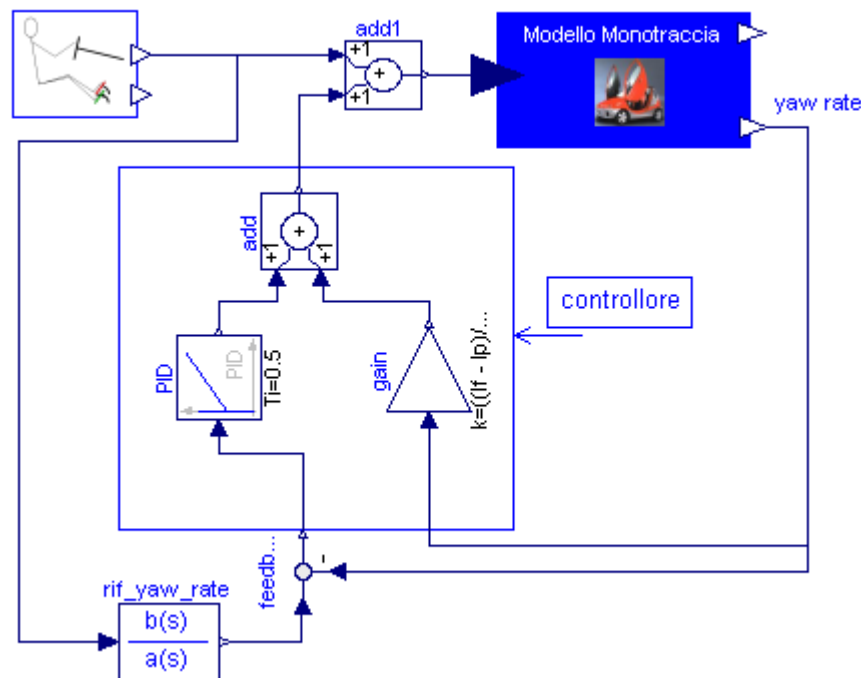


Figura 7.3 Schema del controllo robusto con disaccoppiamento della dinamica laterale.

Nella schema di controllo è stato messo in evidenza il controllore, composto da un contributo proporzionale alla velocità di imbardata e da un regolatore *PID* che elabora l'errore sulla velocità di imbardata. Inoltre è possibile mettere in evidenza il blocco che fornisce il comando del guidatore ed il blocco che genera il riferimento di imbardata attraverso l'angolo di sterzo imposto al volante. Il veicolo è stato rappresentato tramite il modello monotraccia di Figura 7.1.

Come abbiamo avuto modo di constatare, la parte proporzionale alla velocità di imbardata del controllore risulta diversi ordini di grandezza più piccola rispetto all'uscita del regolatore *PID*, e pertanto se ne potrebbero trascurare gli effetti a priori. Tuttavia a rigore, almeno inizialmente questa componente è stata considerata.

### 7.3.1 Simulazione di un gradino di sterzo a velocità costante

In questa simulazione viene effettuata la manovra del gradino di sterzo. Si suppone che il conducente del veicolo imprima un angolo di sterzo a gradino e che questo sia mantenuto. La simulazione si riferisce alle caratteristiche tecniche riportate in Appendice B ed il veicolo presenta una velocità iniziale costante e diversa da zero. Almeno inizialmente supponiamo di essere in condizioni ideali di aderenza degli pneumatici.

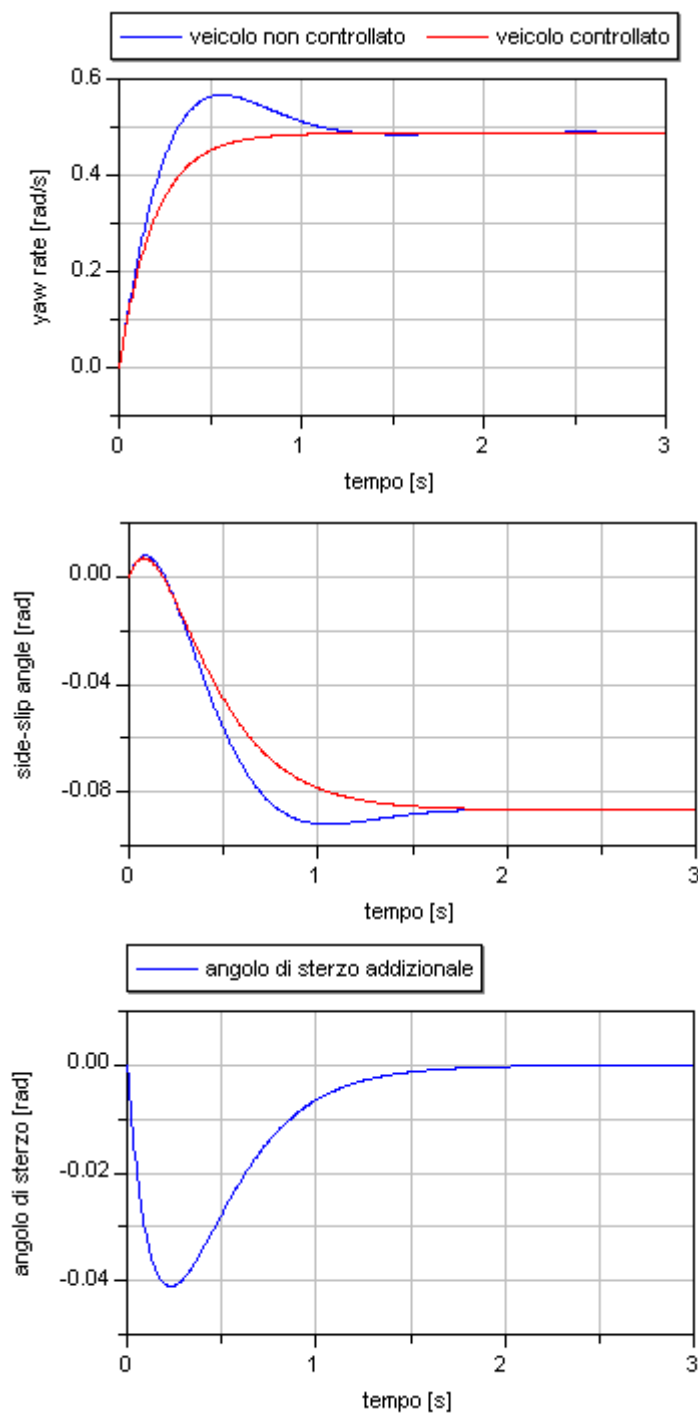


Figura 7.4 Simulazione di un gradino di sterzo per velocità  $V_G = 45 \frac{km}{h}$ .

Come si può osservare dai risultati della simulazione, per queste velocità di avanzamento l'andamento della velocità di imbardata del sistema controllato risulta più smorzato, quindi l'accelerazione di imbardata è inferiore. Il valore della velocità di imbardata a regime è lo stesso di un veicolo non controllato in quanto l'azione di controllo non influenza il regime stazionario.

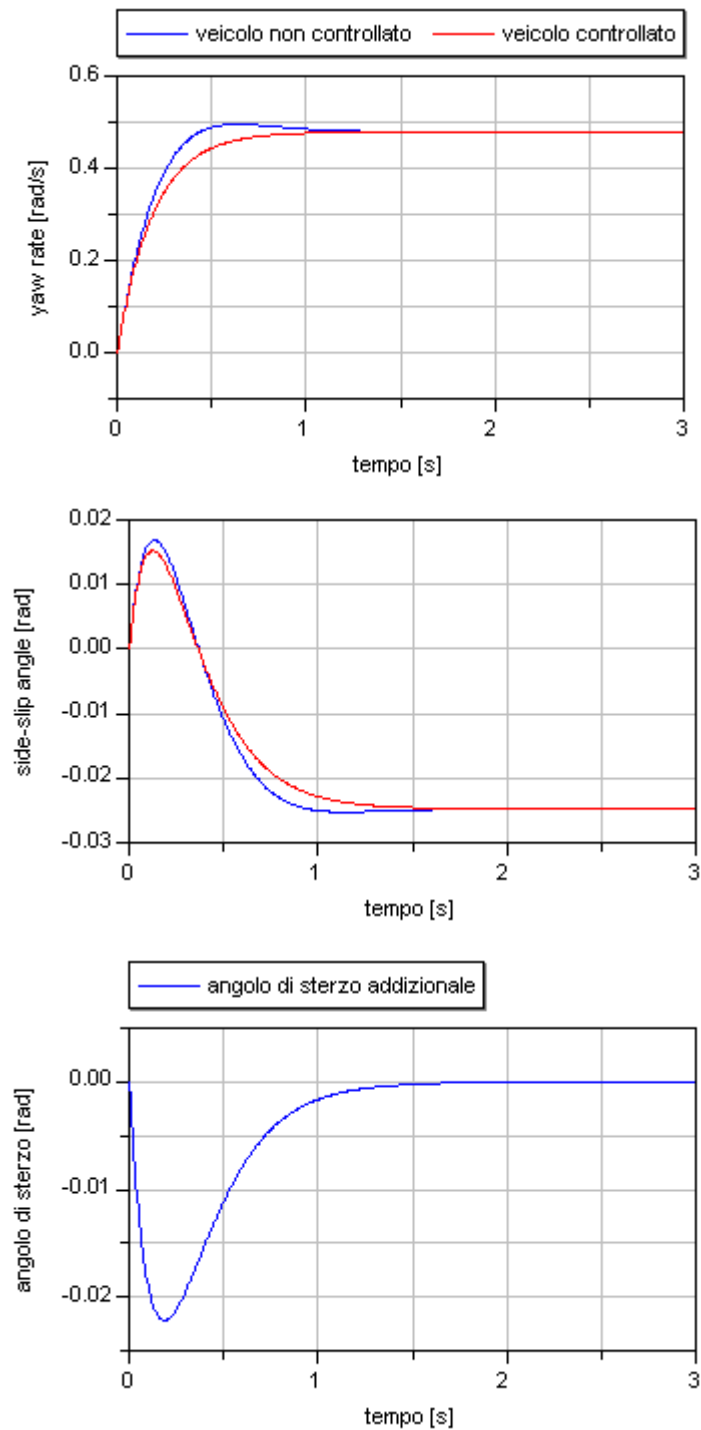


Figura 7.5 Simulazione del gradino di sterzo per velocità  $V_G = 30 \left[ \frac{km}{h} \right]$ .

Per velocità inferiori il sistema di controllo agisce in modo da migliorare la manovrabilità del veicolo.

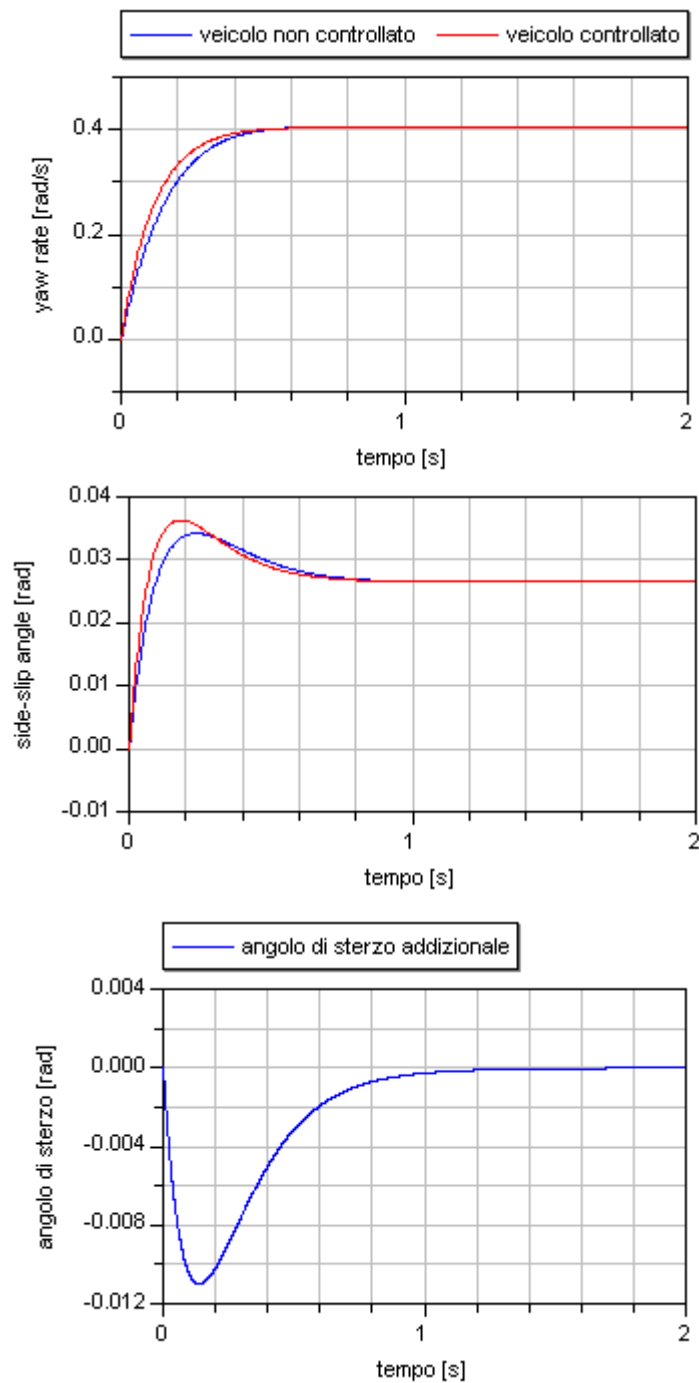


Figura 7.6 Simulazione del gradino di sterzo per velocità  $V_G = 20 \left[ \frac{km}{h} \right]$ .

Come si può osservare dai risultati delle simulazioni, l'andamento iniziale della velocità di imbardata risulta più ripido, il che va a vantaggio della direzionalità alle basse velocità di avanzamento.



### 7.3.2 Simulazione manovra del *colpo di sterzo* a velocità costante

In questa simulazione viene effettuata la manovra del *colpo di sterzo*. Con questa simulazione si vuole osservare l'andamento della risposta del veicolo controllato, nel caso in cui si voglia effettuare ad esempio un cambio di corsia improvviso, alla massima velocità di avanzamento. La simulazione si riferisce alle caratteristiche tecniche riportate in Appendice B ed il veicolo presenta una velocità iniziale costante e diversa da zero.

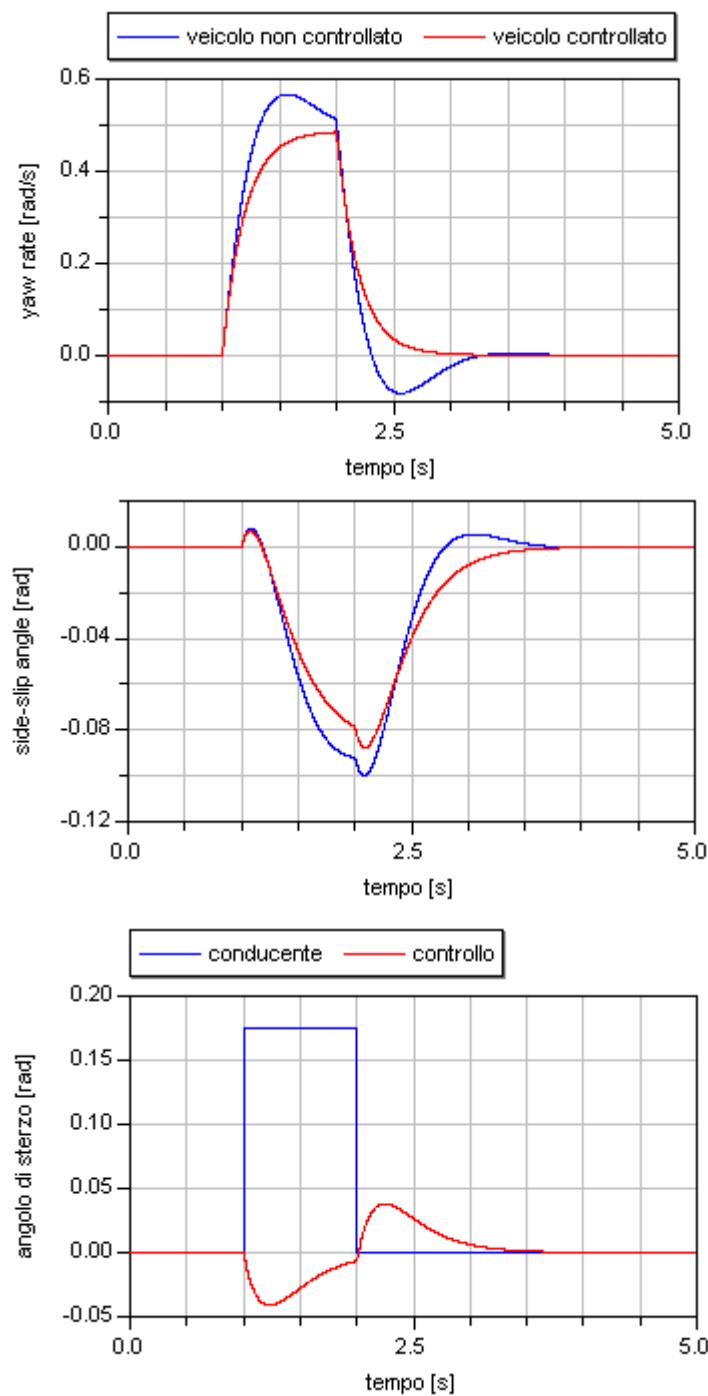


Figura 7.7 Simulazione del *colpo di sterzo* per velocità  $V_G = 45 \left[ \frac{km}{h} \right]$ .

Le simulazioni precedenti si riferiscono a condizioni di aderenza pneumatico-strada ideali, caratterizzate quindi da un coefficiente di attrito dinamico pressoché unitario. E' interessante osservare cosa succede ripetendo la stessa manovra, ma su asfalto caratterizzato da un coefficiente di attrito dinamico molto basso. Come caso limite possiamo immaginare condizioni di sede stradale innevata.

