UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI PADOVA

DIPARTIMENTO DI SCIENZE ECONOMICHE ED AZIENDALI "M. FANNO"

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA "T. LEVI-CIVITA"

CORSO DI LAUREA IN ECONOMIA

PROVA FINALE

Teorema della funzione implicita e metodo dei moltiplicatori di Lagrange

RELATORE:
CH.MO PROF. BRUNO VISCOLANI

LAUREANDA: MARIA ELISA MARCON
MATRICOLA: 1163462

ANNO ACCADEMICO 2019/2020

La candidata, sottoponendo il presente lavoro, dichiara, sotto la propria personale responsabilità, che il lavoro è originale e che non è stato già sottoposto, in tutto in parte, dalla candidata o da altri soggetti, in altre Università italiane o straniere ai fini del conseguimento di un titolo accademico. La candidata dichiara altresì che tutti i materiali utilizzati ai fini della predisposizione dell'elaborato sono stati opportunamente citati nel testo e riportati nella sezione finale "Riferimenti bibliografici" e che le eventuali citazioni testuali sono individuabili attraverso l'esplicito richiamo al documento originale.

Sommario

Nella vita quotidiana, a differenza di quanto si potrebbe pensare, sono moltissime le questioni che ricorrono all'ottimizzazione e all'uso dei moltiplicatori di Lagrange, anche se questa potrebbe sembrare una disciplina meramente teorica e non funzionale a fini pratici.
Negli ambiti dell'economia, delle scienze e della fisica individuiamo l'applicazione di questa metodologia.
Per risolvere questi problemi si potrebbe ricorrere a svariate tecniche, ma in questo elaborato ci si focalizzerà nello specifico sul metodo dei moltiplicatori di Lagrange e sui teoremi ad esso correlati, quali il teorema di Dini che contiene la condizione di regolarità che sta alla base dei moltiplicatori e le condizioni di Karush-Kuhn-Tucker (KKT) che, invece, generalizzano il teorema dei moltiplicatori di Lagrange.
Alla fine dell'elaborato verrà presentato, proprio per dimostrare che questa disciplina non è meramente teorica, il significato economico dei moltiplicatori ed un caso applicativo.

Abstract

In daily life, unlike what one might think, there are many issues that resort to the optimization and the use of Lagrange multipliers, although this may seem like a purely theoretical and non-functional discipline for practical purposes.
We identify the application of this methodology in the areas of economics, science and physics.
To solve these problems, various techniques could be used, but in this paper we will focus specifically on the Lagrange multiplier method and the theorems related to it, such as the Dini theorem that contains the condition of regularity that is the basis of the multipliers and the Karush-Kuhn-Tucker (KKT) conditions which, on the other hand, generalize the Lagrange multiplier theorem.
At the end of the paper, the economic significance of the multipliers and an application case will be presented, precisely to demonstrate that this discipline is not merely theoretical.

Indice

Introduzione

In molti ambiti del sapere è necessario procedere allo studio di una data funzione per conoscere un fenomeno e comprenderne un certo comportamento.

In particolare nei problemi di programmazione matematica, il ricorso ai moltiplicatori di Lagrange consente l'individuazione di punti che massimizzano, o minimizzano a seconda del caso, una determinata funzione.

Questo elaborato intende evidenziare come il metodo di Lagrange sia anche utilizzabile in ambito economico. Inoltre si sottolineerà il legame esistente con il teorema di Dini e l'importanza della regolarità dei vincoli.

L'argomentazione verrà poi estesa attraverso la formulazione di Karush – Kuhn – Tucker, che generalizza il lavoro di Lagrange.

Alla fine della trattazione sarà data un'interpretazione economica dei moltiplicatori e sarà presentato un semplice caso applicativo che ricorre a questa metodologia.

Capitolo I

Storia della programmazione matematica

1.1 Nascita dell'ottimizzazione ed il suo primo sviluppo

Nella vita quotidiana sono numerosi i problemi, sia teorici sia pratici, che riguardano la massimizzazione o la minimizzazione di una espressione data.

Questi problemi sono definiti *problemi di ottimizzazione* e possono essere distinti tra problemi di ottimizzazione statica e problemi di ottimizzazione dinamica[1].

L'ottimizzazione ha le sue radici già nei tempi antichi e precisamente una prima narrazione di un problema legato a questa lo troviamo all'interno dell'*Eneide* di Virgilio, nel libro primo.

Nella scena dell'incontro tra la regina Didone[2] e il re dei Getuli, Iarba, viene presentato il primo problema di ottimizzazione della storia, Iarba infatti dichiarò a Didone che avrebbe potuto impossessarsi di tanto terreno quanto ne avrebbe potuto avvolgere con la pelle di un toro (verso 368 : *taurino quantum possent circumdare tergo*, che tradotto significa "quanto cerchiar di bue potesse un tergo").

Questo è per l'appunto un problema di ottimizzazione che l'astuta Didone seppe risolvere dividendo la pelle in tante striscioline che unite avrebbero creato una semicirconferenza in modo da comprendere un appezzamento di terra maggiore, massimizzando così la propria utilità (S. Zuccher).

Soffermandoci sul concetto di "ottimizzazione statica" è necessario far riferimento alla *programmazione matematica*, introdotta da R. Dorfman[3] nel 1949, nel quale si descrivono i problemi di identificare i valori ottimali di certe variabili decisionali, soggette a uno o più vincoli espressi mediante uguaglianze o disuguaglianze.

Nel 1951 viene pubblicato il primo articolo che utilizza in maniera esplicita il termine di *non linear programming*, scritto da H.W. Kuhn e A.W. Tucker[4].

---

[1] Per *ottimizzazione dinamica* si intendono i modelli nei quali i vincoli e le variabili del problema possono variare nel tempo.

[2] Il problema di Didone è appunto un problema di ottimizzazione. Fra tutte le curve piane di lunghezza assegnata ed aventi i due estremi su una retta, determinare quella che racchiude la superficie di area massima. Il problema di Didone è equivalente al problema isoperimetrico: fra tutte le figure piane di egual perimetro, anche non poligonali, determinare quella avente area massima. Hanno stimato che l'estensione dell'area inclusa nel semicerchio potrebbe verosimilmente essere equivalente per estensione a 15 campi di calcio.

[3] Robert Dorfman (27 ottobre 1916 - 24 giugno 2002) è stato un professore di economia politica all'Università di Harvard. Egli ha fornito un grande contributo ai settori dell'economia, delle statistiche, dei test di gruppo e al processo di teoria dei codici.

[4] Vedi capitolo IV.

La programmazione matematica è strettamente connessa ad altre teorie o campi di applicazione della matematica, quali per esempio l'analisi convessa, l'analisi non-smooth, l'algebra lineare, il calcolo numerico, la teoria dei giochi, la teoria delle decisioni,… per questo motivo risulta di notevole interesse in ambito economico.
Dal punto di vista logico possiamo considerare l'ottimizzazione come la ricerca di una soluzione di un problema che risulti la migliore rispetto a tutte le altre. In matematica abbiamo per i problemi di ottimizzazione un funzionale reale f che ha per dominio un insieme D di uno spazio vettoriale. Il valore che assume f in un punto generico indica la misura della qualità della soluzione che corrisponde al punto preso in esame: l'obiettivo è quello di identificare i punti di massimo o di minimo di una funzione reale.
La programmazione matematica nasce alla fine del XVIII secolo, ma solo nel secondo dopoguerra, questa ebbe una rapida diffusione.
J. L. Lagrange[5], uno dei più importanti matematici che hanno contribuito alla materia, introdusse i "suoi" moltiplicatori all'interno della prima parte della quarta edizione della "Mécanique Analytique" nel 1778, come mezzo per stabilire la configurazione di equilibrio stabile di un sistema meccanico.
Successivamente nella prima edizione del 1797 della "Théorie de fonctions analytiques" il metodo dei moltiplicatori viene descritto in modo generale, non riferendolo ad alcun problema specifico della Meccanica, ma per i problemi di ottimizzazione generali, quando tra le variabili ci sono una o più equazioni e si vuole semplificare la risoluzione senza dover ogni volta avvalersi dell'eliminazione di alcune variabili usando le equazioni di vincolo.
Per Lagrange la regola "principe" generale[6] risulta essere: "basterà aggiungere alla funzione proposta le funzioni che devono essere nulle, ognuna moltiplicata per una quantità indeterminata, e quindi cercare il massimo o il minimo come se le variabili fossero indipendenti" (paragrafo 58 capitolo XI)[7].

1.2 La programmazione matematica "moderna"

Tra XVIII e XIX secolo, un altro contributo importante proviene dal matematico e fisico francese J. B. J. Fourier[8], che di fatto ha aperto la strada alla programmazione "moderna". Tra

[5] Vedi capitolo II.

[6] Condizione necessaria.

[7] Traduzione libera dal testo originale francese.

