

UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI PADOVA

Facoltà di Scienze Statistiche

**Corso di Laurea Specialistica in Scienze Statistiche
Economiche Finanziarie e Aziendali**

**Il Realized Range: proprietà dinamiche e previsione della
volatilità di serie storiche finanziarie**

Relatore : Prof. Massimiliano Caporin

Laureando : Alessandro Milia

Anno Accademico 2009/2010

Indice

Introduzione	3
1 Analisi della volatilità	5
1.1 Modelli Garch	5
1.2 Dati ad alta frequenza e realized variance	8
1.3 Microstruttura dei mercati e distorsioni	12
1.4 Realized Range e sue correzioni	13
2 Base dati	16
2.1 Analisi descrittive e frequenza di campionamento	17
2.2 Analisi della distorsione degli stimatori	18
2.3 Efficienza degli stimatori	20
2.4 Componenti Principali	21
3 Modellare la realized volatilità	23
3.1 Modelli ARFIMA	23
3.2 Modelli HAR	24
3.3 Memoria lunga e eteroschedasticità	25
3.4 Stima dei modelli HAR-GARCH	26
3.5 Variabili dummy e <i>jump</i>	29
3.6 Variabili esogene	30
3.7 Distribuzione t-Student e GED	32
3.8 Modellare la realized volatilità in periodi di elevata volatilità	33
4 Previsioni	36
Conclusione	41
Apendice	43
Bibliografia	61

Introduzione

La stima della volatilità dei prezzi azionari è una componente fondamentale in molteplici aree della finanza. Malgrado le evidenze empiriche stabiliscano che la volatilità sia variabile nel tempo e abbia caratteristiche di persistenza, fino a non troppo tempo fa gli studi accademici si basavano su modelli che consideravano la volatilità costante nel tempo (Black and Scholes, 1973). La scoperta dei modelli ARCH (Engle, 1982) offrì un modello parametrico compatibile con le evidenze empiriche di variabilità nel tempo e di persistenza della volatilità.

Negli ultimi quindici anni ha preso sempre maggior peso un filone alternativo che propone di trattare la volatilità con metodi non-parametrici basati sui dati ad alta frequenza. L'idea più rilevante per analizzare la volatilità con dati ad alta frequenza è quella del *realized variance* sviluppata in particolare da Andersen et al. (2001b) o Barndorff-Nielsen and Shephard (2002).

La *realized variance* è la sommatoria del quadrato dei rendimenti intragiornalieri. In teoria, la *realized variance* è uno stimatore non distorto e altamente efficiente, e converge al vero valore della *integrated variance* quando la lunghezza degli intervalli intragiornalieri osservati si avvicina allo zero. Nella pratica però la consistenza della *realized variance* viene meno nel momento in cui aumenta la frequenza dei dati. Infatti gli effetti dovuti alla microstruttura dei mercati contaminano i prezzi degli asset registrati ad alta frequenza; questo fenomeno invalida la teoria asintotica e rende inconsistente lo stimatore. Tali fenomeni distorsivi implicano delle limitazioni nella scelta della frequenza dei dati. Delle scelte popolari nelle applicazioni empiriche sono intervalli di 5 e 30 minuti, che dovrebbero interpretare un bilanciamento tra l'incremento della precisione dovuto a frequenze più alte, e gli effetti delle frizioni dovute alla microstruttura dei mercati (Andersen-Bollerslev 1998; Andersen 2001a, 2003; Fleming 2003).

Un modo alternativo di misurare la volatilità è basato sulla differenza tra il prezzo massimo e il minimo, osservato in un certo periodo (*high-low range*). Parkinson (1980) dimostra che il log *high-low range* giornaliero, opportunamente scalato, è uno stimatore non distorto della volatilità giornaliera ed è cinque volte più efficiente del quadrato dei rendimenti giornalieri. Inoltre il *realized range* risulta non distorto anche se la media del moto generatore dei prezzi risulta diversa da zero. Come nel caso del *realized variance*,

la consistenza del realized range viene meno nel momento in cui aumenta la frequenza dei dati, a causa degli effetti dovuti alla microstruttura dei mercati.

Il mio lavoro si articola in tre parti fondamentali: nella prima studieremo, con analisi descrittive e grafiche, l'efficienza e la correttezza dei due stimatori realized variance e realized range; valuteremo altresì delle correzioni al realized range, proposte in letteratura, per migliorare l'efficienza dello stimatore e per ovviare al problema delle distorsioni dovute alla microstruttura dei mercati.

Nella seconda parte del lavoro ci concentreremo sul realized range e in particolare sulla modellazione della serie storica giornaliera dello stimatore. Incenteremo la nostra attenzione sulla classe di modelli HAR *heterogeneous autoregressive*, suggerita da Corsi nel 2004, che dovrebbero essere capaci di riprodurre la memoria lunga e il decadimento iperbolico della funzione di autocorrelazione della serie storica del realized range. Ci serviremo della specificazione GARCH per la modellazione del momento secondo della serie; inseriremo inoltre nell'equazione della media del processo e, in seguito, nell'equazione della varianza alcune variabili esplicative esogene, e ci attendiamo che la volatilità del titolo non dipenda esclusivamente dal suo passato, ma dipenda in modo significativo anche dall'andamento del mercato.

Nell'ultima sezione della tesi ci porremo il problema della previsione della volatilità. Servendoci di opportuni test statistici e indicatori, valuteremo le capacità previsive dei diversi modelli proposti nel capitolo precedente e sceglieremo la specificazione che garantisce le migliori previsioni.

1 Analisi della volatilità

Misurare e prevedere la volatilità dei rendimenti degli asset finanziari è importante per la gestione del portafoglio, la gestione del rischio e il prezzaggio delle opzioni. Al concetto di volatilità si fa corrispondere una misura statistica di variabilità: quella più immediata è lo scarto quadratico medio dei rendimenti su un periodo storico. Tuttavia l'osservazione che la variabilità dei rendimenti non sia costante nel tempo è stata più volte riscontrata in ambito finanziario. Per interpretare tale fenomeno Mandelbrot(1963) usa delle varianze ricorsive, mentre Klein(1977) lavora sui prezzi degli attivi, calcolandone dei trend locali stimati come medie mobili a dieci termini, e derivando come stima della volatilità una varianza mobile a cinque termini calcolata sugli scarti.. Questo modo di calcolare la varianza dei rendimenti non permette di formulare ipotesi sul comportamento futuro della volatilità, che invece ha caratteristiche di prevedibilità che possono essere analizzate con opportuni modelli statistici.

1.1 Modelli GARCH

Il lavoro di Engle (1982) ha aperto il campo ad un filone di letteratura molto ampio su modelli a eteroschedasticità condizionata autoregressiva (Autoregressive Conditional Heteroskedasticity - ARCH) per lo studio della varianza dei rendimenti condizionata ad un certo insieme informativo. Una volta specificato un modello per la media dei rendimenti r_t , secondo Engle le innovazioni ε_t seguono un processo del tipo :

$$r_t = \mu + \varepsilon_t \quad (1)$$

$$\varepsilon_t = \sqrt{h_t} u_t \quad (2)$$

Dove h_t è la varianza condizionata e u_t , condizionatamente all'insieme informativo disponibile al tempo $t-1$, si distribuisce come una variabile casuale normale standardizzata; in simboli :

$$u_t | \Omega_{t-1} : N(0,1)$$

Di conseguenza otteniamo che l'innovazione ε_t , condizionatamente all'insieme delle informazioni disponibili in $t-1$, è una variabile casuale normale con media 0 e varianza che dipende dal tempo.

$$\varepsilon_t | \Omega_{t-1} : N(0, h_t)$$

Il modello ARCH(q) prevede che la varianza condizionata al tempo t sia una combinazione lineare di p ritardi dei residui al quadrato, ricavati dall'equazione della media condizionata.

$$h_t = \omega + \sum_{j=1}^q \alpha_j \varepsilon_{t-j}^2 \quad (3)$$

L'ipotesi di normalità è importante perché permette di facilitare il metodo di stima della massima verosimiglianza, che consente di stimare congiuntamente i parametri della media e della varianza individuando quei valori dei parametri che rendono massima la funzione di verosimiglianza.

Bollerslev(1986) propone una generalizzazione dei modelli proposti da Engle; il modello GARCH (Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity) è un modello in cui la varianza condizionata al tempo t è una combinazione lineare di p ritardi dei residui al quadrato, ricavati dall'equazione della media condizionata, e di q ritardi della varianza condizionata. In sintesi, il modello GARCH(p,q) può essere espresso come :

$$h_t = \omega + \sum_{j=1}^q \alpha_j \varepsilon_{t-j}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j h_{t-j} \quad (4)$$

La condizione sufficiente affinché il processo GARCH(p,q) sia stazionario è che :

$$\sum_{j=1}^q \alpha_j + \sum_{j=1}^p \beta_j < 1$$

I modelli GARCH sono compatibili con le evidenze empiriche che si riscontrano nell'analisi dei rendimenti azionari, come la presenza di autocorrelazione in trasformazioni positive dei rendimenti, in particolare il quadrato e il valore assoluto. Consentono inoltre di interpretare la *persistenza* della volatilità.

Dopo l'introduzione dei modelli GARCH, la loro specificazione è stata estesa e generalizzata in diverse direzioni con la finalità di rendere il modello originale più flessibile. Molte estensioni dei modelli GARCH sono state pensate per interpretare l'asimmetria nelle risposte agli shocks dei rendimenti, vanno in questa direzione i GJR-GARCH proposti da Glosten, Jagannathan e Runkle (1993); i modelli GARCH asimmetrici di Engle and G (1993) e i GARCH quadratici QGARCH di Sentana (1995). Hagerud (1997), Gonzalez-Rivera (1998) e Anderson, Nam, Vahid (1999) hanno specificato una versione non lineare dei GJR-GARCH, smooth transition GARCH (STGARCH), pensata sempre per modellare le risposte asimmetriche agli shocks.

La forma standard dei modelli GARCH conduce spesso al problema di sovrastimare la persistenza nella volatilità. Per rimediare a tale inconveniente Lanne e Saikkonen (2005) hanno proposto una parametrizzazione definita smooth transition GARCH che allevia il problema della persistenza.

I modelli Threshold GARCH, descritti da Zakoian (1994), si contrappongono ai GJR-GARCH perché assumono quale quantità da modellare la deviazione standard condizionata, e non la varianza condizionata. Una versione non lineare dei T-GARCH, definite Double Threshold ARCH (DTARCH), prevedono che sia la media autoregressiva condizionata sia la varianza condizionata abbiano una struttura riconducibile a quella threshold. Diverse specificazione di tali modelli sono stati descritti da Li and Li (1996), Andriuno and Buhlmann (2001).

È stato inoltre dimostrato in letteratura, vedi Mikosch e Starica (2004), che nelle applicazioni dei modelli GARCH l'ipotesi di parametri costanti nel tempo non sia appropriata nel momento in cui la serie da modellare è molto lunga. Una possibilità per ovviare a tale problema è quella di assumere che i parametri cambino in determinati istanti di tempo; dunque si può dividere la serie originaria e stimare diversi modelli GARCH nelle subserie. Dei test per verificare tale ipotesi sui modelli time-varying (TVGARCH) sono stati sviluppati da Chu (1995).