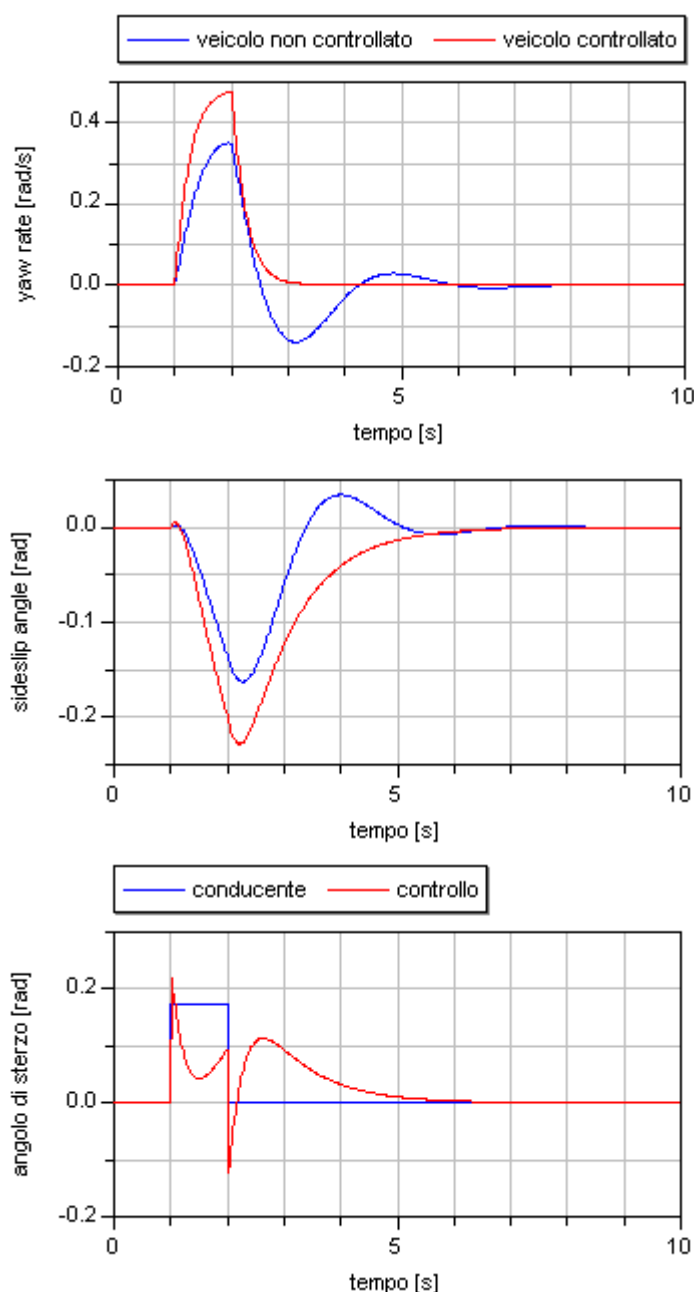
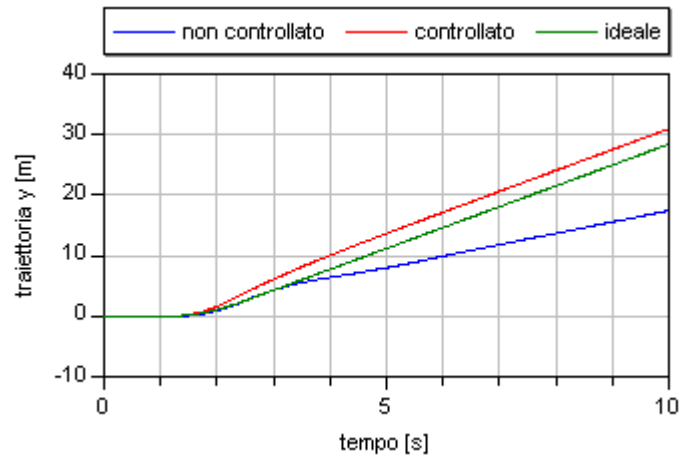


Figura 7.8 Simulazione del colpo di sterzo per velocità  $V_G = 45 \frac{km}{h}$  su strada innevata.

In queste particolari condizioni, il veicolo non controllato non consentirebbe una tale manovra. Discorso diverso per il veicolo che dispone del sistema di controllo che raggiunge in ogni caso il riferimento della velocità di imbardata.

Per verificare l'efficacia dell'azione di controllo, può essere utile riportare l'andamento nel tempo della traiettoria del baricentro del veicolo, rispetto ad un sistema di assi fisso con il piano stradale.



**Figura 7.9** Traiettoria in direzione laterale rispetto ad un riferimento di assi fisso.

Come si può osservare, la traiettoria del veicolo controllato è più larga rispetto al veicolo convenzionale, il che ci porta a concludere che il veicolo controllato, anche in queste condizioni, presenta una maggiore direzionalità rispetto ad un veicolo convenzionale che invece assume un comportamento sottosterzante. In parole povere tende a percorrere una traiettoria più interna rispetto a quella ideale relativa a tale manovra.

Per completezza riportiamo l'espressione della traiettoria in funzione del tempo rispetto ad un sistema di assi  $X$ - $Y$  solidali con il piano stradale e quindi detti di *assi suolo* [5].

L'angolo di rotazione del veicolo rispetto a tale riferimento viene indicato con  $\psi$  ed è chiamato *angolo di imbardata*, essendo  $\dot{\psi} = r$ . Una volta noto l'andamento dell'angolo di imbardata  $\psi(t)$ , è immediato ottenere le componenti del vettore velocità  $\mathbf{v}_G$  del baricentro nel riferimento fisso di assi suolo, le quali mediante una successiva integrazione nel tempo, forniscono le coordinate assolute e della traiettoria del baricentro ad ogni istante.

Le coordinate del baricentro nelle due principali direzioni sono date dalle seguenti espressioni:

$$X_0^G(t) - X_0^G(0) = \int_0^t [u(t) \cos \psi(t) - v(t) \sin \psi(t)] dt \quad (7.1)$$

$$Y_0^G(t) - Y_0^G(0) = \int_0^t [u(t) \sin \psi(t) + v(t) \cos \psi(t)] dt$$

La traiettoria nel tempo lungo l'asse  $X$  è imposta, essendo la velocità di avanzamento costante.

### 7.3.3 Simulazione *manovra dell'alce* a velocità costante

In questa simulazione viene effettuata la manovra del doppio colpo di sterzo, nota in letteratura come *manovra dell'alce*. Con questa simulazione si vuole osservare l'andamento della risposta dinamica del veicolo controllato alla massima velocità di avanzamento.

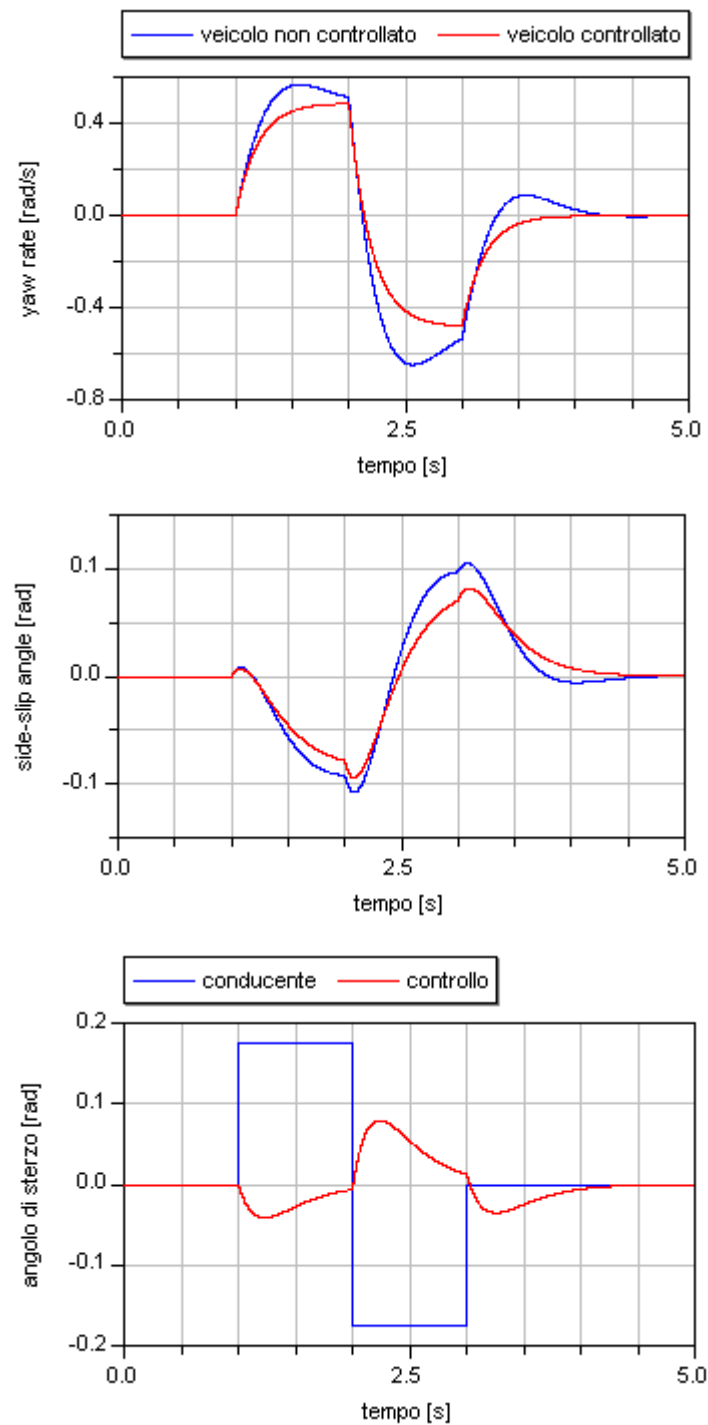
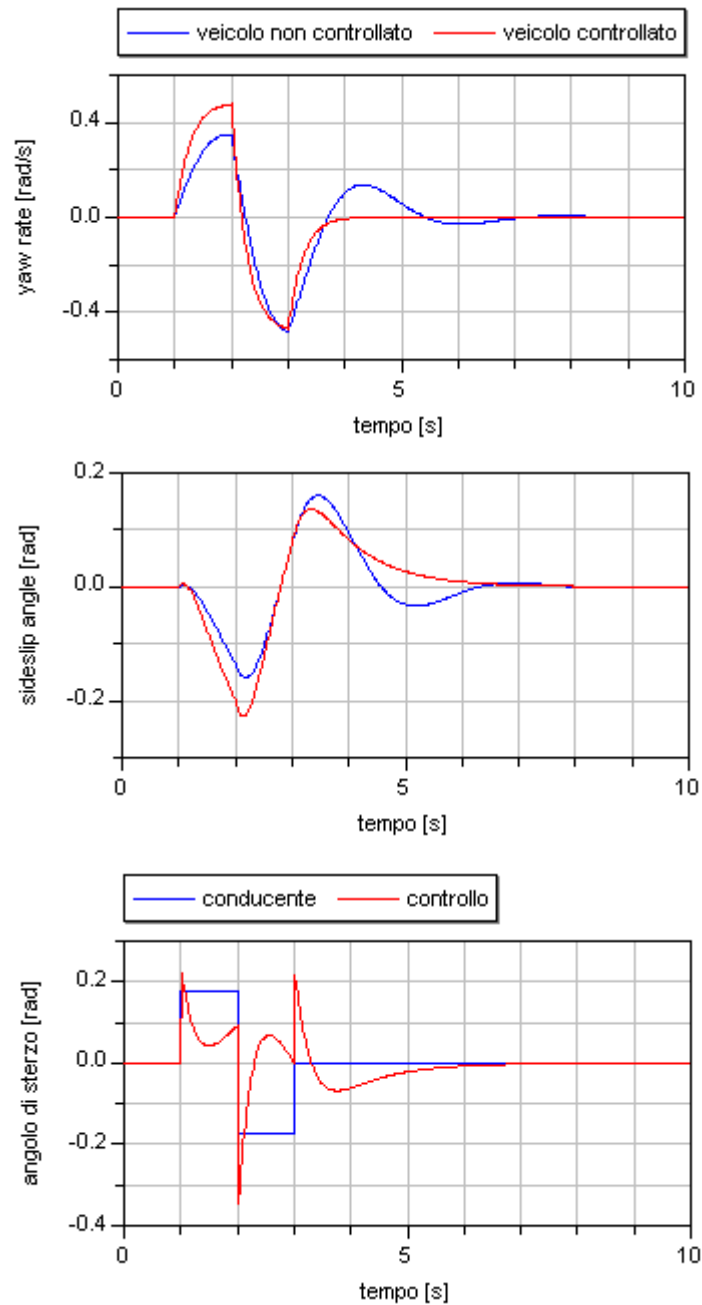


Figura 7.10 Simulazione della *manovra dell'alce* per velocità  $V_G = 45 \left[ \frac{km}{h} \right]$ .

Nel caso di sede stradale innevata, alla massima velocità raggiungibile dal veicolo, i risultati delle simulazioni sono riportati di seguito.

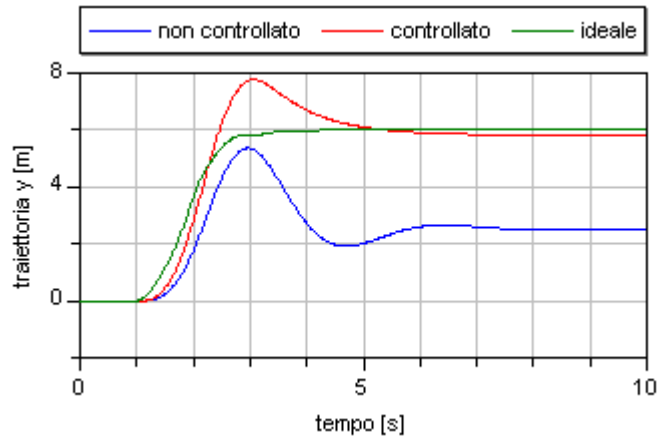


**Figura 7.11** Simulazione del doppio colpo di sterzo per velocità  $V_G = 45 \frac{km}{h}$  su strada innevata.

Risulta evidente anche in questo caso, come il veicolo controllato consenta di eseguire la manovra desiderata dal guidatore, nonostante le avverse condizioni della sede stradale. Vale la pena ribadire i benefici che ciò produce in termini di sicurezza attiva. Si pensi per esempio ad un ostacolo improvviso lungo la direzione di marcia in dette condizioni ambientali.

Anche in questo caso riportiamo l'andamento della traiettoria in direzione laterale in funzione del tempo.

Si può notare come il veicolo controllato presenti una maggiore direzionalità rispetto al veicolo non controllato che tende a seguire una traiettoria più interna rispetto a quella di riferimento.



**Figura 7.12** Traiettoria in direzione laterale rispetto ad un riferimento di assi solidale alla strada.

Una volta esaurito il transitorio, la posizione assunta dal veicolo controllato rispetto al veicolo ideale si può ritenere uguale con buona approssimazione. Quindi, in definitiva, l'azione del sistema di controllo consente di effettuare la manovra dell'alce anche in condizioni ambientali avverse.

### 7.3.4 Simulazione di veicolo sovrasterzante

Come abbiamo visto nel Sottoparagrafo 6.2.4, nel caso in cui il veicolo sia sovrasterzante e con velocità di avanzamento superiore alla velocità critica, il moto di imbardata risulta instabile se i guadagni del regolatore sono sufficientemente piccoli. In questo Paragrafo viene simulato il comportamento in sovrasterzo del veicolo, causato per esempio dalla perdita di aderenza del retrotreno con conseguente riduzione del coefficiente di rigidità delle ruote posteriori.

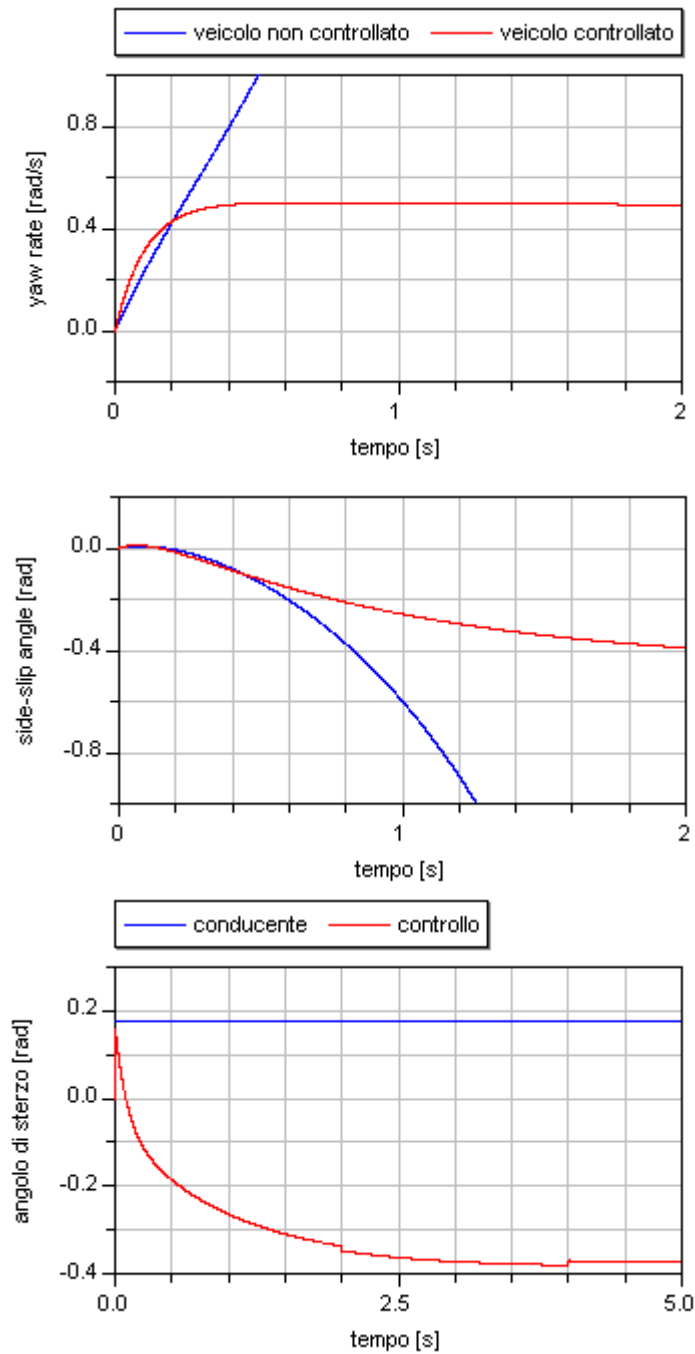


Figura 7.13 Simulazione di sovrasterzo per velocità  $V_G = 45 \left[ \frac{km}{h} \right]$ , con velocità critica  $V_{G_c} = 16.8 \left[ \frac{km}{h} \right]$ .

Per velocità inferiore alla velocità critica anche il veicolo non controllato risulta stabile, ma con valori delle grandezze caratterizzanti il moto, più grandi rispetto ai valori di riferimento.