[8] Jean Baptiste Joseph Fourier (Auxerre, 21 marzo 1768 – Parigi, 16 maggio 1830) è stato un matematico e fisico francese, conosciuto soprattutto per le serie e per la sua legge sulla conduzione del calore. Tra i suoi maggiori contributi troviamo: la

l'altro Fourier si occupò dell'analisi delle disuguaglianze: nello specifico in due articoli pubblicati rispettivamente nel 1826 e nel 1827 illustra il metodo di soluzione di un sistema di diseguaglianze lineari basato sull'eliminazione successiva delle variabili[9]. Inoltre, troviamo le prime considerazioni riguardo la convessità della regione ammissibile nei problemi lineari.
L'interesse per questo ambito riemerge solo agli inizi del XX secolo, quando il matematico ungherese Farkas[10] (poi ripreso da Kuhn e Tucker negli anni '50) dimostra che ogni soluzione della disuguaglianza matriciale $A\mathrm{x} \geq 0$ (con A matrice m x n, le cui righe saranno indicate con a_i; $\mathrm{x} \in \mathbb{R}^n$) è anche soluzione della disequazione $b\mathrm{x} \geq 0$ se e solo se esistono m numeri non negativi λ_i tali che $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_i = b$.
Purtroppo questi studi saranno utilizzati soltanto mezzo secolo più tardi, quando verrà ripreso il "lemma" di Farkas.
La nascita della programmazione matematica in senso stretto è correlata al progresso di specifici strumenti matematici e di teorie, oltre che allo sviluppo di talune situazioni socio-economiche. Nonostante il calcolo differenziale fosse già disponibile da anni (anche per funzioni di più variabili reali), non può dirsi lo stesso per quanto concerne gli strumenti dell'analisi convessa, che hanno necessitato l'introduzione delle disuguaglianze, nonché gli sviluppi e il radicamento della matematica per l'economia.
L'esperienza bellica della seconda guerra mondiale, con l'identificazione di specifici obiettivi da raggiungere, l'esigenza di prendere in esame simultaneamente numerose variabili e il fattore tempo che aveva un peso determinante, tornò utile per ricercare metodologie tali da consentire la risoluzione non di un singolo problema, ma di una pluralità di questioni, mediante il ricorso ad un metodo generale.
Infatti proprio l'URSS e gli USA furono i fautori della programmazione *lineare* per far fronte alle incombenze economiche e militari del momento, favorendo lo sviluppo delle basi della disciplina.
Nell'Unione Sovietica l'economista Kantorovich[11] fu il primo a cimentarsi nella risoluzione di tali problemi; nel 1936 gli fu infatti richiesta una consulenza, da parte di un'azienda che si occupava della produzione di legno compensato, per rendere più efficiente l'uso del proprio macchinario, in modo tale da aumentare la capacità produttiva. Così la programmazione linea-

teorizzazione della serie di Fourier e la conseguente trasformata di Fourier in matematica, la formulazione dalla legge costitutiva lineare per la conduzione termica e la legge di Fourier in termodinamica.

[9] Questo metodo è noto come metodo di eliminazione di Fourier-Motzkin.

[10] Julius Farkas (28 marzo 1847 - 27 dicembre 1930) è stato un matematico e fisico ungherese. Egli ha contributo all'algebra lineare con il lemma di Farkas, che prende proprio da lui il nome.

[11] Leonid Vital'evič Kantorovič (19 gennaio 1912 - 7 aprile 1986) è stato un matematico ed economista sovietico, vincitore del Premio Nobel per l'economia nel 1975, primo ed unico sovietico ad aver mai conseguito tale onorificenza. Kantorovič è celebre per le sue teorie e per gli studi sull'allocazione ottimale delle risorse.

re appare in Unione Sovietica, strettamente collegata ad esigenze riconducibili alla sfera produttiva, all'interno del terzo piano quinquennale (1938-1942)[12].
Sempre Kantorovich in un articolo del 1939 presenta alcuni problemi microeconomici, tra i quali quello riguardante l'allocazione di *m* macchine che possono produrre *n* prodotti. Kantorovich in questo contesto (analiticamente e geometricamente) dimostra l'esistenza di variabili duali, corrispondenti a ciascun vincolo, definite *moltiplicatori risolventi*, poi identificate come "valutazioni oggettivamente determinate[13]" in quanto i loro valori non sono dipendenti da variabili esogene (prezzi o costi), ma dalla natura fisica del problema.
Mentre, in Occidente lo sviluppo della programmazione lineare procedette più lentamente in quanto legato a ricerche in campo militare, ad opera di B. Dantzig[14].
Dantzig aveva identificato come comune denominatore formale i sistemi di disequazioni lineari delle interdipendenze che collegavano le quantità variabili in molte circostanze. Il metodo da lui utilizzato è noto come *metodo del simplesso*[15]. Per la formalizzazione delle sue ricerche, bisognerà attendere la rivoluzione micro-elettronica e l'avvento dei computer.

[12] Piani quinquennali: iniziati nel 1928. Per la gestione centralizzata di tutto il sistema economico russo furono istituiti da Stalin i piani quinquennali, con i quali lo stato regolava in modo più o meno dettagliato tutte le funzioni in ogni settore, dall'acquisizione di risorse alla produzione, indicando per quest'ultima gli obiettivi da raggiungere. Questi nella maggior parte dei casi erano irrealistici, in quanto corrispondevano più a fini propagandistici che alle reali capacità produttive; priorità assoluta era assegnata all'industria pesante. (M. Matteini, R. Barducci, 1997, *Storia 3 Il Novecento*, Casa editrice G. D'Anna Messina-Firenze, pag 117).

[13] In inglese *objectively determined evaluations*.

[14] George Bernard Dantzig (Portland, 8 novembre 1914 – Palo Alto, 13 maggio 2005) è stato un matematico e statistico statunitense, conosciuto soprattutto per avere introdotto l'algoritmo del simplesso e per essere considerato il padre della programmazione lineare.

[15] Questo argomento non verrà trattato in questo elaborato.

Capitolo II

Il metodo dei moltiplicatori di Lagrange

Come affermato nel capitolo precedente, Lagrange[16] contribuì allo sviluppo della programmazione matematica ricorrendo a dei moltiplicatori noti come *moltiplicatori di Lagrange*. Nell'analisi e nella programmazione matematica, il metodo dei moltiplicatori di Lagrange è una strategia che consente di trovare i punti di massimo e minimo locale di una funzione soggetta a vincoli di uguaglianza.

Prima di parlare del *metodo dei moltiplicatori di Lagrange* è utile fornire delle definizioni (cassetta degli attrezzi) al fine di consentire una comprensione delle successive trattazioni.

Iniziamo con le definizioni di massimo e di minimo.

Definizione 1.1 (Punto di minimo globale). $m \in \mathbb{R}$ è detto minimo globale di $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ (con $\emptyset \neq \Omega \subset \mathbb{R}^n$) se $m \leq f(x)$, per ogni $x \in \Omega$ con $f(x^*) = m$

analogamente,

Definizione 1.2 (Punto di massimo globale). $M \in \mathbb{R}$ è detto massimo globale di $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ (con $\emptyset \neq \Omega \subset \mathbb{R}^n$) se $M \geq f(x)$, per ogni $x \in \Omega$ con $f(x^*) = M$

Definizione 1.3 (Punto di minimo locale). $m_0 \in \mathbb{R}$ è detto minimo locale[17] di $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ (con $\emptyset \neq \Omega \subset \mathbb{R}^n$) se esiste un intorno I di x*, e si scriverà I(x*), tale per cui $f(x^*) \leq f(x)$, per ogni $x \in I$ con $f(x^*) = m_0$

analogamente

Definizione 1.4 (Punto di massimo locale). $M_0 \in \mathbb{R}$ è detto massimo locale[18] di $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ (con $\emptyset \neq \Omega \subset \mathbb{R}^n$) se esiste un intorno I di x*, e si scriverà I(x*), tale per cui $f(x^*) \geq f(x)$, per ogni $x \in I$ con $f(x^*) = M_0$

---

[16] Joseph-Louis Lagrange (Torino, 25 gennaio 1736 – Parigi, 10 aprile 1813), è stato un matematico italiano di ascendenza francese. Dedicatosi sin da ragazzo allo studio della matematica, perseguì ben presto indagini autonome che lo portarono a pubblicare, negli anni dal 1759 al 1766, una serie di scritti (raccolti in *Miscellanea Taurinensia*) che spaziano sui principali campi della fisica matematica. Lagrange è considerato tra i maggiori e i più influenti matematici europei del XVIII secolo. La sua più importante opera è la *Meccanica Analitica*, pubblicata nel 1788, con cui nasce convenzionalmente la meccanica razionale, poiché per la prima volta viene mostrata la possibilità di risolvere compiutamente entro l'analisi i problemi di statica e dinamica. Lagrange, partendo dagli sviluppi in serie di Taylor per funzioni algebriche, giunse ad elaborare un calcolo che, nel proporsi sostitutivo a quello differenziale, si presentava svincolato da ogni rappresentazione, sia geometrica sia meccanica, su un livello di astrazione formale. In matematica, Lagrange è ricordato per i contributi dati alla teoria dei numeri, per essere tra i fondatori del calcolo delle variazioni, deducendolo nella *Meccanica Analitica*, per aver delineato i fondamenti della meccanica razionale, nella formulazione nota come meccanica lagrangiana, per i risultati nel campo delle equazioni differenziali e per essere stato uno dei pionieri della teoria dei gruppi.

