



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Dipartimento di Fisica e Astronomia “Galileo Galilei”

Corso di Laurea in Fisica

Tesi di Laurea

La Decoerenza in Meccanica Quantistica

Relatore

Prof. Pieralberto Marchetti

Laureando

Enrico Turetta

Anno Accademico 2018/2019

Indice

1	Teoria della Decoerenza	1
1.1	Il Programma della Decoerenza	1
1.2	Misure in senso Generalizzato	3
1.2.1	Misure Indirette	4
1.3	Modello di Decoerenza	5
1.3.1	Il Gatto di Schrödinger	7
2	Dinamica di un Sistema Aperto	11
2.1	Elementi di Teoria dei Semigrupperi Dinamici	13
2.1.1	Forma di Lindblad	14
2.1.2	Master Equation Microscopica	16
2.1.3	Esempio di Master Equation Markoviana	16
2.2	Dai Semigrupperi Dinamici alla dinamica Non-Markoviana	18
2.2.1	Super-operatori di Proiezione e Rappresentazione	18
2.2.2	Master Equation Non-Markoviana	20
3	Modello decoerente di un processo di Misura	23
3.1	Produzione di Entropia e Passaggio di Informazione	25
3.2	Conclusioni	32

Capitolo 1

Teoria della Decoerenza

1.1 Il Programma della Decoerenza

Gli studi riguardanti la *Teoria della Decoerenza* sono iniziati negli anni '70 ed '80 principalmente per mezzo dei lavori di H.D. Zeh [15] e W. Zurek [18], con l'obiettivo inizialmente di proporre un meccanismo che spiegasse l'emergere delle proprietà classiche a partire da un contesto puramente quantistico. Nonostante, quindi, lo studio di tale teoria sia piuttosto recente, essa si basa sui fondamenti della Meccanica Quantistica.

I 5 enunciati che costituiscono la struttura *assiomatica* su cui si fonda la Meccanica Quantistica fanno riferimento alla cosiddetta *interpretazione di Copenhagen* (CI), così nota in quanto formulata a partire dal 1927 dalla sinergia tra N. Bohr e W. Heisenberg, e dal contributo di P.A.M. Dirac, presso la capitale danese. Di tali assiomi presentiamo rapidamente significato e limiti:

1. I possibili stati puri di un sistema quantistico sono associati a raggi vettori di uno spazio di Hilbert astratto \mathcal{H} . I vettori rappresentativi dei raggi vettori sono propriamente denominati *vettori di stato*, ma per semplicità spesso sono detti semplicemente *stati*, e noi seguiremo questa consuetudine, qualora non causi confusione. Essi, in quanto elementi di uno spazio vettoriale, godono del *principio di sovrapposizione*. Come conseguenza di ciò, dati due o più vettori appartenenti allo spazio di Hilbert di lavoro, una qualsiasi loro combinazione lineare a coefficienti complessi descrive ancora un possibile stato del sistema;
2. Gli stati puri, descritti da vettori di stato che in notazione di Dirac sono denominati con il simbolo di *ket* $|\psi\rangle$, evolvono sotto l'azione di una mappa unitaria $U(t)$, in modo che $|\psi(t)\rangle = U(t)|\psi(0)\rangle$. L'evoluzione temporale è, quindi, una rappresentazione lineare unitaria di un gruppo ad un parametro, il cui generatore infinitesimo è l'operatore (autoaggiunto) Hamiltoniano del sistema H . Per gli stati che appartengono al dominio dell'operatore Hamiltoniano l'evoluzione è descritta dalla soluzione dell'equazione d'onda di Schrödinger,

$$i\hbar\partial_t |\psi(t)\rangle = H |\psi(t)\rangle \quad (1.1)$$

Date due soluzioni dell'equazione (1.1) all'istante t , il principio di sovrapposizione garantisce che una loro combinazione lineare rappresenti un possibile stato del sistema. Ciò equivale ad una versione dinamica del principio di sovrapposizione.

3. Ogni osservabile del sistema è associata ad un operatore autoaggiunto A . Supponiamo che lo spettro dell'osservabile sia discreto e non degenere. Allora, i possibili risultati di una misura dell'osservabile compiuta su un qualsiasi stato del sistema sono gli autovalori dell'operatore associato A ,
4. Lo stato immediatamente successivo ad una misura (ideale e di prima specie) che porge il risultato a_j è l'autostato di A relativo a tale autovalore, indicato con $|a_j\rangle$,
5. Se il sistema si trova in uno stato normalizzato $|\psi\rangle$, allora la probabilità che una misura dell'osservabile porga il valore a_j vale $p_j = |\langle a_j|\psi\rangle|^2$. Questa regola è nota come la *regola di Born* delle probabilità.

I primi tre assiomi della CI definiscono il formalismo della teoria. Gli assiomi (4), e (5) permettono, invece, di dare una descrizione *fenomenologica* di un processo di misura. In particolar modo, ci si riferisce al postulato (4) come al *postulato di proiezione*, comunemente attribuito a von Neumann. Esso descrive il processo di misura come un'evoluzione proiettiva (non-unitaria e quindi irreversibile) che mappa lo stato iniziale su un autospazio dell'operatore associato all'osservabile misurata. Tale proiezione, istantanea e casuale nella misura in cui segue le regole probabilistiche descritte nel postulato (5), è nota come *riduzione del pacchetto d'onde*. Evidentemente, il postulato di proiezione di von Neumann non prevede un'evoluzione unitaria secondo l'equazione di Schrödinger. Al termine di un processo di misura, non sarà più possibile osservare la sovrapposizione iniziale, che risulta inaccessibile. Queste osservazioni, combinate al fatto che alla fine del processo il sistema si trova nuovamente in uno stato puro, definiscono il *problema della misura*.

Risulta evidente, quindi, che un'interpretazione di tipo CI implichi la presenza di un'ulteriore assunzione, una sorta di postulato (0), che completi la trattazione rappresentando un processo di misura come un'interazione tra il sistema osservato, che si comporta quantisticamente, e lo strumento di misura/osservatore, il quale viene considerato, al contrario, classicamente. Non risulta, tuttavia, chiaro dove debba essere collocato il confine tra i due mondi e, di conseguenza, a che punto del processo di misura si collochi la discontinuità dell'evoluzione temporale unitaria. La scarsa chiarezza dell'interpretazione CI a riguardo permette di formulare esperimenti mentali che fanno emergere situazioni paradossali legate alla descrizione fenomenologica della misura che si sta adottando. Un esempio paradigmatico al riguardo è il paradosso dell'*amico di Wigner*, che evidenzia il ruolo della *coscienza* nel meccanismo del collasso, e che risulta essere un'estensione del più celebre paradosso del *gatto di Schrödinger*, il quale sottolinea l'assurdità del principio di sovrapposizione se applicato agli oggetti macroscopici.