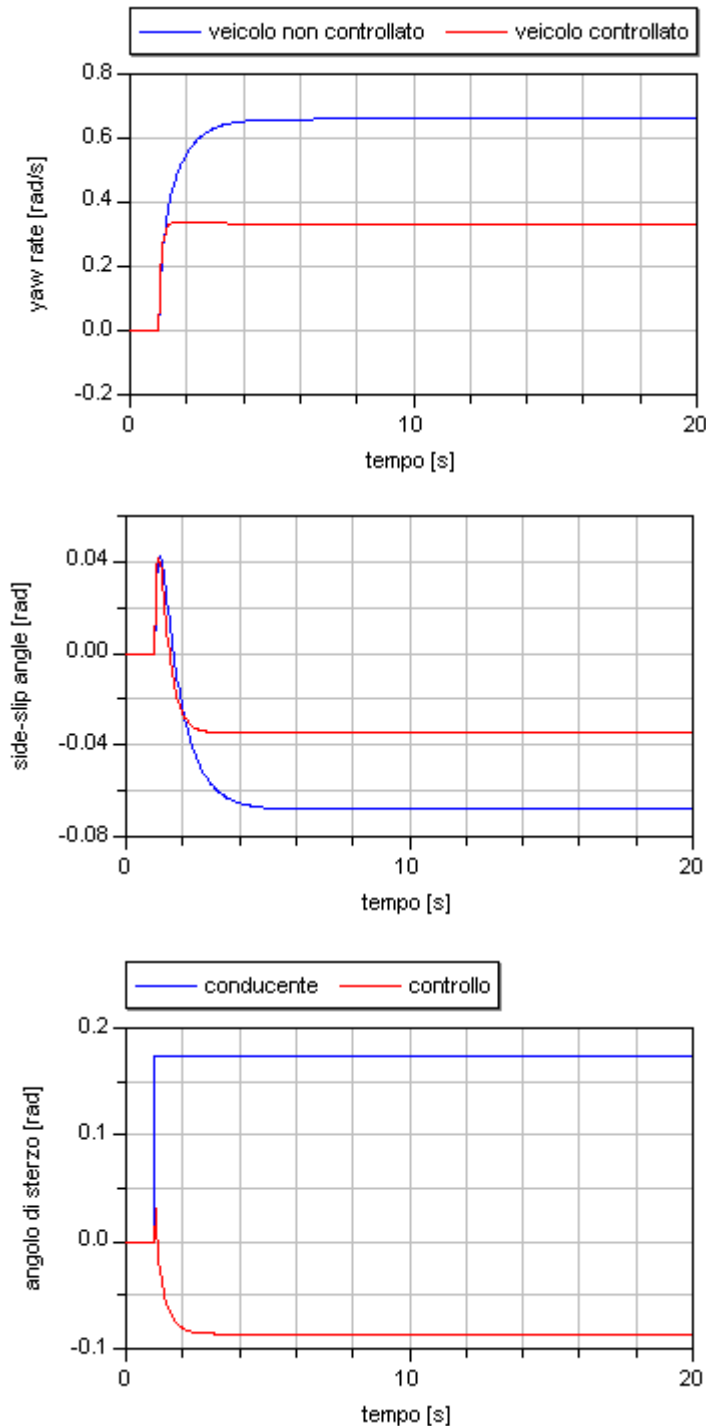


Figura 7.14 Simulazione di sovrasterzo per velocità  $V_G = 15 \left[ \frac{km}{h} \right]$  e con velocità critica  $V_{G_c} = 16.8 \left[ \frac{km}{h} \right]$ .

In entrambi i casi, rispettivamente per velocità superiori ed inferiori a quella critica, l'azione del controllore tende a stabilizzare il moto in curva del veicolo sovrasterzante. Come prevedibile, in queste condizioni l'angolo di sterzo aggiuntivo del controllore è negativo e non si annulla a regime.



### 7.3.5 Simulazione di veicolo in forte sottosterzo

Nel caso in cui il veicolo presenti un comportamento fortemente sottosterzante, a causa della perdita di aderenza delle ruote dell'assale anteriore, l'angolo di sterzo imposto dal conducente risulta insufficiente per mantenere la traiettoria desiderata.

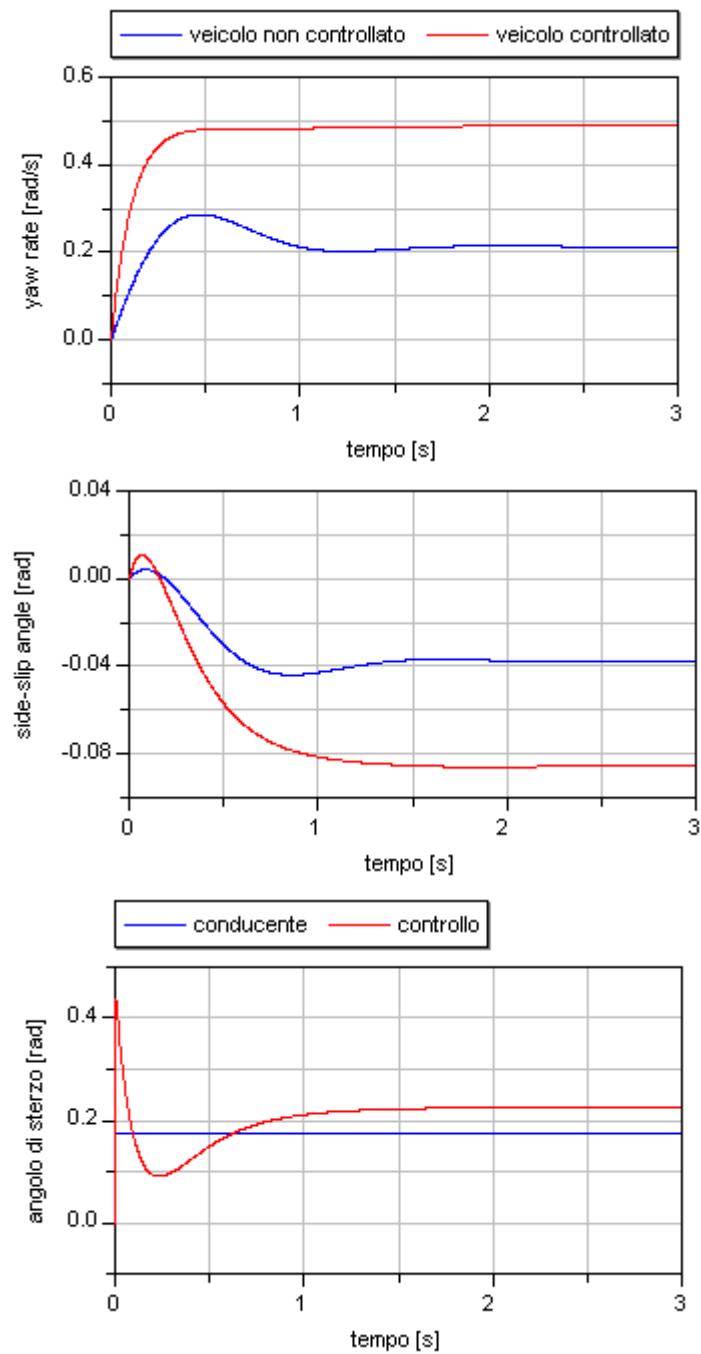


Figura 7.15 Simulazione di sottosterzo per velocità  $V_G = 45 \left[ \frac{km}{h} \right]$ .

L'angolo di sterzo aggiuntivo del controllore rimane in questo caso positivo visto il comportamento sottosterzante del veicolo.

### 7.3.6 Simulazione di raffica di vento laterale

È prassi comune simulare condizioni di disturbo del moto di imbardata, al fine di verificare la capacità di reazione ai disturbi del veicolo dotato del controllo attivo dello sterzo [25].

È interessante osservare cosa accade se il veicolo viene sottoposto ad una spinta trasversale  $F_{yD}$  rispetto alla direzione di marcia, come se fosse soggetto ad una raffica di vento laterale. Si tratta in realtà di una simulazione grossolana in quanto per mantenere il problema lineare si assume che la forza sia costantemente perpendicolare all'asse del veicolo con punto di applicazione posto avanti o dietro rispetto al baricentro. Le equazioni di equilibrio cambiano solo per l'aggiunta della forza laterale e della relativa coppia. Nel caso in cui la spinta laterale sia diretta nella stessa direzione in cui agiscono le forze di tenuta degli pneumatici, ed indicando con  $l_D$  la distanza del punto di applicazione di tale forza rispetto al baricentro del veicolo, le equazioni del moto diventano

$$\begin{aligned} mV_G(\dot{\beta} + r) &= F_{y_f} + F_{y_r} + F_{y_D} \\ J\dot{r} &= F_{y_f}l_f - F_{y_r}l_r + F_{y_D}l_D \end{aligned} \quad (7.2)$$

La distanza  $l_D$  è positiva, come qui ipotizziamo, se la retta di applicazione di  $F_{yD}$  passa davanti al baricentro, negativa nel caso contrario.

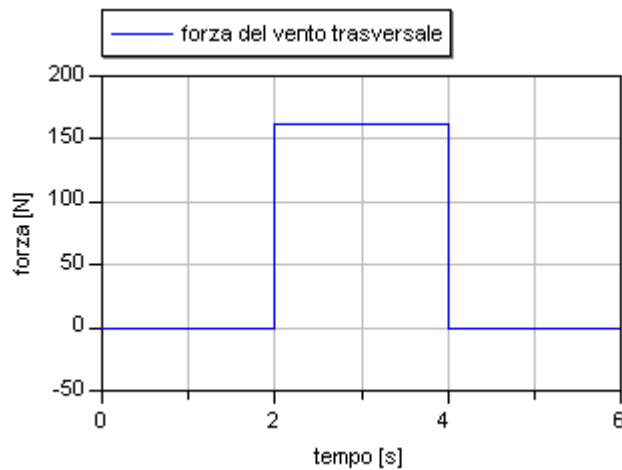


Figura 7.16 Andamento della forza del vento trasversale.

Consideriamo una raffica in condizioni di *vento forte* corrispondente al *grado 7* sulla scala *Beaufort*. La velocità del vento è di 30 [kt] pari a circa  $15.4 \frac{m}{s}$ . Per valutare la consistenza di tale spinta in termini di forza, si assume che il veicolo sia assimilabile ad un cubo con sezione della faccia interessata dal disturbo, determinata a partire dalle caratteristiche tecniche riportate nel Capitolo 2. Considerando il coefficiente di attrito aerodinamico di un cubo, in base all'espressione della forza di attrito aerodinamico, il modulo della forza di disturbo agente sul veicolo sarà circa 162 [N].

Per la simulazione si suppone che il veicolo sia in rettilineo a velocità costante ed il conducente non effettui alcuna correzione sul volante, salvo mantenerlo in posizione fissa ( $\delta_s = 0$ ), immaginando che il disturbo si manifesti in modo improvviso. La forza laterale esercitata dal vento si manifesta all'istante  $t = 2$  [s] e scompare all'istante  $t' = 4$  [s].

Gli andamenti delle grandezze che caratterizzano il moto sono riportati nella Figure seguenti per due diversi valori di velocità di avanzamento.

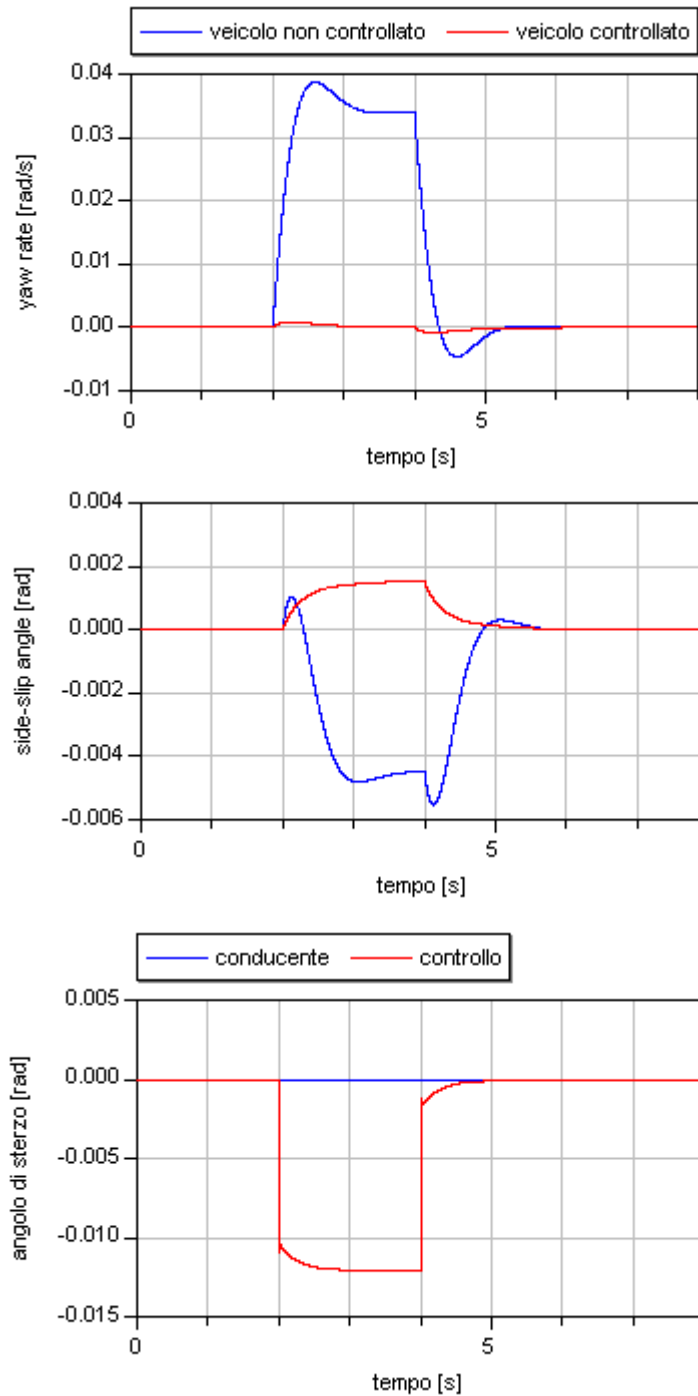


Figura 7.17 Simulazione del disturbo laterale per  $V_G = 45 \left[ \frac{km}{h} \right]$ .

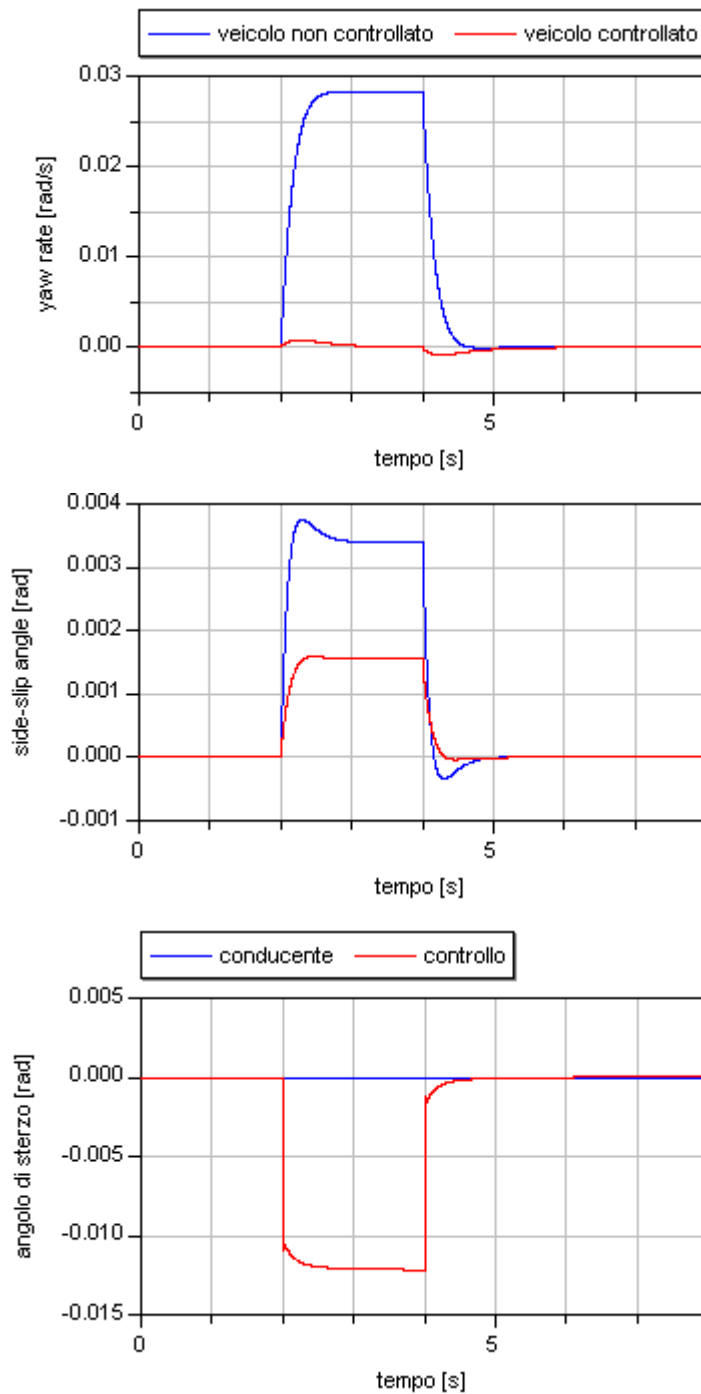
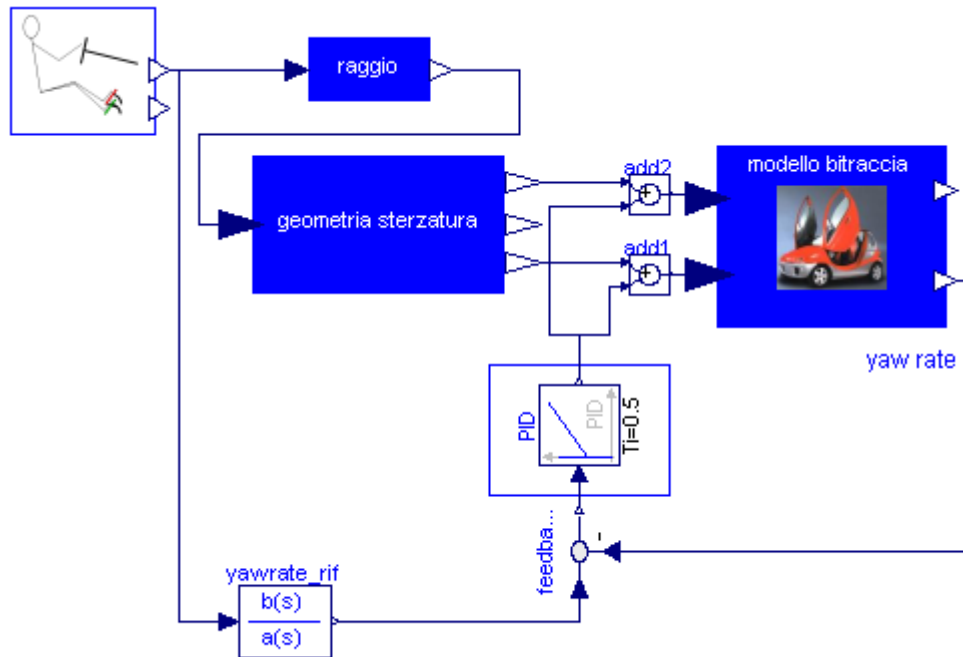


Figura 7.18 Simulazione del disturbo laterale per  $V_G = 20 \left[ \frac{km}{h} \right]$ .