[17] *Minimo locale stretto: quando si ha* $f(x^*) < f(x)$, per ogni $x \in I$ con $f(x^*) = m_0$

Teorema (Condizione necessaria per gli estremanti liberi, non vincolati). Data $f : \Omega \to \mathbb{R}$, con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, dato che $\bar{x} \in \Omega$ punto interno ad Ω, se f ha un massimo (o un minimo) in $\bar{x}$ (ossia $\bar{x}$ è un estremante per f) e f è derivabile in $\bar{x}$, allora

$$\nabla f(\bar{x}) = 0,$$

ovvero $\bar{x}$ è un punto critico (stazionario) per f.

Definizione 1.5 (Punto stazionario). Data una funzione $f : \Omega \to \mathbb{R}$, con Ω sottoinsieme non vuoto e aperto di $\mathbb{R}^n$, un punto $\mathbf{p} \in \Omega$ si dice stazionario per la funzione f se in esso si annulla il gradiente di f, $\nabla f(\boldsymbol{p}) = 0$.

Quindi la funzione non cambia valore in prima approssimazione in seguito ad uno spostamento nel dominio dal punto **p** in qualunque direzione.
Ogni punto che soddisfa $\nabla f(\boldsymbol{p}) = 0$ è un possibile "candidato" ad essere punto di massimo (o minimo) locale (o globale).

2.1 Teorema dei moltiplicatori di Lagrange in $\mathbb{R}^2$

Siano f, $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ funzioni differenziabili in (x^*, y^*) e sia (x^*, y^*) un estremante per $f(x, y)$, vincolato dalla condizione $g(x, y) = 0$; sia inoltre $\nabla g(x^*, y^*) \neq 0$[19];

allora esiste un numero $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che la terna (x^*, y^*, λ) sia un punto stazionario della *funzione Lagrangiana*

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda\, g(x, y)$$

ossia valgono le condizioni: $$g(x^*, y^*) = 0$$

$$\nabla f(x^*, y^*) + \lambda\, \nabla g(x^*, y^*) = (0, 0).$$

In altre parole, definita la funzione lagrangiana come nel teorema, se f, g sono differenziabili in (x^*, y^*), se si sa già che (x^*, y^*) è un punto di minimo o di massimo vincolato per $f(x, y)$, ed esso si trova quindi sul vincolo $g(x, y) = 0$ e se inoltre soddisfa $\nabla g(x^*, y^*) \neq (0, 0)$, allora esiste un numero $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che il punto (x^*, y^*, λ) sia soluzione del sistema di equazioni (generalmente non lineari)

---

[18] *Massimo locale stretto: quando si ha* $f(x^*) > f(x)$, per ogni $x \in I$ con $f(x^*) = M_0$

[19] Regolarità di (x^*, y^*) è necessaria, vedi paragrafo 3.2.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 0, \quad \text{ossia } \dfrac{\partial f}{\partial x} = -\lambda \dfrac{\partial g}{\partial x} \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = 0, \quad \text{ossia } \dfrac{\partial f}{\partial y} = -\lambda \dfrac{\partial g}{\partial y} \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = 0, \quad \text{ossia } \quad g\,(x, y) = 0 \end{cases}$$

Questo ci dice che, affinché il punto (x^*, y^*) sia un estremante locale condizionato di f è necessario che esista un $\lambda^* \in \mathbb{R}$ tale che la terna (x^*, y^*, λ^*) sia soluzione del sistema sopra menzionato di tre equazioni nelle tre incognite x, y, λ.

La necessità delle condizioni esposte nel sistema viene meno quando l'estremante è un punto non regolare dell'insieme vincolo *A*, ossia quando in corrispondenza del punto trovato sono nulle entrambe le derivate parziali di *g*.

Le condizioni rappresentate nel sistema sono dette condizioni di Lagrange e la variabile λ è il moltiplicatore di Lagrange (questo termine può essere sommato o sottratto).

Il risultato di Lagrange è una condizione necessaria del primo ordine per un punto di massimo o di minimo (locale) condizionato. Tale affermazione esprime che se c'è un punto di massimo o di minimo vincolato, allora la funzione Lagrangiana deve essere stazionaria in questo punto, per un particolare valore del parametro λ. Essendo una condizione necessaria, quando individuiamo un punto stazionario della Lagrangiana non si può ancora dire di aver trovato un punto di massimo o di minimo condizionato, ma solo un possibile "candidato".

La dimostrazione del *metodo dei moltiplicatori di Lagrange* si basa sul *teorema di Dini* (noto anche come *teorema della funzione implicita*), che verrà illustrato nel prossimo paragrafo.

Collegato ai moltiplicatori di Lagrange troviamo anche la matrice hessiana[20] orlata. Poiché siamo nel caso degli estremi vincolati, si può esprimere la condizione sufficiente del secondo ordine[21] nella forma di determinante.

[20] La matrice hessiana di una funzione reale di più variabili reali è una matrice quadrata i cui elementi sono le derivate parziali.

[21] Teorema (Condizioni sufficienti di secondo ordine): siano $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $f: \Omega \to \mathbb{R}$ e $f \in C^2$. Se x^* è punto interno di Ω e valgono le condizioni $\nabla f\,(x^*) = 0'$; $\nabla^2 f\,(x^*)$ definita positiva, allora x^* è un punto di minimo locale stretto per f su Ω.

Capitolo III

Teorema della funzione implicita o teorema di Dini

3.1 Teorema di Dini

Ora, come anticipato, verrà descritto il *teorema di Dini*[22], anche conosciuto come *teorema della funzione implicita*.

Sia $F : A \to \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}^2$ aperto, e

i) F, F'_2 siano continue in A;

ii) nel punto $x^* = (x_1^*, x_2^*)$ risulti $F(x^*) = 0$, $F'_2(x^*) \neq 0$.

Esistono allora un intorno I di x_1^* e un'unica funzione $\varphi : I \to \mathbb{R}$, continua in I, tale che $\varphi(x_1^*) = x_2^*$ ed inoltre $F(x_1, \varphi(x_1)) = 0$ per ogni $x_1 \in I$[23]. Se poi

iii) F ha derivate[24] parziali continue in A,

allora φ è derivabile, e vale la formula

$$\varphi'(x_1) = -\left[F'_1(x_1, \varphi(x_1)) \,/\, F'_2(x_1, \varphi(x_1)) \right] \qquad \text{per ogni } x_1 \in I.$$

Un analogo risultato si ottiene scambiando le due variabili x_1, x_2, nell'ipotesi in questo caso che $F'_1(x^*) \neq 0$. È dunque necessario che risulti una delle derivate parziali diversa da 0, in questo modo si verifica il rispetto delle condizioni di regolarità, che costituiscono il fondamento per le condizioni di Lagrange, il cui obiettivo è quello di riuscire ad esplicitare una variabile in funzione dell'altra. Il gradiente di F deve essere ortogonale al vincolo in un estremante, perciò dovrà rimanere sul piano normale alla curva per quel punto. Il piano normale è creato dai vettori gradienti delle funzioni che compongono il vincolo. Possiamo dunque dedurre che il gradiente di F dovrà essere una combinazione lineare dei gradienti, che risultano linearmente indipendenti per le ipotesi di regolarità sul vincolo.

---

[22] Ulisse Dini (Pisa 1845-1918), è stato un matematico italiano. Laureatosi all'università di Pisa in matematica, vi rimase come incaricato di algebra, quindi come professore di analisi. Si dedicò agli studi di geometria differenziale e di analisi. La sua opera maggiore è *Fondamenti per la teoria delle funzioni di variabili reali* (1878), nella quale viene formulato il teorema che porta il suo nome e che è fondamentale nella teoria delle funzioni.

[23] Questo si traduce geometricamente nell'affermare che almeno per x_1 intorno a x_1^*, i punti di A sono i medesimi del grafico φ.

[24] Il termine "derivata" nasce con Lagrange, come pure "primitiva".

Le funzioni dovranno perciò essere dotate di derivate parziali continue, e questa ipotesi la ricaviamo dal punto iii) enunciato nel teorema di Dini.
Il teorema delle funzioni implicite afferma che una funzione F: $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^1 di due variabili del tipo: $F(x, y)$ definisce implicitamente un'unica funzione del tipo : $y = f(x)$ in un intorno di un punto (a, b) tale che:

$$F(a, b) = 0 \qquad \frac{\partial F}{\partial y}(a, b) \neq 0 .$$

Il teorema di Dini fornisce quindi una condizione sufficiente affinché esista un'unica funzione $y = f(x)$ tale che $F(x, f(x)) = 0$ per ogni $x \in I$, sia soddisfatta al variare di x, ovvero un'unica funzione $x = g(y)$ tale che $F(g(y), y) = 0$ sia soddisfatta al variare di y.
Secondo il teorema della funzione implicita esiste localmente una funzione e questa dipende dalla porzione del dominio che andremo a considerare.
L'unicità della funzione è connessa alla richiesta di definire in modo implicito una funzione che presenta univocità nella corrispondenza input-output.
Quanto appena evidenziato non afferma che sia possibile trovare $y = f(x)$ o $x = g(y)$ in forma esplicita (non è possibile in generale esplicitare una delle due incognite in funzione dell'altra), ma che esiste una funzione.
Nel caso in cui nel punto x^* siano contemporaneamente nulli sia g sia il suo gradiente, avremo dei punti definiti singolari o critici; quando invece ci troviamo di fronte a situazioni in cui g è nulla e almeno una derivata parziale di g è non nulla, saremo in presenza di punti regolari.
Un fatto importante da ricordare è che il teorema di Dini fornisce solo condizioni sufficienti, non necessarie, per l'esplicitabilità locale (De Marco, 1999).
Quanto affermato nel teorema di Dini, va esteso anche al caso in cui g sia una funzione di n variabili, con $n > 2$ e, ancora più in generale, al caso in cui abbiamo m equazioni, con $m < n$.