I modelli Markov-switching costituiscono un'altra classe di modelli non lineari per la volatilità. Hamilton e Susmel (1994) dimostrano che degli shocks grandi

possono avere delle conseguenze sulla volatilità futura molto diverse dagli effetti dovuti a piccoli shocks. I modelli Markov-switching GARCH (MSGARCH) sono in grado di interpretare questo fenomeno, e delle specificazioni alternative degli stessi modelli sono state introdotte da Haas et al nel 2004.

Abbiamo in precedenza definito la condizione sufficiente affinché il processo GARCH(p,q) sia stazionario. Nei modelli IGARCH il processo che governa l'evoluzione della varianza possiede almeno una radice unitaria, e l'equazione GARCH(p,q) viene scritta in forma ARIMA(p,d,q). Baillie, Bollerslev e Mikkelsen(1996) introducono i modelli FIGARCH dove si assume che il parametro d sia un operatore frazionario, in modo tale da spiegare il decadimento lento nella funzione di autocorrelazione del quadrato dei rendimenti giornalieri.

Un approccio semiparametrico viene adottato nel momento in cui è sconosciuta la distribuzione dei residui. Dei modelli ARCH semi e non-parametrici sono stati considerati nel dettaglio da Linton (2007).

Infine i modelli Exponential GARCH (EGARCH), introdotti da Nelson (1991), consentono di evitare che la varianza condizionata sia negativa, senza la necessità di imporre alcuna restrizione sui parametri. Delle specificazioni alternative dei modelli EGARCH sono state sperimentate da He (2000), Terasvirta e Malmsten (2002).

1.2 Dati ad alta frequenza e realized variance

La volatilità dei rendimenti azionari è tipicamente modellata con modelli GARCH che trattano la volatilità come una variabile latente.

Negli ultimi quindici anni ha preso sempre maggior peso un filone alternativo che propone di trattare la volatilità con metodi non-parametrici basati sui dati ad alta frequenza.

I dati ad alta frequenza dovrebbero essere il primo oggetto di ricerca per chi è interessato a capire la dinamica dei mercati finanziari, specialmente perché gli operatori finanziari determinano le loro decisioni osservando i dati ad alta frequenza o i dati tick-by-tick. Però il più delle pubblicazioni finanziarie in letteratura trattano dati a bassa frequenza equispaziati nel tempo. Questo innanzitutto perché è più difficile e costoso reperire e manipolare dati ad alta

frequenza; inoltre perché gli strumenti statistici classici sono validi per serie storiche equispaziate nel tempo.

La forma originaria dei prezzi azionari sono i dati tick-by-tick: dove ogni tick rappresenta un'unica informazione logica, come un prezzo o una quota di scambio. Questi dati non sono equispaziate nel tempo e il numero di osservazioni in un singolo giorno è molto elevato (equivalente al numero di dati giornalieri in trent'anni).

In finanza dati equispaziate nel tempo non sono dati originali, ma sono artefatti e derivano dagli originari prezzi di mercato. Negli ultimi anni, con l'evoluzione delle tecnologie informatiche, la disponibilità dei dati ad alta frequenza è diventata sempre più agevole, tanto da farli diventare la base sperimentale per capire la microstruttura dei mercati, e più genericamente per analizzare i mercati finanziari.

L'idea più rilevante per analizzare la volatilità con dati ad alta frequenza è quella del *realized volatility* (RV) sviluppata in particolare da Andersen et al. (2001b) o Barndorff-Nielsen and Shephard (2002).

Immaginiamo di scindere ogni singolo giorno t in I intervalli di ampiezza Δ , con $i=1,2,\dots,I$. Per ogni intervallo noi osserviamo l'ultimo prezzo $C_{t,i}$ e calcoliamo il rendimento logaritmico :

$$r_{t-1+i\Delta,\Delta} = (\log C_{t,i} - \log C_{t,i-1}) \quad (5)$$

La *realized volatility* al tempo t è definita come :

$$RV_t^\Delta = \left\{ \frac{1}{I-1} \sum_{i=1}^I |r_{t-1+i\Delta,\Delta}|^p \right\}^{\frac{1}{p}} \quad (6)$$

I parametri presenti nell'equazione dovranno essere discussi e scelti opportunamente. Un esponente p molto elevato dà maggior peso alle code della distribuzione. Il parametro p dovrebbe assumere un valore inferiore dell'indice della coda della distribuzione, che è stimato empiricamente intorno a 3.5 per i dati ad alta frequenza. In molti lavori la realized volatility è calcolata sui rendimenti al

quadrato, ma in pratica l'indice p dovrebbe essere limitato alla metà dell'indice della coda della distribuzione¹.

Anche la scelta di I e Δ sono importanti; data una dimensione del campione costante Andersen et al. (2001) consiglia una scelta di Δ il più piccolo possibile; questo implica un numero I elevato di osservazioni sui rendimenti e una precisione superiore dello stimatore. La scelta migliore per Δ è compresa tra quindici minuti e due ore, e tale scelta dipende dal tipo di mercato e dal tipo di dati. Corsi et al. (2001) propone una correzione del realized volatility con un Δ pari a cinque minuti in modo da mantenere una elevata precisione dovuta ad un elevato numero di rendimenti.

Molti autori preferiscono scalare la realized volatility in modo da facilitarne l'interpretazione. Se consideriamo intervalli intragiornalieri Δ , la volatilità attesa può essere calcolata in base ad un altro intervallo temporale Δ_{scale} secondo la seguente equazione :

$$RV_{scaled} = \sqrt{\frac{\Delta_{scaled}}{\Delta}} RV_t^\Delta \quad (7)$$

La scelta più popolare per Δ_{scale} è $\Delta_{scale} = 1$ anno, in modo tale da ottenere una forma annualizzata della realized volatility.

Una definizione alternativa della realized volatility è :

$$RV_t^\Delta = \left\{ \frac{1}{I-1} \sum_{i=1}^I \left| r_{t-1+i\Delta, \Delta} - \frac{1}{I} \left[\sum_{k=1}^I r_{t-1+k\Delta, \Delta} \right] \right|^p \right\}^{\frac{1}{p}} \quad (8)$$

Se consideriamo $p=2$ quest'ultima specificazione rappresenta la deviazione standard dei rendimenti attorno alla media del campione. Tale definizione viene utilizzata nell'analisi di portafoglio dove il rischio è misurato in termini di deviazioni dei rendimenti dalla media.

¹Michael Dacorogna, Ramazan Gençay (2001), "An Introduction to high-frequency data"

Specifichiamo a questo punto il concetto di *integrated variance (IV)* , che rappresenta la volatilità del processo stocastico dei prezzi azionari lungo un determinato periodo di tempo. L'integrated variance può essere definita come :

$$IV = \int_a^b \sigma^2(t) dt \quad (9)$$

Dove a e b rappresentano l'inizio e la fine del periodo di osservazione, nel nostro caso un giorno di trading.

Se consideriamo $p=2$, e assumiamo che la media del processo generatore dei rendimenti azionari sia pari a zero, possiamo definire la realized volatility come *realized variance*.

$$r_{t-1+i\Delta, \Delta}^2 = (\log C_{t,i} - \log C_{t,i-1})^2 \quad (10)$$

$$RV_t^\Delta = \sum_{i=1}^I r_{t-1+i\Delta, \Delta}^2 \quad (11)$$

Date alcune deboli condizioni di regolarità il *realized variance* è uno stimatore non distorto, altamente efficiente, che converge al vero valore della *integrated variance (IV)* quando la lunghezza degli intervalli intragiornalieri tende a zero (Barndorff-Nielsen-Shephard 2002).

$$RV_t^\Delta \xrightarrow{p} IV$$

Se non consideriamo dati ad alta frequenza (ad esempio dati giornalieri) la classe di modelli GARCH fornisce delle stime della volatilità migliori rispetto a quelle della realized volatility. Ma se consideriamo dati ad alta frequenza la realized volatility offre delle stime migliori; infatti dati intragiornalieri non possono essere approssimati da modelli GARCH a causa della stagionalità e dell'eterogeneità dei mercati, come è stato mostrato da Guillaume et al.(1994) e Gençay et al (2001c, 2002).

1.3 Microstruttura dei mercati e distorsioni

Teoricamente il realized variance è uno stimatore non distorto, altamente efficiente, che converge al vero valore della integrate variance (IV).

Nella pratica però la consistenza della realized variance viene meno nel momento in cui aumenta la frequenza dei dati. Infatti gli effetti dovuti alla microstruttura dei mercati contaminano i prezzi degli asset registrati ad alta frequenza e inducono delle autocorrelazioni nelle serie storiche osservate dei rendimenti azionari; questo fenomeno invalida la teoria asintotica e rende inconsistente lo stimatore. Rendimenti a frequenza molto alta dunque sono distorti e rendono la *realized variance* distorta e inconsistente (Bandi-Russel 2005,2006 ; Ait-Sahalia 2005 ; Hansen-Lunde 2006).

I fenomeni distorsivi dovuti alla microstruttura dei mercati sono stati studiati intensamente negli ultimi anni e in particolare sono causati dal cosiddetto *bid-ask bounce*, che possiamo definire come il differenziale esistente tra il prezzo al quale un intermediario si impegna a vendere i titoli (*ask*) e il prezzo al quale egli si impegna ad acquistarli (*bid*). Nel caso in cui i prezzi fossero osservati nel continuo, il prezzo alto sarebbe il prezzo di offerta, mentre il prezzo basso sarebbe quello della domanda. Se indichiamo con j l'indice della serie storica originaria, specifichiamo il bid-ask bounce come :

$$s(t_j) = \log p_{ask}(t_j) - \log p_{bid}(t_j) \quad (12)$$

Il bid-ask bounce rappresenta i costi di transazione e il rischio dell'istituzione che quota i prezzi; tale differenza dunque può essere considerata come una buona misura delle frizioni esistenti nel mercato, quindi una misura dell'efficienza del mercato stesso.

Il *realized variance* risulta distorto verso l'alto in presenza di bid-ask bounce. I fenomeni distorsivi dovuti alla microstruttura dei mercati implicano delle limitazioni nella scelta della frequenza osservata. Delle scelte popolari nelle applicazioni empiriche sono intervalli di 5 e 30 minuti, che dovrebbero interpretare un bilanciamento tra l'incremento della precisione dovuto a frequenze più alte, e gli effetti delle frizioni dovute alla microstruttura dei mercati (Andersen-Bollerslev 1998 ; Andersen 2001a , 2003 ; Fleming 2003).

1.4 Realized Range e sue correzioni

Un modo alternativo di misurare la volatilità è basato sulla differenza tra il prezzo massimo e il minimo, osservato in un certo periodo (*high-low range*). Immaginiamo di scindere ogni singolo giorno t in I intervalli di ampiezza Δ , con $i=1,2,\dots,I$. Per ogni intervallo noi osserviamo il prezzo più alto $H_{t,i}$ e il prezzo più basso $L_{t,i}$:

$$H_{t,i} = \sup_{(i-1)\Delta < j < i\Delta} P_{t-1+j} \quad L_{t,i} = \inf_{(i-1)\Delta < j < i\Delta} P_{t-1+j}$$

Parkinson(1980) propone uno stimatore *high-low range* per la varianza:

$$(\log H_{t,i} - \log L_{t,i})^2$$

che risulta non distorto anche se la media del moto generatore dei prezzi risulta diversa da zero. Se noi siamo interessati a calcolare la volatilità giornaliera, possiamo aggregare gli *high-low range* per ogni intervallo intragiornaliero, e otteniamo il *realized range* RR_t^Δ :

$$RR_t^\Delta = \sum_{i=1}^I (\log H_{t,i} - \log L_{t,i})^2 \quad (13)$$

Parkinson propone uno stimatore per la varianza costruito con un intervallo *high-low* scalato per una costante:

$$RRk_t^\Delta = \frac{1}{4 \log 2} \sum_{i=1}^I (\log H_{t,i} - \log L_{t,i})^2 \quad (14)$$

e mostra che il (\log) *high-low range*, opportunamente scalato, è uno stimatore non distorto della volatilità giornaliera ed è cinque volte più efficiente del rendimento al quadrato *close-to-close* giornaliero. Gli stimatori basati sull'intervallo infatti contengono maggiori informazioni rispetto ai semplici rendimenti, perché gli estremi sono formati dall'intero processo dei prezzi.