Dalle simulazioni risulta evidente come l'azione del controllo consenta di mantenere praticamente nulla la velocità di imbardata. La presenza di un piccolo angolo di assetto può essere giustificata dalla necessità di compensare il momento di imbardata provocato dalla forza di disturbo. L'entità dell'angolo correttivo elaborato dal controllo rimane praticamente identico nei due casi in esame. Infatti, nel caso di disturbo al moto di imbardata, la correzione dipende dall'entità del momento di disturbo e non dalla velocità di avanzamento.

## 7.4 Implementazione del controllo del sistema distribuito di sterzata

In questo Paragrafo riportiamo le simulazioni relative al controllo della velocità di imbardata di un sistema di sterzata distribuito. Lo schema di controllo implementato è riportato di seguito.



**Figura 7.19** Rappresentazione in ambiente *Dymola* del controllo di un sistema distribuito di sterzata.

Dalla schema di Figura 7.19 è possibile notare come il controllore sia ora costituito da un semplice regolatore *PID*. Infatti, i valori assunti dal termine proporzionale alla velocità di imbardata del controllore utilizzato dalla strategia di controllo precedente sono diversi ordini di grandezza inferiori rispetto all'uscita stessa del regolatore, il che ci consente di trascurarne gli effetti. I guadagni del regolatore sono identici a quelli utilizzati per l'implementazione del controllo robusto con disaccoppiamento della dinamica laterale. Ciò è una conseguenza del fatto che il metodo di controllo proposto utilizza un modo differente per assegnare gli angoli di sterzo<sup>19</sup>, mentre il modello di riferimento della velocità di imbardata rimane lo stesso.

Rispetto alle simulazioni precedenti verrà considerato un angolo di sterzo leggermente inferiore. Infatti, si è visto come i valori degli angoli di sterzo in sovrapposizione elaborati dal controllore, assumono valori che potrebbero inficiare le ipotesi che stanno alla base del modello lineare del veicolo. Comunque per rimanere nel campo della validità delle ipotesi, nelle prossime simulazioni ci si riferirà ad un angolo di sterzo  $\delta_s = 0.10$  [rad].

<sup>19</sup>Comunque dello stesso ordine di grandezza rispetto all'angolo del modello monotraccia.

### 7.4.1 Simulazione di un gradino di sterzo a velocità costante

Supponiamo che il guidatore imprima un angolo di sterzo a gradino e che questo sia mantenuto. Supponiamo inoltre di essere in condizioni ideali di aderenza.

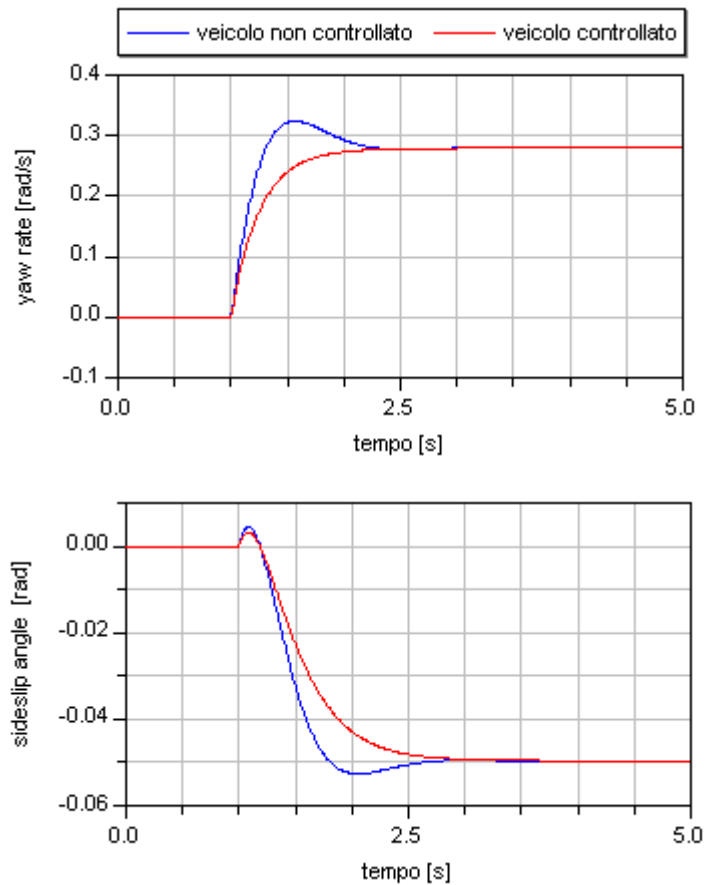


Figura 7.20 Simulazione del gradino di sterzo alla velocità costante di  $V_G = 45$  [Km/h].

È possibile notare come gli angoli di sterzo imposti tramite il feedforward cinematico siano diversi.

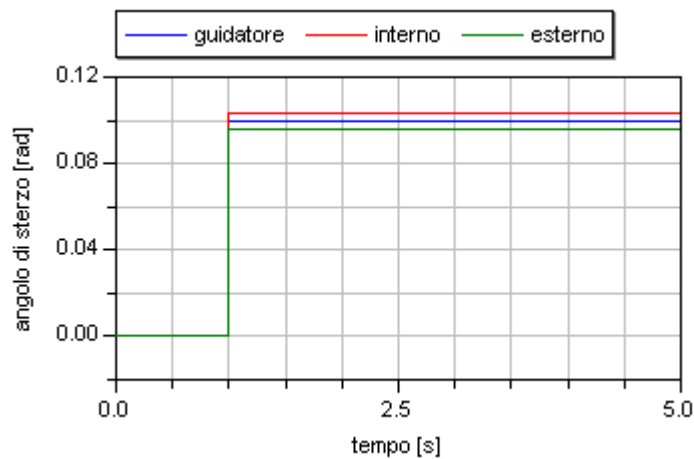


Figura 7.21 Angoli di sterzo cinematici.

L'angolo complessivo imposto alla ruota interna verrà indicato con *int tot*, mentre quello imposto alla ruota esterna alla curva verrà indicato con *est tot*. Con *ff int* ed *ff est* intendiamo rispettivamente l'angolo di sterzo interno ed esterno alla curva elaborati dal feedforward cinematico.

Premesso ciò, gli angoli di sterzo complessivi imposti alle ruote, che tengono conto della correzione del controllore, insieme a quelli elaborati dal feedforward cinematico sono riportati nella Figura 7.22. Gli angoli di sterzo vengono sottratti a quelli elaborati dal feedforward cinematico al fine di migliorare la stabilità e successivamente, una volta esaurito l'effetto del controllore, ritornano al valore impostato dal conducente tramite le relazioni di sterzata cinematica.

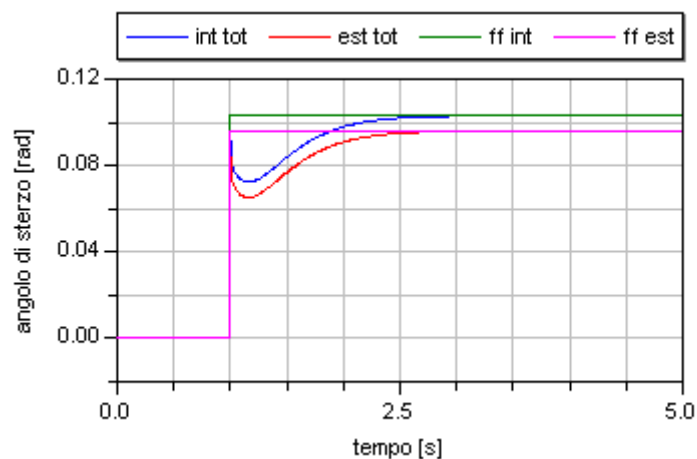


Figura 7.22 Angoli di sterzo relativi alla manovra del gradino di sterzo.

I risultati di questa simulazione sono analoghi a quelli ottenuti nel Paragrafo 7.3.1, nelle quali si è visto che le condizioni più critiche, a parità di aderenza degli pneumatici, sono quelle relative alle massime prestazioni in termini di velocità di avanzamento. Per tale motivo nelle prossime simulazioni verrà preso in considerazione il veicolo alla massima velocità raggiungibile.

### 7.4.2 Simulazione manovra del colpo di sterzo a velocità costante

In questo Paragrafo viene simulata la manovra del colpo di sterzo a velocità costante, pari alla massima velocità raggiungibile dal veicolo.

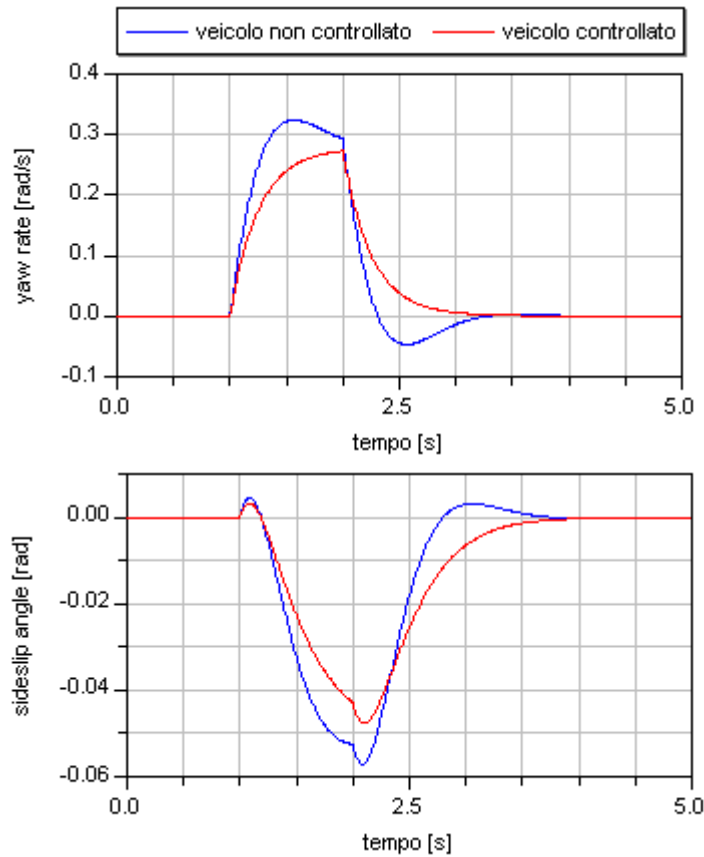


Figura 7.23 Simulazione del colpo di sterzo alla velocità costante  $V_G = 45 \left[ \frac{\text{Km}}{\text{h}} \right]$ .

Anche in questo caso viene ottenuto il risultato desiderato. La risposta dinamica del veicolo controllato presenta meno sovralongazioni rispetto alla risposta di un veicolo convenzionale con vantaggi evidenti in termini di stabilità.

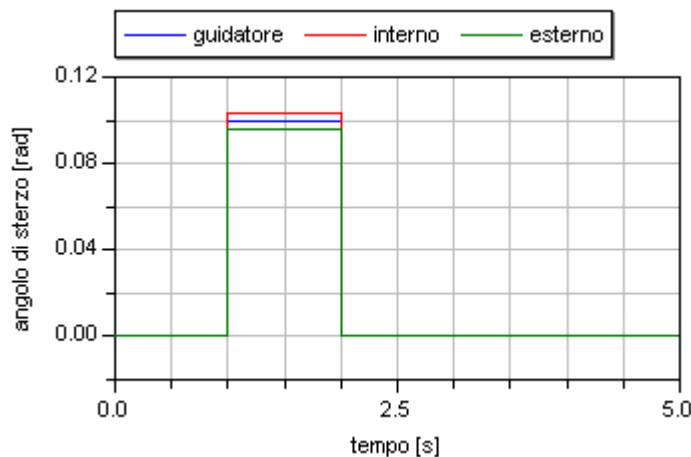


Figura 7.24 Angoli di sterzo cinematici.



Gli angoli di sterzo complessivi in ingresso al veicolo, che tengono conto dell'angolo aggiuntivo del controllo sono riportati nella Figura sottostante.

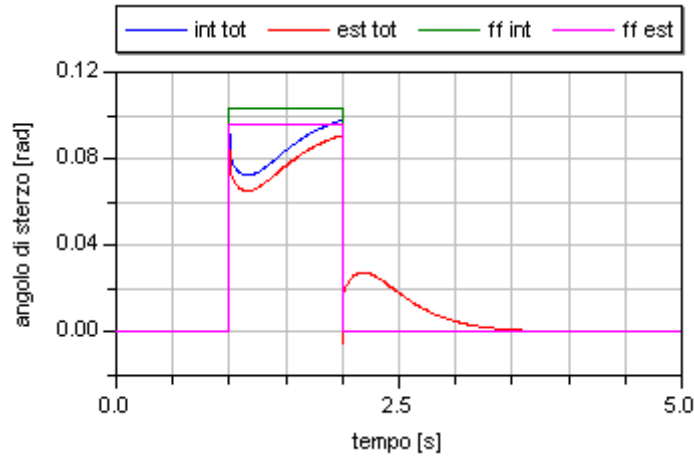


Figura 7.25 Angoli di sterzo della manovra del colpo di sterzo.

Valgono le stesse considerazioni precedentemente svolte, ossia, l'angolo di sterzo aggiuntivo viene sottratto a quello imposto dal guidatore al fine di migliorare la stabilità.

La stessa simulazione ma in condizioni di aderenza non ottimali, determinate ad esempio da sede stradale innevata, viene riportata di seguito.

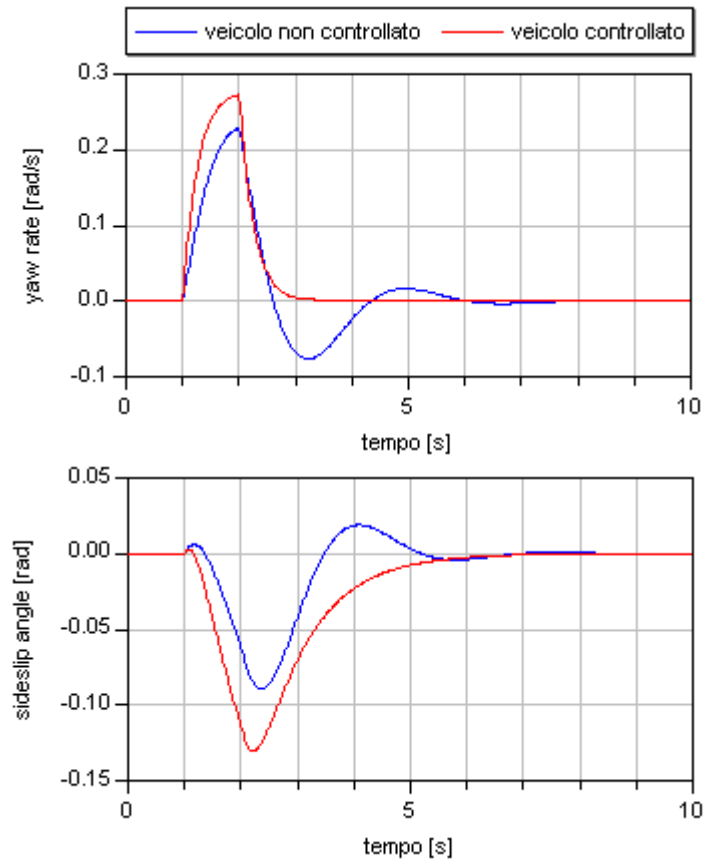
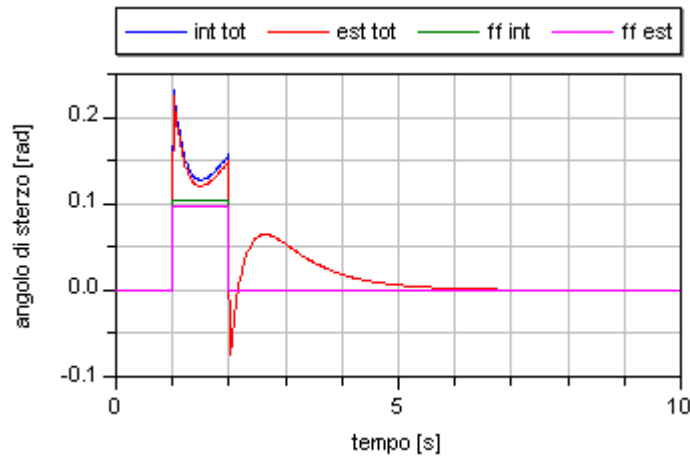


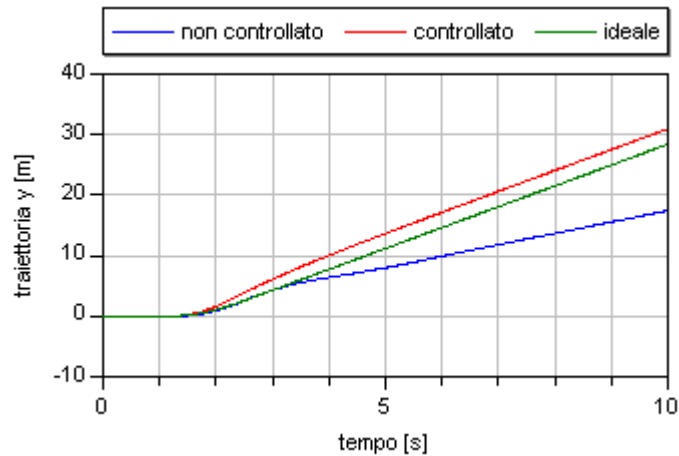
Figura 7.26 Simulazione del colpo di sterzo alla velocità costante  $V_G = 45 \frac{\text{Km}}{\text{h}}$  in condizioni non ottimali di aderenza degli pneumatici.

Appare evidente come i valori di imbardata e dell'angolo di assetto del veicolo non controllato si discostino da quelli di riferimento del veicolo controllato.



**Figura 7.27 Angoli di sterzo della manovra del colpo di sterzo in condizioni non ideali di aderenza.**

Gli angoli di sterzo complessivi necessari per mantenere il veicolo nelle condizioni desiderate sono maggiori rispetto a quelli relativi alle condizioni ideali di aderenza. In particolare come è possibile osservare nella Figura 7.28, l'andamento della traiettoria del baricentro in funzione del tempo del veicolo non controllato è più interno rispetto alla traiettoria del veicolo controllato.