3.2 Condizioni di regolarità

È utile evidenziare che risulta indispensabile l'ipotesi sul gradiente di g, il quale non deve essere nullo. Questa è una condizione di regolarità dei punti rispetto ai vincoli, chiamata anche condizione di *qualificazione dei vincoli* (in inglese *constraint qualification* o *non degenerate constraint qualification*). Un punto di massimo o di minimo vincolato che non rispetta questa condizione risulta irregolare, quindi le condizioni di ottimalità potrebbero non essere valide.
Se risulta essere il gradiente di g diverso da zero e siamo nel caso di un'equazione lineare in due incognite x_1 e x_2, potremo vedere la retta o come il grafico di una funzione solamente nel-

la variabile x_1 o parimenti come il grafico di una funzione solamente nella variabile x_2 : questo risulta quando la derivata parziale rispetto ad una delle due variabili è diversa da zero, quindi è non nulla; al verificarsi di questa situazione potremo avere la retta come grafico di una funzione rispetto all'altra.

Sappiamo inoltre che in un punto regolare (punto con gradiente non nullo) su di una curva di livello di una funzione g reale di due variabili reali, di classe C^1, il gradiente della funzione risulta perpendicolare alla curva di livello.

La regolarità ci indica i punti in cui il teorema di Dini è applicabile; dove i punti non sono regolari, bensì singolari, il teorema della funzione implicita non potrà essere invece utilizzato.

Il teorema di Dini dà unicamente condizioni sufficienti per scrivere i vincoli in "forma esplicita", esplicitando alcune variabili in funzione di altre.

Questo basta comunque per trattare efficacemente l'informazione relativa ai vincoli in un problema di ottimizzazione vincolata.

Avere la garanzia dell'esistenza di una funzione differenziabile che rappresenti il vincolo come suo grafico serve a trattare un punto regolare di ottimo vincolato come un punto di ottimo libero per un'opportuna funzione differenziabile.

Anche quando non siamo nella situazione di poter scrivere l'informazione del vincolo come $x_2 = \varphi(x_1)$, se in linea di principio questo vale (la validità è affermata dal teorema della funzione implicita) allora possiamo usare questa informazione come se avessimo fatto l'esplicitazione, sarà necessario conoscere la derivata della funzione φ, che ricaviamo dal teorema di Dini.

Per risolvere il problema di ottimizzazione vincolata possiamo procedere eliminando una delle due variabili, in questo caso x_2, poiché andremo a sostituirvi $\varphi(x_1)$, quindi utilizzeremo l'informazione del vincolo per abbassare la dimensione del problema (in questo modo si passerà da un problema in dimensione 2 ad un problema in un'unica dimensione, eliminando il vincolo e riducendo tutto ad un'unica variabile decisionale).

Scriveremo dunque $F(x_1) = f(x_1, \varphi(x_1))$ e procederemo allo studio di questa funzione per individuarne gli estremanti liberi.

La condizione necessaria affinché x_1^* sia un estremante relativo di F si scrive

$$\frac{dF}{dx}(x_{1*}) = f_1'(x_1^*, \varphi(x_1^*)) + f_2'(x_1^*, \varphi(x_1^*)) \cdot \varphi'(x_1^*) = 0$$

In questo caso φ e φ' non sono note, quindi non potremo determinare x_1^*, ma ricorrendo al teorema della funzione implicita, avremo

$$g_1'(x_1^*, \varphi(x_1^*)) + g_2'(x_1^*, \varphi(x_1^*)) \cdot \varphi'(x_1^*) = 0.$$

Per soddisfare simultaneamente le due equazioni scritte sopra, sarà necessario che le derivate parziali di f risultino proporzionali alle derivati corrispondenti di g, per rispettare la proporzionalità dovrà dunque esistere un fattore $\lambda^* \in \mathbb{R}$ tale che, risultino

$f_1'(x^*) = \lambda^* g_1'(x^*)$ e $f_2'(x^*) = \lambda^* g_2'(x^*)$.

Quello che abbiamo ottenuto è esattamente quanto richiesto dal teorema dei moltiplicatori di Lagrange, che consente di risolvere il problema.

In generale si può richiedere la regolarità dell'insieme ammissibile, ma in pratica è sufficiente che x* sia un punto di regolarità.

Capitolo IV

Condizioni di Karush–Kuhn–Tucker

Il metodo dei moltiplicatori di Lagrange viene generalizzato ed esteso attraverso le condizioni di Karush–Kuhn–Tucker, introdotte nell'articolo "*Non linear Programming*" pubblicato da Kuhn[25] e Tucker[26] nel 1951.
Oggigiorno il teorema è noto prevalentemente come teorema di Karush-Kuhn-Tucker, poiché, in realtà, il primo effettivo apporto alla teoria risale alla tesi magistrale[27] discussa da W. Karush[28] nel 1939, all'Università di Chicago.

Enunciamo ora il teorema:

Sia x* un punto di minimo locale per il problema

$$\textit{minimizza}\ f(\mathrm{x})$$

$$\textit{soggetto a}\ h(\mathrm{x}) = 0,\ \ g(\mathrm{x}) \leq 0,$$

e sia x* un punto regolare per i vincoli. Allora esistono un vettore $\lambda \in \mathbb{R}^m$ ed un vettore $\mu \in \mathbb{R}^p$, con $\mu \geq 0$, tali che

$$\nabla f\,(\mathrm{x}^*) + \lambda' \nabla \mathrm{h}\,(\mathrm{x}^*) + \mu' \nabla \mathrm{g}\,(\mathrm{x}^*) = 0' \qquad \text{(i)}$$

$$\mu' \mathrm{g}\,(\mathrm{x}^*) = 0 \qquad \text{(ii)}$$

Definita la funzione Lagrangiana associata, come

$$L\,(\mathrm{x}, \lambda, \mu) = f(\mathrm{x}) + \lambda' \mathrm{h}(\mathrm{x}) + \mu' \mathrm{g}(\mathrm{x}),$$

allora le condizioni necessarie del primo ordine si scrivono anche nella seguente forma:

$$\nabla_{\mathrm{x}} L\,(\mathrm{x}^*, \lambda, \mu) = 0', \qquad \nabla_{\lambda} L\,(\mathrm{x}^*, \lambda, \mu) = 0,$$

---

[25] Harold William Kuhn (Santa Monica, 29 luglio 1925 – New York, 2 luglio 2014) è stato un matematico statunitense. A Kuhn è riconosciuto un ruolo importante per quanto riguarda le condizioni di Karush-Kuhn-Tucker, per la teoria dei giochi e per una variante del gioco del poker.

[26] Albert William Tucker (Oshawa, 28 novembre 1905 – Hightstown, 25 gennaio 1995) è stato un matematico canadese, che ha contribuito alla topologia, alla teoria dei giochi e alla programmazione non lineare. Nel 1950, ha dato il nome e l'interpretazione del "dilemma del prigioniero", che ha portato al paradosso teorico di gioco più conosciuto. È anche noto per le condizioni di Karush-Kuhn-Tucker, un risultato fondamentale della programmazione non lineare.

[27] Nell'elaborato di Karush troviamo lo sviluppo di una versione finito-dimensionale per il calcolo delle variazioni, considerando il problema di Lagrange con i vincoli scritti nella forma di disuguaglianza.

[28] William Karush (1 marzo 1917 - 22 febbraio 1997) è stato un professore di matematica alla California State University di Northridge ed è noto per i l suo contributo alle condizioni di Karush – Kuhn – Tucker.

$\nabla \mu L(x^*, \lambda, \mu) \leq 0, \qquad \mu' \nabla \mu L(x^*, \lambda, \mu) = 0', \qquad \mu \geq 0.$

Se in x*, punto di minimo locale, tutti i vincoli di disuguaglianza sono inattivati, allora le condizioni di Karush-Kuhn-Tucker sono equivalenti all'affermazione dell'esistenza di un vettore $\lambda \in \mathbb{R}^m$ tale che

$$\nabla f(x^*) + \lambda' \nabla h(x^*) = 0'.$$

4.1 Il lavoro di Karush

Karush presenta la questione mediante il ricorso a condizioni necessarie e sufficienti, che coinvolgono in prima battuta solo le derivate prime e poi anche quelle seconde. La sua tesi inizia ricordando che il problema al centro dell'ottimizzazione vincolata classica aveva già raggiunto un trattamento esauriente per funzioni di classe C^2.
Nel suo elaborato, introduce il cono linearizzante in x° [29] delle direzioni $dx \neq 0$ tali che $\nabla g_i(x°)\ dx \geq 0$ e dimostra questa condizione necessaria: "supponiamo che per ogni direzione ammissibile vi sia un arco ammissibile che proviene da x° nella direzione dx. Quindi una prima condizione necessaria affinché f(x°) sia un minimo è che esistano moltiplicatori $\lambda_i \leq 0$ tali che le derivate L_{xi} della funzione $L = f + \Sigma\lambda_j\, g_j$ svaniscono tutte in x°"[30] (Giorgi, Guerraggio, 1998).