Come nel caso del realized variance, la consistenza del realized range viene meno nel momento in cui aumenta la frequenza dei dati. Abbiamo definito il bid-ask bounce come il differenziale esistente tra il prezzo al quale un intermediario si impegna a vendere i titoli (ask) e il prezzo al quale egli si impegna ad acquistarli (bid). L'intervallo di prezzo osservato è distorto verso l'alto esattamente per lo spread tra domanda e offerta.

Noi ci concentreremo sullo stimatore *realized range* giornaliero, calcolato per diversi intervalli di tempo intragiornalieri; valuteremo altresì delle correzioni, proposte in letteratura, per migliorare l'efficienza dello stimatore e per ovviare al problema della distorsione dovuta alla microstruttura dei mercati.

German e Klass suggeriscono di migliorare l'efficienza dello stimatore utilizzando, oltre al massimo e minimo dell'*i*-esimo intervallo, anche il prezzo di chiusura. Questo stimatore è una semplice combinazione lineare dell'intervallo high-low e il quadrato del rendimento close-to-close.

$$RRgk_t = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^I \left[(\log H_{t,i} - \log L_{t,i-1})^2 - (2 \log 2 - 1)(\log C_{t,i} - \log C_{t,i-1})^2 \right] \quad (15)$$

Tale stimatore è teoricamente 7.4 volte più efficiente dei rendimenti logaritmici al quadrato in (1).

Nel contesto di intervalli giornalieri Brown (1990) e Alizadeh et al. (2002) sconsigliano l'utilizzo del prezzo di chiusura e apertura, perché questi sono fortemente contaminati dagli effetti dovuti alla microstruttura dei mercati. L'assunzione che il processo generatore dei prezzi abbia un drift pari a zero è fondamentale per la correttezza e la consistenza dello stimatore.

In precedenza abbiamo osservato che gli effetti dovuti alla microstruttura dei mercati contaminano i prezzi degli asset registrati ad alta frequenza. Questo fenomeno invalida la teoria asintotica e rende inconsistente il *realized range*.

Il daily range è più robusto rispetto al *realized variance* relativamente a tali effetti distorsivi (Alizadeh 2002; Brandt-Diebold 2006). Martens e van Dijk (2006) propongono un aggiustamento per lo stimatore *realized range*, che prevede di scalare lo stimatore con il rapporto tra il livello medio del daily range e il livello medio del *realized range* nei *q* giorni precedenti. Questa correzione si basa

sull'idea che il daily range è (quasi) non contaminato dalla microstruttura dei mercati, e fornisce un buon indicatore del vero livello della volatilità.

$$RRq_t^\Delta = \left(\frac{\sum_{l=1}^q RR_{t-l}}{\sum_{l=1}^q RR_{t-l}^\Delta} \right) RR_t^\Delta \quad (16)$$

Le simulazioni svolte da Martens e van Dijk dimostrano che scalare il *realized range* per il daily range non elimina completamente le distorsioni; questo è dovuto al fatto che il daily range è comunque distorto verso il basso a causa delle contrattazioni infrequenti.

La scelta del numero q di trading day considerati è importante per calcolare la correzione dello stimatore. Sotto le assunzioni che l'intensità delle contrattazioni e lo spread siano costanti nel tempo, q dovrebbe essere il più elevato possibile per migliorare l'accuratezza della correzione. Noi considereremo q pari a cento.

2 Base dati

Le nostre applicazioni empiriche si basano sui prezzi, minuto per minuto, del titolo J.P.Morgan; la fonte dei dati è TickData, Inc. Il campione comprende il periodo dal 3 gennaio 2003 al 31 dicembre 2008 ; ossia 1564 giorni di contrattazioni, e 609.960 osservazioni. Per ogni minuto abbiamo a disposizione il prezzo di chiusura (CLOSE), il prezzo di apertura (OPEN), il prezzo più alto (HIGH) e il più basso (LOW). Nella serie storica abbiamo cinque giorni di contrattazione a settimana; oltre al sabato e la domenica, dalla serie storica sono stati omessi i giorni festivi.

Nella tabella seguente riportiamo i primi venti minuti della base dati.

DATE	TIME	OPEN	HIGH	LOW	CLOSE
01/03/2003	9.31.00	25,46	25,5	25,46	25,48
01/03/2003	9.32.00	25,48	25,49	25,46	25,48
01/03/2003	9.33.00	25,49	25,64	25,48	25,55
01/03/2003	9.34.00	25,58	25,59	25,5	25,52
01/03/2003	9.35.00	25,53	25,59	25,5	25,55
01/03/2003	9.36.00	25,51	25,57	25,5	25,52
01/03/2003	9.37.00	25,5	25,51	25,49	25,5
01/03/2003	9.38.00	25,49	25,55	25,48	25,51
01/03/2003	9.39.00	25,55	25,55	25,5	25,54
01/03/2003	9.40.00	25,54	25,55	25,5	25,55
01/03/2003	9.41.00	25,5	25,55	25,47	25,49
01/03/2003	9.42.00	25,48	25,49	25,46	25,48
01/03/2003	9.43.00	25,47	25,48	25,43	25,45
01/03/2003	9.44.00	25,43	25,49	25,43	25,48
01/03/2003	9.45.00	25,45	25,48	25,44	25,45
01/03/2003	9.46.00	25,45	25,45	25,43	25,44
01/03/2003	9.47.00	25,43	25,43	25,25	25,31
01/03/2003	9.48.00	25,31	25,35	25,21	25,26
01/03/2003	9.49.00	25,27	25,28	25,2	25,25
01/03/2003	9.50.00	25,24	25,28	25,21	25,28

Tabella I. Prezzi del titolo J.P.Morgan minuto per minuto. Sono riportati il valore di apertura, il valore più basso, il più alto, e il prezzo di chiusura.

L'orizzonte temporale che intercorre tra il 3 gennaio 2003 e il 31 dicembre 2008 comprende il periodo della grave crisi creditizia e finanziaria che ha coinvolto l'economia mondiale, e in particolare quella statunitense. A partire dalla seconda

metà del 2007 infatti gli Stati Uniti sono entrati in una grave crisi creditizia e ipotecaria che si è sviluppata a seguito della forte bolla speculativa immobiliare e del valore del dollaro molto basso rispetto all'euro e ad altre valute. Dopo diversi mesi di debolezza e perdita di impieghi, il fenomeno è collassato tra il 2007 e il 2008 causando il fallimento di banche ed entità finanziarie, determinando una forte riduzione dei valori borsistici e un aumento esponenziale della volatilità dei mercati. A settembre 2008, i problemi si sono aggravati con la bancarotta di diverse società legate al credito ed alla finanza immobiliare, come la banca di investimenti Lehman Brothers, le società di mutui Fannie Mae e Freddie Mac o la società di assicurazioni AIG.

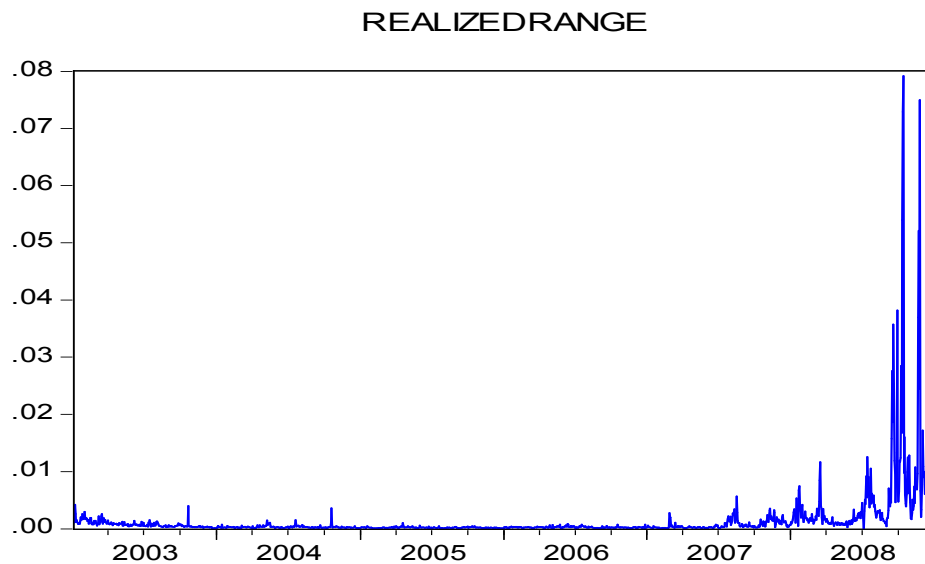


Figura I. Serie storica del Realized Range corretto per Martens e van Dijk, specificato in equazione (16), calcolato sul titolo J.P.Morgan.

La figura sovrastante rappresenta l'andamento della serie storica del realized range durante l'orizzonte temporale considerato. È evidente che la volatilità del titolo J.P.Morgan comincia a aumentare vistosamente dalla seconda metà del 2007, per poi raggiungere dei picchi molto alti alla fine del 2008.

2.1 Analisi descrittive e frequenza di campionamento

Abbiamo calcolato la realized variance giornaliero e il realized range giornaliero definiti rispettivamente nelle equazioni (11) e (13), al variare degli intervalli di tempo intragiornalieri. Abbiamo inoltre calcolato delle statistiche descrittive sulle

diverse serie, al variare della frequenza, in modo tale da comprendere come varia la distribuzione dello stimatore.

In appendice la figura 2a mostra graficamente la media della realized variance al variare della frequenza; gli intervalli intragiornalieri considerati variano da 1 a 30 minuti. La logica è quella di individuare la frequenza in cui gli effetti dovuti alla microstruttura dei mercati inducono una distorsione nelle stime. ABDL (2000) suggerisce di scegliere la frequenza più alta che non comporta una distorsione nelle stime. La figura 2a mostra che la media rimane costante alle frequenze più alte, successivamente diminuisce se consideriamo intervalli maggiori o uguali a cinque minuti.

La figura 2b evidenzia l'andamento della varianza del realized variance. Possiamo osservare che la varianza rimane sostanzialmente costante se varia la frequenza di campionamento. Presentiamo infine nella figura 2d e 2c la curtosi e l'indice di asimmetria del realized variance al variare della frequenza. La distribuzione dello stimatore evidenzia code pesanti e asimmetria. La curtosi e l'indice di asimmetria mostrano un andamento simile. In particolare aumentano leggermente nel passaggio da intervalli di un minuto a 5 minuti, per poi diminuire fino alle frequenze più alte. Possiamo però evidenziare che l'asimmetria della distribuzione non varia significativamente alle frequenze più alte.