Per provare a risolvere tale ultimo problema sono state proposte in passato opportune *regole di superselezione* tali da proibire sovrapposizioni di stati per gli oggetti macroscopici. Tuttavia, anche in questo caso i limiti del principio di sovrapposizione non risultano chiaramente fissati. Se, per esempio, risulta problematico pensare ad una sovrapposizione dello stato "vivo" e "morto" per il gatto di Schrödinger, è tuttavia noto che le particelle elementari possano essere osservate in opportune sovrapposizioni, come ad esempio nel fenomeno di oscillazione di sapore dei Kaoni. Parimenti è possibile considerare l'esistenza di eventuali sovrapposizioni tra protone e neutrone che descrivano un nucleone all'interno del nucleo, ma non è possibile osservare nuclei che si trovino in una sovrapposizione di più possibili configurazioni isotopiche. Ciò nonostante, sono osservati comportamenti quantistici di sistemi con molte particelle, senza ammettere però la possibilità di poter costruire sovrapposizioni tra funzioni d'onda fermioniche e bosoniche.

La teoria della decoerenza fu inizialmente introdotta per provare a spiegare la presenza di tali regole di superselezione e dell'apparente emergere del mondo classico (macroscopico) a partire da un contesto quantistico, sottolineando il ruolo dell'*entanglement* tra il sistema e l'ambiente circostante. Come conseguenza di ciò, inoltre, si pone l'ambizioso obiettivo di affrontare il problema della misura, cercando di fornire una descrizione dinamica (ovvero conseguente ad un'equazione di Schrödinger) del processo di misura che permetta di selezionare uno stato puro come conclusione.

La cornice teorica dello studio della decoerenza è la *teoria dei sistemi quantistici aperti*, che tratta degli effetti dell'ambiente sull'evoluzione di un sistema aperto ad esso. Un sistema reale, infatti, non è mai esattamente isolato dall'ambiente circostante. L'enfasi della decoerenza è posta su come il sistema disturbi l'ambiente, al contrario di ciò che avviene nei processi di termalizzazione, permettendo la delocalizzazione delle sovrapposizioni e il passaggio di informazione.

Se estendiamo la descrizione del problema includendo l'ambiente, con uno spazio di Hilbert associato \mathcal{H}_E , ed il suo accoppiamento con il sistema nella trattazione, il sistema composto è rappresentato nello spazio di Hilbert $\mathcal{H}_{tot} = \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}_E$. Inoltre, la rappresentazione matematica degli stati più opportuna per la seguente analisi non risulta essere quella di raggi vettore nello spazio \mathcal{H}_{tot} , bensì quella più generale delle *matrici densità* ρ , che permettono di descrivere anche *stati misti*, ovvero di informazione non massimale. Esse sono operatori autoaggiunti nello spazio di Hilbert degli stati, definiti non-negativi e di traccia unitaria. Nella decomposizione precedente dello spazio di Hilbert totale, lo stato del sistema all'istante t sarà descritto, assumendo di voler tralasciare i gradi di libertà dell'ambiente, nei termini della matrice ridotta $\varrho(t)$, definita da $\varrho(t) = \text{Tr}_E[\rho(t)]$.

1.2 Misure in senso Generalizzato

Nella sezione precedente è stato introdotto il modello di misura proiettiva, il quale è previsto dalla struttura assiomatica della CI. Dal punto di vista formale, supponiamo di considerare un'osservabile a spettro discreto non degenere $A = \sum_k a_k |a_k\rangle\langle a_k| = \sum_k a_k P_k$, ogni elemento appartenente allo spettro dell'osservabile è quindi associato biunivocamente ad un operatore di proiezione $P_k = |a_k\rangle\langle a_k| = P_k^2 = P_k^\dagger$. La probabilità che la misura dell'osservabile A nello stato ϱ restituisca il valore a_k è definita dalla probabilità di transizione nello stato $|a_k\rangle$,

$$p(a_k|\varrho) = \text{Tr}[P_k\varrho] = \langle a_k|\varrho|a_k\rangle$$

che nel caso di stati puri $\varrho = |\psi\rangle\langle\psi|$ si riduce alla regola di Born,

$$p(a_k|\varrho) = |\langle a_k|\psi\rangle|^2$$

Lo stato del sistema dopo la misura sarà descritto da un operatore di proiezione normalizzata,

$$\varrho' = \mathcal{M}(\varrho|a_k) = \frac{P_k\varrho P_k}{\text{Tr}[P_k\varrho]}$$

Nel caso in cui lo spettro dell'osservabile sia continuo, l'estensione è immediata in seguito all'introduzione di opportuni operatori di proiezione per cui la relazione di completezza $\sum_k P_k = \mathbb{I}$ viene sostituita con la sua forma integrale $\int dP(a) = \mathbb{I}$.

Una misura di tipo proiettivo non è il più generale tipo di misura compatibile con le regole della meccanica quantistica dei *sistemi aperti*, ovvero nel caso in cui consideriamo misure indirette ottenute per mezzo di sistemi ausiliari che interagiscono con il sistema oggetto di studio. Consideriamo, quindi, un sistema composto descritto dallo spazio di Hilbert \mathcal{H} del sistema ed un sistema *ancilla* in \mathcal{H}_a , avente una base in corrispondenza biunivoca con i possibili risultati della misura dell'osservabile A .

• Misura Generalizzata

Una misura generalizzata è descritta, nel caso più generale, da un insieme di operatori $\{M_{k,j}\}$, che come unica richiesta soddisfino la relazione di completezza,

$$\sum_{k,j} M_{k,j}^\dagger M_{k,j} = \mathbb{I}$$

Tali operatori prendono il nome di *operatori di misura* e permettono di caratterizzare completamente il processo di misura, in quanto l'indice k corrisponde al k -esimo possibile risultato di una misura, e j un ulteriore indice il cui significato sarà chiarito in seguito.

La probabilità di ottenere a_k come risultato di una misura dell'osservabile A , infatti, sarà descritta dalla seguente formula,

$$p(a_k|\varrho) = \text{Tr}\left[\sum_j M_{k,j}^\dagger M_{k,j}\varrho\right]$$

L'effetto sul sistema di una misura generalizzata è descritto dalla trasformazione non-lineare,

$$\mathcal{M} : \varrho \rightarrow \varrho' = \mathcal{M}(\varrho|a_k) = \frac{\sum_j M_{k,j}\varrho M_{k,j}^\dagger}{\text{Tr}[\sum_j M_{k,j}^\dagger M_{k,j}\varrho]} \quad (1.2)$$

Una misura generalizzata si dice efficiente se nell'equazione (1.2) compare un singolo addendo per ogni valore a_k . In tal caso lo stato immediatamente successivo ad una misura generalizzata diviene,

$$\mathcal{M} : \varrho \rightarrow \varrho' = \mathcal{M}(\varrho|a_k) = \frac{M_k\varrho M_k^\dagger}{\text{Tr}[M_k^\dagger M_k\varrho]} \quad (1.3)$$

È possibile interpretare tale risultato per mezzo del teorema di Neumark, di cui consideriamo la seguente formulazione¹:

Teorema di Neumark. \forall Misura Generalizzata Efficiente con elementi $\{M_k\}_k$, \exists una misura proiettiva rappresentata da P_k in uno spazio di Hilbert esteso $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}_a$ con una preparazione pura iniziale dell'ancilla.