Per spiegare questo Karush ricorre al lemma di Farkas:

Teorema (Lemma di Farkas) Sia B matrice $p \times n$ e $g \in \mathbb{R}^n$. Il sistema

$$Bd \geq 0 \quad g^T d < 0 \qquad \text{(i)}$$

non ha soluzione $d \in \mathbb{R}^n$ se e solo se il sistema

$$B^T u = g \qquad u \geq 0 \qquad \text{(ii)}$$

ha soluzione $u \in \mathbb{R}^p$.

Sia dx una direzione del cono linearizzante e $x(t)$ una curva tale che $x(0) = x°$ e $x'(0) = dx$. Da $f[x(t)] \geq f(x°) = f[x(0)]$, per ogni $t \in [0, t_0]$, segue immediatamente $f'[x(0)] \geq 0$ ovvero

[29] chiamato delle direzioni ammissibili.

[30] *Suppose that for each admissible direction there is an admissible arc issuing from* x° *in the direction dx. Then a first necessary condition for* f(x°) *to be a minimum is that there exist multipliers* $\lambda_i \leq 0$ *such that the derivatives* L_{xi} *of the function* $L = f + \Sigma\lambda_j g_j$ *all vanish at* x°.

$\nabla f(x°) \cdot x'(0) = \nabla f(x°)\, dx \geq 0$. Questa disuguaglianza risulta essere una conseguenza dell'ammissibilità di dx. Pertanto la tesi di Karush (che comprende l'osservazione sul segno dei moltiplicatori) risulta verificata utilizzando il lemma di Farkas. Infatti, Karush nella sua dimostrazione ricorre alla condizione di qualificazione dei vincoli, definita "proprietà Q", ipotizzando quindi che per ognuna delle direzioni del cono linearizzante (per ogni direzione "tangente") esista una curva regolare della regione ammissibile che la approssimi.
Come già detto, Karush anticipa il lavoro di Kuhn e Tucker, ma non fa alcuna osservazione in merito alla situazione che si troverebbe in assenza della proprietà Q.

4.2 Il lavoro di Kuhn e Tucker

Kuhn e Tucker, a differenza di Karush, partono dalla definizione di punto di sella.

Definizione 1.6 (Punto di sella). Un punto $x^* \in \Omega$, interno a Ω e tale che $\nabla f(x*) = 0'$ è detto punto di sella di *f* se x^* non è né punto di massimo locale, né punto di minimo locale per *f*.
Il primo passo è quello di dimostrare una condizione necessaria e una condizione sufficiente per i punti di sella di una generica funzione $\varphi(x, \lambda)$ differenziabile, solamente considerata per $x_j \geq 0$ e $\lambda_j \geq 0$.
La condizione necessaria richiede che nel punto $(x°, \lambda°)$ siano soddisfatte le condizioni seguenti: $\varphi_{xj} \leq 0$; $x_i\, \varphi_{xj} = 0$; $x_j \geq 0$;

$\varphi_{\lambda j} \geq 0$; $\lambda_i\, \varphi_{\lambda j} = 0$; $\lambda_j \geq 0$.

Le medesime condizioni sono sufficienti a garantire che $(x°, \lambda°)$ sia un punto di sella per φ, se ad esse si aggiungono queste disuguaglianze:

$$\varphi(x°, \lambda) \leq \varphi(x°, \lambda°) + \nabla_x \varphi(x°, \lambda°) \cdot (x - x°)$$

$$\varphi(x, \lambda°) \geq \varphi(x°, \lambda°) + \nabla_\lambda \varphi(x°, \lambda°) \cdot (\lambda - \lambda°).$$

In questo modo possiamo leggere le ipotesi di concavità (convessità) di φ rispetto a x (rispetto a λ). Come secondo passaggio Kuhn e Tucker ricorrono alla *constraint qualification* che abbiamo già incontrato nell'elaborato di Karush.
L'ultimo passaggio consiste nella dimostrazione di una condizione necessaria e di una condizione sufficiente per il problema di *Max f*(x), quando sono presenti i vincoli $g_i \geq 0$ e $x_s \geq 0$. La condizione necessaria assicura che esiste un moltiplicatore $\lambda°$ a componenti non negative per

cui la funzione $L = f + \lambda g$ soddisfi le condizioni necessarie enunciate sopra e se vale la prima delle due diseguaglianze, allora x° è soluzione del problema di massimo considerato.

Si ha quindi la certezza che con il teorema di Kuhn e Tucker il moltiplicatore associato alla funzione obiettivo, nella Lagrangiana, sia diverso da zero.

4.3 La diversità tra i due studi

La differenza tra le teorie elaborate rispettivamente da Karush e da Kuhn e Tucker, consiste nel fatto che Karush pone in evidenza l'analogia che la programmazione non lineare mantiene con la ricerca degli estremanti di una funzione di una variabile reale ed articola la sua esposizione nella formalizzazione del problema e delle condizioni necessarie e sufficienti del primo e del secondo ordine (enunciate alla fine del paragrafo), mentre Kuhn e il suo allievo Tucker, focalizzano la loro attenzione sul problema di sella e sulla generalizzazione degli studi relativi alla programmazione lineare, formulando poi il teorema solo come caso particolare.

Condizioni necessarie del primo ordine. Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ e $f \in C^1$. Se $x^* \in \Omega$ è punto di minimo locale per f su Ω, allora, per ogni $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^n$ che sia direzione ammissibile in x^*, abbiamo che $\nabla f(x^*)\, \mathbf{d} \geq 0$.

Condizioni necessarie del secondo ordine. Sia x^* punto regolare del vincolo **h(x)=0** e punto di minimo locale per f, soggetta al vincolo, allora esiste $\lambda \in \mathbb{R}^m$ tale che $\nabla f(x^*) + \lambda' \nabla \boldsymbol{h}(x^*) = 0'$. Inoltre, definita la matrice $L(x^*) = \nabla^2 f(x^*) + \lambda' \nabla^2 \boldsymbol{h}(x^*)$ vale che se $\nabla \boldsymbol{h}(x^*)\, y = 0$ allora $y' L(x^*)\, y \geq 0$ data la definizione della funzione lagrangiana

$$L(x, \lambda) = f(x) + \lambda' \nabla \boldsymbol{h}(x) = f(x) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j h_j(x)$$

la matrice $L(x^*) = \nabla^2 f(x^*) + \lambda' \nabla^2 \boldsymbol{h}(x^*)$ è la matrice delle derivate parziali seconde, rispetto a x, della funzione Lagrangiana.

Condizioni sufficienti del secondo ordine. Sia x^* punto regolare del vincolo **h(x)=0** ed esiste $\lambda \in \mathbb{R}^m$ tale che $\nabla f(x^*) + \lambda' \nabla \boldsymbol{h}(x^*) = 0'$ e se $\nabla \boldsymbol{h}(x^*)\, y = 0$ con $y \neq 0$ allora $y' S(x^*)\, y > 0$ allora x^* è un punto di minimo locale stretto per la funzione f soggetta al vincolo **h(x)=0**.

Capitolo V

L'ottimizzazione

5.1 L'ottimizzazione in generale

L'ottimizzazione è un processo matematico che permette di trovare i valori delle variabili che rendono minimo (o massimo, secondo i casi) il valore di una funzione sotto certi vincoli. Nelle indagini scientifiche, tecnologiche, economiche e sociali alcune caratteristiche del problema in esame sono spesso descrivibili mediante una funzione (definita funzione obiettivo) $F = F\ (\mathrm{x})$, dove ciascuna delle n componenti del vettore $\mathrm{x} = (\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \ldots, \mathrm{x}_n)$ rappresenta una variabile che influisce sul problema. I valori da determinare, cioè i valori delle variabili x_i che minimizzino (o massimizzino) la funzione F, devono essere ammissibili, ovvero fisicamente realizzabili e compatibili con le leggi del problema in esame[31].

Si voglia, ad esempio, determinare le quantità x_{ik} di acqua che devono passare attraverso la *i*-esima condotta di un sistema di n centrali idroelettriche all'ora *k*-esima della giornata (k = 1,2,…,24). La funzione obiettivo da minimizzare rappresenta la quantità totale di acqua utilizzata, ovvero

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{24}\mathrm{x}_{ik}$$

I vincoli riguardano di fatto:

- ogni condotta ha una portata massima di acqua;
- i bacini idrici non devono svuotarsi;
- deve essere soddisfatta la richiesta di energia da erogare agli utenti.

Il numero totale di variabili e di vincoli di questo problema risulta grande e può risultare necessario ricorrere a sofisticate tecniche utilizzanti il calcolatore elettronico. I risultati di questo calcolo consentono di ottenere un grosso aumento di produttività del sistema: da studi effettuati sul bacino del fiume Columbia, negli Stati Uniti, il miglioramento è stato del 10%, equivalente alla costruzione di una nuova centrale.

[31] Leggi che sono generalmente espresse da un sistema di equazioni e di disequazioni.