In appendice la figura 3 mostra graficamente l'andamento delle statistiche descrittive del realized range al variare della frequenza.

Osserviamo che il valore della media del realized range assume lo stesso valore se calcolato per intervalli intragiornalieri di un minuto che per 30 minuti; quindi all'aumentare della frequenza di campionamento non si osserva una distorsione significativa dello stimatore.

La varianza del realized range mostra un andamento lievemente crescente all'aumentare della frequenza; mentre l'asimmetria e la curtosi della distribuzione rimangono costanti.

2.2 Analisi della distorsione degli stimatori

Nel paragrafo 1.3 abbiamo descritto come gli effetti dovuti alla microstruttura dei mercati, in particolare il bid-ask bounce e le contrattazioni infrequenti, contaminino

i prezzi degli asset registrati ad alta frequenza, invalidando la teoria asintotica relativa alla consistenza della realized volatility.

Nel paragrafo precedente abbiamo confrontato realized range e realized variance rispetto alle diverse frequenze di campionamento, e abbiamo verificato che il realized range è meno sensibile a tali effetti distorsivi rispetto al realized variance, infatti è molto più evidente una distorsione verso l'alto del realized variance calcolato alle frequenze più elevate; mentre è meno chiaro un cambiamento nella distribuzione del realized range.

In questo paragrafo vogliamo verificare, in termini quantitativi e grafici, se i fenomeni distorsivi incidono sul realized variance e sul realized range, e verificare se la correzione del realized range per il rapporto tra il livello medio del daily range e il livello medio del realized range, descritta nell'equazione (16), riesce a ridurre la distorsione dello stimatore.

In appendice la Tabella 1 indica le statistiche descrittive di tutti gli indicatori considerati per intervalli intragiornalieri di 1, 5, 10, 30 minuti. La media degli stimatori cambia al variare dell'intervallo scelto; possiamo evidenziare che il Realized Range corretto per il rapporto tra il livello medio del daily range e il livello medio del realized range è l'unico stimatore che assume la stessa media per frequenze diverse. Allo stesso tempo, la mediana calcolata sullo stimatore RRq_t è più stabile, al variare della frequenza, rispetto al Realized Range e al Realized Variance.

In appendice la figura 4 rappresenta i diagrammi a dispersione dei cinque stimatori considerati, in modo da mettere in relazione le diverse serie derivate dallo stesso stimatore, a intervalli intragiornalieri differenti. Osserviamo che, per tutti gli stimatori, lo scatter plot assume una dispersione maggiore nel grafico che mette in relazione lo stimatore con intervalli intragiornalieri di 1 minuto e di 30 minuti. Infatti lo stimatore calcolato con intervalli di 1 minuto subisce maggiormente le distorsioni, rispetto agli stimatori calcolati a frequenze meno elevate. Evidenziamo graficamente una dispersione inferiore negli scatter plot relativi allo stimatore in equazione (16) RRq_t , rispetto agli altri stimatori.

Nella tabella 2 sono riportate le matrici di correlazione degli stimatori calcolati a diversa frequenza. Se si osservano il realized variance e il realized range senza correzioni, ci accorgiamo che le serie calcolate con intervalli di 1 minuto, 5 minuti e 10 minuti sono più correlate tra loro, rispetto a quanto lo sia quella a 30 minuti;

questo perché quest'ultima serie è più robusta rispetto agli effetti distorsivi causati dalla microstruttura dei mercati. In particolare tale differenza nel valore delle correlazioni è meno evidente nel caso del realized range rispetto al realized variance.

Abbiamo infine messo in relazione le diverse serie derivate dallo stesso stimatore, ma a frequenza differente, con una regressione lineare. Valuteremo il modello lineare in termini di indice R quadro e dei coefficienti stimati: intercetta e coefficiente angolare. Abbiamo calcolato le regressioni lineari per il realized variance, realized range e realized range corretto per il rapporto tra il livello medio del daily range e il livello medio del realized range; i risultati ottenuti sono riportati in appendice nella tabella 3.

L'R quadro ci informa sul grado di adattamento ai dati del modello; tale indice diventa sempre più piccolo nel momento in cui aumenta la differenza nella frequenza delle serie considerate. Possiamo notare che gli indici più bassi si riscontrano per lo stimatore realized variance, in particolare nella regressione tra la serie a 1 minuto e quella a 30 minuti. Di conseguenza possiamo presumere che il realized range sia più robusto del realized variance e subisce meno le distorsioni dovute alla microstruttura dei mercati. Per i tre stimatori il coefficiente β risulta sempre significativo e assume dei valori prossimi ad uno. Risulta difficile interpretare il coefficiente α .

2.3 Efficienza degli stimatori

Ci proponiamo ora di confrontare i diversi stimatori in termini di efficienza; valuteremo graficamente la dispersione con il box plot, e la variabilità dello stimatore con la varianza osservata.

Dall'analisi delle statistiche descrittive riportate in appendice nella tabella 1 possiamo notare che il realized range, senza alcuna correzione, ha una varianza superiore a quella del realized variance; possiamo arrivare alla stessa conclusione se osserviamo i primi box plot in figura 3.

I box plot mostrano che lo stimatore proposto da German & Klass, descritto nell'equazione (15), migliora l'efficienza del realized range: consente di avere una varianza almeno 2 volte inferiore a quella del realized range.

Lo stimatore che presenta la varianza inferiore è il realized range corretto per Parkinson con la costante $\frac{1}{4 \log 2}$; lo stimatore RRk_t (4) infatti migliora sensibilmente l'efficienza e consente di avere una varianza inferiore a quella del realized variance per qualsiasi intervallo intragiornaliero considerato

2.4 Componenti Principali

Al fine di confrontare il contenuto informativo dei diversi stimatori calcolati, utilizziamo la tecnica delle *componenti principali*. L'analisi in componenti principali è una tecnica per la semplificazione dei dati utilizzata nell'ambito della statistica multivariata. Insieme all'analisi delle corrispondenze multiple, appartiene all'analisi fattoriale.

Lo scopo primario di questa tecnica è la riduzione di un numero più o meno elevato di variabili in alcune variabili latenti. Ciò avviene tramite una trasformazione lineare delle variabili che proietta quelle originarie in un nuovo sistema cartesiano nel quale la nuova variabile con la maggiore varianza viene proiettata sul primo asse, la seconda nuova variabile, per dimensione della varianza, sul secondo asse e così via. La riduzione della complessità avviene limitandosi ad analizzare i primi assi fattoriali che sintetizzano la variabilità presente nella base dati originaria, dunque ne semplificano l'analisi.

Il calcolo degli assi fattoriali si basa sulla matrice di covarianze delle variabili iniziali. Trovando l'autovalore e l'autovettore della matrice di covarianza, si ottiene che l'autovettore con il maggiore autovalore corrisponde alla dimensione che ha la maggiore correlazione con l'insieme di dati. La grandezza relativa degli autovalori rispetto agli altri ci dice la percentuale di varianza spiegata da ogni variabile latente. I dati originali sono infine proiettati nel nuovo spazio vettoriale ridotto.

Noi utilizzeremo l'analisi delle Componenti Principali per confrontare i diversi indicatori di realized range e la realized variance. Scegliamo di utilizzare gli indicatori calcolati con intervalli intragiornalieri di 5 minuti, tale scelta garantisce un buon bilanciamento tra correttezza e efficienza dello stimatore.

- RV_t : realized variance (11)
- RR_t : realized range (13)
- RRq_t : realized range con correzione per il daily range (14)

- $RRgk_t$: realized range con correzione di German & Klass (15)
- RRk_t : il realized range corretto da Pakinson per la costante $\frac{1}{4 \log 2}$ (16)

La tabella seguente mostra gli autovalori e la percentuale di varianza spiegata da ogni asse fattoriale.

	Autovalore	% Varianza
CP 1	4,71960	0,94393
CP 2	0,26628	0,05326
CP 3	0,01123	0,00225
CP 4	0,00282	0,00056
CP 5	5,97773E-08	1,19556E-08

Tabella II. Risultati dell'analisi in componenti principali. Autovalori e la percentuale di varianza spiegata da ciascun asse fattoriale.

Possiamo notare che la prima componente principale spiega il 94% della variabilità totale; mentre la seconda componente spiega poco più del 5%.

Se analizziamo il cerchio delle correlazioni in appendice, figura 4, possiamo notare che tutti gli indicatori sono molto correlati con il primo asse fattoriale. Sono correlate con la seconda componente principale solo le variabili calcolate con il range, mentre la realized variance è incorrelata col secondo asse.

Possiamo quindi affermare che i quattro indicatori misurano univocamente la volatilità giornaliera, e sono particolarmente correlati tra loro gli stimatori calcolati con il range, mentre la realized variance si discosta dal realized range e dalle sue correzioni.

3 Modellare la Realized Volatility

Nella figura 1 dell'appendice vengono riportate la serie storica, la funzione di autocorrelazione e autocorrelazione parziale dei 5 indicatori, per intervalli intragiornalieri di 5 minuti. I grafici evidenziano una forte autocorrelazione delle serie storiche, infatti le funzioni di autocorrelazione hanno un decadimento iperbolico tipico dei processi a memoria lunga.

Dai grafici delle serie storiche di tutti gli stimatori considerati, possiamo notare che la volatilità varia nel tempo ed è evidente un fenomeno di volatility clustering.

I modelli che presenteremo nei successivi paragrafi sono stati stimati sul software EViews.

3.1 Modelli ARFIMA

La modellazione della volatilità ha un ruolo fondamentale in finanza e nella gestione del rischio. Con la disponibilità dei dati ad alta frequenza la letteratura si è sviluppata in diverse direzioni, una delle quali si è focalizzata sulla modellazione e sulla previsione della realized volatility.

Per interpretare la memoria lunga nella realized volatility, Andersen et al. (2003) specificano un modello ARFIMA(p,d,q) autoregressive fractionally integrated moving average.

$$\phi(L)(1-L)^d(RR_t - \mu) = \psi(L)u_t$$

dove d denota il parametro di integrazione frazionaria, e

$$\phi(L) = 1 - \phi_1 L - \dots - \phi_p L^p \quad \psi(L) = 1 + \psi_1 L + \dots + \psi_q L^q$$

indicano gli usuali polinomi nell'operatore ritardo L, di ordine p e q, rispettivamente con radici esterne al cerchio unitario e privi di fattori comuni. Il processo risulta stazionario e invertibile se

$-0.5 < d < 0.5$; inoltre, per $0 < d < 0.5$ esso è caratterizzato da effetti di memoria lunga. Mentre u_t si assume sia un processo White Noise gaussiano. Date tali assunzioni, molti lavori hanno adottato ed esteso questo modello; i risultati ottenuti in letteratura per diversi mercati e data set mostrano un significativo miglioramento nelle previsioni della volatilità, rispetto all'utilizzo degli usuali modelli GARCH.

3.2 Modelli HAR

Un'alternativa ai modelli ARFIMA è stata suggerita da Corsi (2004) con i modelli HAR *heterogeneous autoregressive*. In tali modelli viene definita una componente di k periodi di realized volatility, data dalla somma di singoli periodi di realized volatility.

$$RR_{t+1-k:t} = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k RR_{t-j} \quad (17)$$

I modelli HAR includono un componente giornaliera, settimanale e mensile di realized volatility.

$$RR_t = \alpha_0 + \alpha_d RR_{t-1} + \alpha_w RR_{t-5:t-1} + \alpha_m RR_{t-22:t-1} + u_t \quad (18)$$

$$u_t | \Omega_{t-1} : N(0,1)$$

In Corsi (2004) u_t si assume sia un processo white noise gaussiano, come nei modelli ARFIMA.