È, infine, opportuno notare che una misura proiettiva rappresenta un caso particolare di una misura generalizzata, nel caso in cui $M_k^\dagger = M_k$ e $M_k M_{k'} = \delta_{k,k'} M_k$.

• POVM

Una POVM (positive operators-valued measure) è descritta da un insieme di operatori $\{F_k\}_k$ autoaggiunti e definiti positivi, che soddisfano una relazione di completezza,

$$\sum_k F_k = \mathbb{I}$$

È possibile ottenere una POVM a partire da una misura generalizzata efficiente se definiamo $F_k = M_k^\dagger M_k$, in modo quindi che il k -esimo operatore F_k sia associato al k -esimo elemento dello spettro di A a_k .

Allora la probabilità che una misura dell'osservabile A nello stato ϱ restituisca il k -esimo valore dello spettro è descritta dalla relazione,

$$p(a_k|\varrho) = \text{Tr}[F_k \varrho]$$

Per determinare lo stato del sistema immediatamente successivo all'atto della misura, si osserva che gli operatori di misura ammettono una decomposizione polare $M_k = U_k \sqrt{F_k}$, dove U_k è un opportuno operatore unitario.

$$\mathcal{M} : \varrho \rightarrow \varrho' = \mathcal{M}(\varrho|a_k) = U_k \frac{\sqrt{F_k} \varrho \sqrt{F_k}}{\text{Tr}[F_k \varrho]} U_k^\dagger \quad (1.4)$$

Osserviamo, infine, che una POVM mappa uno stato puro in uno stato puro:

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &\rightarrow U_k \frac{\sqrt{F_k}}{\sqrt{\langle\psi|F_k|\psi\rangle}} |\psi\rangle \\ \Leftrightarrow \langle\psi|\psi\rangle = 1 &\implies \langle\psi| \overbrace{\frac{\sqrt{F_k} U_k^\dagger U_k \sqrt{F_k}}{\sqrt{|\langle\psi|F_k|\psi\rangle|^2}}}^{F_k} |\psi\rangle = 1 \end{aligned}$$

1.2.1 Misure Indirette

Attraverso una misura indiretta cercheremo di ottenere informazioni sul sistema lasciandolo interagire con un sistema ancilla, e poi eseguendo una misura proiettiva su tale sistema ausiliario, come suggerito dal teorema di Neumark, distruggendone lo stato per poter ottenere informazioni sul sistema.

Rappresenteremo lo stato del sistema ausiliario per mezzo dell'operatore ρ_a dello spazio \mathcal{H}_a , mentre con la forma corsiva ϱ lo stato del sistema.

Sia P_k il proiettore sullo spazio $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}_a$ corrispondente al k -esimo elemento dello spettro dell'osservabile considerata. L'interazione tra il sistema e l'ancilla sarà rappresentata dall'operatore S .

Supponiamo che il proiettore P_k agisca solamente sul sistema ausiliario $P_k = \mathbb{I} \otimes P_k^a$, e che, di conseguenza, la probabilità di osservare il k -esimo elemento dello spettro dell'osservabile dipenda dallo stato ridotto dell'ancilla in seguito alla proiezione. Osserveremo che queste ipotesi sono compatibili con il fatto che sia avvenuta una

¹ Il teorema enunciato si riferisce ad osservabili a spettro discreto non degenere. Esiste una sua generalizzazione, che tuttavia non presentiamo per brevità.

POVM.

Infatti,

$$p(a_k|\varrho) = \text{Tr}[P_k^a \rho'_a] = \text{Tr}_a[P_k^a \underbrace{\text{Tr}_s[S(\varrho \otimes \rho_a)S^\dagger]}_{\rho'_a}] = \text{Tr}[(\mathbb{I} \otimes P_k^a)S(\varrho \otimes \rho_a)S^\dagger]$$

Si sfrutta la permutabilità ciclica degli operatori sotto l'azione della traccia per definire gli elementi di misura,

$$F_k = \text{Tr}_a[S^\dagger(\mathbb{I} \otimes P_k^a)S(\mathbb{I} \otimes \rho_a)]$$

tali che,

$$p(a_k|\varrho) = \text{Tr}_s[F_k \varrho]$$

Si può osservare che tali elementi di misura sono definiti positivi e soddisfano la condizione,

$$\sum_k F_k = \text{Tr}_a[S^\dagger(\mathbb{I} \otimes \underbrace{\sum_k P_k^a}_{\mathbb{I}})S(\mathbb{I} \otimes \rho_a)] = \underbrace{\text{Tr}_a[\mathbb{I} \otimes \rho_a]}_{S^\dagger S = \mathbb{I}} = \mathbb{I}$$

Lo stato del sistema in seguito alla misura può essere determinato,

$$\varrho' = \text{Tr}_a[\mathcal{M}(\rho|a_k)] = \text{Tr}_a\left[\frac{(\mathbb{I} \otimes P_k^a)S(\varrho \otimes \rho_a)S^\dagger(\mathbb{I} \otimes P_k^a)}{\text{Tr}[F_k \varrho]}\right]$$

Introduciamo una generica decomposizione dello stato iniziale dell'ancilla $\rho_a = \sum_j \gamma_j |j\rangle\langle j|$ e prendiamo $P_k^a = |k\rangle\langle k|$, ottenendo una descrizione microscopica degli operatori di misura,

$$M_{kj} = \sqrt{\gamma_j} |k\rangle\langle j| \quad (1.5)$$

$$\varrho' = \mathcal{M}(\varrho|a_k) = \sum_j \frac{M_{kj} \varrho M_{kj}^\dagger}{\text{Tr}[F_k \varrho]}$$

Ciò mostra che una misura indiretta è efficiente se l'ancilla si trova inizialmente in uno stato puro.