A seconda della struttura delle variabili, della funzione e dei vincoli, si hanno i seguenti sotto problemi:

I. *ottimizzazione continua*: le variabili sono numeri reali, definiti entro insiemi non puntiformi;

II. *ottimizzazione a interi*: le variabili assumono solo valori interi, in numero finito o numerabilmente infinito;

III. *ottimizzazione mista*: parte delle variabili sono continue, parti intere;

IV. *ottimizzazione deterministica*: le variabili, la funzione F e i vincoli possono essere, in linea di principio, esattamente definiti e calcolati;

V. *ottimizzazione stocastica*: i valori delle variabili, di F e dei vincoli sono aleatori, cioè definiti da distribuzioni di probabilità (a seguito della natura casuale del sistema in esame o di errori inerenti alle misure);

VI. *ottimizzazione non vincolata*: le variabili possono assumere a priori qualunque valore fra $-\infty$ e $+\infty$;

VII. *ottimizzazione vincolata*: le variabili sono soggette a vincoli che possono essere di eguaglianza

$$g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \qquad i = 1, 2, \ldots, m \qquad m < n$$

o di diseguaglianza

$$h_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geq 0 \qquad i = 1, 2, \ldots, p;$$

VIII. *ottimizzazione globale*: tranne casi particolari la funzione F possiede più di un minimo. Si ha un problema di ottimizzazione locale quando si vuole determinare un solo minimo, di ottimizzazione globale quando si vuole determinare il minimo assoluto, o tutti i minimi di una certa regione.

Infine possono considerarsi problemi più generali di quello considerato finora (caratterizzato da una sola funzione obiettivo e da un numero finito di variabili). Tali sono, per esempio, i seguenti:

a) *calcolo delle variazioni*: in questo caso F è un funzionale, cioè la variabile x è una funzione e F è un integrale nel cui argomento compare x;

b) *controllo ottimale*: in questo caso x = x(t) è una funzione dipendente dal tempo, che va determinata in modo da minimizzare un funzionale F soddisfacendo nel contempo a vincoli di tipo algebrico e differenziale.

5.2 Problemi di ottimizzazione con il metodo dei moltiplicatori di Lagrange

L'obiettivo del teorema di Lagrange è quello di determinare quale dei punti soddisfacenti al vincolo renda massimo il valore di *f*. Una volta identificati i punti ammissibili, è necessario individuare un punto che si trovi sulla curva di livello più alto.

La curva di livello che dobbiamo cercare è quella tangente alla curva del vincolo, ed il punto di tangenza tra la curva di livello più alta e la curva del vincolo risulta essere il punto ricercato.

Il vettore gradiente di f in x_0 è ortogonale alla curva di livello $f(x, y) = f(x_0)$, allo stesso modo il vettore gradiente di g in x_0 è ortogonale alla curva di livello $g(x, y) = b$, e cioè alla curva del vincolo. Se imponiamo che f e g siano tangenti in x_0 allora $f'(x_0)$ e $g'(x_0)$ sono ortogonali alla stessa direzione, e quindi sono paralleli tra loro. Questo significa che stiamo cercando un punto x_0 appartenente al vincolo in cui il vettore $f'(x, y)$ è parallelo al vettore $g'(x, y)$.

Si sa che due vettori sono paralleli se e solo se uno è multiplo dell'altro e per vedere questo si ricorre al moltiplicatore di Lagrange, indicato con il simbolo λ.

Quindi deve risultare verificata l'uguaglianza:

$$[f'_x, f'_y] = -\lambda\,[g'_x, g'_y].$$

Il punto di ottimo condizionato deve essere cercato tra le soluzioni del sistema (solitamente non lineare) di tre equazioni nelle tre incognite x, y, λ:

$$\begin{cases} f'_x(x, y) = -\lambda\, g'_x(x, y) \\ f'_y(x, y) = -\lambda\, g'_y(x, y) \\ g(x, y) = b \end{cases}$$

Il segno di λ è importante, in quanto indica quando la funzione g cresce (dove b che rappresenta la curva di livello è il vincolo) nello stesso verso con $\lambda > 0$, o nel verso opposto rispetto alla funzione f con $\lambda < 0$.

A questo punto, risulta utile introdurre, in modo da facilitare la risoluzione, una funzione ausiliaria, la funzione Lagrangiana:

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda\,(g(x, y) - b)$$

Un punto x_0 soddisfa il sistema sopra menzionato se e solo se è un punto stazionario della funzione $L(x, y, \lambda)$:

$$\begin{cases} L'_x(x, y, \lambda) = 0 \\ L'_y(x, y, \lambda) = 0 \\ L'_\lambda(x, y, \lambda) = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} f'_x(x, y) + \lambda g'_x(x, y) = 0 \\ f'_y(x, y) + \lambda g'_y(x, y) = 0 \\ b - g(x) = 0 \end{cases}$$

5.3 Esempio numerico

Consideriamo il seguente problema di ottimizzazione:

$$\textit{massimizza } f(x, y) = xy$$

$$\textit{vincolo } g(x, y) = x^2 + y^2 = 1$$

Le funzioni f e g sono dotate di derivate parziali continue.
Scriviamo la funzione Lagrangiana

$$L(x, y, \lambda) = xy + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$$

Ora impostiamo il sistema delle condizioni di Lagrange

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = -\lambda \frac{\partial g}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} = -\lambda \frac{\partial g}{\partial y} \\ g(x, y) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y + 2\lambda x = 0 \\ x + 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

Sottraiamo le prime due equazioni e sostituiamo il risultato alla seconda, in questo modo arriviamo al seguente sistema

$$\begin{cases} y + 2\lambda x = 0 \\ (1-2\lambda)(y - x) = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

Ora scindiamo il sistema nei due sistemi:

$$\text{a)}\quad \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ 1-2\lambda = 0 \\ y + 2\lambda x = 0 \end{cases} \qquad\qquad \text{b)}\quad \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ y - x = 0 \\ y + 2\lambda x = 0 \end{cases}$$

Consideriamo il sistema a).

Dalla seconda equazione ricaviamo $\lambda = \frac{1}{2}$, lo sostituiamo nella terza ed otteniamo $x + y = 0$, quindi $x = -y$.

Calcoliamo rispetto ad y, sostituendo nella prima otteniamo $2y^2 - 1 = 0$, quindi $y = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Individuiamo così i punti $A\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ e $B\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Risolviamo adesso rispetto al sistema b).

Dalla seconda equazione otteniamo $y = x$, e sostituendo y nella prima equazione troviamo $2x^2 - 1 = 0$, quindi $x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$.

In questo caso, dopo le opportune sostituzioni, λ risulta pari a $-\frac{1}{2}$.

Dal sistema b) pertanto ricaviamo i punti $C\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ e $D\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.

La natura dei punti trovati può essere determinata attraverso il ricorso alla matrice hessiana orlata:

$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial xy} \\ \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial^2 L}{\partial yx} & \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} \end{bmatrix}$$

Per l'esercizio in questione abbiamo come matrice orlata $\mathcal{B}(x, y, \lambda) =$

$$\begin{bmatrix} 0 & 2x & 2y \\ 2x & 2\lambda & 1 \\ 2y & 1 & 2\lambda \end{bmatrix}$$

Calcoliamo il determinante per la terna (x, y, λ) rispetto ad $A\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ e abbiamo

$$\mathcal{B}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right) = \begin{matrix} 0 & -\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 1 & 1 \\ \sqrt{2} & 1 & 1 \end{matrix}$$

$$\det \mathcal{B}\ (A) = (-\sqrt{2}) \cdot (-1)^{2+1} \cdot \det \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} + (\sqrt{2}) \cdot (-1)^{3+1} \cdot \det \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \sqrt{2} \cdot (-\sqrt{2} \ -\sqrt{2}\ ) + \sqrt{2} \cdot (-\sqrt{2} \ -\sqrt{2}\ ) = \sqrt{2} \cdot (-2\sqrt{2}\ ) + \sqrt{2} \cdot (-2\sqrt{2}\ ) = -8 < 0$$

quindi $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ è punto di minimo.

Svolgiamo lo stesso procedimento per i punti B, C e D, e rispettivamente troviamo che $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ è punto di minimo, $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ e $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, invece, sono entrambi punti di massimo.

Capitolo VI

Significato economico dei moltiplicatori di Lagrange

6.1 Prezzo ombra

I moltiplicatori di Lagrange misurano la sensibilità del valore ottimale a variazioni che vanno a colpire le quantità.

Nelle discipline economiche i prezzi ombra (*shadow prices*)[32] sono dei prezzi di stima che riflettono, meglio dei prezzi di mercato, la valutazione che la società assegna al costo−opportunità di beni e servizi. Con riferimento alla funzione del benessere sociale gli shadow prices possono essere definiti anche come la variazione di detta funzione corrispondente ad una variazione di un'unità del bene preso in esame.

I prezzi economici o i prezzi ombra sia dei beni finali sia dei fattori produttivi possono non rispecchiare i prezzi di mercato (Thirlwall[33]).

Riguardo questa affermazione è utile tenere conto che i prezzi economici rispetto ai beni finali possono differire dai prezzi di mercato per tre diversi motivi:

I. sui prezzi di mercato sono imposti sussidi, tasse, tariffe e controlli da parte del governo. Il costo opportunità dovrebbe quindi essere calcolato al netto delle imposizioni statali;
II. le imperfezioni che colpiscono il mercato potrebbero aumentare il valore dei prezzi ben al di sopra del costo marginale di produzione;
III. la presenza di esternalità (positive e negative) determina che i prezzi dei beni non riflettano il valore efficiente secondo la teoria neoclassica.