Le simulazioni effettuate da Corsi (2004) mostrano che i modelli HAR sono capaci di riprodurre il decadimento iperbolico della funzione di autocorrelazione della realized volatility. Inoltre le performance previsive nei modelli HAR sono tanto buone quanto quelle dei modelli ARFIMA.

I risultati empirici mostrano che i modelli HAR e ARFIMA sono simili in termini di adattamento ai dati e di errata specificazione, e ci aspettiamo che l'estensione dei modelli ARFIMA e HAR siano compatibili.

Noi incentreremo la nostra analisi sui modelli HAR, e sulla loro estensione, in modo tale da analizzare la dipendenza della volatilità rispetto all'andamento dell'economia, e per la modellazione del momento secondo della serie.

La base dati sulla quale calcoliamo lo stimatore si basa sulla serie storica del titolo J.P.Morgan nel periodo che intercorre tra il 3 gennaio 2003 e il 31 dicembre 2008. Tale orizzonte temporale comprende il periodo della grave crisi creditizia e finanziaria che ha coinvolto l'economia mondiale, e in particolare quella statunitense.

Al fine di tener conto di questo contesto economico-finanziario, per la modellazione della serie, considereremo inizialmente l'orizzonte temporale intercorrente tra l'1 gennaio 2003 e il 29 giugno 2007, in modo da valutare le performance del modello HAR in condizioni di relativa stabilità dei mercati.

Successivamente allargheremo la base dati sino al giugno 2008 e stabiliremo se il modello si adatta adeguatamente ai dati. La serie storica che prenderemo in considerazione sarà il realized range corretto per il rapporto tra il livello medio del daily range e il livello medio del realized range, descritto nell'equazione (16), calcolato ad intervalli intragiornalieri di 5 minuti.

In appendice, figura 7, è riportata l'analisi dei residui del Modello1.1 che si basa sulla specificazione del modello HAR descritta nell'equazione (18), applicato al periodo campionario dal 1 gennaio 2003 e il 29 giugno 2007. Dalle stime ottenute, riportate in appendice, tabella 4, si può notare che la componente mensile è quella che assume un peso maggiore, rispetto a quella giornaliera e settimanale. Il Test di Ljung-Box rifiuta l'ipotesi nulla di assenza di autocorrelazione dei residui fino al ritardo 13, dal lag14 in poi il test accetta l'ipotesi che le prime autocorrelazioni siano nulle, ad un livello $\alpha=0,05$. Dunque non esiste una evidenza esplicita che i residui siano incorrelati. L'ARCH test evidenzia una forte eteroschedasticità autoregressiva condizionata e risulta significativo solo il primo ritardo dei residui al quadrato. Inoltre il qq-plot e il test di normalità indica l'inadeguatezza dell'assunzione di normalità dei residui. I parametri di Asimmetria e Curtosi dei residui HAR sono 6,23 e 79,32 .

3.3 Memoria lunga e eteroschedasticità

Per tener conto della volatility clustering osservata nella realized volatility, estendiamo il modello HAR includendo una componente GARCH, e costruiamo un modello HAR-GARCH(p,q)

$$RR_t = \alpha_0 + \alpha_d RR_{t-1} + \alpha_w RR_{t-5:t-1} + \alpha_m RR_{t-22:t-1} + \sqrt{h_t} u_t \quad (19)$$

$$h_t = \omega + \sum_{j=1}^q \alpha_j u_{t-j}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j h_{t-j}$$

$$u_t | \Omega_{t-1} : N(0,1)$$

Il termine di errore $\sqrt{h_t} u_t$ avrà una distribuzione condizionata con la varianza che varia nel tempo. Combinando il modello HAR e la specificazione GARCH,

otteniamo un processo a memoria lunga che dovrebbe essere in grado di interpretare l'eteroschedasticità condizionale del processo.

Le stime di massima verosimiglianza per le diverse specificazioni di modelli HAR sono riportate nella tabella 4 dell'appendice. Dalle stime ottenute si può evidenziare che l'estensione HAR-GARCH – Modello1.2 – migliora la bontà dell'adattamento ai dati, come mostrano i criteri di Akaike e Schwarz; entrambe i criteri e il test ARCH-LM suggeriscono una specificazione HAR-GARCH(1,1).

In appendice, figura 8, viene riportata l'analisi dei residui del Modello1.2; si può notare che il Test di Ljung-Box accetta l'ipotesi nulla di assenza di autocorrelazione dei residui fin dal primo ritardo, e con una evidenza crescente all'aumentare dei ritardi congiunti considerati.

Se raffrontiamo le stime ottenute sul Modello1.1 e sul Modello1.2 si può osservare un incremento nella componente di volatilità mensile e giornaliera, e un decremento della costante e della componente settimanale quando includiamo la specificazione GARCH.

Il test di Jarque-Bera rifiuta l'ipotesi nulla di normalità dei residui; infatti l'indice di asimmetria dei residui assume il valore di 8,17 mentre l'indice di curtosi 126,23.

3.4 Stima di modelli HAR-GARCH

La stima dei parametri avviene con procedure basate sulla massima verosimiglianza.

Se, per comodità, chiamiamo Y la serie storica giornaliera del realized range, la funzione di verosimiglianza del campione $y_1, y_2, \dots, y_{1564}$ coincide con la funzione di densità di probabilità congiunta $L(\theta) = f(y_1, y_2, \dots, y_{1564} | \theta)$

Se le y non sono indipendenti si ottiene un prodotto di funzioni di densità di una variabile casuale in un certo istante condizionata ai valori assunti dalle variabili casuali precedenti, e dalla funzione di probabilità congiunta di un certo numero p di variabili casuali riferite ai periodi iniziali; la densità congiunta dell'intero campione può essere fattorizzata sequenzialmente come :

$$f(y_1, y_2, \dots, y_{1564} | \theta) = f(y_n | y_{n-1}, \dots, y_1 | \theta) \cdot f(y_{n-1} | y_{n-2}, \dots, y_1 | \theta) \cdot f(y_{p+1} | y_p, y_{p-1}, \dots, y_1 | \theta) \cdot f(y_p, y_{p-1}, \dots, y_1 | \theta)$$

La verosimiglianza, per $T=1564$ diventa :

$$L(\theta) = f(y_1, y_2, \dots, y_{1564} | \theta) = f(y_p, y_{p-1}, \dots, y_1 | \theta) \cdot \prod_{t=p+1}^T f(y_t | I_{t-1}; \theta)$$

La log-verosimiglianza è :

$$l(\theta) = \log f(y_p, y_{p-1}, \dots, y_1 | \theta) + \sum_{t=p+1}^T \log f(y_t | I_{t-1}; \theta)$$

Possiamo notare che $T=1564$ è un campione sufficientemente grande, quindi si può trascurare il primo addendo della funzione di log-verosimiglianza, e concentrarci solo sul secondo.

Il modello HAR-GARCH(1,1) ha la seguente specificazione :

$$y_t = \alpha_0 + \alpha_d y_{t-1} + \alpha_w y_{t-5:t-1} + \alpha_m y_{t-22:t-1} + \varepsilon_t \quad \varepsilon_t \square GARCH(1,1)$$

dove $y_{t+1-k:t} = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k y_{t-j}$. Di conseguenza il vettore dei parametri da stimare sarà :

$$\theta = (\alpha_0, \alpha_d, \alpha_w, \alpha_m, \omega, \alpha_1, \beta_1)$$

La distribuzione condizionata di una HAR-GARCH(1,1) nel caso gaussiano sarà :

$$y_t | I_{t-1} : N\left[\left(\alpha_0 + \alpha_d y_{t-1} + \alpha_w y_{t-5:t-1} + \alpha_m y_{t-22:t-1}\right); \sigma_t^2\right]$$

$$y_t | I_{t-1} : N\left[\left(\alpha_0 + \alpha_d y_{t-1} + \alpha_w y_{t-5:t-1} + \alpha_m y_{t-22:t-1}\right); \left(\omega + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2\right)^2\right]$$

$$\text{dove } \varepsilon_{t-1}^2 = (y_{t-1} - \alpha_0 - \alpha_d y_{t-2} - \alpha_w y_{t-6:t-2} - \alpha_m y_{t-23:t-2})^2$$

Dunque la funzione di log-verosimiglianza sarà la seguente :

$$\begin{aligned}
l(\theta, y) &= \log f(y_{23}, y_{22}, \dots, y_1 | \theta) + \sum_{t=24}^T \log f(y_t | I_{t-1}; \theta) \\
l(\theta | y_{23}, y_{22}, \dots, y_1) &\cong \sum_{t=24}^T \log f(y_t | I_{t-1}; \theta) \\
l(\theta | y_{23}, y_{22}, \dots, y_1) &\cong -\frac{1564-23}{2} \log 2\pi - \frac{1}{2} \sum_{t=24}^T (\omega + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1})^2 + \\
&\quad - \frac{1}{2} \sum_{t=24}^T \frac{[y_t - (\alpha_0 + \alpha_d y_{t-1} + \alpha_w y_{t-5:t-1} + \alpha_m y_{t-22:t-1})]^2}{(\omega + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1})^2}
\end{aligned}$$

Noi supponiamo che all'interno della famiglia di distribuzioni di probabilità utilizzata come modello parametrico sia contenuto il modello vero, che ha generato le osservazioni del campione a disposizione. Tuttavia, è possibile che il modello da noi utilizzato non sia il vero modello generatore dei dati. Per questo motivo utilizzeremo il criterio della Quasi Massima Verosimiglianza (Halbert White) al fine di ottenere delle stime consistenti dei parametri. Il criterio della Quasi Massima Verosimiglianza si basa sul criterio di informazione di Kullback-Leibler (*KLIC*), che rappresenta una misura della discrepanza tra la vera (e ignota) distribuzione $G(y)$ e la famiglia di funzioni di ripartizione utilizzata $F(y, \theta)$.

$$KLIC(g : f) = E_g \left[\log \frac{g(Y)}{f(Y | \theta)} \right] = E_g [\log g(Y)] - E_g [\log f(Y | \theta)]$$

Per minimizzare il criterio di informazione di Kullback-Leibler è necessario trovare quel valore θ^* , che rende massimo $E_g [\log f(Y | \theta)]$. Dunque θ^* è il valore di θ che rende minima la discrepanza tra il vero modello e quello usato. Uno stimatore di $E_g [\log f(Y | \theta)]$ è la funzione di log-verosimiglianza del modello erroneamente specificato.

$$l(\theta, y) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \log f(Y_t | \theta)$$

Quindi lo stimatore di quasi massima verosimiglianza sarà:

$$\hat{\theta}_n = \arg \max l(\theta, y)$$

La condizione di corretta specificazione del modello statistico è condizione sufficiente, ma non necessaria per la consistenza dello stimatore $\hat{\theta}_n$.