Se sappiamo, ora, che una misura indiretta è avvenuta, ma non conosciamo il risultato a_k il sistema dovrà essere descritto in termini probabilistici. Il nuovo stato del sistema sarà determinato, in formalismo Bayesiano, dalla somma di tutti i possibili contributi pesati dalle rispettive probabilità,

$$\varrho' = \sum_k p(a_k|\varrho) \mathcal{M}(\varrho|a_k) = \sum_{kj} M_{kj} \varrho M_{kj}^\dagger \quad (1.6)$$

1.3 Modello di Decoerenza

Definiamo *decoerenza* nel suo senso generale come un qualche effetto quantistico conseguente all'azione di un certo numero di gradi di libertà dell'ambiente su un sistema, che causa la scomparsa di alcuni elementi non-diagonali di una matrice densità ridotta, che prendono il nome di *coerenze*. Ciò avviene come conseguenza della delocalizzazione di una sovrapposizione coerente di funzioni d'onda definita in uno spazio di Hilbert astratto a causa dell'*entanglement* previsto dal formalismo dell'equazione dinamica di Schrödinger. La produzione di entanglement influenza, quindi, quello che può essere osservato *localmente* misurando un sistema.

Sebbene i gradi di libertà dell'ambiente saranno trattati quantisticamente, il loro stato deve essere considerato *non osservabile*, come conseguenza del loro grande numero e della loro incontrollabilità. Assumiamo, inoltre, che l'interazione tra sistema ed ambiente sia sufficientemente a corto raggio per poter ammettere una descrizione in termini di *scattering*, ovvero considerando una mappa tra stati asintoticamente liberi.

Sia lo stato del sistema quantistico descritto dalla matrice densità ϱ di \mathcal{H} , e l'ambiente sia preparato nello stato puro $\rho_E = |\varphi_{in}\rangle\langle\varphi_{in}|$ di \mathcal{H}_E . L'operatore di interazione S mappa lo stato separabile iniziale in uno stato finale entangled,

$$\rho' = S(\varrho \otimes |\varphi_{in}\rangle\langle\varphi_{in}|)S^\dagger$$

Assumiamo, ora, che esistano un certo numero di stati distinti del sistema tali che lo scattering con l'ambiente non produca alcuna transizione nel sistema. Stiamo, dunque, richiedendo che sia ammessa l'esistenza di *stati robusti* del sistema rispetto ad una certa interazione con l'ambiente. Ciò significa che l'operatore di interazione dev'essere diagonale rispetto all'insieme di tali stati $\{|n\rangle\}_n \in \mathcal{H}$. Se questo insieme costituisce una base ortonormale, S assume la forma $S = \sum_n |n\rangle\langle n| \otimes S_n$ dove S_n è un opportuno operatore in \mathcal{H}_E . Applicando tali ipotesi alla precedente formula si ottiene,

$$\rho' = \sum_{nm} (|m\rangle\langle m| \otimes |n\rangle\langle n|) (S_m |\varphi_{in}\rangle\langle\varphi_{in}| S_n^\dagger) = \sum_{nm} (\varrho_{nm} |m\rangle\langle n|) \otimes |\varphi_{fin}^m\rangle\langle\varphi_{fin}^n|$$

Operando la traccia parziale, otteniamo lo stato del sistema in seguito all'interazione:

$$\varrho' = \text{Tr}_E[\rho'] = \sum_{nm} \varrho_{nm} |m\rangle\langle n| \underbrace{\langle\varphi_{in}| S_n^\dagger S_m |\varphi_{in}\rangle}_{\langle\varphi_{fin}^n|\varphi_{fin}^m\rangle} = \sum_{nm} \tilde{\varrho}_{nm} |m\rangle\langle n| \quad (1.7)$$

dove,

$$\tilde{\varrho}_{nm} = \varrho_{nm} \langle\varphi_{fin}^n|\varphi_{fin}^m\rangle$$

Da tale relazione comprendiamo, dunque, che le *popolazioni* della matrice densità ϱ_{nn} sono invarianti per l'interazione descritta, come conseguenza dell'unitarietà degli operatori di scattering. Le *coerenze*, al contrario, vengono moltiplicate per un integrale di overlap dei gradi di libertà dell'ambiente che hanno interagito con gli stati m ed n -esimo del sistema. Tale integrale sarà minore di 1, con la conseguenza che le coerenze saranno soppresse. Nel caso in cui gli stati dell'ambiente in seguito all'interazione con il sistema siano ortogonali tra loro, le coerenze si annullano esattamente.

È rilevante osservare che tale perdita di coerenza avviene solo in una base privilegiata, che dipende dagli operatori di scattering e quindi dal tipo di interazione con l'ambiente. L'esistenza di una base privilegiata permetterebbe di comprendere l'emergere delle proprietà classiche e di regole di superselezione effettive. La richiesta, infatti, che esistano degli stati che non siano perturbati dall'ambiente, e nella cui base le matrici densità ridotte subiscono una rapida diagonalizzazione, permette di affermare che loro eventuali sovrapposizioni sono altamente instabili rispetto al processo di decoerenza. Generalmente si fa riferimento a tale affermazione come *environment induced superselection rule*. È quindi la tipologia di interazione con l'ambiente, tale da poter includere un apparato strumentale che entri in contatto con il sistema, che determina cosa può essere osservato. Notiamo, tuttavia, che la denominazione utilizzata è un abuso di linguaggio, in quanto nel caso generale un'osservabile dell'ambiente può avere elementi di matrice non nulli anche presi stati ortogonali dell'ambiente, distruggendo così una *regola di superselezione* in senso stretto.

L'instaurarsi di *correlazioni non locali* in seguito all'interazione e alla produzione di entanglement è alla base dell'effetto della decoerenza di incapacità di predire il comportamento quantistico di un sistema. L'informazione riguardo la coerenza dello stato, contenuta all'interno di tali correlazioni, viene perduta nel momento in cui un osservatore locale trascura i gradi di libertà dell'ambiente. Una visione complementare suggerisce che maggiormente l'integrale di overlap si allontana dall'unità, maggiore informazione un osservatore non-locale *potrebbe* ricavare misurando lo stato dell'ambiente.

Fin qui, tuttavia, la scelta dell'ambiente e dell'interazione è stata piuttosto speciale. Per generalizzare il risultato assumiamo che S e $\rho_E = \sum_j p_j |j\rangle\langle j|$ siano definiti in modo arbitrario.

$$\varrho' = \text{Tr}_E[S(\varrho \otimes \rho_E)S^\dagger] = \sum_{jl} p_j \langle l|_E S(\varrho \otimes |j\rangle\langle j|) S^\dagger |l\rangle_E = \sum_{jl} p_l \langle j| S |l\rangle \varrho \langle l| S^\dagger |j\rangle$$

Introduciamo a questo punto opportuni operatori definiti in \mathcal{H} ,

$$M_{jl} = \sqrt{p_l} \langle j| S |l\rangle$$

in modo che lo stato conseguente all'interazione con l'ambiente si possa scrivere,

$$\varrho' = \sum_{jl} M_{jl} \varrho M_{jl}^\dagger \quad (1.8)$$

È necessario, ora, confrontare tale equazione con (1.6), in quanto le due equazioni sembrano effettivamente descrivere lo stesso fenomeno. Ciò implica che il processo di decoerenza può legittimamente essere visto come una conseguenza dell'informazione trasferita dal sistema all'ambiente, il quale sembra compiere sullo stesso *una misura indiretta il cui risultato ci è almeno inizialmente precluso*. Come descritto in precedenza, tale effetto simula una misura proiettiva avvenuta in uno spazio di dimensioni maggiori.