**Figura 7.28 Andamento della traiettoria del baricentro in direzione laterale rispetto al riferimento di assi suolo.**

Ciò significa che in queste particolari condizioni, il veicolo non controllato tende a percorrere un raggio di curvatura inferiore. Detto in altre parole, le condizioni della sede stradale determinano condizioni di sottosterzo ed il veicolo percorre una traiettoria interna rispetto a quella desiderata. L'andamento nel tempo della traiettoria del baricentro del veicolo ideale, è stata calcolata considerando la velocità di imbardata di riferimento ed un angolo di assetto nullo.

### 7.4.3 Simulazione *manovra dell'alce* a velocità costante

Anche in questo Sottoparagrafo riportiamo le simulazioni relative ad una delle più classiche manovre nell'ambito dei test sui veicoli. Supponiamo che la velocità sia costante e che il veicolo inizialmente sia in condizioni ideali di aderenza.

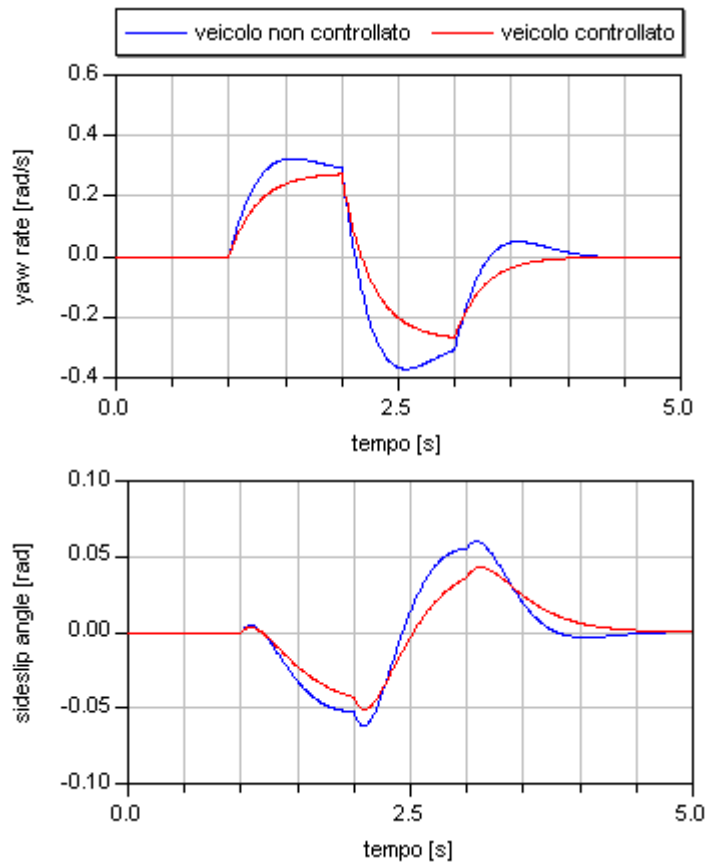


Figura 7.29 Simulazione dell'alce per velocità di 45 [km/h].

Gli angoli di sterzo elaborati dal feedforward cinematico sono riportati nella Figura 7.30. E' chiaro che nel caso in cui gli angoli di sterzo diventano negativi, si inverte il significato di angolo interno ed esterno alla curva in quanto il raggio di curvatura diventa negativo.

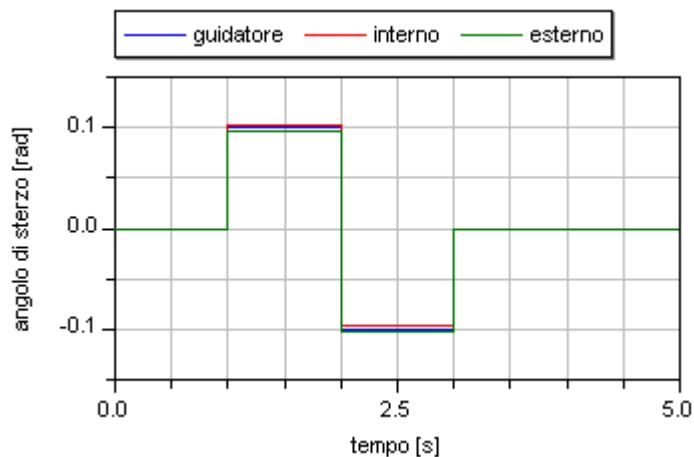
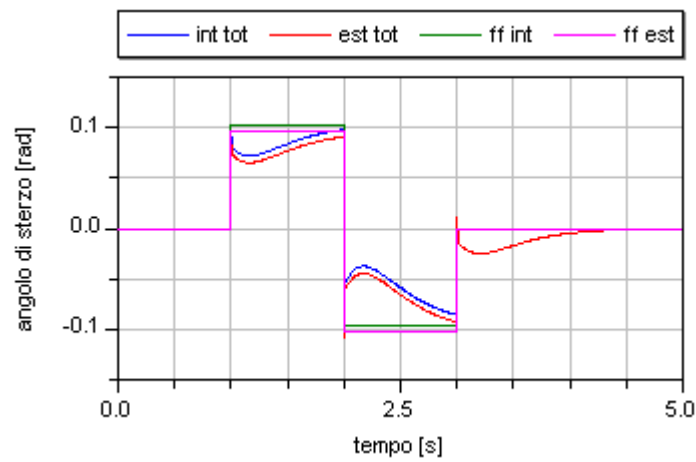


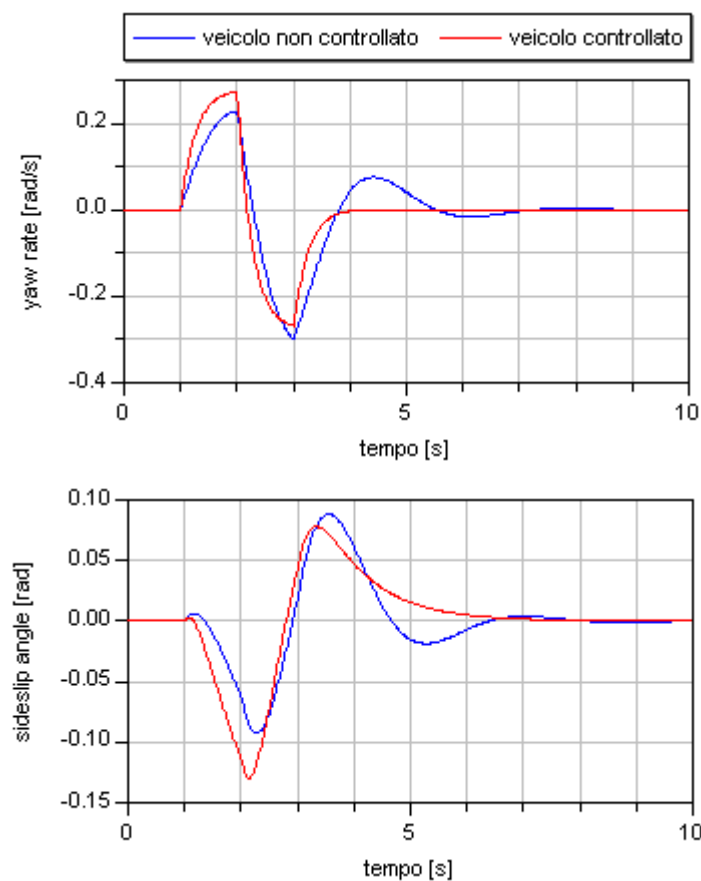
Figura 7.30 Angoli di sterzo cinematici.

Gli angoli di sterzo complessivi imposti alle ruote sono riportati nella Figura sottostante.



**Figura 7.31 Angoli complessivi imposti alle ruote in condizioni ideali di aderenza degli pneumatici.**

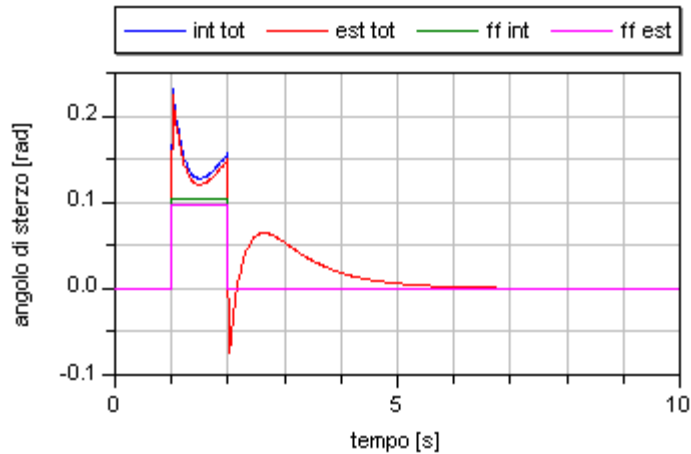
Le stessa manovra ma in condizioni di aderenza relative ad asfalto innevato sono di seguito riportate.



**Figura 7.32 Simulazione della manovra dell'alce in condizioni non ottimali di aderenza.**

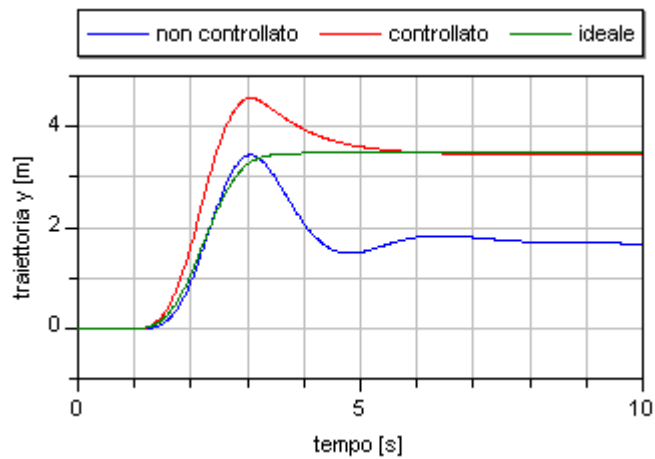
Il veicolo controllato, anche in queste condizioni limite di aderenza, raggiunge il riferimento della velocità di imbardata. Il veicolo convenzionale invece tende ad assumere velocità di imbardata ed angolo di assetto più piccoli rispetto a quelli che competono al veicolo in condizioni ideali.

La Figura 7.33 riporta gli angoli di sterzo complessivi imposti al veicolo.



**Figura 7.33 Angoli di sterzo complessivi imposti alle ruote.**

L'andamento nel tempo della traiettoria del baricentro lungo la coordinata  $y$  di un riferimento fisso con il piano stradale è mostrata nella Figura sottostante.



**Figura 7.34 Andamento della traiettoria del baricentro.**

Si vede come il veicolo non controllato, una volta esaurito il transitorio, si porta su una traiettoria diversa rispetto a quella del veicolo ideale. Il veicolo controllato invece consente di mantenere a regime la stessa traiettoria desiderata ma presenta un comportamento transitorio diverso a rispetto al veicolo in condizioni ideali di aderenza e di angolo di assetto nullo.

#### 7.4.4 Simulazione di veicolo sovrasterzante

Nel caso in cui il veicolo presenti un comportamento sovrasterzante, a causa per esempio della perdita di aderenza del treno di gomme posteriore, le simulazioni sono le seguenti.

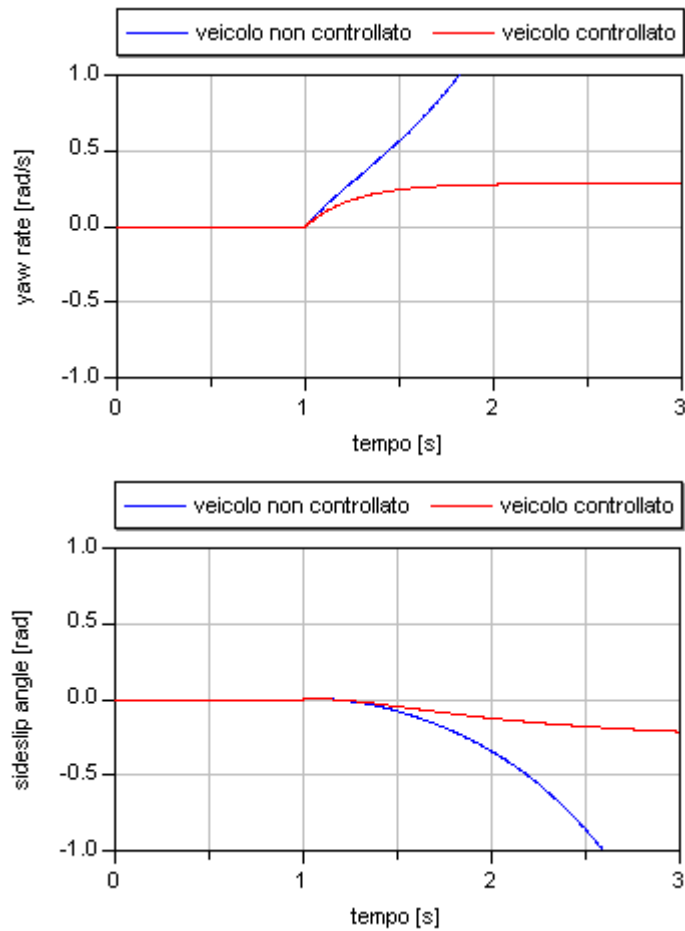


Figura 7.35 Simulazione di veicolo sovrasterzante alla velocità di 45 [Km/h].

Gli angoli di sterzo complessivi sono riportati nella Figura sottostante, dove si nota come l'azione del controllo non si esaurisce a regime stazionario.

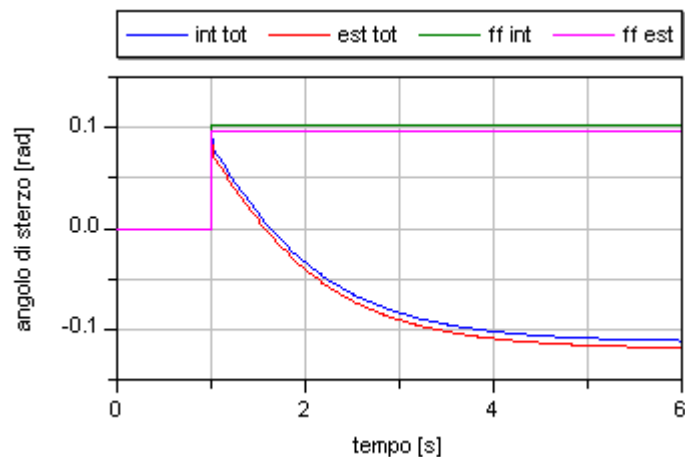
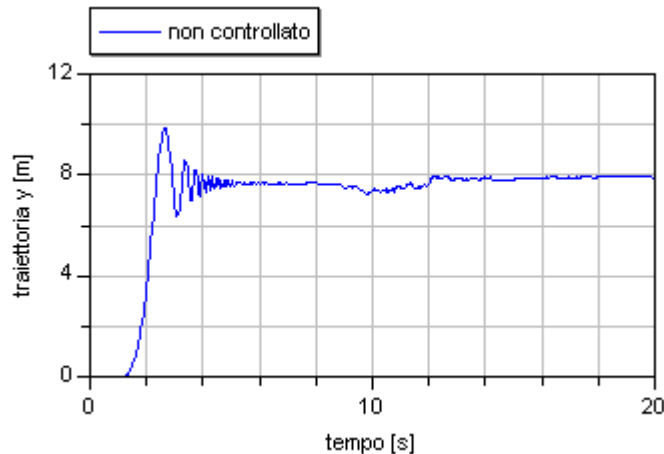


Figura 7.36 Angoli di complessivi imposti alle ruote.

In queste condizioni per mantenere stabile il veicolo in curva l'azione del controllore persiste anche in condizioni di regime.

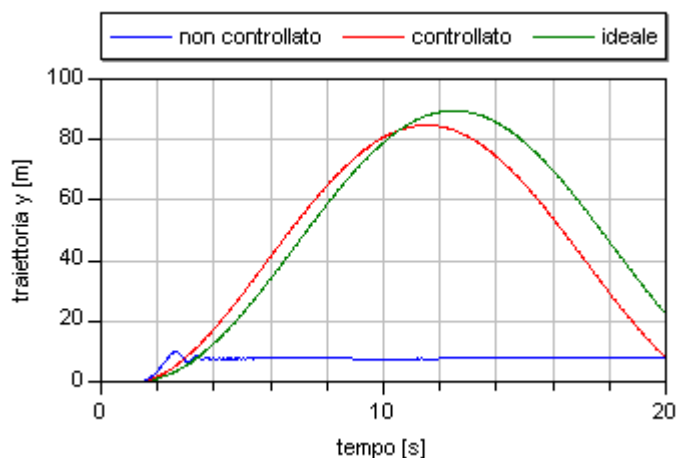
Come era già evidente dall'andamento della velocità di imbardata e dell'angolo di assetto, il moto del veicolo è instabile. Tale circostanza è confermata dall'andamento della traiettoria del baricentro del veicolo non controllato di Figura 7.37.



**Figura 7.37** Andamento nel tempo della traiettoria del veicolo sovrasterzante.

Imponendo un gradino di sterzo costante, l'andamento nel tempo della traiettoria in direzione laterale è descritto da una sinusoide il cui valore di picco mezzi rappresenta il raggio di curvatura. Riportando invece la traiettoria in direzione laterale sull'asse delle ordinate e la traiettoria in direzione longitudinale sull'asse delle ascisse, la traiettoria sarebbe invece descritta da una circonferenza. Premesso ciò, osservando la Figura 7.37, risulta chiaro come il baricentro del veicolo non controllato stia procedendo più o meno in linea retta, allo stesso tempo come si vede dalla Figura 7.35, sia lo *yaw rate* che il *sideslip angle* aumentano considerevolmente; ciò ci porta a concludere che il veicolo sta ruotando rapidamente intorno al proprio asse, e quindi è in condizioni di moto instabile.

Il confronto degli andamenti delle traiettorie del veicolo ideale e del veicolo controllato, mostra come in condizioni di sovrasterzo il sistema di controllo consenta di percorrere una traiettoria prossima a quella di un veicolo ideale.



**Figura 7.38** Traiettorie del baricentro in funzione del tempo.

### 7.4.5 Simulazione di veicolo in forte sottosterzo

Nel caso in cui il veicolo presenti comportamento sottosterzante i risultati delle simulazioni sono i seguenti.