Imponendo alcune condizioni di regolarità è possibile dimostrare che lo stimatore di quasi massima verosimiglianza ha distribuzione asintotica normale. Si supponga che esistano il gradiente e l'Hessiana di $f(Y_t | \theta)$ rispetto a θ , e si definiscano le seguenti matrici :

$$A_n(\theta) = -\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \frac{\partial^2 \log f(Y_t | \theta)}{\partial \theta \partial \theta^i}$$

$$B_n(\theta) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \frac{\partial \log f(Y_t | \theta)}{\partial \theta} \frac{\partial \log f(Y_t | \theta)}{\partial \theta^i}$$

Si supponga inoltre che esistano i valori attesi necessari al calcolo delle seguenti matrici :

$$A(\theta) = -E \left[\sum_{t=1}^n \frac{\partial^2 \log f(Y_t | \theta)}{\partial \theta \partial \theta^i} \right]$$

$$B(\theta) = E \left[\sum_{t=1}^n \frac{\partial \log f(Y_t | \theta)}{\partial \theta} \frac{\partial \log f(Y_t | \theta)}{\partial \theta^i} \right]$$

Se esistano le inverse di $A(\theta)$ e $A_n(\theta)$ e siano

$$C_n(\theta) = A_n(\theta)^{-1} B_n(\theta) A_n(\theta)^{-1}$$

$$C(\theta) = A(\theta)^{-1} B(\theta) A(\theta)^{-1}$$

Allora per $n \rightarrow \infty$

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta^*) \xrightarrow{d} N(0, C(\theta^*)) \quad \text{inoltre } p \lim_{n \rightarrow \infty} C_n(\hat{\theta}_n) = C(\theta^*)$$

Dunque la matrice $C_n(\hat{\theta}_n)$ è uno stimatore consistente della matrice di covarianza ignota $C(\theta^*)$.

3.5 Variabili dummy e jump

La classe di modelli HAR-GARCH riesce ad interpretare la memoria lunga e l'eteroschedasticità condizionale del processo. Abbiamo però verificato che l'assunzione di normalità dei residui viene rigettata con molta evidenza. Se si osserva la serie storica dei residui nel Modello 1.2 sono evidenti dei *jump* occasionali che sono presumibilmente legati a delle news macroeconomiche o a

degli eventi specifici relativi alla società. In particolare, nell'arco dei sei anni del campione, osserviamo tre periodi in cui la volatilità del titolo raggiunge dei picchi che il modello non riesce ad interpretare. Tale fenomeno induce degli outlier nella serie dei residui che provocano a loro volta un aumento dell'indice di curtosi e asimmetria e un rilevante allontanamento dall'ipotesi di normalità.

Nel Modello 1.3 abbiamo cercato di considerare i jump inserendo una variabile dummy per ogni singolo giorno in cui il realized range raggiunge un picco non interpretabile dal modello. Possiamo considerare la scelta di introdurre delle variabili dummy come una semplificazione del problema; in quanto la letteratura include degli approcci che permettono da un lato di separare la componente di jump da quella di volatilità (tale approccio è principalmente legata alla realized variance), oppure di modellizzare il realized range con un modello che include una componente di jump.

Abbiamo considerato nell'equazione della media del Modello 1.3 sei variabili dummy. Possiamo notare che il test sul rapporto di verosimiglianza accetta il Modello 1.3; l'inserimento delle variabili dummy migliora significativamente l'adattamento ai dati.

Nella figura 9 dell'appendice viene riportata l'analisi dei residui del Modello 1.3; si può notare che il Test di Ljung-Box accetta l'ipotesi nulla di assenza di autocorrelazione dei residui fin dal primo ritardo. Se raffrontiamo le stime ottenute sul Modello 1.2 e sul Modello 1.3 si può osservare un incremento nella componente di volatilità settimanale, e un decremento della componente giornaliera e mensile quando includiamo le variabili dummy.

Il test di Jarque-Bera rifiuta l'ipotesi nulla di normalità dei residui, ma in modo meno evidente rispetto al Modello 1.2; infatti l'indice di asimmetria dei residui assume il valore di 1,79 mentre l'indice di curtosi 9,68. Dunque ci avviciniamo all'ipotesi di normalità della distribuzione dei residui.

3.6 Variabili Esogene

Cerchiamo ora di estendere il Modello 1.3 HAR-GARCH, inserendo nell'equazione della media del processo e, in seguito, nell'equazione della varianza alcune variabili esplicative esogene quali :

- Tasso di cambio Euro/Dollaro (EU)

- Prezzo del petrolio (OP)
- Tasso di interesse a breve termine (RB)
- Tasso di interesse a lungo termine (RL)
- Standard & Poors 1500 (SP)

Ci attendiamo che la volatilità del titolo J.P.Morgan non dipenda esclusivamente dal suo passato, ma dipenda in modo significativo anche dall'andamento del mercato, e quindi da una o più delle variabili precedenti.

Noi analizzeremo il rendimento logaritmico di ogni singola esogena, ritardata di un solo lag. In appendice, figura 8, sono riportati i grafici della serie storica delle cinque nuove variabili e il relativo rendimento logaritmico.

Stimiamo inizialmente il Modello 1.4, dove abbiamo una specificazione HAR per la media del processo in cui inseriamo la differenza logaritmica delle variabili esogene; e una specificazione GARCH per il momento secondo. Le stime ottenute sono riportate in tabella 4, e osserviamo che l'unica esogena significativa, ad un livello del 5%, è l'indice Standard & Poors 1500 (SP); dunque indicando :

$$dlSP_t = (\log SP_t - \log SP_{t-1})$$

il Modello 1.4 ha la seguente specificazione :

$$RR_t = \alpha_0 + \alpha_d RR_{t-1} + \alpha_w RR_{t-5:t-1} + \alpha_m RR_{t-22:t-1} + \delta dlSP_{t-1} + \sqrt{h_t} u_t \quad (20)$$

$$u_t | \Omega_{t-1} : N(0,1)$$

$$h_t = \omega + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \beta_1 h_{t-1}$$

Se confrontiamo il Modello 1.4 con quello precedente ci accorgiamo che l'inserimento della variabile esogena nell'equazione della media del processo ha migliorato l'adattamento ai dati. Si può notare che il Test di Ljung-Box accetta l'ipotesi nulla di assenza di autocorrelazione dei residui fino al ritardo 30. Il coefficiente dell'indice Standard & Poors assume un valore negativo -0,001676; dunque all'aumentare dell'indice diminuisce la volatilità del titolo.

Nel Modello 1.5 abbiamo inserito le esogene nell'equazione del momento secondo del processo; consideriamo l'esponenziale del rendimento logaritmico di ogni variabile che entra nell'equazione della varianza, al fine di imporre il vincolo di positività della stessa varianza condizionata.

$$RR_t = \alpha_0 + \alpha_d RR_{t-1} + \alpha_w RR_{t-5:t-1} + \alpha_m RR_{t-22:t-1} + \delta dLSP_{t-1} + \sqrt{h_t} u_t \quad (21)$$

$$u_t | \Omega_{t-1} : N(0,1)$$

$$h_t = \omega + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \gamma_1 \exp(dLOP_{t-1}) + \gamma_2 \exp(dLRL_{t-1}) + \gamma_3 \exp(dLSP_{t-1}) + \beta_1 h_{t-1}$$

Il Modello 1.5 apporta un miglioramento dell'indice di adattamento ai dati Akaike e Schwarz e il test del rapporto di verosimiglianza dimostra che l'inserimento delle esogene nell'equazione della varianza migliora l'adattamento ai dati. Il test di Ljung-Box accetta l'ipotesi nulla di incorrelazione dei residui con un livello di certezza superiore rispetto ai modelli precedenti. Abbiamo inoltre provato, nel Modello 1.6, ad inserire le variabili esogene in forma HAR nell'equazione della media; includiamo quindi una componente giornaliera, settimanale e mensile per le esogene.

$$RR_t = \alpha_0 + \alpha_d RR_{t-1} + \alpha_w RR_{t-5:t-1} + \alpha_m RR_{t-22:t-1} + \delta_d dLSP_{t-1} + \delta_w dLSP_{t-5:t-1} + \delta_m dLSP_{t-22:t-1} + \sqrt{h_t} u_t \quad (22)$$

$$u_t | \Omega_{t-1} : N(0,1)$$

$$h_t = \omega + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \gamma_1 \exp(dLOP_{t-1}) + \gamma_2 \exp(dLRL_{t-1}) + \gamma_3 \exp(dLSP_{t-1}) + \beta_1 h_{t-1}$$

Il Modello 1.6 porta ad un sensibile miglioramento degli indici di adattamento ai dati.

3.7 Distribuzione t-Student e GED

Abbiamo dunque verificato che combinando il modello HAR con la specificazione GARCH, otteniamo un processo a memoria lunga in grado di interpretare l'eteroschedasticità condizionale del realized range. L'inserimento delle variabili esogene nell'equazione della media e della varianza del processo migliora ulteriormente l'indice di adattamento ai dati; infine l'utilizzo delle variabili dummy consente di eliminare drasticamente i jump presenti nella serie storica.

L'utilizzo della specificazione GARCH implica però code pesanti e asimmetria nella distribuzione dei residui, di conseguenza il test di Jarque-Bera rifiuta sempre l'ipotesi di normalità. Per ovviare alla non-Gaussianità del termine di errore, Corsi (2005) suggerisce di adottare una distribuzione standardized normal inverse gaussian (NIG) per le innovazioni u_t , che dovrebbe essere in grado di riprodurre la asimmetria osservata.

Noi decidiamo di sperimentare la distribuzione t-Student e la distribuzione GED per la stima del modello e verifichiamo se migliora l'adattamento ai dati e soprattutto se riusciamo ad ottenere dei residui con una distribuzione normale.

Il modello 1.7 prevede una specificazione HAR per la media del processo in cui inseriamo la differenza logaritmica delle variabili esogene; e una specificazione GARCH per il momento secondo della serie, che dipende a sua volta dall'esponentiale delle esogene; utilizziamo inoltre la distribuzione t-Student per la stima di massima verosimiglianza dei parametri.

Dalle stime riportate nell'appendice, in tabella 4, osserviamo che il coefficiente relativo ai gradi di libertà della t-Student è significativo e assume il valore di 20. Il test di Ljung-Box accetta l'ipotesi nulla di incorrelazione dei residui. Inoltre migliorano gli indici di adattamento ai dati AIC e BIC e il valore della log-verosimiglianza passa a 8533.443 ; mentre nel modello 1.6 la log-verosimiglianza era pari a 8457.918 . Il test di Jarque-Bera però continua a rifiutare l'ipotesi nulla di normalità dei residui.

L'ultimo modello che sperimentiamo è il modello 1.8 che prevede una specificazione identica a quella del modello 1.7 ma utilizzeremo la distribuzione GED per la stima di massima verosimiglianza dei parametri. Notiamo in tabella 4 che anche in questo caso il parametro di forma della distribuzione è significativo e assume il valore di 2. Il test di Ljung-Box accetta l'ipotesi nulla di incorrelazione dei residui. Il test di Jarque-Bera continua a rifiutare l'ipotesi nulla di normalità dei residui. Il valore della log-verosimiglianza infine risulta 8468.939 , che è chiaramente inferiore a quello ottenuto nel modello precedente.

Possiamo dunque concludere che, se utilizziamo il campione dal gennaio 2003 al maggio 2007, il modello migliore tra quelli stimati risulta il modello 1.7 , che consente di ottenere dei residui incorrelati e garantisce il miglior adattamento ai dati.