Supponiamo adesso che l'ambiente possa essere preparato in un suo stato puro $|\varphi\rangle$, allora nella somma presente in equazione (1.8) un indice scompare, ottenendo

$$\rho' = \sum_k E_k \rho E_k^\dagger \quad (1.9)$$

dove gli operatori $E_k = \langle k|S|\varphi\rangle$ soddisfano la relazione,

$$\sum_k E_k E_k^\dagger = \langle \varphi|S^\dagger \left(\underbrace{\sum_k |k\rangle\langle k|}_\mathbb{I} \right) S|\varphi\rangle = \mathbb{I}$$

Tale equazione implica che un operatore di scattering tale da descrivere il processo di decoerenza ammette una *rappresentazione di Kraus*, ovvero la forma più generale di evoluzione *dinamica* di uno stato descritto da una matrice ridotta, compatibilmente con le regole della meccanica quantistica dei sistemi aperti, come sarà più ampiamente discusso nella sezione [2.1].

1.3.1 Il Gatto di Schrödinger

Il paradosso proposto da Schrödinger nel 1935 doveva mostrare l'assurdità del principio di sovrapposizione se applicato a stati macroscopicamente distinti. L'obiettivo della presente sezione è di mostrare che modelli pur semplici di interazione con l'ambiente possono portare al rapido decadimento delle coerenze se si parte da una sovrapposizione coerente di stati macroscopicamente distinti. Osserveremo, quindi, la distruzione della stessa, e la conseguente transizione verso una configurazione classica per la matrice ridotta del sistema.

Consideriamo inizialmente una particella libera in movimento nello spazio tridimensionale. Essa subirà un processo di scattering con una particella leggera, che agisce da *sonda* rivelatrice. Lo stato iniziale composto sarà descritto dalla funzione d'onda separabile,

$$\Phi_i(x, \chi) = \psi(x) \otimes \varphi_i(\chi)$$

utilizzando come rappresentazione opportune coordinate tridimensionali.

L'urto tra le due particelle segue le leggi di conservazione del momento,

$$p_i + \pi_i = p_f + \pi_f$$

L'effetto dell'urto sarà pertanto visibile in rappresentazione di Fourier,

$$\Phi_i(x, \chi) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \int d^3p e^{\frac{i}{\hbar}p \cdot x} \hat{\psi}(p) \otimes \varphi_i(\chi)$$

Tale funzione d'onda viene, quindi, mappata nello stato,

$$\begin{aligned} \Phi_f(x, \chi) &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \int d^3p \int d^3\pi_f A(\pi_f, \pi_i) e^{\frac{i}{\hbar}(p+\pi_i-\pi_f) \cdot x} \hat{\psi}(p) \otimes \varphi_f(\chi) = \\ &= \psi(x) \int d^3\pi_f A(\pi_f, \pi_i) e^{\frac{i}{\hbar}(\pi_i-\pi_f) \cdot x} \otimes \varphi_f(\chi) \end{aligned}$$

Nella descrizione dello stato finale si è considerato il contributo di tutti i valori possibili di π_f che la particella leggera può assumere, per mezzo dell'ampiezza di transizione $A(\pi_f, \pi_i)$. In seguito alla collisione lo stato

separabile iniziale è stato mappato in uno stato *entangled*, pertanto, sebbene lo stato finale sia comunque puro, lo stato ridotto del sistema non necessariamente lo sarà. Consideriamo, allora, la matrice densità,

$$\begin{aligned} \langle x' | |\Phi_f\rangle\langle\Phi_f| |x''\rangle &= \int d^3\chi \Phi_f(x', \chi) \Phi_f^*(x'', \chi) = \\ &= \int d^3\chi \underbrace{\psi(x')\psi^*(x'')}_{\langle x' | \varrho_i | x''\rangle} \underbrace{\int d^3\pi_f' A(\pi_f', \pi_i) e^{\frac{i}{\hbar}(\pi_i - \pi_f') \cdot x'} \otimes \varphi_{f'}(\chi) \int d^3\pi_f'' A^*(\pi_f'', \pi_i) e^{-\frac{i}{\hbar}(\pi_i - \pi_f'') \cdot x''} \otimes \varphi_{f''}^*(\chi)}_{\int d^3\chi \varphi_{f'}(\chi) \varphi_{f''}^*(\chi) = \delta(\pi_f' - \pi_f'')} = \\ &= \langle x' | \varrho_i | x''\rangle \int d^3\pi_f |A(\pi_f, \pi_i)|^2 e^{\frac{i}{\hbar}(\pi_i - \pi_f) \cdot (x' - x'')} \end{aligned}$$

La condizione di conservazione dell'energia cinetica implica,

$$\frac{p_i^2}{2M} + \frac{\pi_i^2}{2m} = \frac{p_f^2}{2M} + \frac{\pi_f^2}{2m}$$

Supponendo $M \gg m$, è possibile ipotizzare che l'energia cinetica della particella pesante rimanga sostanzialmente invariata, implicando $|\pi_i| \sim |\pi_f|$. L'argomento dell'integrale oscilla rapidamente, comportando un valore nullo assunto dall'integrale, se

$$|x' - x''| \gg \hbar/|\pi_i|$$

ovvero se le coordinate individuano punti macroscopicamente distinti. In tal caso gli elementi di matrice $\varrho_f(x', x'')$ tali per cui $|x' - x''| \gg \hbar/|\pi_i|$ sono soppressi rapidamente in seguito ad *una singola interazione* tra la particella da rilevare e la sonda leggera.

Al contrario, per descrivere gli elementi diagonali di $\varrho_f(x', x'')$, ovvero quelli per cui $|x' - x''| \ll \hbar/|\pi_i|$, consideriamo la matrice,

$$\delta\varrho(x', x'') = \langle x' | \varrho_f | x''\rangle - \langle x' | \varrho_i | x''\rangle$$

di cui effettuiamo lo sviluppo al secondo ordine. Sotto l'ipotesi di simmetria per parità dell'ampiezza di transizione $A(\pi_i, \pi_f) = A(-\pi_i, -\pi_f)$, si ottiene,

$$\delta\varrho(x', x'') \sim -\frac{1}{2} \int d^3\pi_f |A(\pi_i, \pi_f)|^2 \left[\frac{\pi_i - \pi_f}{\hbar} \cdot (x' - x'') \right]^2 \langle x' | \varrho_i | x''\rangle \propto |x' - x''|^2 \langle x' | \varrho_i | x''\rangle$$

Le popolazioni della matrice densità rimangono, quindi, praticamente invariate in seguito all'interazione, mentre si è osservato il decadimento dei termini fuori dalla diagonale.

