



# UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Dipartimento di Fisica e Astronomia “Galileo Galilei”

Corso di Laurea in Fisica

Tesi di Laurea Triennale

Teoria Secolare per sistemi planetari compatti

Relatore

Prof. Francesco Marzari

Laureando

Alberto Fragomeni

Anno Accademico 2019/2020

# Indice

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| <b>1</b> | <b>Introduzione</b>  | <b>1</b>  |
| <b>2</b> | <b>Teoria Secolare Classica</b>  | <b>2</b>  |
| 2.1      | Applicazione teorica per Giove e Saturno . . . . .                                       | 4         |
| <b>3</b> | <b>Post Newtonian Approximation</b>  | <b>6</b>  |
| <b>4</b> | <b>Hamiltoniana del sistema pianeta-stella madre in<br/>Post Newtonian Approximation</b> | <b>9</b>  |
| 4.1      | Studio delle stabilità secondo Lyapunov dell'Hamiltoniana Relativistica . . . . .        | 11        |
| <b>5</b> | <b>Moti stabili di <math>H_{GR}</math> e confronto con il caso classico</b>              | <b>13</b> |
| 5.1      | Correzione relativistica nell'evoluzione secolare . . . . .                              | 14        |
| <b>6</b> | <b>Conclusioni</b>   | <b>17</b> |
| <b>7</b> | <b>Bibliografia</b>  | <b>18</b> |

# 1 Introduzione

Lo scopo della tesi è lo studio della Teoria Secolare, conosciuta come Teoria di Lagrange-Laplace, includendo gli effetti della Relatività Generale per un sistema a due pianeti con orbite a bassa eccentricità e inclinazione. In primo luogo si effettuerà uno studio della teoria, dal punto di vista puramente classico, con i conseguenti risultati dal punto di vista fisico delle variazioni temporali di inclinazione e eccentricità dell'orbita del pianeta perturbato. La seconda parte sarà dedicata allo sviluppo di un sistema Hamiltoniano consistente che permetta di studiare i moti del sistema dal punto di vista relativistico attraverso l'approssimazione dell'ordine di  $\mathcal{O}(1/c^4)$  delle equazioni di campo di Einstein, ovvero la Post Newtonian Approximation. Vi sarà inoltre uno studio delle stabilità del potenziale perturbativo, prodotto dai termini relativi alla Relatività Generale, per poter capire a priori come può evolvere il sistema secolare in condizioni di campo debole. Infine, saranno esplicitate le correzioni relativistiche all'interno della Teoria Secolare con un conseguente confronto con il caso puramente classico.

La Teoria di Laplace-Lagrange riesce a spiegare, con un ottimo grado di predittività, le osservazioni di numerosi corpi di grande dimensione nelle zone più interne di sistemi extrasolari con orbite a bassa eccentricità e a corto raggio.

## 2 Teoria Secolare Classica

La soluzione secolare di un sistema a due pianeti stabile e compatto è conosciuta come teoria Laplace-Lagrange. Il modello prevede il moto di due pianeti  $m_1$  e  $m_2$  sotto l'effetto dell'attrazione gravitazionale del punto di centro di massa identificato con la stella madre di massa  $m_c$ . La funzione di disturbo tra i due pianeti è:

$$\mathcal{R} = Gm_2 \left[ \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3} - \frac{\mathbf{r}_2}{r_2^3} \right] \quad (2.1)$$

dove il primo addendo dicesi termine diretto e il secondo addendo termine indiretto. L'espansione in serie di Fourier di  $\mathcal{R}$  in funzione degli elementi orbitali  $a$  (semiasse maggiore),  $e$  (eccentricità),  $I$  (inclinazione),  $\lambda = \mathcal{M} + \bar{\omega}$ ,  $\Omega$  (pulsazione), prende la forma

$$\mathcal{R}(a_1, a_2, e_1, e_2, I_1, I_2) = \sum_{(j_1, 2, n_1, 2, m_1, 2)=0}^{\infty} S(a_{1,2}, e_{1,2}, I_{1,2}) \cos(j_1 \lambda_1 + j_2 \lambda_2 + m_1 \varpi_1 + m_2 \varpi_2 + n_1 \Omega_1 + n_2 \Omega_2) \quad (2.2)$$

In primo luogo si media sugli angoli  $\lambda_i$ , poichè tali angoli variano velocemente sul lungo periodo di tempo,

$$\langle \mathcal{R} \rangle_{\lambda_i} = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \mathcal{R} d\lambda_1 d\lambda_2 \quad (2.3)$$

Ora, definendo i coefficienti di Laplace come

$$b_s^{(k)} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos(k\psi)}{(1 - 2\alpha \cos(\psi) + \alpha^2)^s} d\psi \quad (2.4)$$

si arriva ad una forma molto semplificata della funzione di disturbo, ovvero, per  $j = 1, 2$  e  $j \neq k$ , si ha

$$\mathcal{R}_j = n_j a_j^2 \left[ \frac{1}{2} A_{jj} e_j^2 + A_{jk} e_1 e_2 \cos(\varpi_1 - \varpi_2) + \frac{1}{2} B_{jj} I_j^2 + B_{jk} I_1 I_2 \cos(\Omega_1 - \Omega_2) \right] \quad (2.5)$$

ove gli elementi di matrice che sono presenti nella funzione di disturbo hanno la forma:

$$\begin{aligned} A_{jj} &= \frac{n_j}{4} \frac{m_k}{m_j + m_c} \alpha_{12} \bar{\alpha}_{12} b_{3/2}^{(1)}(\alpha_{12}) \\ A_{jk} &= -\frac{n_j}{4} \frac{m_k}{m_j + m_c} \alpha_{12} \bar{\alpha}_{12} b_{3/2}^{(2)}(\alpha_{12}) \\ B_{jj} &= -\frac{n_j}{4} \frac{m_k}{m_j + m_c} \alpha_{12} \bar{\alpha}_{12} b_{3/2}^{(1)}(\alpha_{12}) \\ B_{jk} &= \frac{n_j}{4} \frac{m_k}{m_j + m_c} \alpha_{12} \bar{\alpha}_{12} b_{3/2}^{(1)}(\alpha_{12}) \end{aligned} \quad (2.6)$$

con  $\alpha_{12} = \bar{\alpha}_{12} = \frac{a_1}{a_2}$  se  $j = 1$ , mentre  $\bar{\alpha}_{12} = 1$  se  $j = 2$ . Siamo giunti a definire due matrici differenti che hanno come elementi interni solo i valori costanti delle masse del sistema stella madre-pianeta-pianeta e dal semiasse maggiore dei due corpi. Inoltre si nota che  $\det(\mathbf{B}) = 0$ , questo fatto sarà fisicamente interpretabile in seguito.

Ora soffermandoci sugli spazi cartesiani  $\mathcal{E}$  e  $\mathcal{I}$  ove giacciono rispettivamente i vettori con componenti le eccentricità  $e_j$  e le inclinazioni  $I_j$ . Ponendo che gli angoli polari di tali spazi siano rispettivamente gli angoli  $\bar{\omega}$  e  $\Omega$ , si definiscono le componenti verticali e orizzontali dell'eccentricità e inclinazione dei due corpi come: in  $\mathcal{E}$  si ha

$$h_j = e_j \sin \varpi_j \quad k_j = e_j \cos \varpi_j \quad (2.7)$$

mentre in  $\mathcal{I}$  si ha

$$p_j = I_j \sin \Omega_j \quad q_j = I_j \cos \Omega_j \quad (2.8)$$

Facendo tale cambio di variabili nell'equazione (2.5) si può riscrivere nella forma

$$\mathcal{R}_j = n_j a_j^2 \left[ \frac{1}{2} A_{jj} (h_j^2 + k_j^2) + A_{jk} (k_j k_k + h_j h_k) + \frac{1}{2} B_{jj} (p_j^2 + q_j^2) + B_{jk} (p_j p_k + q_j q_k) \right] \quad (2.9)$$

In tali variabili possiamo scrivere le equazioni di Lagrange planetarie che ci descrivono la variazione degli elementi orbitali dovuta a una perturbazione. Prendendo a titolo d'esempio  $h_j$ , poichè il calcolo per le restanti tre variabili è del tutto analogo, si ricava derivando rispetto al tempo:

$$\begin{pmatrix} \dot{h}_1 \\ \dot{h}_2 \end{pmatrix} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}$$

e derivando ulteriormente si ha

$$\begin{pmatrix} \ddot{h}_1 \\ \ddot{h}_2 \end{pmatrix} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} \dot{k}_1 \\ \dot{k}_2 \end{pmatrix} = -\mathbf{A}^2 \begin{pmatrix} \dot{h}_1 \\ \dot{h}_2 \end{pmatrix}$$

Chiamando ora  $\dot{h}_1 = v_1$  e  $\dot{h}_2 = v_2$  si può riscrivere l'equazione del second'ordine precedente come un'equazione al prim'ordine equivalente, ovvero:

$$\begin{pmatrix} \dot{h}_1 \\ \dot{h}_2 \\ \dot{v}_1 \\ \dot{v}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{O}_2 & \mathbb{I}_2 \\ -\mathbf{A}^2 & \mathbb{O}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \mathbf{\Lambda} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \quad (2.10)$$