3.8 Modellare il Realized Range in periodi di elevata volatilità

Vogliamo ora verificare se i modelli proposti nei paragrafi precedenti si adattano in modo soddisfacente alla serie storica, anche nel momento in cui ampliamo l'orizzonte temporale della base dati fino al giugno 2008 in modo tale da valutare il periodo della grave crisi creditizia e finanziaria che ha coinvolto l'economia

mondiale, e in particolare quella statunitense. La serie storica che prenderemo in considerazione sarà sempre il Realized Range scalato per il daily range descritto nell'equazione (16), calcolato ad intervalli intragiornalieri di 5 minuti.

Consideriamo inizialmente l'orizzonte temporale che intercorre dal gennaio 2003 al dicembre 2007, e procediamo alla stima degli stessi otto modelli valutati nei paragrafi precedenti. La prima cosa che possiamo evidenziare è che il test di Ljung-Box rifiuta l'ipotesi nulla di incorrelazione dei residui nel modello 2.1 HAR standard, mentre in tutti gli altri sette modelli la serie dei residui risulta evidentemente incorrelata. L'inserimento delle variabili dummy e delle esogene migliora l'adattamento del modello ai dati e, se utilizziamo la distribuzione normale per la stima dei parametri, il modello migliore, in termini di adattamento ai dati, risulta il modello 2.4 che prevede una specificazione HAR-GARCH con l'inserimento delle esogene in media. Le esogene significative per il momento primo del processo sono l'indice Standard & Poors 1500 (SP).

Se invece proviamo a modificare la funzione di densità otteniamo il valore più alto della funzione di log-verosimiglianza per il modello 2.8 in cui viene utilizzata la distribuzione GED per la stima di massima verosimiglianza dei parametri; e che prevede una specificazione HAR per la media del processo in cui inseriamo le variabili esogene e le esogene in forma HAR; e una specificazione GARCH per il momento secondo della serie, che dipende a sua volta dall'esponenziale delle esogene. Nell'equazione della media diventa significativo l'indice Standard & Poors 1500 (SP) e la componente settimanale dello stesso indice, la componente settimanale e mensile del tasso di interesse a breve termine (RB) e la componente mensile del tasso di cambio Euro/Dollaro (EU).

Infine ampliamo l'orizzonte temporale di altri sei mesi, quindi dal gennaio 2003 al giugno 2007. In appendice, tabella 5, sono riportate le stime dei modelli HAR-GARCH. Possiamo notare che il test di Ljung-Box rifiuta l'ipotesi nulla di incorrelazione dei residui nel modello 3.1 HAR standard e nel modello 3.6 che prevede una specificazione HAR-GARCH con innovazioni Gaussiane, con variabili esogene, variabili *dummy* e variabili esogene in forma HAR inserite nella media del processo, e variabili esogene inserite nell'equazione della varianza, mentre in tutti gli altri sei modelli i residui risultano incorrelati. Evidenziamo inoltre che l'inserimento delle variabili dummy e delle esogene migliora l'adattamento del modello ai dati e, se utilizziamo la distribuzione normale per la

stima dei parametri il miglior modello, il modello migliore risulta il modello 3.5 che prevede una specificazione HAR-GARCH con l'inserimento delle esogene in media e in varianza. Le esogene significative per il momento primo del processo sono l'indice Standard & Poors 1500 (SP) e il Tasso di interesse a breve termine (RB); mentre per il momento secondo risulta significativa esclusivamente l'esponenziale dell'indice Standard & Poors 1500.

Se invece proviamo a modificare la funzione di densità otteniamo il valore più alto della funzione di log-verosimiglianza per il modello 3.8 in cui viene utilizzata la distribuzione GED per la stima di massima verosimiglianza dei parametri; e che prevede una specificazione HAR per la media del processo in cui inseriamo le variabili esogene e le esogene in forma HAR; e una specificazione GARCH per il momento secondo della serie, che dipende a sua volta dall'esponenziale delle esogene. Nell'equazione della media diventa significativo l'indice Standard & Poors 1500 (SP) e la componente settimanale dello stesso indice; anche l'equazione della varianza dipende in modo significativo dall'esponenziale dello Standard & Poors 1500 (SP).

4. Previsioni

I modelli stimati possono essere utilizzati per prevedere i valori futuri della volatilità. Per calcolare le previsioni dividiamo l'insieme delle informazioni disponibili in due sottoinsiemi, il primo che definiremo da 1 a T e chiameremo periodo campionario, che verrà utilizzato per la stima del modello; ed un altro, da T+1 a T*, che chiameremo periodo di previsione, per il quale la disponibilità di informazioni ci permetterà di operare un confronto tra le previsioni prodotte dal modello con coefficienti stimati nel primo sottocampione e le realizzazioni del processo per il periodo di previsione.

Noi sceglieremo di procedere utilizzando la metodologia della *previsione statica*, che consiste nell'utilizzo del modello dinamico stimato sul periodo campionario da 1 a T, per l'esercizio di previsione sul periodo da T+1 a T*.

$$E[RR_{t+1} | I_t] = RR_{t+1|t} = E[\alpha_0 + \alpha_d RR_t + \alpha_w RR_{t-4:t} + \alpha_m RR_{t-21:t} + \sqrt{h_t} u_t]$$

$$RR_{t+1|t} = \hat{\alpha}_0 + \hat{\alpha}_d RR_t + \hat{\alpha}_w RR_{t-4:t} + \hat{\alpha}_m RR_{t-21:t}$$

La previsione statica viene anche denominata *one-step ahead* in quanto utilizziamo i valori osservati fino ad un istante temporale prima del periodo di previsione. Il valore della stima :

$$\hat{\theta} = (\hat{\alpha}_0, \hat{\alpha}_d, \hat{\alpha}_w, \hat{\alpha}_m, \hat{\omega}, \hat{\alpha}_1, \hat{\beta}_1)$$

viene ottenuto sulla base del periodo campionario e non viene aggiornato con i dati fino a T+τ-1. La logica dietro tale esercizio è che si stabilisce che la stima del parametro ottenuta sul periodo campionario sia sufficientemente stabile, ossia il guadagno in precisione sia inferiore al costo di ricalcolarla.

La differenza tra il valore realizzato RR_{t+1} e il valore atteso $RR_{t+1|t}$ condizionato ad un insieme informativo si chiama errore di previsione e può essere l'oggetto di valutazione della capacità previsiva del modello.

Al fine di valutare la capacità previsiva del modello, i valori previsti e le effettive realizzazioni possono essere confrontati mediante il calcolo di misure sintetiche degli errori di previsione, tra le quali ricordiamo quelle calcolate automaticamente da EVIEWS :

- la radice dell'*errore quadratico medio* (*Root Mean Squared Error* - RMSE) che calcola la radice quadrata della media aritmetica degli errori di previsione al quadrato.

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{T^* - T} \sum_{s=T+1}^{T^*} (\hat{y}_s - y_s)^2}$$

- l'*errore assoluto medio* (*Mean Absolute Error* - MAE) che calcola la media aritmetica degli errori di previsione in valore assoluto (per evitare che gli errori di segno opposto si compensino).

$$MAE = \frac{1}{T^* - T} \sum_{s=T+1}^{T^*} |\hat{y}_s - y_s|$$

- l'*indice di Theil*; tanto minore risulta essere la misura di errore calcolata, tanto migliore sarà ritenuta la capacità previsiva del modello. In particolare l'indice di Theil assume valori tra zero e uno, segnalando in tal modo le due situazioni estreme di adattamento perfetto (valore dell'indice pari a zero) o pessimo (valore pari a uno).

$$Theil = \frac{\sqrt{\frac{1}{T^* - T} \sum_{s=T+1}^{T^*} (\hat{y}_s - r_s)^2}}{\sqrt{\frac{1}{T^* - T} \sum_{s=T+1}^{T^*} \hat{y}_s^2} + \sqrt{\frac{1}{T^* - T} \sum_{s=T+1}^{T^*} r_s^2}}$$

Abbiamo inoltre utilizzato il test di Diebold-Mariano, per confrontare l'accuratezza della capacità previsiva di due modelli. Definiamo gli errori di previsione dei due modelli (per $i = 1, 2$) come :

$$\varepsilon_{t+h|t}^1 = y_{t+h} - y_{t+h|t}^1$$

$$\varepsilon_{t+h|t}^2 = y_{t+h} - y_{t+h|t}^2$$

L'accuratezza di ogni singola previsione è misurata dalla funzione $L(\varepsilon_{t+h|t}^i)$

$$L(\varepsilon_{t+h|t}^i) = (\varepsilon_{t+h|t}^i)^2 = (y_{t+h} - y_{t+h|t}^i)^2 \quad ; \quad i = 1, 2$$

Per determinare se le previsioni di un modello siano migliori o no rispetto a quelle del secondo modello, possiamo sottoporre ad un test le seguenti ipotesi

$$H_0 : E[L(\varepsilon_{t+h|t}^1)] = E[L(\varepsilon_{t+h|t}^2)]$$

$$H_1 : E[L(\varepsilon_{t+h|t}^1)] \neq E[L(\varepsilon_{t+h|t}^2)]$$

Il Test di Diebold-Mariano si basa sulla differenza d_t . Sotto l'ipotesi nulla, non vi sono differenze significative nelle previsioni dei due modelli.

$$d_t = L(\varepsilon^1_{t+h|t}) - L(\varepsilon^2_{t+h|t})$$

$$H_0 : E[d_t] = 0$$

La statistica test di Diebold-Mariano è :

$$S = \frac{\bar{d}}{\sqrt{a \text{var}(\bar{d})}} = \frac{\bar{d}}{\sqrt{\frac{LR\hat{V}_{\bar{d}}}{T}}}$$

dove

$$\bar{d} = \frac{1}{T} \sum_{t=t_0}^T d_t$$

$$LR\hat{V}_{\bar{d}} = \gamma_0 + 2 \sum_{j=1}^{\infty} \gamma_j \quad ; \quad \gamma_j = \text{cov}(d_t, d_{t-j})$$

e $LR\hat{V}_{\bar{d}}$ è una stima consistente della varianza asintotica di $\sqrt{T}\bar{d}$. Diebold e Mariano (1995) dimostrano che sotto l'ipotesi nulla

$$S \overset{A}{:} N(0,1)$$

Analizziamo inizialmente le previsioni fatte dal luglio 2007 a dicembre 2007. Se valutiamo, in appendice figura 12, l'andamento dell'indice di Theil e l'RMSE osserviamo che le previsioni migliorano costantemente dal modello più semplice fino al Modello 1.4 che prevede una specificazione HAR-GARCH con l'inserimento delle esogene nell'equazione della media.

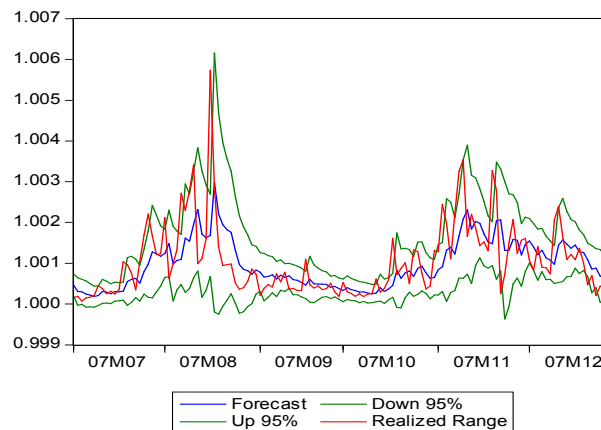


Figura II. Previsioni e intervallo di previsione one-step ahead per il Realized Range dal giugno 2007 al dicembre 2007, in base al Modello 1.4.