Un caso particolare potrebbe essere quello in cui ipotizziamo che la funzione d'onda che descrive una particella ferma localizzata in x_0 abbia forma gaussiana. Considereremo come stato iniziale una sovrapposizione coerente di due funzioni d'onda con supporto in regioni *macroscopicamente distinte*, ovvero un analogo per una singola particella di un *cat state*. Sia quindi,

$$\psi_{\pm}(x) = A e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x \mp x_0}{\sigma} \right)^2}$$

e lo stato iniziale,

$$\psi_{cat}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\psi_+(x) + \psi_-(x)]$$

La matrice densità associata allo stato iniziale prevede la presenza di quattro differenti picchi,

$$\langle x' | \varrho_{cat} | x''\rangle = \frac{1}{2} [\psi_+(x')\psi_+(x'') + \psi_+(x')\psi_-(x'') + \psi_-(x')\psi_+(x'') + \psi_-(x')\psi_-(x'')]$$

di cui due lungo la diagonale (se $x' = x''$) e due (se $x' = -x''$) che costituiscono le coerenze della sovrapposizione considerata.

Come mostrato per mezzo del modello microscopico descritto, è sufficiente l'interazione con una singola particella sonda per distruggere la sovrapposizione coerente per quanto riguarda la matrice ridotta.

Risulta interessante, in approssimazione Gaussiana, considerare la distribuzione di probabilità in termini di stato ridotto $|\psi_{cat}(p)|^2$, noto che la distribuzione $|\psi_{\pm}(p)|^2$ è una Gaussiana centrata in zero.

$$\begin{aligned} |\psi_{cat}(p)|^2 &= \left| \frac{A}{\sqrt{2}(2\pi\hbar)^{3/2}} \int \mathbf{d}^3x e^{-\frac{i}{\hbar}p \cdot x} \left[e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x-x_0}{\sigma} \right)^2} + e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x+x_0}{\sigma} \right)^2} \right] \right|^2 = \\ &= \tilde{A} \left| \left[e^{-\frac{\sigma^2 p^2}{2\hbar^2}} e^{-\frac{i}{\hbar}p \cdot x_0} + e^{-\frac{\sigma^2 p^2}{2\hbar^2}} e^{+\frac{i}{\hbar}p \cdot x_0} \right] \right|^2 \propto e^{-\frac{\sigma^2 p^2}{2\hbar^2}} \cos^2 \left(\frac{p \cdot x_0}{\hbar} \right) \end{aligned} \quad (1.10)$$

La distribuzione di probabilità prevede, quindi, la presenza di frange di interferenza conseguenti alla presenza di coerenza tra gli stati $|\psi_+\rangle$ e $|\psi_-\rangle$. Aumentando la separazione tra le posizioni macroscopicamente distinte, il periodo $\hat{p} = h/|x_0|$ della figura di interferenza decresce rapidamente.

Se osserviamo il sistema illuminandolo con un fotone di momento \bar{p} , è possibile distinguere le posizioni se $\lambda = h/|\bar{p}| \ll 2|x_0|$. In tal caso, però, $|\bar{p}| \gg h/|x_0|$, e di conseguenza non sarà possibile osservare le frange di interferenza, risultando nella perdita di coerenza del sistema. Per un "gatto" di circa 10 cm è sufficiente l'interazione con un singolo fotone di energia di poche decine μeV per distruggerne la sovrapposizione coerente.

Al contrario, se $\lambda \gg 2|x_0|$ le due posizioni non sono macroscopicamente distinguibili. Ma allora $|\bar{p}| \ll h/|x_0|$. In tal caso, non è possibile osservare la perdita di coerenza per mezzo di una singola interazione.

Un tale argomento mostra evidentemente come *sovrapposizioni coerenti macroscopiche* del sistema siano altamente instabili per interazione, anche molto debole, con l'ambiente.

Capitolo 2

Dinamica di un Sistema Aperto

Nella sezione [1.3] è stata anticipata la possibilità di offrire una visione dinamica della decoerenza. Per farlo, consideriamo inizialmente l'equazione di evoluzione dei sistemi isolati, o equazione di von Neumann,

$$\dot{\rho}(t) = \frac{[H, \rho(t)]}{i\hbar} \quad (2.1)$$

Nella presente sezione cercheremo di derivare, a partire da questa, una simile equazione valida per le matrici densità ridotte, ovvero che descriva l'evoluzione di un *sistema aperto* in contatto con un ambiente. Lo stato composto rappresentato in $\mathcal{H}_{tot} = \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}_E$ evolve unitariamente secondo (2.1).

Lo stato del sistema evoluto sarà descritto dalla traccia parziale valutata al tempo t ,

$$\dot{\rho}(t) = \frac{\text{Tr}_E[[H, \rho(t)]]}{i\hbar}$$

Una equazione di questo tipo non è chiusa, per cui non risulta utile nella maggior parte dei casi. Introducendo opportune ipotesi, si cercherà di derivare equazioni di evoluzione approssimate in termini di super-operatori. Per tale derivazione si è fatto riferimento principalmente a quanto mostrato nelle referenze [6] e [10].

Supponiamo di conoscere dal punto di vista microscopico l'Hamiltoniano totale

$$H = H_S + H_E + H_{int} \quad (2.2)$$

Ipotesi di Accoppiamento Debole. *Assumiamo che il termine di interazione sia sufficientemente piccolo da poterlo trattare come un termine perturbativo.*

Assumiamo, innanzitutto, una *visuale di interazione*, tale per cui definiamo gli operatori di evoluzione unitaria separati del sistema e dell'ambiente come,

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{d}{dt} U_S(t) &= H_S U_S(t) \quad , \quad U_S(0) = \mathbb{I} \\ i\hbar \frac{d}{dt} U_E(t) &= H_E U_E(t) \quad , \quad U_E(0) = \mathbb{I} \end{aligned}$$

E definiamo l'operatore di interazione tempo dipendente sullo spazio di Hilbert composto,

$$\tilde{H}_{int}(t) = U^\dagger(t) H_{int} U(t)$$

dove $U(t) = U_S(t) \otimes U_E(t)$.