Innanzitutto, vedendo che gli autovalori  $\{\lambda_j\}_{j=1,2}$  di  $\mathbf{A}^2$  non sono che il quadrato degli autovalori di  $\mathbf{A}$ , si può dimostrare che la matrice  $\mathbf{\Lambda}$  ha autovalori  $\{\sqrt{-\lambda_j}\}_{j=1,2}$ . Chiamando  $\{g_j\}_{j=1,2}$  gli autovalori della matrice  $\mathbf{A}$  (e  $\{f_j\}_{j=1,2}$  quelli della matrice  $\mathbf{B}$ ), si hanno i seguenti autovalori per  $\mathbf{\Lambda}$ :

$$\tau_{1,2} = \pm i g_1 \quad \tau_{3,4} = \pm i g_2$$

Si ha dunque che le equazioni hanno la forma di un problema alle piccole oscillazioni e la soluzione generale per ognuna delle quattro variabili introdotte è:

$$h_j = \sum_{i=1}^2 e_{ji} \sin(g_i t + \gamma_i) \quad k_j = \sum_{i=1}^2 e_{ji} \cos(g_i t + \gamma_i) \quad (2.11)$$

$$p_j = \sum_{i=1}^2 I_{ji} \sin(f_i t + \eta_i) \quad q_j = \sum_{i=1}^2 e_{ji} \cos(f_i t + \eta_i) \quad (2.12)$$

Dunque  $\{g_i\}_{i=1,2}$  sono le frequenze fondamentali del sistema nello spazio  $\mathcal{E}$ . Esse sono facilmente ricavabili risolvendo l'equazione agli autovalori per la matrice  $\mathbf{A}$ ; si denominano i parametri  $\frac{b_{3/2}^{(2)}(\alpha_{12})}{b_{3/2}^{(1)}(\alpha_{12})} \equiv \beta$ ,

$\frac{n_1 m_1 \alpha_{12}^2 b_{3/2}^{(1)}(\alpha_{12})}{4M} \equiv \sigma$ ,  $q = A_{11}$ . Inoltre, per il sistema considerato si ha  $\alpha \ll 1$ , perciò si possono semplificare i coefficienti di Laplace  $b_{3/2}^{(1)} \approx 3\alpha$  e  $b_{3/2}^{(2)} \approx 15\alpha^2/4$ . Ora date queste sostituzioni, si ricavano le autofrequenze dall'equazione agli autovalori  $\mathbf{A}\mathbf{y}_i = g_i \mathbf{y}_i$ , ovvero

$$g_i = -\frac{1}{2}\sigma [q + \sqrt{\alpha} \pm \sqrt{(q - \sqrt{\alpha})^2 + 4q\sqrt{\alpha}\beta^2}] \quad (2.13)$$

Le costanti moltiplicative per gli autovettori invece sono:

$$w_i = \frac{q - \sqrt{\alpha} \mp \sqrt{(q - \sqrt{\alpha})^2 + 4q\sqrt{\alpha}\beta^2}}{2q\beta} \quad (2.14)$$

Allora utilizzando le equazioni (2.7) e  $e_j(t) = \sqrt{h_j^2 + k_j^2}$  si ricava la variazione dell'eccentricità dei due corpi nel tempo

$$e_j(t) = \sqrt{e_{j1}^2 + e_{j2}^2 + 2e_{j1}e_{j2} \cos[(g_1 - g_2)t + \gamma_1 - \gamma_2]} \quad (2.15)$$

ove in quest'ultima equazione le componenti degli autovettori sono già riscalate con la relativa costante moltiplicativa, la quale viene esplicitata nella (2.14).

Concentrando lo sguardo sulle inclinazioni si osserva che il determinante di  $\mathbf{B}$  è nullo, ciò significa che uno degli  $f_i$  deve essere nullo, ovvero vi è un'unica autofrequenza fondamentale. Questo è fisicamente interpretabile come il fatto che le inclinazioni orbitali dei due pianeti non sono indipendenti, bensì devono variare vincolate dalla conservazione del momento angolare orbitale totale del sistema.

Le soluzioni (2.11) e (2.12) implicano che il moto risultante per le due masse è stabile per tutti i tempi. E' però doveroso ricordare che tale teoria è valida per piccoli valori di inclinazione e eccentricità, abbastanza piccoli da permettere un'espansione al second'ordine della funzione di disturbo perturbativo.

## 2.1 Applicazione teorica per Giove e Saturno

Un esempio notevole è l'applicazione della teoria perturbativa ai pianeti Giove e Saturno. Risolvendo l'equazione agli autovalori e trovando le frequenze fondamentali del sistema possiamo plottare, attraverso l'equazione (2.15), i grafici per le eccentricità e inclinazioni, in un range di  $5 \cdot 10^5$  anni, come riportato in Figura 1 e in Figura 2. Il risultato è di particolare interesse poichè, all'interno delle equazioni di  $e(t)_j$  e di  $I(t)_j$ , si ritrovano i segni del termine periodico invertiti, perciò si traduce fisicamente col fatto che un massimo di inclinazione e eccentricità per Giove equivale a un minimo di tali elementi orbitali per Saturno e viceversa. Questo è un risultato generale dovuto alla conservazione del momento angolare del sistema tra i due pianeti. Ovviamente, nei grafici non si sono tenuti in considerazione altri termini perturbativi importanti dovuti a Urano e Nettuno che esulano dagli obiettivi di questo studio.

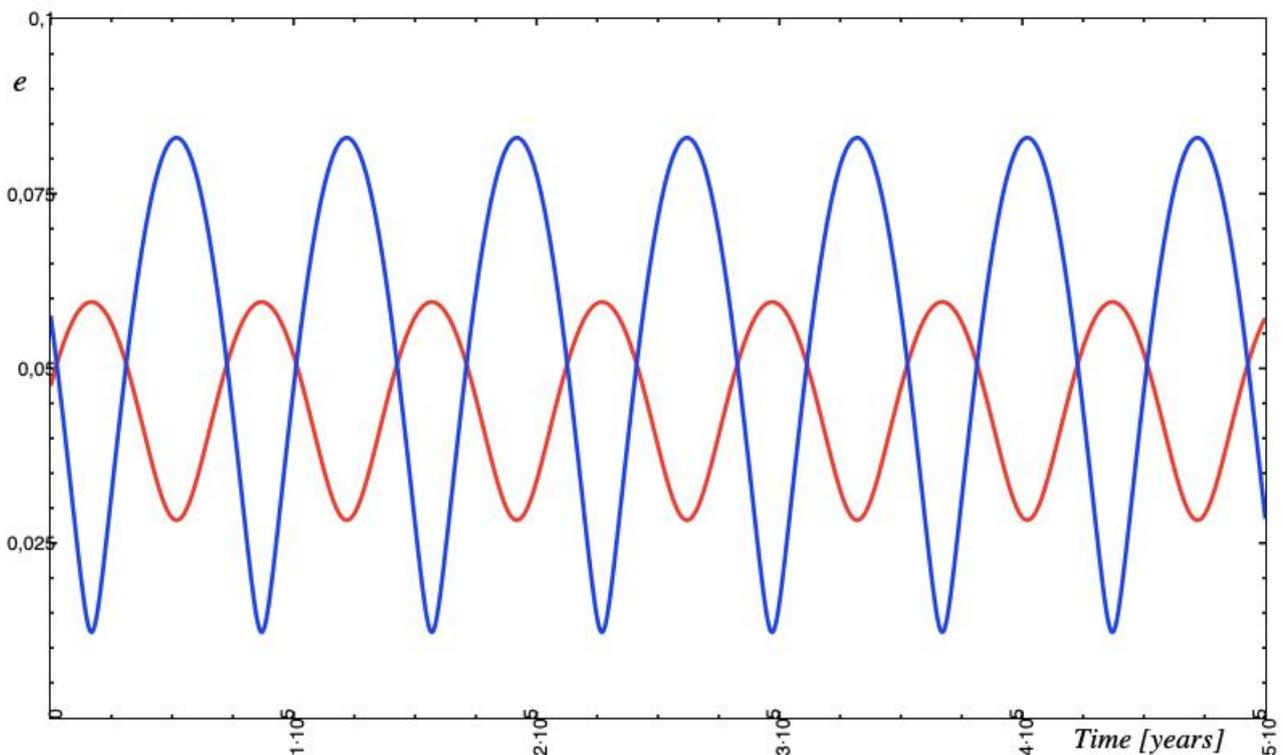


Figura 1: Rappresentazione dell'evoluzione secolare di  $e_j(t)$  per il caso di Giove (in rosso) e Saturno (in blu)