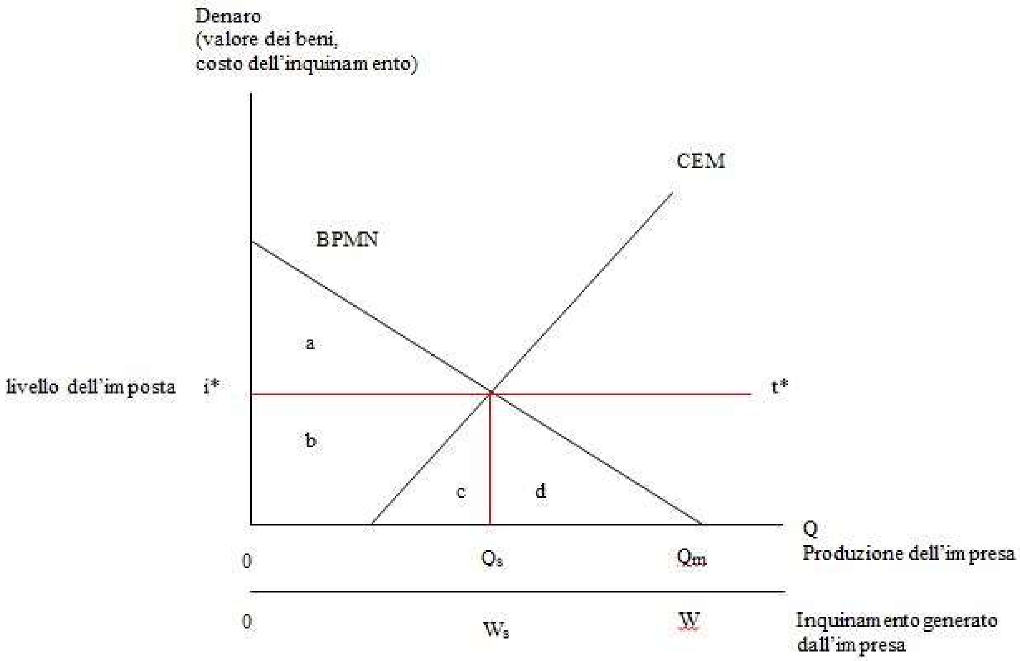
L'imposta (pigouviana) ottimale sull'inquinamento

L'impresa massimizza il profitto producendo tutte le unità di bene per le quali i benefici privati marginali netti (BPMN) sono positivi, e cioè espandendo la produzione fino a Q_m. L'ottimo sociale viene tuttavia raggiunto eliminando la produzione di tutte le unità per le quali il costo esterno marginale (CEM) è superiore al BPMN e cioè limitando la produzione a Q_s. Imponendo all'impresa un'imposta pari a t* la si induce a rinunciare alla produzione di

[32] Corrisponde al prezzo attribuito a risorse o "ingredienti" disponibili in quantità limitata, nell'ambito di un problema di massimizzazione di una funzione obiettivo. Si incontrano prezzi ombra nei problemi aziendali affrontati per mezzo della programmazione lineare, nei problemi di pianificazione delle economie centralizzate e simili.

[33] Anthony Philip Thirlwall (21 aprile 1941) è un economista britannico professore di Economia Applicata presso l'Università del Kent. È tra i più influenti appartenenti alla scuola post-keynesiana e con la sua vasta produzione di pubblicazioni, si colloca ai vertici della classifica dei maggiori economisti mondiali.

tutte le unità per cui t*> BPMN e cioè l'impresa è indotta a limitare la produzione a Q_s, il livello di produzione socialmente ottimale. Questo fatto, a sua volta, comporta la riduzione delle emissioni inquinanti da W_m a W_s.



Fonte: Pearce e Turner [1990a].

(Fonte: Kerry Turner R., Pearce D. W., Bateman I., 2003. Economia ambientale. Bologna: il Mulino pag. 172)

Parimenti, il valore sociale potrebbe non essere espresso in maniera veritiera dai prezzi dei fattori produttivi, ossia il costo−opportunità dell'utilizzo dei fattori produttivi quantificato in termini di produttività marginale potrebbe divergere per tre motivazioni:

I. il salario del fattore lavoro nel settore industriale può superare il costo sociale di utilizzo se esiste una disoccupazione nascosta negli altri settori produttivi;
II. se sono presenti delle agevolazioni fiscali imposte dallo Stato, il costo del capitale risulterà inferiore rispetto al suo costo sociale;
III. il tasso di cambio potrebbe risultare troppo contenuto dal punto di vista sociale se dovesse essere artificiosamente controllato dalle autorità.

Possiamo ricorrere principalmente a due metodologie per determinare i prezzi ombra: l'approccio UNIDO (*United Nations Industrial Development Organization*) e l'approccio di LITTLE – MIRRLEES.

Secondo il primo approccio, i benefici e i costi si possono stimare ai prezzi di mercato, usando come numerario il consumo aggregato interno, soggetto ad aggiustamenti sulle differenze esistenti tra i prezzi di mercato e i prezzi ombra. Nell'ambito della programmazione matematica, il problema dell'analisi costi−benefici e della derivazione dei prezzi economici necessi-

terà dunque della costruzione di una funzione del benessere sociale, dell'individuazione di vincoli ed alla fine della soluzione di un problema di ottimizzazione condizionata[34].
Tra i primi autori che si sono occupati di pianificazione economica si devono ricordare gli economisti Jan Tinbergen, il quale è conosciuto per la *regola di Tinbergen*[35] (una regola di politica economica) e Oskar Lange, un luminare nei problemi di programmazione matematica.
Il metodo UNIDO consiste nell'elaborazione di un modello matematico del sistema economico mediante l'individuazione di un sistema di prezzi relativi che esprima i rapporti di scambio tra i beni che rendono massima l'utilità socialmente ponderata dei soggetti economici (in linea generale si ricorre ad un modello di programmazione lineare).
Il moltiplicatore di Lagrange entra ora in gioco e può fornire un'interpretazione economica al prezzo ombra associato al vincolo.
Gli *shadow prices* sono di fatto i moltiplicatori di Lagrange (che abbiamo indicato in precedenza con λ), ovvero i valori marginali della variabile presa in esame.
Nel caso della massimizzazione del profitto per un produttore, lo shadow price sarà descritto dalla produttività marginale di un fattore produttivo.
Un limite connesso all'uso del metodo UNIDO è riconducibile al fatto che risulta impossibile valutare i valori effettivi dei prezzi ombra tramite un modello completo e un programma di ottimizzazione basato sulla funzione−obiettivo del Governo. Questo limite emerge poiché non è possibile disporre di dati statistici molto dettagliati per descrivere in modo esaustivo e completo il sistema economico che sta alla base di un Paese, pertanto la limitatezza dei dati a disposizione dei ricercatori implica la necessità di semplificare la realtà e ciò si traduce nella raffigurazione di uno scenario poco significativo, in quanto di molto divergente dalla situazione reale[36].
L'approccio di LITTLE-MIRRLEES afferma, invece, che i beni debbano essere valutati direttamente ai prezzi internazionali, ai fini di valutarli al vero costo−opportunità, usando il reddito pubblico non vincolato[37] come numerario. Il numerario è determinato in termini di valore attualizzato dei fondi pubblici non vincolati espresso in valuta estera costante (Florio). Per

[34] In economia dell'ambiente si può fare ricorso ad una valutazione basata sul costo di recupero del danno: "un aumento di inquinanti nell'atmosfera induce vari "danni" quantificabili monetariamente come una maggior spesa sanitaria, una maggior spesa per più frequenti interventi di restauro di monumenti, etc."; o si considerano le spese per ridurre le esternalità negative: "la spesa in infissi insonorizzanti può essere una misura del danno arrecato dal rumore". Tali approcci risultano limitati in quanto prendono in considerazione solamente quanto effettivamente speso per contrastare gli impatti dell'esternalità, mentre sono preferibili gli approcci che stimano la disponibilità a pagare (o ad accettare) delle persone per beni e servizi pubblici (incluse le esternalità positive e negative).

[35] Tale regola stabilisce che affinché ci sia una soluzione univoca a un problema di politica economica, il numero delle variabili obiettivo deve essere uguale al numero delle variabili strumento e queste devono essere indipendenti tra di loro.

[36] Questo è il motivo per il quale si è deciso di effettuare un caso applicativo relativo ad una problematica di microeconomia, anziché approcciarsi ad una questione più interessante, ma meno applicabile, relativa all'economia dell'ambiente.

[37] Per reddito pubblico non vincolato si intendono i fondi addizionali disponibili per la politica economica.

buona parte dei Paesi, i prezzi internazionali infatti sono prezzi non suggestionabili e rappresentano proprio per questo una misura oggettiva del costo−opportunità delle risorse scarse che vengono utilizzate nel progetto.

6.2 Caso applicativo

Supponiamo che l'ufficio acquisti di un'amministrazione pubblica disponga di una possibilità di spesa pari a 10.000,00 € e debba procedere all'acquisto di fogli di carta. La normativa vigente[38] impone in capo alle amministrazioni pubbliche di acquistare almeno il 50 per cento di carta riciclata.