In generale, nel corso dei passaggi successivi utilizzeremo la notazione per cui $\tilde{X} = U^\dagger(t) X U(t)$. In particolare, sia $\tilde{\rho}(t) = U^\dagger(t) \rho(t) U(t)$.

Sostituendo all'interno della relazione (2.1),

$$\begin{aligned} \dot{\rho}(t) = \frac{[H, \rho(t)]}{i\hbar} &\implies i\hbar \frac{d}{dt} \left(U(t) \tilde{\rho}(t) U^\dagger(t) \right) = [(H_S + H_E) + H_{int}, U(t) \tilde{\rho}(t) U^\dagger(t)] \\ & \quad i\hbar \frac{d}{dt} \tilde{\rho}(t) = [\tilde{H}_{int}(t), \tilde{\rho}(t)] \end{aligned} \quad (2.3)$$

si ottiene, dunque, un'equazione nella forma integro-differenziale,

$$\tilde{\rho}(t) = \tilde{\rho}(0) + \frac{1}{i\hbar} \int_0^t ds [\tilde{H}_{int}(s), \tilde{\rho}(s)]$$

Ciò permette di scrivere un'equazione di von Neumann integro-differenziale,

$$\partial_t \tilde{\rho}(t) = \frac{[\tilde{H}_{int}(t), \tilde{\rho}(0)]}{i\hbar} - \frac{1}{\hbar^2} \int_0^t ds [\tilde{H}_{int}(t), [\tilde{H}_{int}(s), \tilde{\rho}(s)]]$$

A questo punto, la prima assunzione giustifica l'introduzione di una seconda ipotesi. Supponiamo che ad un certo istante, che fissiamo come istante iniziale $t = 0$, lo stato totale sia separabile $\rho(0) = \varrho(0) \otimes \rho_E$, dove ρ_E è un certo stato stazionario tale che $[H_E, \rho_E] = 0$.

Approssimazione di Born. *Assumiamo che l'interazione sia sufficientemente debole da poter considerare separabile lo stato totale al generico istante $t > 0$ nei termini in cui l'interazione compare almeno al secondo ordine.*

È possibile introdurre, inoltre, una decomposizione dell'operatore $\tilde{H}_{int}(t)$, utilizzando opportune basi di operatori autoaggiunti di Hilbert-Schmidt sullo spazio prodotto tensoriale.

$$\tilde{H}_{int}(t) = U^\dagger(t) \left(\sum_k A_k \otimes B_k \right) U(t) = \sum_k \tilde{A}_k(t) \otimes \tilde{B}_k(t)$$

Inserendo tali ipotesi nell'equazione integro-differenziale otteniamo,

$$\begin{aligned} \partial_t \tilde{\rho}(t) = & \sum_k \frac{\tilde{A}_k(t) \tilde{B}_k(t) \tilde{\varrho}(0) \rho_E - \tilde{\varrho}(0) \rho_E \tilde{A}_k(t) \tilde{B}_k(t)}{i\hbar} - \\ & - \sum_{jk} \frac{1}{\hbar^2} \int_0^t ds \left(\tilde{A}_j(t) \tilde{B}_j(t) \tilde{A}_k(s) \tilde{B}_k(s) \tilde{\varrho}(s) \rho_E - \tilde{A}_j(t) \tilde{B}_j(t) \tilde{\varrho}(s) \rho_E \tilde{A}_k(s) \tilde{B}_k(s) - \right. \\ & \left. - \tilde{A}_k(s) \tilde{B}_k(s) \tilde{\varrho}(s) \rho_E \tilde{A}_j(t) \tilde{B}_j(t) + \tilde{\varrho}(s) \rho_E \tilde{A}_k(s) \tilde{B}_k(s) \tilde{A}_j(t) \tilde{B}_j(t) \right) \end{aligned}$$

Valutiamo ora la traccia sull'ambiente,

$$\text{Tr}_E[\tilde{\rho}(t)] = \text{Tr}_E[U^\dagger(t) \rho U(t)] = U_S^\dagger(t) \underbrace{\text{Tr}_E[U_E^\dagger \rho U_E(t)]}_{=\text{Tr}_E[\rho]} U_S(t) = U_S^\dagger(t) \varrho U_S(t) = \tilde{\varrho}(t)$$

Pertanto, sfruttando la permutabilità ciclica degli operatori sotto azione della traccia,

$$\begin{aligned} \partial_t \tilde{\varrho}(t) = & \text{Tr}_E[\tilde{\rho}(t)] = \\ = & \sum_k \frac{\text{Tr}_E[\tilde{A}_k(t) \tilde{\varrho}(0) \tilde{B}_k(t) \rho_E - \tilde{\varrho}(0) \tilde{A}_k(t) \tilde{B}_k(t) \rho_E]}{i\hbar} - \\ & - \sum_{jk} \frac{1}{\hbar^2} \int_0^t ds \text{Tr}_E \left[\tilde{A}_j(t) \tilde{A}_k(s) \tilde{\varrho}(s) \tilde{B}_j(t) \tilde{B}_k(s) \rho_E - \tilde{A}_j(t) \tilde{\varrho}(s) \tilde{A}_k(s) \tilde{B}_k(s) \tilde{B}_j(t) \rho_E - \right. \\ & \left. - \tilde{A}_k(s) \tilde{\varrho}(s) \tilde{A}_j(t) \tilde{B}_j(t) \tilde{B}_k(s) \rho_E + \tilde{\varrho}(s) \tilde{A}_k(s) \tilde{A}_j(t) \tilde{B}_k(s) \tilde{B}_j(t) \rho_E \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial_t \tilde{\varrho}(t) = & \sum_k \langle \tilde{B}_k(t) \rangle_E \frac{[\tilde{A}_k(t), \tilde{\varrho}(0)]}{i\hbar} - \\ & - \frac{1}{\hbar^2} \sum_{jk} \int_0^t ds \left(\langle \tilde{B}_j(t) \tilde{B}_k(s) \rangle_E [\tilde{A}_j(t) \tilde{A}_k(s) \tilde{\varrho}(s) - \tilde{A}_k(s) \tilde{\varrho}(s) \tilde{A}_j(t)] - \right. \\ & \left. - \langle \tilde{B}_k(s) \tilde{B}_j(t) \rangle_E [\tilde{A}_j(t) \tilde{\varrho}(s) \tilde{A}_k(s) - \tilde{\varrho}(s) \tilde{A}_k(s) \tilde{A}_j(t)] \right) \end{aligned} \quad (2.4)$$

Tutte le proprietà rilevanti dell'ambiente sono espresse nei termini complessi di correlazione $\Gamma_{jk}(t, s) = \langle \tilde{B}_j(t) \tilde{B}_k(s) \rangle_E$. Si può osservare che la loro dipendenza è del tipo $\Gamma_{jk}(t - s)$,

$$\Gamma_{jk}(t, s) = \text{Tr}_E[e^{iH_E t} B_j e^{-iH_E t} e^{iH_E s} B_k e^{-iH_E s}] = \text{Tr}_E[e^{iH_E(t-s)} B_j e^{-iH_E(t-s)} B_k] = \Gamma_{jk}(t - s)$$