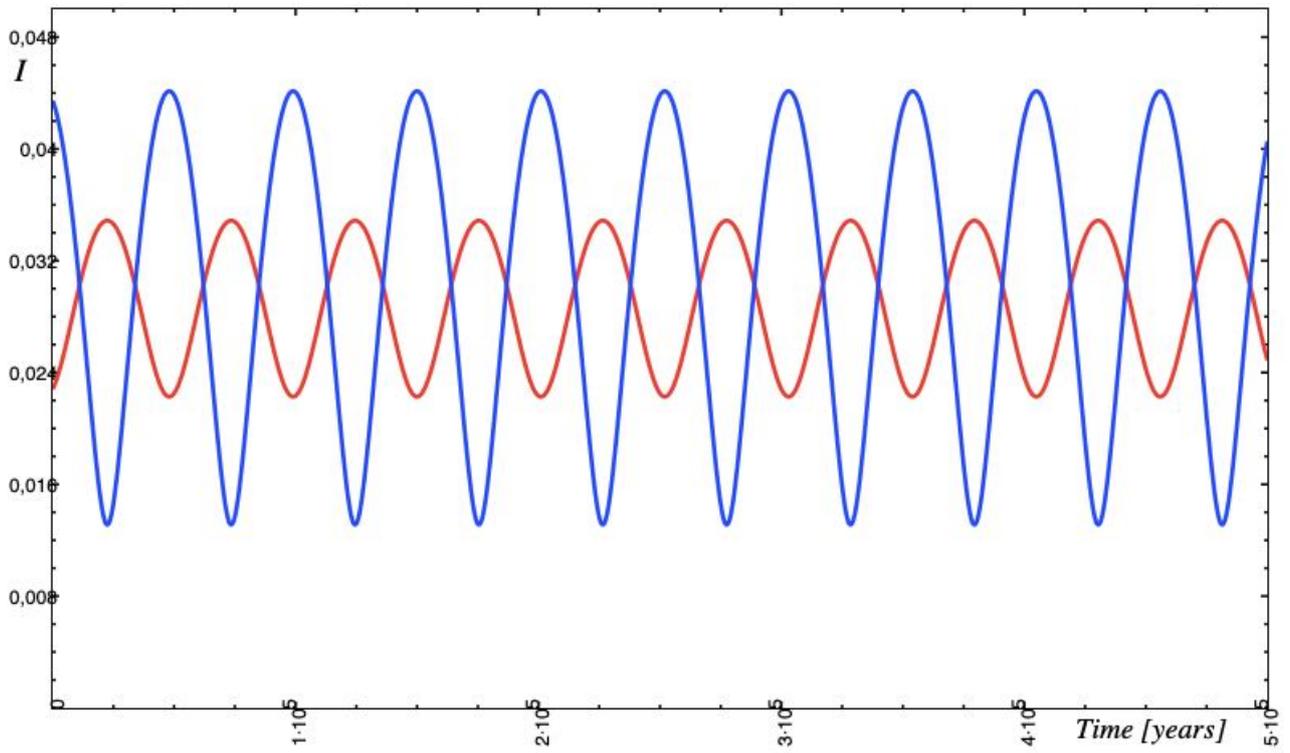


Figura 2: Rappresentazione dell'evoluzione secolare di  $I_j(t)$  per il caso di Giove (in rosso) e Saturno (in blu)

### 3 Post Newtonian Approximation

Ora spostiamo lo sguardo alla Teoria della Relatività Generale. In tale visuale la metrica e le equazioni del moto dei corpi sono le entità primarie della teoria. La difficoltà delle Equazioni di Campo di Einstein, dovuta alla non linearità, comporta il bisogno di un'espansione del tensore metrico  $g_{\mu\nu}$  in termini di  $\mathcal{O}(1/c^n)$ , con  $n = 4$  nel caso della Post Newtonian Approximation. Successivamente sarà posta  $c \equiv 1$  e simbolicamente l'ordine di espansione sarà indicato con  $\mathcal{O}(n)$ . Sapendo che il potenziale Newtoniano è

$$U \equiv \int \frac{\rho(|\mathbf{x}'|, t)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x' \quad (3.1)$$

è facile vedere che in termini di densità-energia è dell'ordine di  $\mathcal{O}(2)$ . Partendo dall'azione del sistema di una particella massiva

$$\phi = -m_0 \int \sqrt{g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu} dt = -m_0 \int \sqrt{g_{00} - 2g_{0j}v^j - g_{jk}v^jv^k} dt \quad (3.2)$$

se ne può prendere l'integrando per avere la Lagrangiana di una particella massiva in campo gravitazionale nel limite newtoniano:

$$\mathcal{L} = \sqrt{1 - 2U - v^2} \quad (3.3)$$

Troviamo dunque che la Lagrangiana newtoniana non è altro che la Lagrangiana generale approssimata all'ordine  $\mathcal{O}(2)$ . Nel limite Post Newtoniano si apportano correzioni dell'ordine di  $\mathcal{O}(4)$ , perciò avremo

$$\mathcal{L}_{PN} = \sqrt{1 - 2U - v^2 - g_{00}[\mathcal{O}(4)] - 2g_{0j}[\mathcal{O}(3)] - g_{jk}[\mathcal{O}(2)]} \quad (3.4)$$

Questa è fisicamente giustificata nel nostro sistema poichè si è in una situazione di moto lento a lungo raggio e campo debole.

Ora ricaviamo i vari termini di espansione di  $g_{\mu\nu}$ . Per prima cosa si scrive il tensore metrico come somma della metrica piatta Minkowskiana  $g_{\mu\nu}^{(0)}$  e di un termine perturbativo  $h_{\mu\nu}$ , dove i termini ulteriori dell'espansione di quest'ultima hanno valori bassi. Si ha

$$g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}^{(0)} + h_{\mu\nu} \quad (3.5)$$

L'obiettivo è scrivere l'espansione della metrica attraverso Potenziali Post Newtoniani dipendenti dalla distanza  $|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$  ove  $\mathbf{x}'$  è il punto associato alla distribuzione di massa. Due restrizioni fondamentali per trovare tali potenziali sono che i termini della metrica siano adimensionali e che le correzioni delle componenti perturbative debbano trasformare rispettivamente come uno scalare, un vettore e un tensore. Definiamo  $\Pi$  come l'energia interna del corpo sull'unità di massa a riposo e  $\rho$  come la densità di massa-energia a riposo.

- $g_{ik}$  all'ordine  $\mathcal{O}(2)$  deve trasformare come un tensore invariante per rotazioni, perciò deve dipendere solamente da  $U\delta_{ij}$ , ove  $U$  è il potenziale gravitazionale Newtoniano e dal potenziale

$$U_{ij} \equiv \int \frac{\rho(|\mathbf{x}'|, t)(x - x')_j(x - x')_k}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} d^3x' \quad (3.6)$$

- $g_{0j}$  all'ordine  $\mathcal{O}(3)$  deve trasformare come un vettore invariante per rotazioni, avremo quindi due possibili potenziali:

$$V_{ij} \equiv \int \frac{\rho(|\mathbf{x}'|, t)v'_j}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x' \quad (3.7)$$

$$W_{ij} \equiv \int \frac{\rho(|\mathbf{x}'|, t)\mathbf{v}' \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')_j(x - x')_j}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} d^3x' \quad (3.8)$$

- $g_{00}$  all'ordine  $\mathcal{O}(4)$  ha numerosi possibili potenziali dei quali prenderemo solamente quelli dominanti per il sistema della Teoria Secolare, che sono di principale interesse:

$$\Phi_1 \equiv \int \frac{\rho(|\mathbf{x}'|, t)v'^2}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x' \quad (3.9)$$

$$\Phi_2 \equiv \int \frac{\rho(|\mathbf{x}'|, t)\Pi'v'^2}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x' \quad (3.10)$$

Gli ordini di espansione del termine perturbativo saranno dunque in PNA

$$h_{00} \sim \mathcal{O}(2) + \mathcal{O}(4) \quad h_{0j} \sim \mathcal{O}(3) \quad h_{ij} \sim \mathcal{O}(2)$$

Facendo tendere  $h_{00} \rightarrow 0$  si ottiene la sua espansione all'ordine  $\mathcal{O}(2)$ , ossia ponendo  $G = 1$ ,

$$h_{00}^{(2)} = 2U \quad (3.11)$$

Per i termini successivi è necessario espandere le componenti del tensore stress-energia poichè entrano in gioco le parti non lineari dell'equazione di campo. I termini di  $T_{\mu\nu}$  sono

$$T_{\mu\nu} = (\rho + \rho\Pi + p)u_\mu u_\nu + pg_{\mu\nu} \quad (3.12)$$

Questa modalità di scrivere il tensore stress-energia è di particolare interesse poichè associa la metrica e la curvatura dello spazio tempo alle grandezze di un fluido perfetto. Si ha che  $p$  è la pressione isotropica dello spazio e  $\Pi$  è la densità specifica di energia cinetica e termica interna dell'elemento del fluido relativistico. Mentre il tensore metrico all'ordine Newtoniano ha componenti:

$$g_{00} = -1 + 2U \quad g_{0j} = 0 \quad g_{ij} = \delta_{ij} \quad (3.13)$$

inserite quest'ultime in (3.12) si hanno le componenti in PNA di  $T_{\mu\nu}$ .