Il test di Diebold-Mariano inoltre evidenzia che esiste una differenza al limite della significatività nel passaggio dal Modelle 1.3 al Modello 1.4 ; mentre il confronto tra la capacità previsiva degli altri modelli non mostra differenze significative.

Possiamo dunque concludere dicendo che inserire le variabili esogene nell'equazione della media migliora la capacità previsiva del modello; mentre non si osservano delle differenze significative nel momento in cui le esogene entrano nell'equazione della varianza, oppure se inseriamo le stesse variabili in forma HAR nell'equazione della media.

Consideriamo ora l'orizzonte temporale che intercorre dal gennaio 2003 al dicembre 2007 e facciamo le previsioni per i primi sei mesi del 2008; notiamo che le differenze tra la capacità previsiva degli otto modelli si attenua e il test di Diebold-Mariano non riscontra differenze significative tra i residui delle diverse previsioni. Il modello che garantisce delle previsioni con un indice di Theil inferiore è il modello 2.5 che prevede una specificazione HAR-GARCH con innovazioni Gaussiane, con variabili esogene e variabili *dummy* inserite nella media del processo, e varibili esogene inserite nell'equazione della varianza. Le previsioni ottenute con tale specificazione sono rappresentate graficamente nella figura sottostante. Si può notare che nei primi tre mesi del 2008 la variabilità del realized range è stata molto alta, di conseguenza si amplia l'intervallo di previsione; mentre da aprile a giugno 2008 la variabilità del realized range è stata relativamente bassa, così come l'intervallo previsivo.

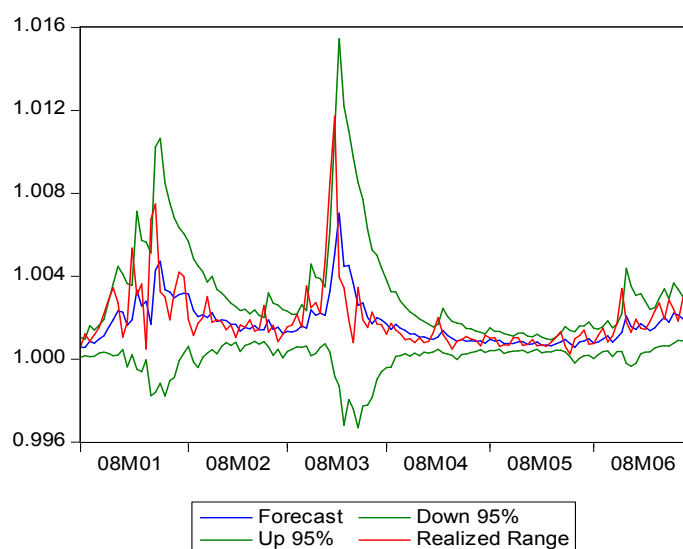


Figura III. Previsioni e intervallo di previsione one-step ahead per il Realized Range dal gennaio 2008 al giugno 2008, in base al Modello 2.5 .

Infine consideriamo l'orizzonte temporale che intercorre dal gennaio 2003 al giugno 2008, e svolgiamo l'esercizio di previsione per gli ultimi sei mesi del 2008. Anche in tal caso notiamo che le differenze tra la capacità previsiva degli otto modelli si attenua e il test di Diebold-Mariano non riscontra differenze significative tra i residui delle diverse previsioni. Il modello che garantisce delle previsioni con un indice di Theil inferiore è il modello 2.6 che prevede una specificazione HAR-GARCH con innovazioni Gaussiane, con variabili esogene, variabili *dummy* e variabili esogene in forma HAR inserite nella media del processo, e variabili esogene inserite nell'equazione della varianza. Le previsioni ottenute con tale specificazione sono rappresentate graficamente nella figura sottostante. Si può notare che nei primi mesi di luglio e agosto 2008 la variabilità del realized range è stata molto bassa, per poi aumentare vistosamente negli altri quattro mesi, ad iniziare da settembre 2008.

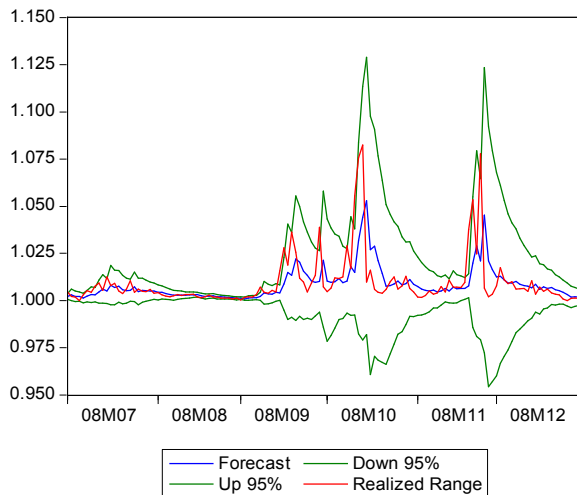


Figura IV. Previsioni e intervallo di previsione one-step ahead per il Realized Range dal luglio 2008 al dicembre 2008, in base al Modello 3.4 .

Possiamo dunque affermare che risulta difficile discriminare tra i diversi modelli stimati, in termini di capacità previsive, soprattutto nei periodi di straordinaria turbolenza dei mercati finanziari. Abbiamo però osservato che, se consideriamo l'orizzonte temporale caratterizzato da una relativa stabilità dei mercati finanziari, il modello che garantisce delle performance previsive migliori è il modello HAR-GARCH con innovazioni Gaussiane e variabili esogene inserite nell'equazione della media del processo.

Conclusione

In questo lavoro abbiamo studiato le proprietà del realized range come misura della volatilità giornaliera. Nella prima parte del lavoro sperimentale abbiamo calcolato lo stimatore per diverse frequenze campionarie in modo tale da verificare se al variare degli intervalli intragiornalieri considerati cambi la distribuzione dello stimatore. Abbiamo inoltre confrontato il realized range con il realized variance e con altri tre indicatori, calcolati correggendo la specificazione del realized range.

In teoria l'high-low range è uno stimatore di volatilità più efficiente del quadrato dei residui; in pratica però dobbiamo tenere in considerazione le distorsioni dovute alla microstruttura dei mercati, quali il bid-ask bounce e le contrattazioni infrequenti. Abbiamo verificato che il realized range è meno sensibile a tali effetti distorsivi rispetto al realized variance, infatti è molto più evidente una distorsione verso l'alto del realized variance calcolato alle frequenze più elevate; mentre è meno chiaro un cambiamento nella distribuzione del realized range. Inoltre il confronto tra i due stimatori ci ha consentito di evidenziare che il realized range, scalato per la costante di Parkinson, consente di avere una varianza inferiore a quella del realized variance per qualsiasi intervallo intragiornaliero considerato. Ci siamo inoltre concentrati su una procedura di correzione del realized range che si basa sul rapporto tra il livello medio del daily range e il livello medio del realized range; le statistiche descrittive e i grafici evidenziano che tale correzione consente di stabilizzare la media della distribuzione del realized range, in modo tale da renderla più stabile all'aumentare della frequenza di campionamento.

Nella seconda parte della tesi abbiamo deciso di concentrarci sulla modellazione della serie storica del realized range corretto per il rapporto tra il livello medio del daily range e il livello medio del realized range; lo stimatore è stato calcolato ad intervalli intragiornalieri di cinque minuti in modo tale da garantire un bilanciamento tra l'incremento della precisione e gli effetti distorsivi dovuti alla microstruttura dei mercati.

I risultati ottenuti dalla stima dei modelli HAR standard dimostrano che le innovazioni sono caratterizzate da una distribuzione non-Gaussiana e da una volatilità che varia nel tempo. Per tener conto della volatility clustering osservata nei residui, abbiamo esteso il modello HAR includendo una specificazione GARCH. La classe di modelli HAR-GARCH riesce ad interpretare la memoria lunga,

l'eteroschedasticità condizionale e la volatility clustering osservata nel realized range, sia nei periodi di relativa stabilità dei mercati che nell'orizzonte temporale che comprende la grave crisi finanziaria del 2008. Abbiamo però verificato che l'assunzione di normalità dei residui viene sempre rigettata con molta evidenza, nonostante l'utilizzo della funzione di densità GED e t-Student per la stima dei parametri.

L'adattamento del modello ai dati migliora ulteriormente se inseriamo nell'equazione della media e della varianza, delle variabili esogene indicative dell'andamento di mercato. La variabile maggiormente significativa risulta l'indice Standard & Poors 1500, e in particolare abbiamo verificato che all'aumentare dell'indice diminuisce la volatilità del titolo J.P.Morgan.

Risulta difficile infine discriminare tra i diversi modelli stimati, in termini di capacità previsive, soprattutto nei periodi di straordinaria turbolenza dei mercati finanziari. Abbiamo però osservato che, se consideriamo l'orizzonte temporale caratterizzato da una relativa stabilità dei mercati finanziari, il modello che garantisce delle performance previsive migliori è il modello HAR-GARCH con innovazioni Gaussiane e variabili esogene inserite nell'equazione della media del processo.

Bibliografia

Sassan Alizadeh , Michael W. Brandt , Francis X. Diebold (2002) : “Range based estimation of stochastic volatility models” , Journal of Finance 47, 1047-1092.

Torben G. Andersen, Tim Bollerslev, Francis X. Diebold , Heiko Ebens (2001a) : “The distribution of realized stock return volatility” , Journal of Financial Economics, 61, 43-76.

Anil K. Bera , Matthew L. Higgins (1993) : “ARCH models: properties, estimation and testing” , Journal of Economic Surveys, 7, 305-362.

Michael W. Brandt , Christopher S. Jones (2004) : “Volatility forecasting with range-based EGARCH models” , Journal of Business & Economic Statistics, Vol. 24, No. 4.

Massimiliano Caporin , Michael McAleer (2009) : "A Scientific Classification of Volatility Models"

Nunzio Cappuccio , Renzo Orsi (2005) : “Econometria”.

Kim Christensen , Mark Podolskij (2007) : “Realized range-based estimation of integrated variance” , Journal of Econometrics 141 , 323-349.

Fulvio Corsi , Uta Kretschmer , Stefan Mittnik, Christian Pigorsch (2005) : “The Volatility of Realized Volatility” , Center for Financial Studies No. 2005/33.

Michel M. Dacorogna, Ramazan Gençay, Ulrich Muller, Richard B. Olsen, Oliver V. Pictet (2001) : “An introduction to high-frequency finance”.

Francis X. Diebold , Roberto S. Mariano (1995) : “Comparing predictive accuracy” , Journal of Financial Economics Statistics, 13, 253-265.

Giampiero M. Gallo , Barbara Pacini (2002) : “Metodi quantitativi per i mercati finanziari”.

Martin Martens , Dick van Dijk (2007) : “Measuring volatility with the realized range” , Journal of Econometrics, 138, 181-207.

Michael Parkinson (1980) : “The extreme value method for estimating the variance of the rate of return” , Journal of Business, 53, 61-65.

Timo Terasvirta (2006) : “An introduction to univariate GARCH Models” , Working Papers in Economics and Finance, No. 646.