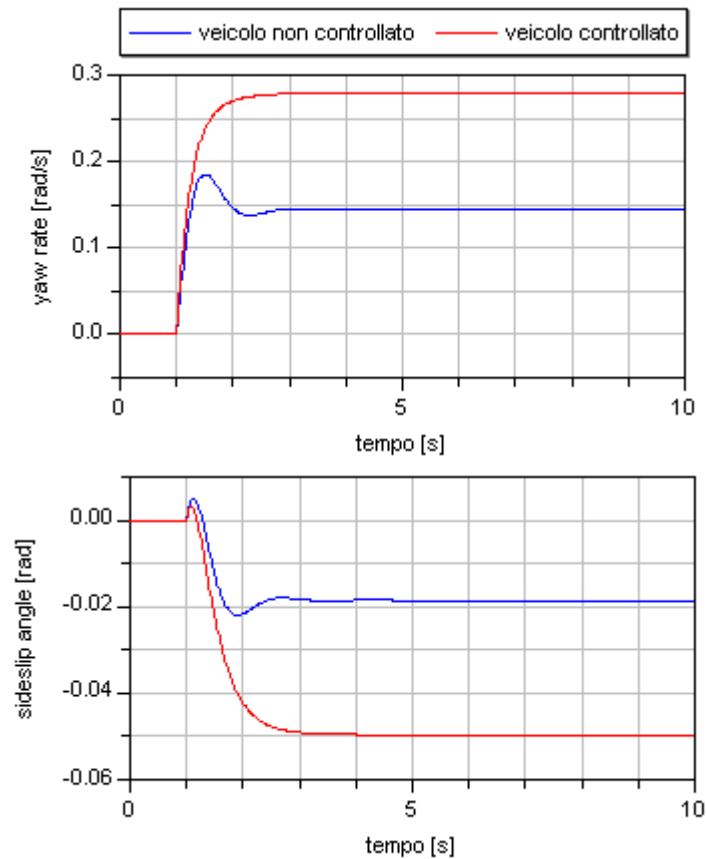


Figura 7.39 Simulazione di gradino di sterzo con veicolo sottosterzante.

L'andamento degli angoli di sterzo complessivi imposti alle ruote sono riportati nella Figura 7.40 sottostante. In questo caso gli angoli del controllo vengono sommati a quelli imposti dal conducente, analogamente a quanto visto nelle simulazioni precedenti di sottosterzo.

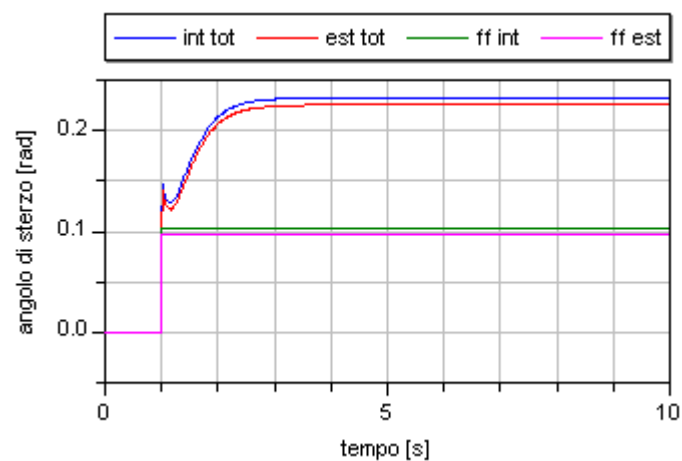
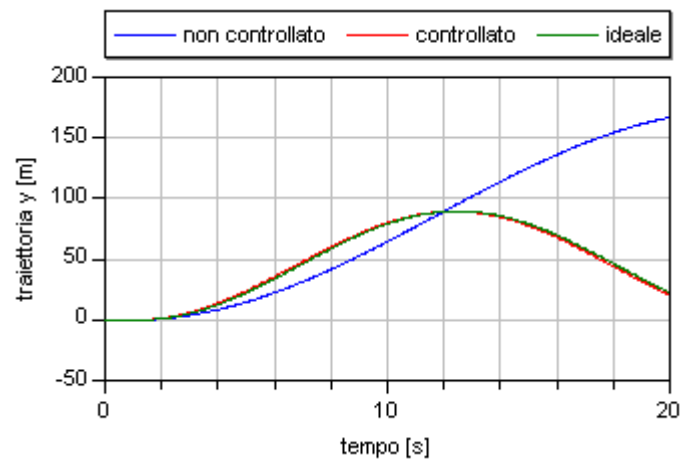


Figura 7.40 Andamento degli angoli di sterzo.

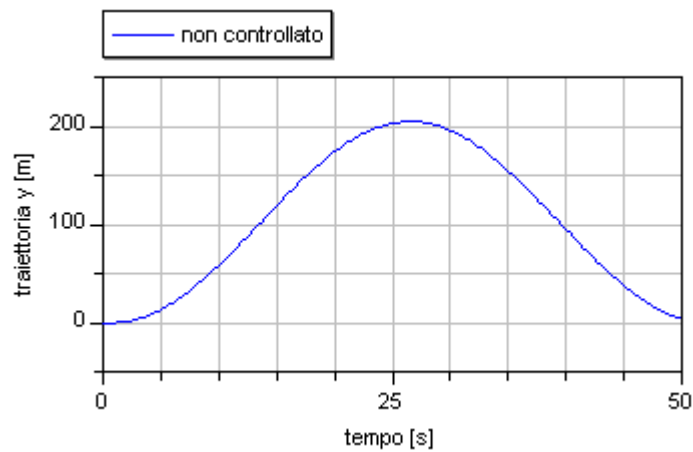


L'andamento nel tempo della traiettoria del baricentro è riportato nella Figura sottostante.



**Figura 7.41** Andamento del baricentro del veicolo in sottosterzante.

Si nota come il veicolo non controllato tenderebbe a percorrere una traiettoria di raggio due volte più grande rispetto alla traiettoria del veicolo controllato e del veicolo ideale di riferimento.



**Figura 7.42** Andamento della traiettoria del veicolo non controllato.

### 7.4.6 Simulazione di raffica di vento laterale

In questo Paragrafo simuliamo una condizione di raffica di vento laterale. Rispetto alla simulazione del Paragrafo 7.3.6 ipotizziamo che la forza laterale del disturbo sia intorno ai 200 [N].

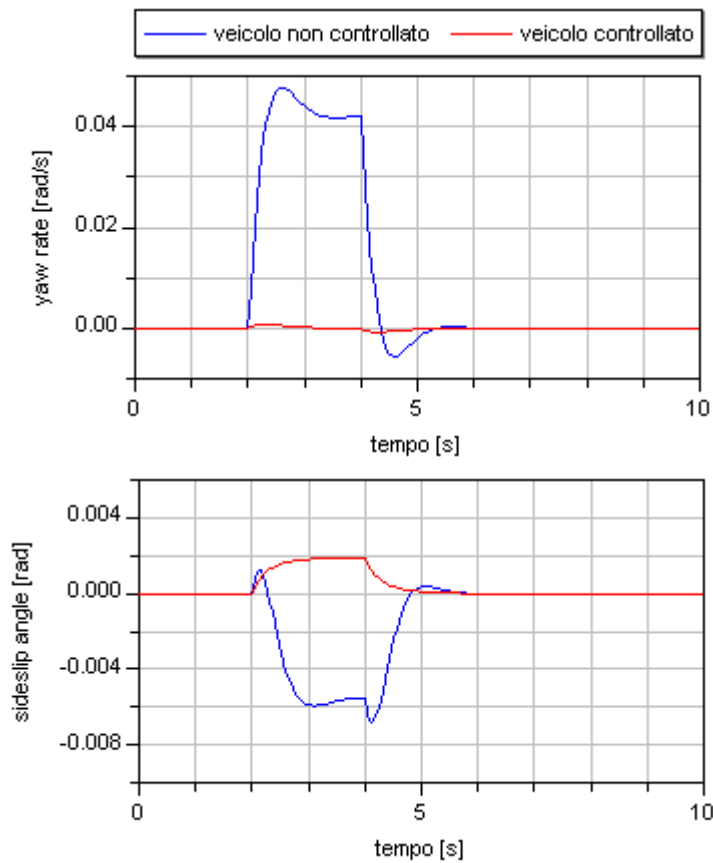


Figura 7.43 Simulazione relativa al disturbo di vento laterale.

L'andamento dell'angolo correttivo del controllo è riportato nella Figura sottostante.

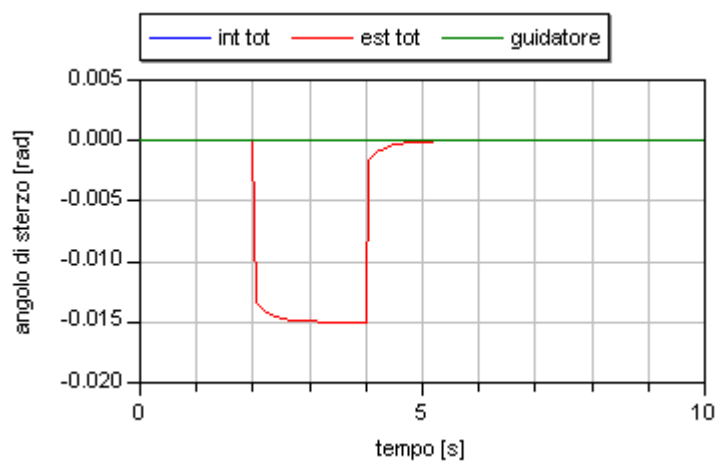


Figura 7.44 Andamento della correzione dell'angolo di sterzo.

In questo caso gli angoli imposti alle ruote per correggere la dinamica laterale sono sostanzialmente uguali in quando l'uscita del feedforward cinematico è nulla. L'azione richiesta al controllo è tale da generare un momento di imbardata correttivo rispetto al riferimento nullo e quindi non assume importanza il fatto che le due ruote sterzano allo stesso modo, visto che il guidatore non desidera percorrere una curva.

Anche in questo caso l'efficacia dell'azione di controllo può essere evidenziata dall'andamento nel tempo della traiettoria.

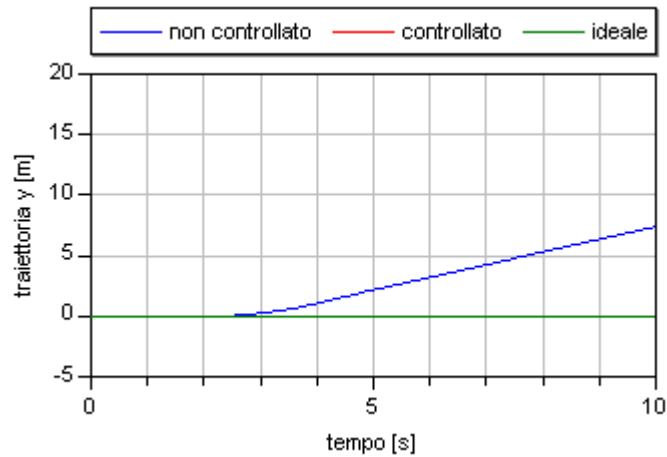


Figura 7.45 Traiettoria in funzione del tempo.

Il veicolo convenzionale tende ad essere deviato rispetto alla traiettoria rettilinea desiderata, mentre l'andamento nel tempo della traiettoria del veicolo controllato è sovrapposta a quello ideale.

Nel caso in cui la forza di disturbo laterale si trovasse ad agire in un punto collocato sul retrotreno del veicolo (caso estremo), l'andamento della traiettoria in funzione del tempo è riportato nella Figura 7.46. In queste condizioni la traiettoria risulta deviata di pochi centimetri rispetto a quella ideale.

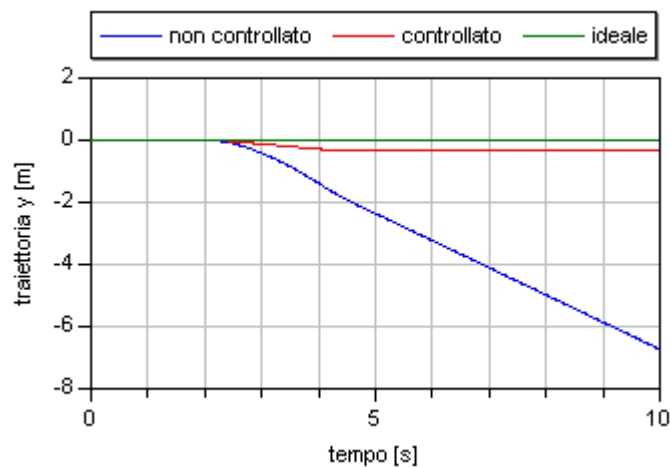
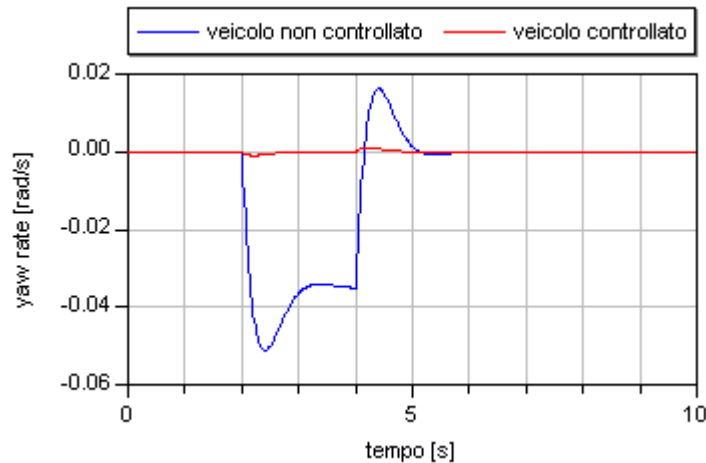


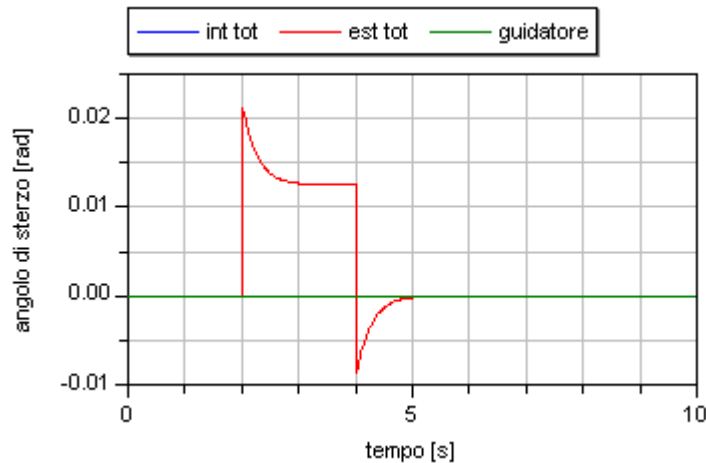
Figura 7.46 Traiettoria in funzione del tempo nel caso di massimo momento di disturbo corrispondente ad  $l_D = -1[m]$ .

Infatti ci si trova ora nelle condizioni di massimo momento di disturbo (a parità di forza applicata), in quanto il braccio della forza rispetto alla posizione del baricentro è il più grande tra quelli ottenibili, date le distribuzioni delle masse del veicolo. Il momento agisce nel senso opposto rispetto al verso positivo assunto nel Capitolo 3 e rispetto a quello ipotizzato nella simulazione precedente. Ciò è evidenziato anche dall'andamento della velocità di imbardata.



**Figura 7.47** Simulazione relativa ad un momento di imbardata negativo.

L'angolo di sterzo correttivo è riportato nella Figura 7.48 sottostante.



**Figura 7.48** Andamento dell'angolo di sterzo correttivo.

Il risultato della simulazione mette in evidenza quello che ci si aspettava. Essendo la coppia di disturbo del moto di imbardata superiore, l'angolo di sterzo correttivo è maggiore ed inoltre positivo, in quanto il momento imbardante di disturbo  $M_{zD}$  agisce nel verso opposto al caso precedente.

## 7.5 Conclusioni e possibili sviluppi futuri

Come è stato dimostrato dai risultati delle simulazioni, il metodo di controllo proposto consente di generare i comandi per i due attuatori di sterzata in modo coordinato, garantendo la direzionalità e la stabilità del veicolo in tutte le situazioni di guida, anche quelle più critiche, come nel caso di comportamento *sotto/sovrasterzante*, nel caso di condizioni non ideali di aderenza, di disturbi alla dinamica laterale come raffiche di vento, o in generale nelle condizioni in cui si genera un disturbo al moto di imbardata desiderato, come potrebbe anche essere una strada caratterizzata da aderenza asimmetrica.

In particolare, la strategia di controllo proposta dovrebbe garantire la possibilità di guidare in tutta sicurezza, fornendo una continua assistenza al guidatore del veicolo.

Il controllo è quindi di tipo attivo, in quanto l'azione correttiva viene generata automaticamente anche quando il guidatore non fornisce alcun comando di sterzata, a differenza di un servosterzo elettrico (*Electric Power Steering*) o idraulico, che fornisce un supporto soltanto nel momento in cui viene richiesto, ovvero nel momento in cui il conducente imprime una certa angolazione al volante.

In tutte le simulazioni si è ipotizzato che il guidatore non sia nelle condizioni di poter apportare un'azione correttiva alla dinamica del veicolo. Ciò non è aderente alla realtà in quanto la prontezza e l'abilità del conducente, che rimane tra l'altro nell'anello di controllo attraverso la generazione del riferimento di imbardata, giocano un ruolo chiave nel mantenere la traiettoria del veicolo in certe condizioni.

Infatti, nelle simulazioni si è visto come in alcuni casi la traiettoria a regime del veicolo dotato del sistema di controllo attivo non sia esattamente quella desiderata. In questo caso sarà compito del guidatore apportare quella piccola correzione che consente di mantenere il veicolo nella traiettoria desiderata. D'altronde è questa l'idea che è alla base della strategia di controllo con disaccoppiamento della dinamica laterale. Infatti, come abbiamo visto nel Sottoparagrafo 6.2.1, il controllo della traiettoria veniva lasciato al guidatore mentre l'attenuazione dei disturbi al moto di imbardata veniva demandata al sistema di controllo attivo dello sterzo.

Per quanto riguarda la continuazione e gli sviluppi del presente scritto, innanzitutto potrebbe essere utilizzato un modello di pneumatico non lineare (ad esempio il modello proposto da *Pacejka*), che consenta di aumentare le prestazioni direzionali del veicolo, attraverso l'imposizione di angoli di sterzo più grandi. Un altro aspetto da considerare potrebbe essere quello della realizzazione di un controllo combinato della velocità di imbardata e dell'angolo di assetto, in modo da realizzare le condizioni ideali di un veicolo in curva. A tal proposito esiste una cospicua bibliografia per quanto riguarda veicoli a quattro ruote sterzanti, ma anche veicoli a due ruote sterzanti che utilizzano diverse tipologie di controllori. Infine potrebbe essere studiato l'impatto che gli attuatori hanno nell'anello di controllo. Infatti, nel presente studio si è implicitamente ipotizzato che l'attuazione del comando sia ideale.