Prendiamo ora le Equazioni di Campo di Einstein, ponendo per semplicità  $c \equiv 1$

$$R_{\mu\nu} = 8\pi G(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T) \quad (3.14)$$

Per trovare una soluzione del termine perturbativo, ed essere consistenti con tali Equazioni di Campo, dobbiamo espandere le componenti del tensore di curvatura  $R_{\mu\nu}$  agli stessi ordini di espansione del tensore stress-energia. Dalla definizione del tensore di Riemann e contraendo ai due indici si ottiene il tensore di Ricci, che ha componenti in termini del tensore perturbativo  $h_{\mu\nu}$ :

$$\begin{aligned} R_{00} &= -\frac{1}{2}\nabla^2 h_{00} - \frac{1}{2}(\partial_0\partial_0 h^{00} - 2\partial_j\partial_0 h^{j0}) + \frac{1}{2}\partial_0 h^{00}(\partial_k h^{jk} - \frac{1}{2}\partial_j h^{kk}) - \frac{1}{4}|\nabla h_{00}|^2 + \frac{1}{2}h^{jk}\partial_j\partial_k h^{00} \\ R_{0j} &= -\frac{1}{2}(\nabla^2 h_{0j} - \partial_j\partial_k h_0^k + \partial_0\partial_j h_k^k - \partial_0\partial_k h_j^k) \\ R_{ij} &= -\frac{1}{2}(\nabla^2 h_{ij} - \partial_i\partial_j h_{00} + \partial_i\partial_j h_k^k - \partial_k\partial_j h_i^k - \partial_k\partial_j h_j^k) \end{aligned} \quad (3.15)$$

A questo punto si ricava  $h_{ij} \sim \mathcal{O}(2)$ . Imponendo la condizione di gauge:

$$\partial_\mu h_i^\mu - \frac{1}{2}\partial_i h_\mu^\mu = 0 \quad (3.16)$$

l'equazione (3.14) per  $R_{ij}$  e  $T_{ij}$  diventa

$$\nabla^2 h_{ij} = -8\pi\rho\delta_{ij}, \quad h_{ij}^{(2)} = 2U\delta_{ij} \quad (3.17)$$

Mentre imponendo l'ulteriore condizione di gauge

$$\partial_\mu h_0^\mu - \frac{1}{2}\partial_0 h_\mu^\mu = \frac{1}{2}\partial_0 h_{00} \quad (3.18)$$

l'Equazione di Campo diventa

$$\nabla^2 h_{0j} - \frac{1}{2} U_{0j} = -8\pi \rho v_j \quad (3.19)$$

perciò risolvendo si ottiene l'espansione all'ordine  $\mathcal{O}(3)$ , utilizzando i potenziali (3.7) e (3.8), si ottiene

$$h_{0j}^{(3)} = -\frac{7}{2} V_j - \frac{1}{2} W_j \quad (3.20)$$

Infine, rimanendo nella gauge precedente, si ricava, utilizzando i potenziali  $\Phi_1$  e  $\Phi_2$ ,

$$h_{00}^{(4)} = -2U^2 + 2\Phi_1 + \Phi_3 \quad (3.21)$$

Quest'ultimo risultato di espansione può essere semplificato ulteriormente nel sistema particolare pianeta-pianeta-stella madre. Ponendo che, a una distanza apprezzabile dalla stella madre, l'energia termica e cinetica interna al corpo perturbato siano ininfluenti, dunque l'unico contributo all'energia interna del corpo è solo la quantità di massa-energia a riposo, ovvero, in visuale fluidodinamica, che sia pari al volume del fluido relativistico. Allora poniamo il parametro  $\Pi' \sim 1$  e avendo i potenziali  $\Phi_1 \sim \Phi_3$  si può dunque ottenere

$$h_{00}^{(4)} \sim -2U^2 + 3\Phi_1 \quad (3.22)$$

Riassumendo, abbiamo ricavato i termini di espansione di  $g_{\mu\nu}$  fino all'ordine  $\mathcal{O}(4)$  aggiungendo il tensore perturbativo  $h_{\mu\nu}$  alla metrica di Minkowski, arrivando così alla forma dei termini della metrica in Post Newtonian Approximation.

## 4 Hamiltoniana del sistema pianeta-stella madre in Post Newtonian Approximation

Iniziamo considerando il moto di una particella test di massa  $m_2 \rightarrow 0$  in un campo gravitazionale Post-Newtoniano generato dal corpo di massa  $m_1$ . La Lagrangiana  $\mathcal{L}_2$  è ottenuta dal principio variazionale espresso in questo modo:

$$\delta \int_{s(1)}^{s(2)} ds = 0 \quad (4.1)$$

ove  $ds$  è l'intervallo spazio-temporale invariante  $ds = \sqrt{g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu}$ . Siccome l'integrale è l'azione del sistema si ha

$$\delta \int_{x(1)}^{x(2)} \sqrt{g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dx^0} \frac{dx^\nu}{dx^0}} dx^0 = 0$$

arrivando alla forma, con  $t$  parametro temporale,

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}_2 dt = 0 \quad \text{con} \quad \mathcal{L}_2 = (g_{00} + 2 \frac{g_{0i}}{c} \frac{dx^i}{dt} + \frac{g_{ij}}{c^2} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt})^{1/2} \quad (4.2)$$

Scegliamo il seguente segno per i termini di  $g_{\mu\nu}$ :  $g_{00} = 1 + h_{00}$ ,  $g_{0i} = h_{0i}$ ,  $g_{ij} = -\delta_{ij} + h_{ij}$ . Dunque, in Post Newtonian Approximation, sostituendo i termini appena scritti in (2.12) e reinserendo i coefficienti di  $c$  ad ogni termine d'espansione perturbativa di  $h_{\mu\nu}$ , si ha

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_2 &= (1 + h_{00} + 2 \frac{h_{0i}}{c} \frac{dx^i}{dt} - \frac{1}{c^2} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^i}{dt} + \frac{h_{ij}}{c^2} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt}) \\ &= \frac{1}{c^2} \{c^2 + \frac{1}{2}(-\dot{x}^i \dot{x}^i + h_{00}^{(2)} + \frac{1}{c^2} h_{00}^{(4)} + \frac{2}{c^2} h_{0i}^{(3)} \dot{x}^i + \frac{1}{c^2} h_{ij}^{(2)} \dot{x}^i \dot{x}^j)\} - \frac{1}{8c^2} [(\dot{x}^i \dot{x}^i)^2 + (h_{00}^{(2)})^2 - 2h_{00}^{(2)} \dot{x}^i \dot{x}^i] + \mathcal{O}(\frac{1}{c^4}) \\ &= \frac{1}{2} \dot{x}^i \dot{x}^i - h_{00}^{(2)} - \frac{1}{2c^2} [h_{00}^{(4)} + 2h_{0i}^{(3)} \dot{x}^i + h_{ij}^{(2)} \dot{x}^i \dot{x}^i - \frac{1}{4} (\dot{x}^i \dot{x}^i)^2 - \frac{1}{4} (h_{00}^{(2)})^2 + \frac{1}{2} h_{00}^{(2)} \dot{x}^i \dot{x}^i] + \mathcal{O}(\frac{1}{c^4}) \end{aligned} \quad (4.3)$$

ove negli ultimi due passaggi si denota la derivata temporale con la simbologia  $\dot{x}^i$ . Assumiamo che  $\mathbf{r}_1$  abbia componenti  $\{(x - x')_i\}$  e  $\mathbf{r}_2$  abbia componenti  $\{(x - x'')_i\}$ , i quali si riferiscono rispettivamente al corpo (1) e al corpo (2). Assumiamo inoltre che  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ . Ora, sostituendo all'interno della Lagrangiana  $\mathcal{L}_2$  i termini di espansione in PNA (3.11), (3.22), (3.17), (3.20), si ottiene

$$\mathcal{L}_2 = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{r}}_2^2 + \frac{Gm_1}{r} + \frac{1}{c^2} [\frac{1}{8} \dot{\mathbf{r}}_2^2 - \frac{1}{2} (\frac{Gm_1}{r})^2 + \frac{3Gm_1}{2r} (\dot{\mathbf{r}}_1^2 + \dot{\mathbf{r}}_2^2) - \frac{7Gm_1}{2r} \dot{\mathbf{r}}_1 \cdot \dot{\mathbf{r}}_2 - \frac{Gm_1}{2r^3} (\dot{\mathbf{r}}_1 \cdot \mathbf{r})(\dot{\mathbf{r}}_2 \cdot \mathbf{r})] \quad (4.4)$$

L'espressione appena trovata è la Lagrangiana che descrive il moto di una particella test nel campo gravitazionale creato dal corpo  $m_1$ . Notiamo che invertendo (1)  $\leftrightarrow$  (2) si ottiene la Lagrangiana per una particella test nel campo creato dalla massa  $m_2$ , dunque si ha una simmetria tra i moti d'interazione relativistica tra i due corpi. Ma la Lagrangiana  $\mathcal{L}$  che descrive il sistema di due particelle massive interagenti non può essere la semplice sovrapposizione di  $\mathcal{L}_1$  e  $\mathcal{L}_2$  poichè, all'interno delle due espressioni, vi sono dei termini non lineari. In particolare  $\mathcal{L}$  deve essere invariante rispetto alla trasformazione  $m_1 \mathbf{r}_1 \leftrightarrow m_2 \mathbf{r}_2$ . Un punto d'appoggio per trovare  $\mathcal{L}$  è considerare le singole  $\mathcal{L}_{1,2}$  in questo modo:

$$\mathcal{L}_2 = \lim_{m_2 \rightarrow 0} \frac{\mathcal{L}}{m_2}$$

In via del tutto analoga abbiamo il limite

$$\mathcal{L}_1 = \lim_{m_1 \rightarrow 0} \frac{\mathcal{L}}{m_1}$$

Ignorando le singolarità, Il risultato finale sarà

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2} (m_1 \dot{\mathbf{r}}_1^2 + m_2 \dot{\mathbf{r}}_2^2) + \frac{Gm_1 m_2}{r} + \frac{1}{8c^2} (m_1 \dot{\mathbf{r}}_1^4 + m_2 \dot{\mathbf{r}}_2^4) \\ &+ \frac{Gm_1 m_2}{2rc^2} [3(\dot{\mathbf{r}}_1^2 + \dot{\mathbf{r}}_2^2) - 7\dot{\mathbf{r}}_1 \cdot \dot{\mathbf{r}}_2 - \frac{1}{r^2} (\dot{\mathbf{r}}_1 \cdot \mathbf{r})(\dot{\mathbf{r}}_2 \cdot \mathbf{r}) - \frac{G}{r} (m_1 + m_2)] \end{aligned} \quad (4.5)$$