È possibile individuare una funzione di utilità[39] della pubblica amministrazione che possiamo scrivere come

$$U(x, y) = x^{1/2}y^{1/2}$$ [40]

dove x indica la quantità di risme di carta normale e y, invece, il numero di risme di carta riciclata.

Questa funzione è soggetta ad un vincolo

$$p_x x + p_y y = I$$

e i parametri corrispondono a:

p_x = 3, 70 € / risma carta normale

p_y = 3,90 € / risma carta riciclata

I = 10.000,00 €

Vediamo che la condizione di regolarità risulta rispettata poiché i prezzi sono diversi da zero. Abbiamo inoltre $x, y \geq 0$, non potendo acquistare quantità negative.

[38] **Art. 18 LEGGE 28 dicembre 2015, n. 221 co. 2 lettera d)**: L'obbligo di cui al comma 1 si applica per almeno il 50 per cento del valore delle gare d'appalto sia sopra che sotto la soglia di rilievo comunitario previste per le seguenti categorie di forniture e affidamenti oggetto dei decreti recanti criteri ambientali minimi sotto indicati: […] d) carta per copia e carta grafica: decreto del Ministro dell'ambiente e della tutela del territorio e del mare 4 aprile 2013, pubblicato nella Gazzetta Ufficiale n. 102 del 3 maggio 2013, e successivi aggiornamenti;

[39] Funzione di utilità: formula che associa a ciascun paniere di beni un valore numerico indicante l'utilità totale che esso procura. (Katz M., Rosen H., Bollino C. A., Morgan W., 2011. *Microeconomia*. Milano: McGraw-Hill; pag 34).

[40] Funzione Cobb-Douglas: funzione in cui la somma degli esponenti è pari a 1 e per questo la funzione presenta rendimenti di scala costanti.

Con il metodo dei moltiplicatori di Lagrange avremo una funzione di utilità da massimizzare U(x,y) soggetta al vincolo indicato.

Per prima cosa scriviamo l'equazione lagrangiana

L = U(x, y) – λ (I – p_xx – p_yy) → $L = x^{1/2}y^{1/2} - \lambda\,(10000 - 3{,}70x - 3{,}90y)$

Dopodiché ricaviamo le derivate parziali dell'equazione di Lagrange e otterremo:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = \dfrac{1}{2}x^{-1/2}\,y^{1/2} - 3{,}70\lambda = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = \dfrac{1}{2}x^{1/2}\,y^{-1/2} - 3{,}90\lambda = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = 10000 - 3{,}70x - 3{,}90y = 0 \end{cases}$$

Risolviamo ora rispetto ad x, y e λ.

$$\begin{cases} \lambda = \dfrac{\frac{1}{2}x^{-1/2}\,y^{1/2}}{3{,}70} \\ \lambda = \dfrac{\frac{1}{2}x^{1/2}\,y^{-1/2}}{3{,}90} \\ 10000 - 3{,}70x - 3{,}90y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{\frac{1}{2}x^{-1/2}\,y^{1/2}}{3{,}70} = \dfrac{\frac{1}{2}x^{1/2}\,y^{-1/2}}{3{,}90} \\ * \\ ** \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \dfrac{3{,}90}{3{,}70}\,y \\ * \\ ** \end{cases}$$

$10000 - 3{,}70\frac{3{,}90}{3{,}70}\,y - 3{,}90y = 0 \quad \rightarrow \quad 10000 - 7{,}80y = 0$

$y = 1282{,}051 \approx 1282$
$y = 1351{,}351 \approx 1351$

$\lambda = 0{,}13162$

Come risultato otteniamo il paniere che massimizza l'utilità, il quale è composto rispettivamente da 1282 risme di carta normale e 1351 risme di carta riciclata.

Il moltiplicatore di Lagrange, λ, rappresenta l'utilità marginale[41] del reddito e questo può essere verificato calcolando il differenziale della funzione di utilità rispetto al reddito:

[41] Utilità marginale: variazione dell'utilità totale conseguente al consumo di un'unità aggiuntiva di un bene. (Katz M., Rosen H., Bollino C. A., Morgan W., 2011. *Microeconomia*. Milano: McGraw-Hill; pag. 45).

$$\frac{dU}{dI} = MU_x \frac{dx}{dI} + MU_y \frac{dy}{dI}$$

dove con MU intendiamo l'utilità marginale.

Sostituiamo ora ad MUx e MUy rispettivamente λp_x e λp_y che si trovano dalle derivate parziali del sistema.

$$\frac{dU}{dI} = \lambda p_x \frac{dx}{dI} + \lambda p_y \frac{dy}{dI}$$

Sostituiamo a dI del secondo membro l'equazione differenziale del vincolo di bilancio

$$dI = p_x\, dx + p_y\, dy$$

e alla fine otteniamo $\frac{dU}{dI} = \lambda$.

Conclusione

In questo elaborato si è cercato, partendo dalla programmazione matematica, di spiegare il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, facendo prima un excursus sulla storia dell'ottimizzazione e della programmazione matematica, in modo da inquadrare più chiaramente il periodo che vede lo sviluppo di questa disciplina, i protagonisti e il motivo della sua tarda espansione. Ci si è poi soffermati sul teorema dei moltiplicatori di Lagrange e sulla trattazione del teorema formulato da Dini, che si basa sul rispetto della regolarità dei vincoli. Dopodiché sono state introdotte le condizioni dei tre matematici Karush, Kuhn e Tucker, che hanno permesso di generalizzare quanto studiato da Lagrange.

Infine è stata fornita una spiegazione economica dei moltiplicatori ed è stato illustrato, mediante un caso pratico, il ricorso ai moltiplicatori di Lagrange nella risoluzione di un problema di ottimizzazione in presenza di un vincolo.

Riferimenti bibliografici

Barozzi G. C. e Corradi C. 1997. *Matematica Generale per le Scienze Economiche*. Bologna: il Mulino.

Binmore K. e Davis J. 2001. *Calculus. Concepts and Methods*. Cambridge, U.K: Cambridge University Press.

Buratto A., Grasselli M., Grosset L., e Viscolani B., 2015. *Matematica generale*. Padova: Libreria Progetto.

Buratto A., Grosset L., e Viscolani B., 2017. *Ottimizzazione Dinamica, modelli economici e gestionali*. Padova: Libreria Progetto.

De Marco G., 1999. *Analisi due*. Bologna: Zanichelli.

Enciclopedia europea, volume IV, 1977. Milano: Garzanti.

Florio M. In: Pasca di Magliano R., 2013. *Percorsi dello sviluppo*. Roma: Edizioni Nuova Cultura.

Fossati A., 1999. *ECONOMIA PUBBLICA: Elementi per un'analisi economica dell'intervento pubblico*. Milano: FrancoAngeli.

Grasso M., 2001. *Analisi economica e Ambiente*. Milano: FrancoAngeli.

Katz M., Rosen H., Bollino C. A., Morgan W., 2011. *Microeconomia*. Milano: McGraw-Hill.

Kerry Turner R., Pearce D. W., Bateman I., 2003. *Economia ambientale*. Bologna: il Mulino.

Impedovo M., 2005. *Matematica generale con il calcolatore*. Milano: Springer.

Maffii S., Parolin R., Scatamacchia R., 2011. *Guida alla valutazione economica di progetti di investimento nel settore dei trasporti*. Milano: FrancoAngeli.

Pasca di Magliano R., 2013. *Percorsi dello sviluppo*. Roma: Edizioni Nuova Cultura.

Thirlwall A. P. In: Pasca di Magliano R., 2013. *Percorsi dello sviluppo*. Roma: Edizioni Nuova Cultura.

Siti internet consultati

ANON., 2008. *Massimi e minimi vincolati con vincoli di uguaglianza.* Economia univr. Disponibile su: < https://www.unirc.it/documentazione/materiale_didattico/1465_2015_398_22266.pdf > [Data di accesso: 04/05/2020].

Battaia L., 2020. *Dini e dintorni*. Disponibile su: < http://www.batmath.it/matematica/0-appunti_uni/dini.pdf > [Data di accesso: 04/05/2020].

Centro di ricerca PRISTEM dell'Università Bocconi di Milano, articolo scritto da Giorgi G. e Guerraggio A. 1998. *PRISTEM / Storia. Note di Matematica, Storia, Cultura 1*; pp. 1–32. Disponibile su: <http://matematica.unibocconi.it > [Data di accesso: 29/04/2020].

Eleuteri M. *ANALISI MATEMATICA: Funzioni di più variabili reali (Funzioni convesse. Teorema del Dini).* Informatica univr. Disponibile su:

< http://mypoliuni.weebly.com/uploads/8/1/6/8/81687434/11_-_funzioni_convesse_e_teorema_del_dini.pdf > [Data di accesso: 04/05/2020].

Malucelli F. *Appunti di introduzione alla Ricerca Operativa*. Matematica unipd. Disponibile su:
< https://www.math.unipd.it/~luigi/courses/ricop1314/m01.modPL.00.pdf > [Data di accesso: 04/05/2020].

Zuccher S. *L'ottimizzazione nella storia*. Scienze ed Ingegneria univr.
Disponibile su: < http://profs.sci.univr.it/~zuccher/downloads/slides-PLS201415.pdf > [Data di accesso: 04/05/2020].