## Bibliografia

- [1] Sawase K., Sano Y. (1999). *Application of Active Yaw Control to Vehicle Dynamics by Utilizing Driving/Breaking Force*. JSAE Review , p. 289-295, vol.20.
- [2] Ghoeneim Y., Lin W., Sidlosky D., Chen H.H., Chin Y.K., Tedrake M.J. (2000). *Integrated Chassis Control System to Enhance Vehicle Stability*. International Journal of Vehicle Design , p. 124-144, 23(1).
- [3] Nwagboso C.O. (1992). *Automotive Sensory Systems*. Chapman & Hall.
- [4] Genta G. (1997). *Motor vehicle dynamics*. Singapore: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.
- [5] Guiggiani M. (1998). *Dinamica del veicolo*. Torino: CittàstudiEdizioni.
- [6] Genta G. (1989). *Meccanica dell'autoveicolo*. Torino: Levrotto&Bella.
- [7] Callegari M., Gucciardi F., Rattighieri G. (2001). *Dynamic modelling of an electric city-car and proposal of an integrated drive-by-wire controller*. High-Tech Cars and Engines, Modena.
- [8] Abe M., Manning W. (2009). *Vehicle Handling Dynamics*. Oxford: Elsevier Ltd.
- [9] Genta G., Morello L. (2007). *L'Autotelaio vol 1*. Torino: Levrotto&Bella.

- [10] Whitcomb D.W. et al. (1956). *Design implication of a general theory of automotive stability and control*. Proceedings of IMechE (AD).
- [11] Ackermann J., Bunte T., Odenthal D. *Advantages of active steering control for vehicle dynamics control*. German Aerospace Center.
- [12] Kasselmann J., Keranen T., (1969). *Adaptive Steering*. Bendix Technical Journal vol.2 , pp. 25-36.
- [13] Ackermann J. (June 1996). *Robust Control Prevents Car Skidding*. Speech hold at the CDC for the Bode Prize lecture.
- [14] Ackermann, (1999). *Brevetto n. 5925083*. Stati Uniti.
- [15] Borner M., Isermann R. (2005). *The characteristic velocity stability indicator for passenger cars*. Vehicle System Dynamics , 43:8, 601-612.
- [16] M.Nagai, Y.Hirano, S. Yamanaka. (1997). *Integrated control of active rear wheel steering and direct yaw moment control*. Vehicle System Dynamics, Vol. 27, No.5&6, pp. 357-370.
- [17] Ackermann J., Wang L. (1998, Giugno). *Robustly Stabilizing PID Controllers for Car Steering Systems*. IEEE.
- [18] Ackermann J. (1993, Marzo). *Robust Yaw Damping of Cars With Front and Rear Wheel Steering*. IEEE .
- [19] Ackermann J., Walter W., Bunte T. *Automatic Car Steering Using Robust Unilateral Decoupling*. Germany.
- [20] Bin Li, Fan Yu. (2009, Giugno 22). *Optimal Model Following Control of Four-wheel Active Steering Vehicle*. IEEE .
- [21] Bunte T., Ackermann J. *Handling Improvement of Robust Car Steering*.
- [22] D'Alfio N., Morgando A. *Progettazione di un sistema Steer by Wire e sperimentazione tramite banco hardware in the loop*. Dipartimento di Meccanica, Politecnico di Torino, Torino.
- [23] *Driving-Safety Systems*. Bosch
- [24] Julien Coudon, Carlos Canudas-de-Wit, Xavier Claeys. (2006). *A New Reference Model for Steer-By-Wire Applications with Embedded Vehicle Dynamics*. IEEE .



[25] Mannar S., Koenig D. (2002). *Vehicle Handling Improvement by Active Steering*. *Vehicle System Dynamics* , pp 211 — 242, 38:3.

[26] Shino M., Nagai M. (2003). *Independent wheel torque control of small-scale electric vehicle for handling and stability improvement*. Elsevier.

[27] Tratto da <http://www.modelica.org>

[28] M.J.L. Boada, B.L. Boada, A. Munoz, and V Diaz, (2005). *Integrated control of front-wheel steering and front braking forces on the basis of fuzzy logic*. *Proc. IMechE Vol. 220 Part D: J. Automobile Engineering*.

[29] Tratto da <http://www.bosch.com>

[30] Furukawa, Yoshimi , Yuhara, Naohiro , Sano, Shoichi , Takeda, Hideo and Matsushita, Yoshinobu (1989). *A Review of Four-Wheel Steering Studies from the Viewpoint of Vehicle Dynamics and Control*, *Vehicle System Dynamics*, 18: 1, pp. 151 — 186.

[31] <http://www.dofware.com/prodotti/dymola>.

[32] <http://www.modelica.org/tools>.



# Appendice A

## A.1 Definizioni e nomenclature

Riportiamo alcune definizioni di grandezze e relative nomenclature, utili nella stesura del modello matematico del veicolo e nella descrizione della dinamica dello stesso.

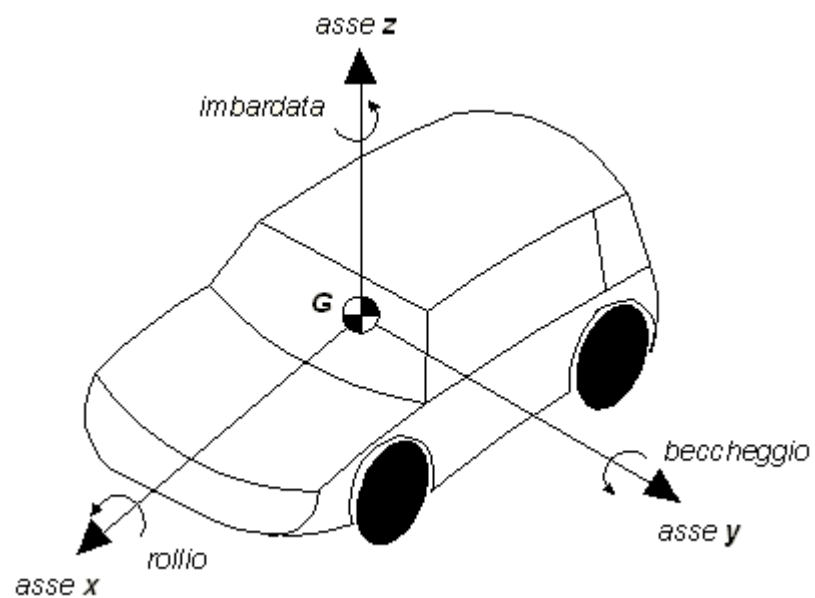
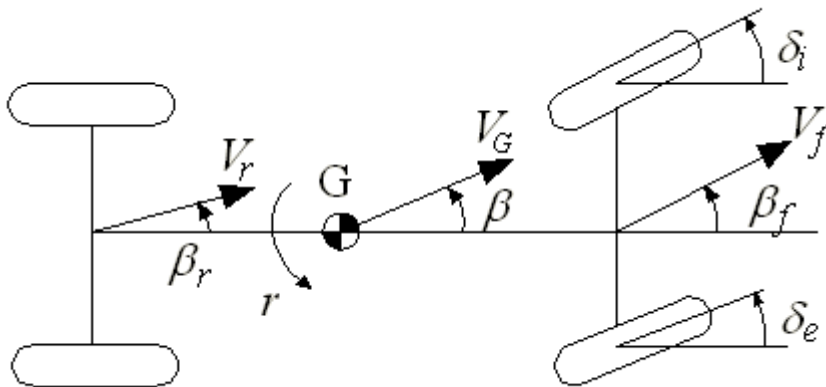


Figura A.1 Definizione del sistema di riferimento e moto del veicolo.

Con riferimento alla Figura A.1 si possono definire:

- $G$                     *baricentro del veicolo.*
- Beccheggio*        moto di oscillazione del veicolo intorno ad un asse trasversale passante per il baricentro  $G$  (detto anche *asse di beccheggio*).
- Imbardata*        moto di oscillazione del veicolo intorno ad un asse verticale passante per il baricentro  $G$  (detto anche *asse di imbardata*).
- Rollio*              moto di oscillazione del veicolo intorno ad un asse longitudinale passante per il baricentro  $G$  (detto anche in questo caso *asse di rollio*).
- Assi corpo*        sistema di assi con origine nel baricentro  $G$  del veicolo e pertanto solidali al veicolo stesso (sistema di riferimento di *assi corpo*).
- Assi principali di inerzia*        assi per i quali il momento angolare è parallelo all'asse di rotazione.
- Assi centrali di inerzia*        assi principali baricentrici.

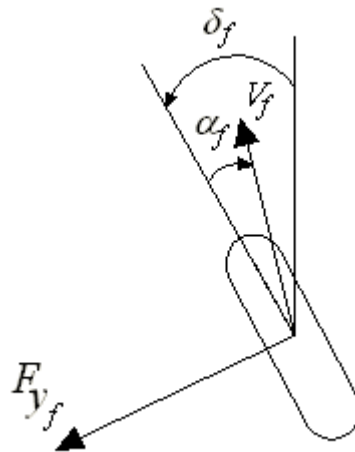


**Figura A.2 Schema di principio del veicolo.**

Con riferimento alla Figura A.2:

- $\beta$                     *angolo di scorrimento laterale del veicolo, o angolo di assetto*, definito come l'angolo compreso tra l'asse longitudinale del veicolo e la sua velocità nel centro di massa.
- $\beta_f$                   *angolo di scorrimento laterale della ruota anteriore*, definito come l'angolo compreso tra l'asse longitudinale del veicolo e la velocità della ruota anteriore.
- $\beta_r$                   *angolo di scorrimento laterale della ruota posteriore*, definito come l'angolo tra l'asse longitudinale del veicolo e la velocità della ruota posteriore.
- $\delta_i$                   *angolo di sterzo della ruota interna alla curva*, definito come l'angolo compreso tra la direzione longitudinale del veicolo e l'asse longitudinale della ruota interna alla curva.

- $\delta_e$  *angolo di sterzo della ruota esterna alla curva*, definito come l'angolo compreso tra la direzione longitudinale del veicolo e l'asse longitudinale della ruota esterna alla curva.
- $\delta_f$  *angolo di sterzo anteriore* del modello monotraccia, definito come l'angolo tra l'asse longitudinale del veicolo e l'asse longitudinale della ruota anteriore.
- $\delta_r$  *angolo di sterzo posteriore* del modello monotraccia, definito come l'angolo compreso tra l'asse longitudinale del veicolo e l'asse longitudinale della ruota posteriore.
- $r$  *velocità di imbardata* del veicolo.
- $V_G$  *velocità assoluta del baricentro* del veicolo.
- $V_f$  *velocità assoluta della ruota anteriore* nel modello monotraccia.
- $V_r$  *velocità assoluta della ruota posteriore* nel modello monotraccia.



**Figura A.3** Schematizzazione ruota sterzante.

Con riferimento alla Figura A.3:

- $\alpha_f$  *angolo di deriva della ruota anteriore* del modello monotraccia, definito come l'angolo compreso tra l'asse longitudinale della ruota anteriore e la direzione della velocità  $V_f$  della stessa.
- $\alpha_r$  *angolo di deriva della ruota posteriore* del modello monotraccia, definito come l'angolo compreso tra l'asse longitudinale della ruota e la direzione della velocità  $V_r$  della stessa.
- $F_{y_f}$  *forza laterale dello pneumatico anteriore* nel modello monotraccia.
- $F_{y_r}$  *forza laterale dello pneumatico posteriore* nel modello monotraccia.
- $F_{y_F}$  *forza laterale dell'assale anteriore* nel modello monotraccia.
- $F_{y_R}$  *forza laterale dell'assale posteriore* nel modello monotraccia.

Nel modello lineare del veicolo, il legame tra l'angolo di deriva e la forza laterale degli pneumatici è lineare ed il coefficiente di proporzionalità è chiamato *rigidezza di deriva*.

$C_f$  *rigidezza di deriva dell'assale anteriore* nel modello monotraccia, pari alla somma delle rigidezze di deriva  $C_{\alpha}$  delle ruote dell'assale anteriore nel caso aderenza ideale.

$C_r$  *rigidezza di deriva dell'assale posteriore* nel modello monotraccia, pari alla somma delle rigidezze di deriva  $C_{\alpha}$  delle ruote dell'assale posteriore nel caso aderenza ideale.

$c_f$  *rigidezza di deriva dell'assale anteriore* nel modello monotraccia, pari alla somma delle rigidezze di deriva  $c_{\alpha}$  delle ruote dell'assale anteriore nel caso non ideale di aderenza, tenuto conto del coefficiente di attrito dinamico  $\mu$ .

$c_r$  *rigidezza di deriva dell'assale posteriore* nel modello monotraccia, pari alla somma delle rigidezze di deriva  $c_{\alpha}$  delle ruote dell'assale posteriore nel caso non ideale di aderenza, tenuto conto del coefficiente di attrito dinamico  $\mu$ .

I simboli delle grandezze relative alle ruote fanno riferimento al modello monotraccia nel quale le due ruote di uno stesso assale vengono inglobate in una posta al centro della carreggiata. Quando viene considerato il modello a quattro ruote i pedici delle generiche grandezze  $x$  relative alle ruote variano nel modo seguente:

$x_{f1}$  ruota anteriore sinistra;

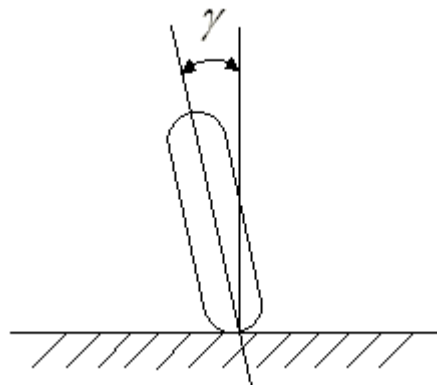
$x_{f2}$  ruota anteriore destra;

$x_{r1}$  ruota posteriore sinistra;

$x_{r2}$  ruota posteriore destra.

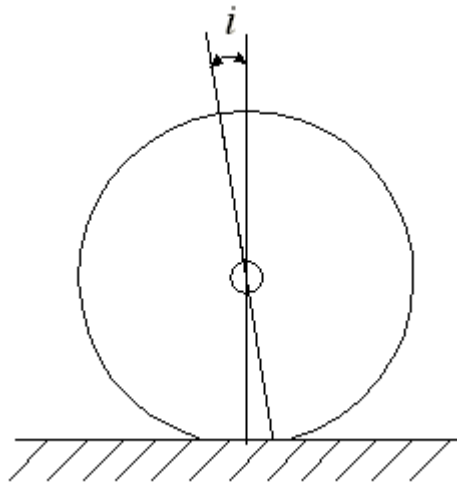
Per quanto riguarda la ruota, con riferimento alla Figura A.4:

$\gamma$  *angolo di campanatura*, definito come l'eventuale inclinazione del piano medio longitudinale del cerchione rispetto all'asse verticale passante per il centro dell'orma di contatto della ruota.



**Figura A.4** Definizione dell'angolo di campanatura.

Con riferimento alla Figura A.5:



**Figura A.5** Definizione dell'angolo di incidenza.

$i$  *angolod'incidenza*, rappresenta l'inclinazione del vincolo della ruota rispetto alla perpendicolare passante per il centro della stessa; detto angolo sarà positivo nel caso in cui l'asse del perno della ruota si trovi davanti al punto di contatto ruota-superficie di appoggio.

## Appendice B

<i>massa del veicolo</i>	$m$	700 [Kg]
<i>momento di inerzia lungo l'asse z</i>	$J$	623 [Kgm <sup>2</sup> ]
<i>passo</i>	$l$	1,89[m]
<i>semipasso anteriore</i>	$l_f$	0,89[m]
<i>semipasso posteriore</i>	$l_r$	1[m]
<i>coefficiente di rigidità anteriore</i>	$C_f$	10000 [N/rad]
<i>coefficiente di rigidità posteriore</i>	$C_r$	16000[N/rad]
<i>angolo di sterzo<sup>20</sup></i>	$\delta_f$	0,1745[rad]
<i>coeff. di attrito dinamico ideale</i>	$\mu_{id}$	1
<i>coeff. di attrito dinamico pneumatico-neve</i>	$\mu_{neve}$	0.1-0.3

**Tabella B.1** Caratteristiche tecniche del veicolo utilizzate nelle simulazioni.

---

<sup>20</sup> L'angolo  $\delta_f$  è relativo alle simulazioni del Capitolo 5 e rappresenta l'angolo di sterzo imposto alla ruota del modello monotraccia. Per le simulazioni del Capitolo 7 è inteso che tale angolo sia quello imposto dal conducente ed è stato indicato con  $\delta_s$ .



# Appendice C

In questa appendice verrà descritto l'ambiente acausale di simulazione *Dymola* (*Dynamic Modeling Laboratory*) di *Dynasim AB* © *Sweden*, nel quale è ambientata la simulazione dei modelli rappresentati con il linguaggio *Modelica*.

## C.1 Il codice *Modelica*

*Modelica* è un linguaggio orientato agli oggetti per la modellazione di sistemi fisici complessi ed eterogenei. E' stato proposto alla comunità scientifica nel 1997, al termine di un progetto di cooperazione internazionale per la definizione di un linguaggio per la modellazione di sistemi fisici multidominio descritti da equazioni algebriche, differenziali ed alle differenze. La definizione del linguaggio, di proprietà dell'organizzazione no-profit *Modelica Association*, è di pubblico dominio [27].

La maggior parte dei concetti alla base del linguaggio derivano dalla teoria della modellizzazione dei sistemi fisici basata su *porte*. All'interno di questa teoria, i sistemi fisici complessi sono visti come l'aggregazione di semplici componenti base, che interagiscono tra loro attraverso delle porte, associate con degli scambi di potenza generalizzata.

Il linguaggio *Modelica* è stato progettato per la modellizzazione fisica multi-dominio, includendo per esempio, sistemi meccatronici per applicazioni robotiche, automobilistiche (cioè di controllo della dinamica dei veicoli) e aerospaziali, applicazioni orientate ai processi di produzione dell'energia e sistemi multi corpo.

Le caratteristiche principali del linguaggio possono essere riassunte come segue.

**A-causalità.** Le equazioni per ciascun modello sono scritte in forma dichiarativa, indipendentemente dalle condizioni al contorno e senza decidere a priori quali siano gli ingressi e le uscite. Il modello è quindi in forma a-causale ed è descritto da sistemi *DAE* (*Differential-Algebraic Equations*), che permettono di rappresentare nel modo più naturale e fisicamente coerente ogni componente del sistema. Il compito di determinare la causalità del modello è demandata all'interprete o compilatore *Modelica*, che agirà a livello di sistema (vale a dire, per tutti i componenti aggregati). Utilizzando questo approccio, i modelli sono più semplici da scrivere, da documentare e maggiormente riutilizzabili.