Siamo dunque arrivati a definire la Lagrangiana di interazione tra due particelle massive. Notiamo innanzi tutto che

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r_1} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r_2} = 0$$

perciò, per il Teorema di Noether, il momento nelle direzioni  $\mathbf{r}_1$  e  $\mathbf{r}_2$  è una quantità conservata, ovvero

$$\mathbf{p} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}_1} \mathbf{n}_1 + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}_2} \mathbf{n}_2 = \mathbf{K}, \quad \text{ove} \quad K = \text{cost.}$$

Dalle equazioni di Eulero-Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r_i} = 0$$

è facile mostrare che

$$\mathbf{p} = \frac{d}{dt} \left[ m_1 \mathbf{r}_1 \left( 1 + \frac{\dot{\mathbf{r}}_1^2}{2c^2} - \frac{Gm_2}{2rc^2} \right) + m_2 \mathbf{r}_2 \left( 1 + \frac{\dot{\mathbf{r}}_2^2}{2c^2} - \frac{Gm_1}{2rc^2} \right) \right] \quad (4.6)$$

Notiamo innanzi tutto una simmetria tra i due addendi di  $\mathbf{p}$  secondo la trasformazione  $m_1 \mathbf{r}_1 \leftrightarrow m_2 \mathbf{r}_2$  come si richiedeva all'inizio, perciò continuiamo in questa strada. Integrando rispetto al tempo quest'ultima equazione, giungiamo così ad avere la legge del moto nel sistema del centro di massa

$$M_1^G \mathbf{r}_1 + M_2^G \mathbf{r}_2 - \mathbf{p}t = \mathbf{K}_2 \quad (4.7)$$

ove si è definita  $M_i^G \equiv m_i \left( 1 + \frac{\dot{r}_i^2}{2c^2} - \frac{Gm_j}{2rc^2} \right)$  con  $i \neq j$  la massa gravitazionale dei due corpi. Stabiliamo innanzi tutto la conservazione nel tempo della massa gravitazionale del sistema in accordo con il fatto che la densità di massa a riposo  $\rho$  fosse di valore costante. Perciò

$$\frac{d}{dt} (M_1^G + M_2^G) = 0$$

L'equazione (4.7) ci mostra che il centro di massa gravitazionale si muove di moto uniforme. Allora cambiando sistema di riferimento nel sistema di riferimento inerziale del centro di massa abbiamo

$$M_1^G \mathbf{r}_1 + M_2^G \mathbf{r}_2 = 0 \quad (4.8)$$

Ora basta solo cambiare sistema di riferimento nella Lagrangiana  $\mathcal{L}$ . Dalla definizione di  $\mathbf{r}$  si ricava  $\dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{r}}_2 - \dot{\mathbf{r}}_1$ . Allora questa ultima equazione diventa derivando rispetto al tempo

$$M_1^G \dot{\mathbf{r}}_1 + M_2^G \dot{\mathbf{r}}_2 = \dot{M}_1^G \mathbf{r}_1 + \dot{M}_2^G \mathbf{r}_2 \equiv \mathbf{\Gamma} \quad (4.9)$$

L'appena definito vettore  $\mathbf{\Gamma}$  è dell'ordine di  $1/c^2$  come si evince dalla definizione data sopra di massa gravitazionale. Mettendo a sistema le equazioni (4.8) e (4.9) si esplicitano

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}}_1 &= \frac{-m_2 \dot{\mathbf{r}} + \mathbf{\Gamma}}{m_1 + m_2} \\ \dot{\mathbf{r}}_2 &= \frac{m_1 \dot{\mathbf{r}} + \mathbf{\Gamma}}{m_1 + m_2} \end{aligned}$$

Sostituendo questi ultimi due risultati nell'equazione (4.5) e riscaldando per  $\sigma = \frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2}$  otteniamo la Lagrangiana per il moto relativo del corpo (2).

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{r}}^2 + \frac{\mu}{r} + \frac{1 - 3\sigma}{8c^2} \dot{\mathbf{r}}^4 - \frac{1}{2c^2} \left( \frac{\mu}{r} \right)^2 + \frac{\mu}{2rc^2} [(3 + \sigma) \dot{\mathbf{r}}^2 + \frac{\sigma}{r^2} (\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}})^2] + \mathcal{O}\left(\frac{1}{c^4}\right) \quad (4.10)$$

ove  $\mu = G(M_1 + M_2)$ .

Per ottenere l'Hamiltoniana  $H$  del moto relativo del sistema a due corpi applichiamo una trasformazione di Legendre alla Lagrangiana  $\mathcal{L}$ . Tale trasformazione sarà del tipo:

$$\Lambda_L : (\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) \mapsto \left( \mathbf{r}, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{r}}} \mathbf{n}_{\dot{\mathbf{r}}} \right)$$

Innanzitutto il momento coniugato sarà

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{r}}} \mathbf{n}_{\dot{\mathbf{r}}} \\ &= \dot{\mathbf{r}} + \frac{1}{c^2} \left[ 4\xi_1 \dot{\mathbf{r}}^2 \dot{\mathbf{r}} + \frac{2\xi_2}{r} \dot{\mathbf{r}} + \frac{2\xi_4}{r^3} (\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}}) \dot{\mathbf{r}} \right] \end{aligned} \quad (4.11)$$

Con questo si ricava infine l'Hamiltoniana

$$H = H_N + V_{GR} = \frac{\mathbf{p}^2}{2} - \frac{\mu}{r} - \frac{1}{c^2} \left[ \xi_1 \mathbf{p}^4 + \frac{\xi_2}{r} \mathbf{p}^2 + \frac{\xi_3}{r^2} + \frac{\xi_4}{r^3} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{p})^2 \right] + \mathcal{O}\left(\frac{1}{c^4}\right) \quad (4.12)$$

ove i parametri all'interno dell'Hamiltoniana sono:

$$\xi_1 = \frac{1-3\sigma}{8} \quad \xi_2 = \frac{\mu(3+\sigma)}{2} \quad \xi_3 = \frac{-\mu^2}{2} \quad \xi_4 = \frac{\mu\sigma}{2}$$

Abbiamo appena ricavato l'Hamiltoniana del sistema del moto relativo tra due corpi che interagiscono tra loro in campo gravitazionale Post-Newtoniano con un'accuratezza di  $1/c^2$ .

#### 4.1 Studio delle stabilità secondo Lyapunov dell'Hamiltoniana Relativistica

L'Hamiltoniana  $H$  trovata nell'equazione (4.12) ha un potenziale dipendente dalle velocità, il che ci rende difficile darne un'interpretazione fisica. Il nostro obiettivo è avere una combinazione lineare del tipo  $H = \frac{\mathbf{p}^2}{2} + V_N + V_{GR}$  con una visualizzazione del ritratto in fase dell'hamiltoniana perturbativa ( $H_{GR} = \frac{\mathbf{p}^2}{2} + V_{GR}$ ) facendo uso del teorema di stabilità di Lyapunov. Innanzitutto l'indipendenza da variabili angolari ci dice subito che il momento angolare del sistema è una quantità conservata. Applichiamo una trasformazione di coordinate per trovare un potenziale indipendente dalle velocità.

Tale trasformazione può essere il set di coordinate di Delaunay  $(l, g, h, L, \mathcal{G}, \mathcal{H})$  ove gli elementi sono definiti :

$$l = \mathcal{M} \quad g = \varpi \quad h = \Omega$$

mentre i momenti coniugati sono

$$L = \left( \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right)^{-1} \sqrt{\mu a} \quad \mathcal{G} = \sqrt{\mu a (1 - e^2)} \quad \mathcal{H} = \sqrt{\mu a (1 - e^2)} \cos I$$

ove si è indicato con  $a$  il semiasse maggiore,  $M$  la massa della stella madre,  $\mathcal{M} = nt$  è l'anomalia media. Si noti innanzi tutto che  $\mathcal{G}$  rappresenta lo pseudo-momento angolare orbitale, e  $\mathcal{H}$  è la sua proiezione lungo l'asse  $z$ . Scriviamo la parte dell'Hamiltoniana Newtoniana in variabili di Delunay

$$H_N = \frac{\mathbf{p}^2}{2} - \frac{\mu}{r} = -\frac{\mu^2}{2L^2} \quad (4.13)$$

Tenendo conto delle equazioni del problema di Keplero a due corpi, ovvero:

$$\begin{aligned} r &= \frac{a(1-e^2)}{1+e \cos f} = a(1-e \cos U) \\ a &= \frac{L^2}{\mu} \\ e^2 &= 1 - \frac{\mathcal{G}^2}{L^2} \end{aligned} \quad (4.14)$$

dove  $U$  è l'anomalia eccentrica. Per cui inserendo tali relazioni nell'equazione (4.13) si ha

$$\mathbf{p}^2 = \frac{2\mu}{r} - \frac{\mu^2}{L^2} = \frac{2\mu}{r} - \frac{\mu}{a} \quad (4.15)$$

Inoltre si dimostra che essendo l'anomalia eccentrica e vera delle funzioni di  $l$ ,  $L$  e  $\mathcal{G}$  si ha

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{p} = \frac{\mu e r}{\mathcal{G}} \sin f \quad (4.16)$$