**Trasparenza del codice.** Le equazioni sono scritte nei modelli *Modelica* esattamente come sono scritte su carta, in modo da semplificare notevolmente la comprensione del contenuto del modello stesso e la sua eventuale modifica.

**Incapsulamento.** L'interazione tra componenti può avvenire solo attraverso interfacce rigorosamente definite, chiamate connettori, la cui progettazione è di estrema importanza. Un connettore è definito attraverso un insieme di variabili di *sforzo* ed uno di variabili di *flusso*. Effettuare una connessione tra due connettori, e quindi tra i componenti tra loro associati, equivale ad eguagliare le variabili di sforzo dei due connettori e a bilanciare le variabili di flusso (cioè, ad imporre che la loro somma sia nulla). L'utilizzo di tale approccio risulta perfettamente naturale in molti domini, come ad esempio quello elettrico, dove il connettore è definito da una tensione (sforzo) e una corrente (flusso): la connessione equivale ad eguagliare la tensione dei due connettori e a bilanciare le correnti, in altre parole, equivale ad applicare la legge di Kirchoff al nodo identificato dalla connessione stessa. Altri esempi sono costituiti da connettori termici che trasportano una temperatura (sforzo) ed un flusso termico (flusso) e dai connettori meccanici per assi rotanti monodimensionali, caratterizzati da una coppia (sforzo) e da un angolo (flusso).

Questa caratteristica è essenziale per lo sviluppo di librerie di modelli riusabili; inoltre permette di rimpiazzare semplicemente una parte del modello di un sistema con una più dettagliata o con una semplificata, senza influenzare il resto del modello.

**Ereditarietà.** Le librerie di componenti possono essere organizzate in una struttura gerarchica, nella quale modelli complessi sono ottenuti da modelli basilari aggiungendo variabili specifiche, equazioni o altri modelli. Ad esempio, è possibile scrivere le equazioni per descrivere il flusso di un gas generico all'interno di un condotto; successivamente, il modello del flusso di un gas particolare, ad esempio quello di una miscela di differenti gas ideali, può essere ottenuto tramite estensione del modello generale, sfruttando appunto l'ereditarietà, aggiungendo i modelli per i singoli gas ideali utilizzati.

**Dominio *multi-fisica*.** Il linguaggio *Modelica* è stato ideato per modellistica fisica multi-dominio, basata su modelli descritti da equazioni algebriche, differenziali ed alle differenze, e non è vincolato ad un particolare contesto applicativo, come quello dell'ingegneria elettrica, meccanica o termodinamica. Tale linguaggio risulta quindi particolarmente utile nella modellizzazione di sistemi

eterogenei, come ad esempio, i sistemi meccatronici, risultato dell'interazione tra componenti meccaniche, elettriche e di controllo, o gli impianti nucleari, risultato dell'interazione di sottosistemi termoidraulici, nucleari e di controllo.

**Riutilizzabilità.** La modellizzazione a-causale, l'incapsulamento e l'utilizzo dell'ereditarietà costituiscono un forte incentivo allo sviluppo di librerie di modelli riutilizzabili. Alcune librerie per domini ingegneristici molto ampi (elettrico, meccanico, termico, etc..) sono state standardizzate e fanno parte della definizione stessa del linguaggio *Modelica*. Sono presenti inoltre librerie sviluppate per domini specifici, sia di carattere commerciale che open-source.

Il linguaggio *Modelica* è stato applicato ad un ampio spettro di problemi di modellizzazione ed in differenti domini ingegneristici. Il linguaggio è stato progettato per supportare sia lo sviluppo *ad alto livello* (cioè, componendo modelli di libreria) che *di basso livello* (cioè, scrivendo ex novo le equazioni per i singoli componenti). In genere quando si sviluppa una nuova applicazione utilizzando *Modelica*, alcuni o la maggior parte dei modelli necessari, sono già disponibili in librerie precedentemente sviluppate, così da rendere possibile uno sviluppo molto rapido.

E' inoltre possibile definire un modello utilizzando un editor grafico per disegnare un diagramma strutturale (chiamato *schematics*), contenente icone che rappresentano i modelli dei componenti e le connessioni tra i connettori dei diversi componenti.

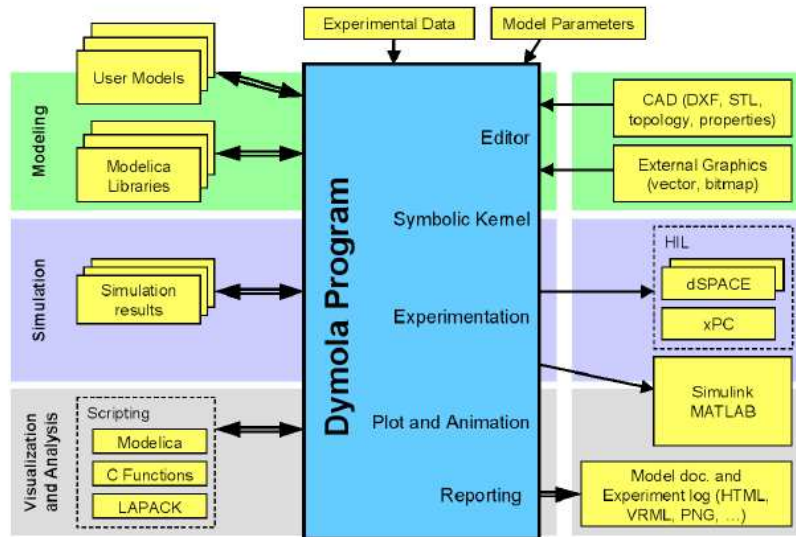
## C.2 L'ambiente di simulazione *Dymola*

*Modelica* costituisce, di per se, solo un linguaggio di descrizione dei sistemi: per poter effettivamente simulare un modello *Modelica* è necessario ricorrere a specifici strumenti software. Attualmente, esistono diversi strumenti che supportano *Modelica*: alcuni tra questi, come *Dymola*, che è stato utilizzato come sistema di sviluppo di riferimento per questo lavoro, e *MathModelica* sono di carattere commerciale, mentre altri come *OpenModelica* sono *open-source*.

*Dymola* è un ambiente di simulazione sviluppato per la modellizzazione basata sul codice *Modelica*, di sistemi fisici eterogenei, supportando la composizione gerarchica di modelli ed offrendo ampie librerie di componenti predefiniti e riutilizzabili, che coprono svariati domini ingegneristici. Inoltre incorpora potenti funzioni automatiche di manipolazione simbolica delle equazioni del modello, in modo da produrre codice di simulazione altamente efficiente. Altre caratteristiche comprendono:

- Gestione di modelli *multi-fisica* ampi e complessi;
- Accelerazione della modellizzazione tramite la composizione di modelli grafici;
- Simulazione più veloce con il *pre-processing* simbolico;
- Possibilità di definizione di componenti per modelli definiti dall'utente;
- Possibilità di interfacciamento con altri programmi;
- Animazioni 3D;
- Supporto per la simulazione *real time*.

L'architettura del programma è mostrata in figura. *Dymola* ha un potente editor grafico per la composizione dei modelli ed è basato sull'utilizzo di modelli *Modelica* memorizzati in file. I dati e le icone associate ai modelli possono essere anche importate dai file.



**Figura C.1 Architettura del programma.**

*Dymola* contiene un traduttore complesso, basato su algoritmi per la manipolazione simbolica, in modo da generare *codice C* efficiente ed ottimizzato per la simulazione. Il *codice C* può a sua volta essere esportato in *Simulink* e piattaforme *hardware-in-the-loop*. E' inoltre incluso un generatore di documentazione automatico che rende agevole l'esportazione di tutti i dati relativi alla simulazione.

*Dymola* fornisce un ambiente grafico interattivo (come si può notare negli esempi che verranno riportati nel Paragrafo successivo) e librerie personalizzabili, e può essere ampliato per applicazioni specializzate. Con *Dymola*, grazie al nuovo e rivoluzionario solutore misto simbolico e numerico, sarà possibile simulare velocemente le interazioni complesse fra sistemi in molti campi dell'ingegneria: meccanica, elettrica, termodinamica, idraulica, pneumatica, termica e sistemi di controllo. *Dymola* permette quindi ai suoi utilizzatori di costruire modelli integrati e ottenere dalla simulazione risultati che rappresentano in modo più corretto e dettagliato il sistema reale. *Dymola* è distribuito in Italia da *Dofware* [31].

Tra gli altri strumenti che supportano il linguaggio *Modelica* abbiamo citato anche *MathModelica* ed *OpenModelica*.

*MathModelica* è un software per la costruzione di modelli virtuali di complessi sistemi multi-ingegneristici per la simulazione di sistemi fisici. Con *MathModelica* è possibile non solo ottimizzare test ed esperimenti, ma anche analizzare fenomeni che altrimenti sarebbe difficile studiare e comprendere in altro modo. Questo tipo di software è essenziale in moltissimi ambiti applicativi e fornisce una tecnologia che rende possibile costruire modelli e simulazioni molto vicini alla realtà. Grazie a *MathModelica* è possibile costruire il modello con comportamenti del mondo

reale,utilizzando i componenti predefiniti in un ambiente basato sulla semplicità del trascinamento degli oggetti (*drag-and-drop*).

I modelli dei domini ingegneristici trattati sono in sostanza elettrico, meccanico, idraulico, termodinamico,del controllo e biochimico.

*OpenModelica* invece è un *open source* sviluppato in ambiente *Modelica* e supportato dalla *Linköping University*, dall'*Open Source Modelica Consortium (OSMC)* e da un gruppo sempre crescente di aziende, università, istituti e privati. L'obiettivo del progetto è di creare una modellazione completa di *Modelica* da distribuire in forma eseguibile e destinata alla ricerca, all'insegnamento e all'uso industriale. *OpenModelica* è quindi liberamente disponibile per l'uso.

La versione corrente *OpenModelica* supporta la maggior parte del linguaggio *Modelica*, tra equazioni [32].

### C.3 Esempio di un azionamento elettrico

In Figura C.2 è rappresentato il diagramma di composizione di un semplice azionamento elettrico. Il sistema è costituito da sottosistemi facenti parte di domini differenti, connessi tra di loro per mezzo di connettori (*connect*) i quali generano automaticamente le equazioni di bilancio per le variabili di flusso e le equazioni di uguaglianza per le variabili di sforzo. In particolare possiamo osservare il motore elettrico (*motor*), il sistema di trasmissione meccanica (*gearbox*) con rapporto di trasmissione 100, un carico meccanico (*load*) con un dato momento di inerzia, un sensore per la misura della posizione angolare (*phiload*) del carico meccanico, il controllore *PID* (*controller*) che elabora l'errore rispetto all'ingresso del sistema che rappresenta la grandezza di riferimento. Tutti i sottosistemi che vanno a costituire l'azionamento sono raccolti all'interno di librerie.

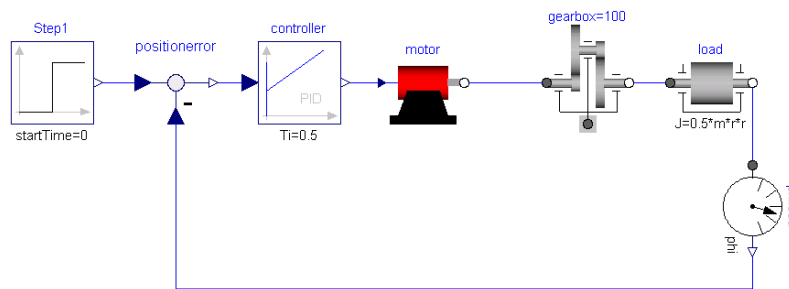


Figura C.2 Schematizzazione dell'azionamento in ambiente *dymola*.

Come già detto, ogni elemento di un modello multi dominio, può a sua volta essere costituito da elementi facenti parte di domini differenti. Ad esempio, nello schema del motore risultano esserci componenti elettrici e componenti meccanici come l'inerzia (Figura C.3).

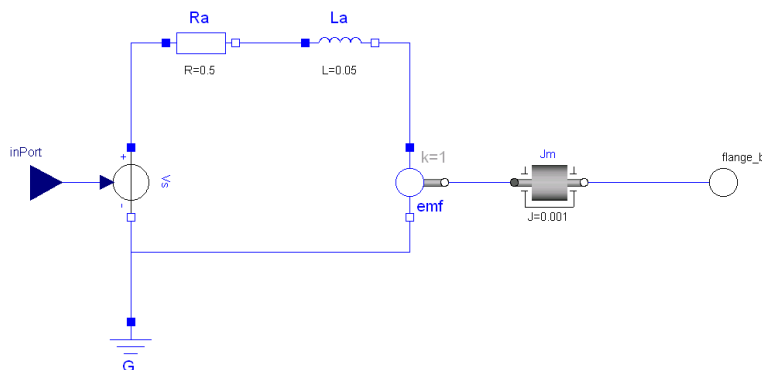


Figura C.3 Schematizzazione del modello del motore

Come si può notare i modelli dei componenti base sono semplici e facilmente comprensibili.

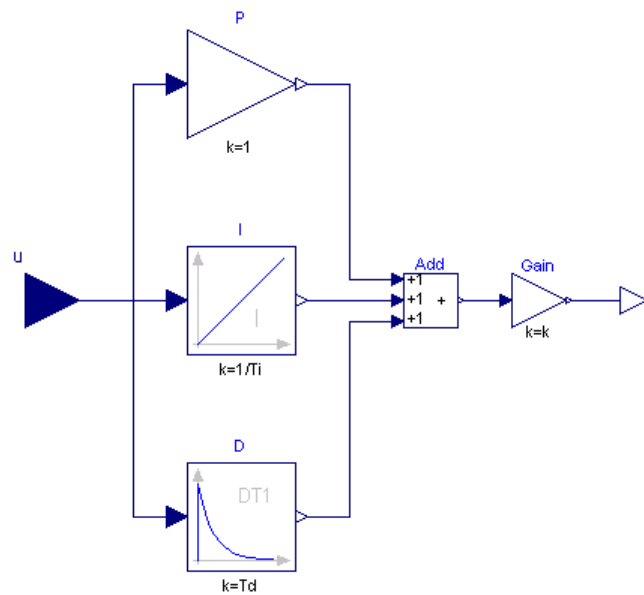


Figura C.4 Schema a blocchi del controllore *PID*.

In seguito riportiamo il codice *Modelica* corrispondente a questa schematizzazione. Il codice viene generato automaticamente una volta che i blocchi che costituiscono il modello vengono connessi tra di loro tramite la funzione *connector*.

```

model azionamento
  □;
  DriveLib.Motor motor □;
  Modelica.Mechanics.Rotational.IdealGear gearbox(ratio=100) □;
  Modelica.Mechanics.Rotational.Inertia load(J=0.5*m*r*r) □;
  Modelica.Mechanics.Rotational.Sensors.AngleSensor phiload □;
  Modelica.Blocks.Math.Feedback positionerror □;
  Modelica.Blocks.Continuous.PID controller □;
  Modelica.Blocks.Sources.Step Step1 □;

equation

  connect(gearbox.flange_b,load.flange_a) □;
  connect(load.flange_b,philoader.flange_a) □;
  connect(positionerror.u2,philoader.phi) □;
  connect(motor.flange_b,gearbox.flange_a) □;
  connect(positionerror.y,controller.u) □;
  connect(controller.y,motor.inPort) □;
  connect(Step1.y,positionerror.ul) □;

end azionamento;

```

Figura C.5 Codice *Modelica* corrispondente allo schema dell'azionamento.

## C.4 Risoluzione delle equazioni del *modello monotraccia*

Uno dei punti di forza del linguaggio *Modelica* è che le equazioni possono essere scritte così come su carta, senza esplicitare le incognite. Qui di seguito ne riportiamo un esempio che consiste nella risoluzione delle equazioni del moto del *modello monotraccia*.

```

block veicolo_equazioni

  parameter Real m=700;
  parameter Real lf=0.89;
  parameter Real lr=1;
  parameter Real l=lf+lr;
  parameter Real J=623;
  parameter Real Cf=10000;
  parameter Real Cr=16000;
  parameter Real Vg=45/3.6;
  parameter Real deltaf=0.1745;
  output Real r;
  output Real beta;

equation

  m*Vg*(der(beta)+r)=Cf*(deltaf-beta-(lf/Vg)*r)+Cr*(-beta+(lr/Vg)*r);
  J*der(r)=Cf*(deltaf-beta-(lf/Vg)*r)*lf+Cr*(beta-(lr/Vg)*r)*lr;

end veicolo_equazioni;

```

Figura C.6 Codice *Modelica* relativo alle equazioni del *modello monotraccia*

Una volta risolte le equazioni attraverso la simulazione, è possibile plottare su uno stesso grafico o su grafici diversi le grandezze del sistema, come mostrato nella Figura sottostante.

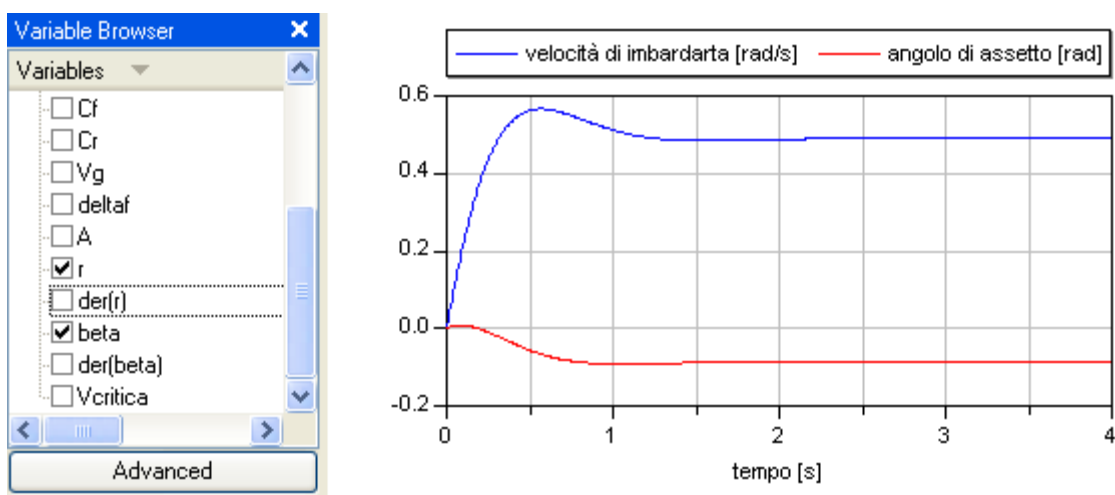


Figura C.7 Schermata dell'editor grafico delle simulazioni.