Sostituendo in (4.12) e isolando solamente le componenti perturbative si ha

$$H_{GR} = \frac{\mathbf{p}^2}{2} + V_{GR} = \frac{\mathbf{p}^2}{2} + \left( \Theta_0 + \frac{\Theta_1}{r} + \frac{\Theta_2}{r^2} + \frac{\Theta_3}{r^3} \right) \quad (4.17)$$

dove

$$\begin{aligned} \Theta_0 &= -\frac{\mu^2(1-3\sigma)}{8a^2c^2} \\ \Theta_1 &= \frac{\mu^2(4-\sigma)}{2ac^2} \\ \Theta_2 &= -\frac{\mu^2(6+\sigma)}{2c^2} \\ \Theta_3 &= \frac{\mu\mathcal{G}\sigma}{2c^2} \end{aligned}$$

Con ciò siamo giunti ad avere un potenziale indipendente dalle velocità, come si voleva. Studiando il potenziale per  $r > 0$  si ricava un estremo locale che prende il valore

$$r^{GR} = \frac{-\Theta_2 + \sqrt{\Theta_2^2 - 3\Theta_1\Theta_3}}{\Theta_1} \quad (4.18)$$

Per le condizioni di campo debole su cui è basata la teoria il valore  $\sigma \sim 0$  e perciò asintoticamente si avrà per  $r \rightarrow 0$   $V_{GR} \rightarrow -\infty$ , mentre per  $r \rightarrow +\infty$  si avrà  $V_{GR} \rightarrow \Theta_0$ , ove a causa dei valori delle masse di valori di ordine inferiore rispetto alla corpo centrale si può approssimare  $\Theta_0 \sim 0$ . Per il teorema di stabilità di Lyapunov  $r^{GR}$  è equilibrio asintoticamente instabile dato che è un punto di massimo assoluto nel range prefissato. Una simulazione dello del ritratto in fase di  $H_{GR}$  con condizioni di campo debole è rappresentato in Figura 3. Tale potenziale è analogo al potenziale di Schwarzschild per una particella priva di massa, infatti notiamo che, sostituendo  $\sigma = 0$  all'equazione (4.12), otteniamo esattamente la Lagrangiana di Schwarzschild per una test particle priva di massa.

Riassumendo il potenziale perturbativo  $V_{GR}(\mathbf{r})$  è centrale ma, essendoci termini superiori dell'ordine  $r^{-2}$ , ne risulterà un campo centrale totale  $V(r)$  che produrrà orbite limitate in cui la direzione del pericentro del pianeta non sarà più costante ma varierà nel tempo. Questo è in completo accordo con la nota precessione del pericentro prevista dalla Teoria della Relatività Generale.

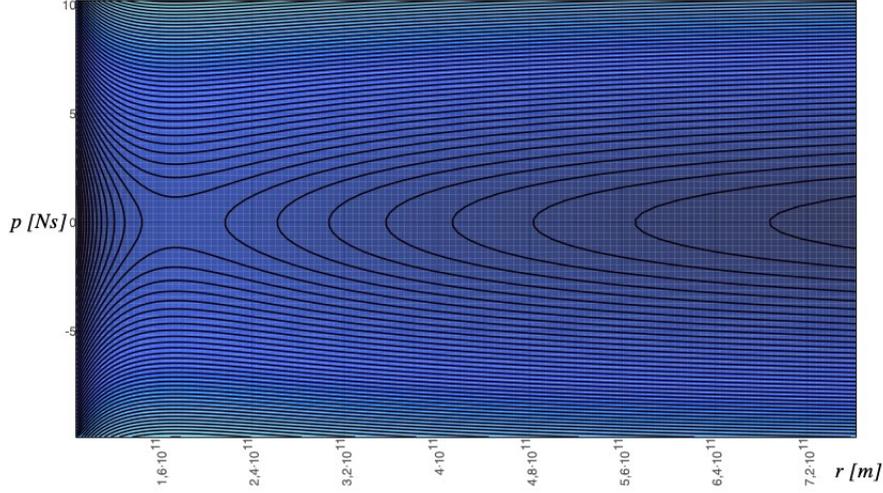


Figura 3: Ritratto in fase dell'Hamiltoniana  $H_{GR}$  per il pianeta perturbato di massa pari a quella di Giove ( $1.898 \cdot 10^{27}$  kg) orbitante attorno ad un corpo centrale di massa solare ( $1.99 \cdot 10^{30}$  Kg), con il semiasse maggiore per il corpo perturbato pari a quello di Mercurio (0.387 U.A) e un'eccentricità di  $e=0.5$ .

## 5 Moti stabili di $H_{GR}$ e confronto con il caso classico

La nostra ricerca dunque sarà nel cercare la precessione relativistica del pericentro a partire dal potenziale  $V_{GR}$  per poter applicare tale correzione al termine  $\dot{h}_j$  nell'equazione (2.7).

Iniziamo ponendo come corpo perturbato il pianeta più interno, ove per convenzione avremo che il corpo più esterno non sia soggetto apprezzabilmente da effetti dovuti alla Relatività Generale. Useremo come riferimento il potenziale perturbativo nelle coordinate dell'equazione (4.12). A partire dalla relazione (4.11) si pone, con accuratezza di  $\mathcal{O}(1/c^2)$  il momento coniugato  $\mathbf{p} = \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}$ . Mediamo come segue  $V_{GR}$

$$\langle V_{GR} \rangle = -\frac{1}{c^2} [\xi_1 \langle \mathbf{v}^4 \rangle + \xi_2 \langle \frac{\mathbf{v}^2}{r} \rangle + \xi_3 \langle \frac{1}{r^2} \rangle + \xi_4 \langle \frac{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{v})^2}{r^3} \rangle] + \mathcal{O}(\frac{1}{c^4}) \quad (5.1)$$

La media sarà attuata sull'anomalia media  $\mathcal{M}$  dato che varia velocemente rispetto alle altre variabili in gioco. Per una generica componente  $\Psi$ , la media assumerà la forma generale:

$$\langle \Psi \rangle \equiv \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Psi d\mathcal{M} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\Psi \mathcal{Q}) df \quad (5.2)$$

ove si è definita la funzione scalare, con  $f$  anomalia vera,

$$\mathcal{Q} = \frac{d\mathcal{M}}{df} \quad (5.3)$$

Per trovare tale funzione utilizziamo due forme per lo pseudo-momento angolare noto dal problema a due corpi di Keplero, uno in funzione dell'anomalia vera e dal raggio e uno in funzione dei parametri orbitali:

$$h(r, f) = r^2 \frac{df}{dt}, \quad h(a, e) = \sqrt{\mu a (1 - e^2)} \quad (5.4)$$

Attuando una semplice integrazione si ottiene la formula per la (5.3)

$$\mathcal{Q} = \frac{(1 - e^2)^{3/2}}{(1 + e \cos f)^2} \quad (5.5)$$

A questo punto si possono calcolare i vari valori medi all'interno di  $\langle V_{GR} \rangle$ . Definiamo prima di tutto due valori scalari utili nei calcoli:

$$\phi_1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sin^4 f}{(1 + e \cos f)^2} df = \frac{3(2 - e^2 - 2\sqrt{1 - e^2})}{2e^4},$$

$$\phi_2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 f}{(1 + e \cos f)} df = \frac{1 - \sqrt{1 - e^2}}{e^2}$$

Ora scriviamo esplicitamente i singoli valori medi :

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{v}^4 \rangle &= \frac{n^4 a^4}{\sqrt{1-e^2}} \left[ 1 + \frac{3e^2}{2} + e^4 \phi_1 \right], \\ \langle \frac{\mathbf{v}^2}{r} \rangle &= \frac{an^2}{\sqrt{1-e^2}} [1 + e^2 \phi_2], \\ \langle \frac{1}{r^2} \rangle &= \frac{1}{a^2 \sqrt{1-e^2}}, \\ \langle \frac{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{v})^2}{r^3} \rangle &= \frac{an^2}{\sqrt{1-e^2}} e^2 \phi_2\end{aligned}$$

Infine sostituendo i vari termini alla (4.12) si ottiene

$$\langle V_{GR} \rangle = -\frac{3\mu^2}{c^2 a^2 \sqrt{1-e^2}} + \frac{\mu^2(15-\sigma)}{8a^2 c^2} \sim -\frac{3\mu^4 \beta^5}{c^2 L^3 \mathcal{G}} + \text{cost.} \quad (5.6)$$

ove  $\beta = (\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2})^{-1}$  è la massa ridotta. L'ultima uguaglianza è data dal fatto che l'hamiltoniana totale  $H$  non dipende dall'anomalia media  $\mathcal{M}$  perciò il momento coniugato  $L$  è una quantità conservata del sistema, dunque l'ultimo addendo di  $\langle V_{GR} \rangle$  può essere considerato costante dato che non contribuisce nella dinamica del sistema sul lungo periodo.

Ora possiamo trovare la variazione nel tempo dell'argomento del pericentro facendo uso dell'equazione di Hamilton:

$$\dot{\omega}_{gr} = \frac{\partial H}{\partial \mathcal{G}} = \frac{\partial V_{GR}}{\partial \mathcal{G}} = \frac{3\mu^{3/2}}{c^2 a^{5/2} (1-e^2)} \quad (5.7)$$

Questa è la famosa formula che descrive la precessione del pericentro in Relatività Generale, in pieno accordo con le osservazioni fatte dal ritratto in fase di  $H_{GR}$  sottoparagrafo 5.1.

## 5.1 Correzione relativistica nell'evoluzione secolare

Partendo dai risultati appena raggiunti e la formula (2.7) per  $h_j$  possiamo riscrivere

$$\dot{h}_j = k_1 \left( A_{i1} + \frac{3\mu^{3/2}}{a^{5/2} c^2 (1-e^2)} \right) + k_2 A_{i2} \quad (5.8)$$

Il secondo termine dell'equazione non ha correzione dovuta alla Relatività Generale poichè si è stimato che solamente il primo pianeta è perturbato da effetti relativistici di ordine superiore dovuti alla stella madre. Definiamo allora una nuova matrice che comprende il termine correttivo relativistico, si avrà

$$\tilde{\mathbf{A}} = \sigma \begin{pmatrix} q+k & -q\beta \\ \sqrt{\alpha}\beta & \sqrt{\alpha} \end{pmatrix} \quad (5.9)$$

ove si è posto  $k \equiv \frac{3\mu^{3/2}}{a^{5/2} c^2 (1-e^2)}$ .

Ora il nostro obiettivo è il calcolo esplicito dell'eccentricità in funzione del tempo del corpo perturbato, e studiarne la differenza con il caso senza correzione relativistica. Innanzitutto troviamo le autofrequenze relativistiche risolvendo l'equazione agli autovalori:

$$g_i^{GR} = \frac{1}{2\sigma} (q+k+\sqrt{\alpha} \pm \sqrt{(q+k+\sqrt{\alpha})^2 - 4(\sqrt{\alpha}k+q-q\beta^2)}) \quad (5.10)$$

Mentre i parametri degli autovettori con l'aggiunta della correzione relativistica sono:

$$w_i^{GR} = \frac{k+q-\sqrt{\alpha} \mp \sqrt{(q+\sqrt{\alpha}+k)^2 + 4\sqrt{\alpha}(k+q-q\beta^2)\beta^2}}{2q\beta} \quad (5.11)$$

Ove infine possiamo scrivere l'equazione dell'eccentricità in funzione del tempo del corpo perturbato

$$e_1^{GR} = \sqrt{w_1^2 e_{11}^2 + w_2^2 e_{12}^2 + 2w_1 w_2 e_{11} e_{12} \cos((g_1^{GR} - g_2^{GR})t + \gamma_1 - \gamma_2)} \quad (5.12)$$

Questo è il punto finale che ci eravamo prefissati.

Osserviamo che le autofrequenze  $g_i^{GR}$  assumono valori maggiori rispetto al caso classico a causa dell'aggiunta dei termini correttivi. Un altro fenomeno puramente relativistico è la diminuzione dell'ampiezza di oscillazione; ci si aspetta che un incremento di  $|e_{11}|$  porti ad una decrescita di  $|e_{12}|$ ; a fissate condizioni iniziali il valore  $e_{11}^2 + e_{12}^2$  rimane costante dunque, un incremento di  $e_{11}$  porta ad una decrescita del valore  $|e_{11}e_{12}|$ . Quindi nel caso relativistico avremo un'ampiezza d'oscillazione minore e una frequenza maggiore in confronto al caso non relativistico. Un esempio di tale fenomeno è riportato in Figura 4 ove si è preso come coppia di pianeti, perturbante e perturbato, due corpi di massa gioviana orbitanti attorno ad una stella con 10 volte la massa solare. Il pianeta perturbato si è considerato con una bassa eccentricità, pari a  $e = 0.3$ .

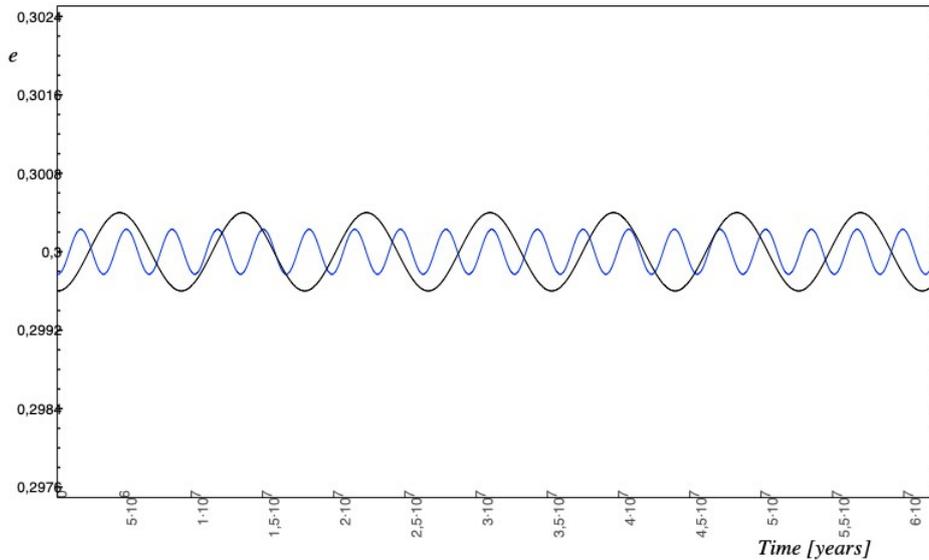


Figura 4: Simulazione numerica dell'eccentricità in funzione del tempo di un pianeta perturbato di massa gioviana con eccentricità media di  $e_1 = 0.3$  e semiasse maggiore  $a_1 = 0.01 au$ , mentre il pianeta più esterno con eccentricità media di  $e_2 = 0.25$  e semiasse maggiore  $a_2 = 1 au$ . L'oscillazione dell'eccentricità con l'aggiunta dei termini relativistici è indicata in blu, mentre l'oscillazione classica è indicata in nero

Il sistema diventa più complesso dal momento in cui aumentiamo il valore dell'eccentricità, dato che lo sviluppo dei termini  $h_{\mu\nu}$  in Post Newtonian Approximation non è sufficiente per la loro descrizione. Ci si limiterà ad osservare il trend di simulazioni di fenomeni ad alta eccentricità per trarne conclusioni sul comportamento complessivo del sistema.

Consideriamo il sistema precedente con un'eccentricità del pianeta più interno pari ad  $\tilde{e} = 0.85$ . Un incremento dell'eccentricità porta ad un incremento di  $k \equiv \frac{3\mu^{3/2}}{a^{5/2}c^2(1-e^2)}$ , che ha come conseguenza un discostamento sensibile di  $e_{11}^2 + e_{12}^2$  tra il caso relativistico e classico, dunque a un innalzamento della curva d'oscillazione. Questo si può vedere chiaramente in Figura 6. Tale innalzamento porta, a prescindere dai valori della frequenza di oscillazione, ad un aumento dell'eccentricità media. Dal punto di vista sperimentale è un risultato notevole poichè la registrazione di una curva secolare di un pianeta prossimo alla sua stella madre con alta eccentricità, senza l'aggiunta dei contributi dovuti alla Relatività Generale, porterebbe ad una sottostima della sua eccentricità media.

Considerando l'interazione mareale tra stella madre e corpo perturbato, ovvero

$$\dot{\omega}_T = \frac{15}{2} \frac{k_{2p}R_p^5 + k_{2s}R_s^5}{a^5 m_p m_s} n(m_s^2 + m_p^2) \quad (5.13)$$

(ove  $k_{2p}$  è il numero di Love per il pianeta e  $k_{2s}$  per la stella), e aggiungendo questo agli elementi di matrice di  $A_{11}$  e  $A_{21}$ , ricaviamo una curva di eccentricità oscillante attorno ad un andamento decrescente nel tempo e dunque ad una circolarizzazione dell'orbita del pianeta. Aggiungendo i termini relativistici per

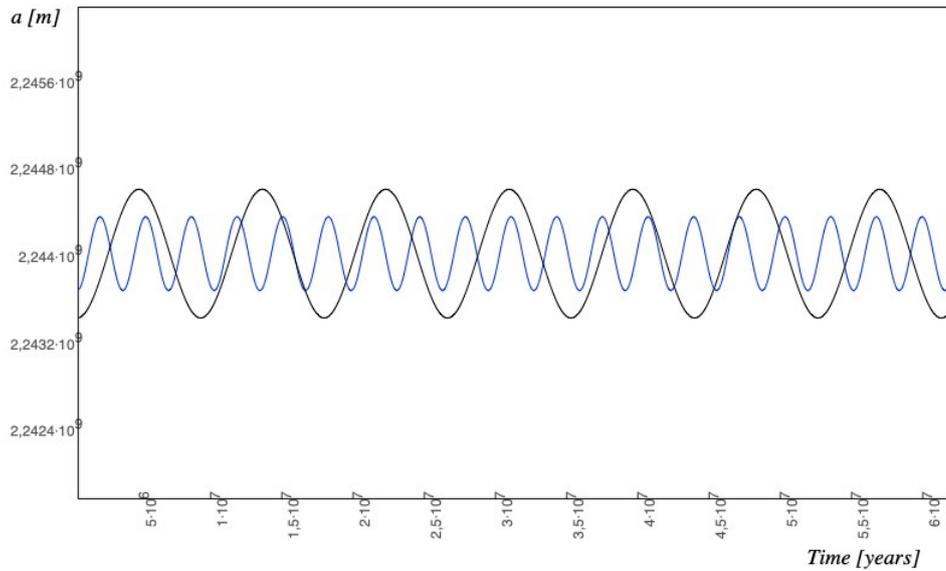


Figura 5: Simulazione numerica del semiasse maggiore in funzione del tempo del sistema considerato in figura 4. L'oscillazione del semiasse maggiore con l'aggiunta dei termini relativistici è indicata in blu, mentre l'oscillazione classica è indicata in nero

un corpo ad alta eccentricità si osserva un fenomeno notevole. Vi sarà nel caso relativistico una diminuzione dell'ampiezza di oscillazione, un aumento della frequenza e un innalzamento della curva  $e(t)$ . Questo porta ad un abbassamento della curva di oscillazione del semiasse maggiore  $a(t)$  che, per lo smorzamento mareale, porterà il corpo ad una maggiore velocità di drift interno al sistema planetario e ad una circolarizzazione delle orbite con una stima maggiorata della variazione di eccentricità media. Un esempio di abbassamento dell'oscillazione temporale del semiasse maggiore per un corpo ad alta eccentricità è dato in Figura 7. Riassumendo, i termini relativistici per corpi massivi prossimi alla stella madre sono fondamentali per comprendere l'evoluzione del sistema planetario, i quali spiegano l'osservazione di numerosi pianeti detti "Hot Jupiter", ovvero corpi celesti di massa gioviana con orbite circa-circolari a corto raggio rispetto alla stella; dunque portano all'esplicazione della migrazione verso i punti più interni del sistema teorizzandone la passata alta eccentricità.

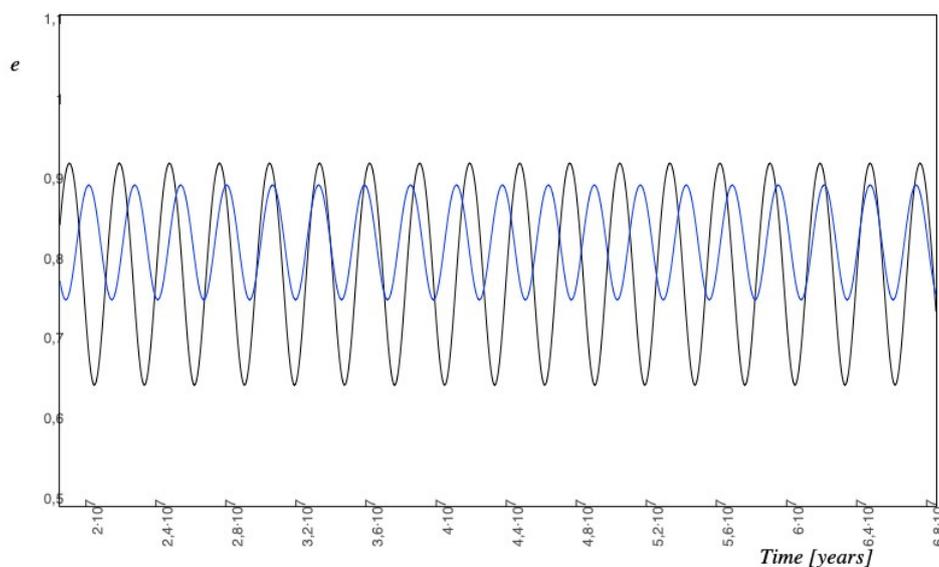


Figura 6: Simulazione numerica dell'eccentricità in funzione del tempo del sistema considerato in Figura 4 con un eccentricità del corpo più interno di  $e = 0.85$ . L'oscillazione dell'eccentricità con l'aggiunta dei termini relativistici è indicata in blu mentre l'oscillazione classica è indicata in nero

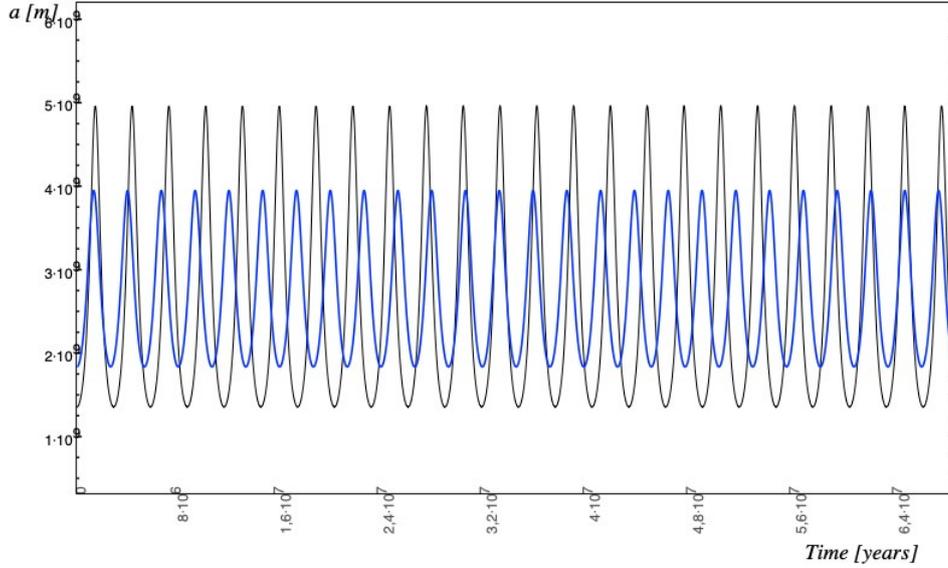


Figura 7: Simulazione numerica del semiasse maggiore in funzione del tempo del sistema considerato in Figura 4 con un'eccentricità del corpo più interno di  $e = 0.85$ . Si può vedere chiaramente un abbassamento della curva d'oscillazione dovuti a  $\dot{\varpi}_{GR}$ . L'oscillazione del semiasse maggiore con l'aggiunta dei termini relativistici è indicata in blu, mentre l'oscillazione classica è indicata in nero

## 6 Conclusioni

Lo studio della teoria secolare per un sistema a due pianeti ha portato a diversi risultati notevoli:

- L'aggiunta dei termini di variazione del pericentro del pianeta perturbato, dovuti alla Post Newtonian Approximation, portano ad una rottura di simmetria dell'eccentricità in funzione del tempo rispetto al pianeta più esterno. Questo è dovuto ad un aumento della frequenza di oscillazione e ad una diminuzione dell'ampiezza d'onda. Tale fenomeno si può vedere come una perturbazione al potenziale centrale Newtoniano, dovuta al potenziale relativistico, la quale rompe la simmetria del sistema portando alla precessione del pericentro (si veda sezione 4.1).
- Considerando il sistema per alte eccentricità si può vedere come le correzioni relativistiche da una parte alzino la curva di oscillazione dell'eccentricità, dall'altra abbassino quella del semiasse maggiore. Dunque i valori medi di eccentricità e semiasse maggiore senza termini relativistici assumerebbero rispettivamente una sottostima e una sovrastima.
- Focalizzandoci solamente sul trend di eccentricità e semiasse maggiore, aggiungendo i termini di variazione temporale dell'argomento del pericentro dovuti all'interazione mareale con il corpo centrale, possiamo vedere una decrescita temporale dell'eccentricità e del semiasse maggiore. Questi sono fisicamente interpretabili come uno spostamento interno al sistema planetario e ad una circolarizzazione dell'orbita.

La teoria secolare dunque spiega, almeno parzialmente, la ricorrente osservazione di pianeti vicini alla stella centrale (Hot Jupiters) attraverso il decadimento interno dell'orbita dovuto a eccentricità non nulle. Il futuro per una Teoria Secolare completa è la comprensione dei sistemi compatti che possano ammettere alte eccentricità, e che dunque possano permettere una conoscenza accurata dell'evoluzione temporale dei sistemi extrasolari.

## 7 Bibliografia

- Murray, C. D. & Dermott, S. F. 1999, *Solar system dynamics*, Cambridge University Press, Cambridge 1999
- Misner, C. W., Thorne, K. S., & Wheeler, J. A. 2017, *Gravitation*, Princeton University Press, 2017
- Marzari, F. & Nagasawa, M. 2019, *AA*, 625, A121
- Petrovich, C. & Tremaine, S. 2016, *ApJ*, 829, 132
- Zhang, K., Hamilton D. P. & Matsumura, S. 2013, *ApJ*, 778, 6
- Migaszewski, C. & Goździewski, K. 2009, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* 392, 2-18
- Sotiriou, T. & Barausse, E. 2007, *Phys.Rev.* D75, 084007
- Lee, M. H. & Peale, S. J. 2003, *ApJ*, 592, 2
- Migaszewski, C. & Goździewski, K. 2008, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* 388, 789–802
- Veras, D. & Armitage, P. J., 2007, *ApJ*, 661, 1311
- Fassò, F., 2018, *Istituzioni di Fisica Matematica*, Cleup sc, Padova 2018
- Hobson, M. P. & Efstathiou, G. P. Lasenby, A. N., 2006, *General Relativity*, Cambridge University Press, Cambridge 2006
- Landau, L. D. & Lifshitz, E. M., 1951, *The Classical Theory of Fields*, Pergamon Press Ltd, Oxford 1971
- Landau, L. D. & Lifshitz, E. M., 1960, *Mechanics*, Elsevier Ltd, Oxford 2005
- Clifford, W. M., 1981, *Theory and Experiment in Gravitational Physics*, Cambridge University Press, Cambridge 1993
- Richardson, D. L. & Kelly, T. J. 1988, *Celestial Mechanics*, 43, 193
- Barone, V., 2004, *Relatività*, Bollati Boringhieri editore, Torino 2018