Allora, l'equazione (2.4) può essere scritta nei termini di un super-operatore $\mathcal{K}(t - s)$,

$$\partial_t \tilde{\varrho}(t) = \frac{[\langle \tilde{H}_{int}(t) \rangle_E, \tilde{\varrho}(0)]}{i\hbar} + \int_0^t ds \mathcal{K}(t - s) \tilde{\varrho}(s) \quad (2.5)$$

La *master equation* ottenuta dipende, quindi, da un super-operatore non lineare e non locale nel tempo. Il fatto che l'equazione al tempo t dipenda dall'evoluzione del sistema fino a tale istante è interpretato affermando che l'ambiente possiede una memoria riguardo le correlazioni che si instaurano tra sistema ed ambiente. Equazioni di questo tipo risultano di difficile soluzione, in quanto la struttura del super-operatore \mathcal{K} è a priori molto complicata e fortemente dipendente dal tipo di ambiente considerato.

Ci si aspetta, tuttavia, che, considerando scale temporali sufficientemente grandi rispetto ai tempi caratteristici di formazione delle correlazioni tra sistema ed ambiente, tali effetti di memoria siano irrilevanti. Ciò avviene se ipotizziamo che i gradi di libertà dell'ambiente che entrano in contatto con il sistema disperdano le correlazioni prodotte prima di entrare nuovamente in contatto con il sistema. L'informazione passata dal sistema all'ambiente diventa, quindi, rapidamente inutilizzabile. Tale effetto è possibile nel caso (non generale) di ambienti sufficientemente incontrollati ed estesi. Conseguenza di questa assunzione è che ora la variazione infinitesima della matrice densità dipenda solamente dall'istante in cui essa viene valutata. Equazioni che sfruttano tale ipotesi sono dette *Markoviane*.

Approssimazione di Born-Markov.

$$\int_0^t ds \mathcal{K}(t - s) \tilde{\varrho}(s) \sim \int_0^{+\infty} ds \mathcal{K}(s) \tilde{\varrho}(t) \quad (2.6)$$

Tale assunzione è la conseguenza di due successive approssimazioni. Innanzitutto, in accordo con la visione perturbativa assunta, introduciamo l'approssimazione $\tilde{\varrho}(s) \sim \tilde{\varrho}(t)$. L'equazione così ottenuta è locale nel tempo, ma non ancora Markoviana. Successivamente, in quanto ci aspettiamo che il nucleo del super-operatore sia dominante per $t \sim 0$ e trascurabile per $t \rightarrow +\infty$, valutiamo tale limite nell'integrazione del super-operatore.

Una master equation Markoviana descrive l'evoluzione di una matrice densità, trascurando il primo termine di evoluzione unitaria, per mezzo di un *operatore di Liouville*,

$$\partial_t \tilde{\varrho}(t) = \mathcal{L} \tilde{\varrho}(t) \quad (2.7)$$

È, allora, la *teoria dei semigruppì dinamici* che permette una formulazione rigorosa delle assunzioni di Markov in meccanica quantistica dei sistemi aperti.

2.1 Elementi di Teoria dei Semigruppì Dinamici

Una *mappa dinamica* è una famiglia di trasformazioni ad un parametro che mappano nel modo più generale possibile una matrice densità nel suo evoluto all'istante t .

$$\mathcal{W}_t : \varrho(0) \rightarrow \varrho(t) \quad , \quad t \in \mathbb{R}_0^+ \quad (2.8)$$

Una tale mappa deve soddisfare le seguenti condizioni,

- $\mathcal{W}_0 = \mathbb{I}$,
- Linearità Convessa,

$$\mathcal{W}_t(\lambda \varrho_1(0) + (1 - \lambda) \varrho_2(0)) = \lambda \mathcal{W}_t(\varrho_1(0)) + (1 - \lambda) \mathcal{W}_t(\varrho_2(0)) \quad , \quad \forall \lambda \in [0, 1]$$

- TP, *trace preserving*,

$$\text{Tr}[\varrho(t)] = \text{Tr}[\varrho(0)] , \quad \forall t \in \mathbb{R}_0^+$$

In particolare, nel caso di matrici densità $\text{Tr}[\varrho(t)] = 1$,

- CP, completamente positiva,

$$\mathcal{W}_t \otimes \mathbb{I}_m > 0 , \quad \forall m = \dim[\mathcal{H}_2] \quad \text{dove } \mathcal{H}_{tot} = \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}_2$$

La richiesta di CP è più forte della semplice positività P, ed è necessaria per garantire la positività di una matrice densità che sia lo stato ridotto di uno stato non separabile che evolve unitariamente in uno spazio di dimensione maggiore,

- A, che preservi l'autoaggiuntezza.

Teorema della Rappresentazione di Kraus. *Data una mappa $\mathcal{W}(t)$ lineare convessa APTCP (ovvero tale da soddisfare le condizioni elencate), esiste un insieme di operatori $\{E_k\}_{k=1}^M$, detti operatori di Kraus, che soddisfano la condizione $\sum_k E_k E_k^\dagger = \mathbb{I}$, tali per cui $\mathcal{W}(t)$ si può sempre scrivere come,*

$$\mathcal{W}_t(\varrho) = \sum_k E_k(t) \varrho E_k(t)^\dagger \quad (2.9)$$

Una rappresentazione di Kraus ammette una rappresentazione unitaria su uno spazio di Hilbert di dimensione maggiore.

Il numero degli operatori di Kraus è limitato dalla dimensione dello spazio di Hilbert di lavoro ($M \leq \dim^2[\mathcal{H}]$), e la loro scelta non è univoca anche a parità di mappa dinamica.

Assumiamo che $\exists! \mathcal{W}_{t_1+t_2} = \mathcal{W}_{t_1} \circ \mathcal{W}_{t_2} , \forall t_1, t_2 \in \mathbb{R}_0^+$. Una tale richiesta risulta forte, in quanto l'andamento nel tempo di una mappa dinamica potrebbe dipendere dal tasso di formazione di correlazioni ed entanglement tra sistema ed ambiente. Tuttavia, all'interno di un'approssimazione Markoviana, secondo la quale l'ambiente disperde tali correlazioni molto rapidamente a causa della sua elevata caoticità ed estensione, l'assunzione introdotta non sembra irragionevole, considerando tempi sufficientemente lunghi.

L'insieme delle mappe dinamiche $\mathbb{W} = \{\mathcal{W}_t : t \in \mathbb{R}_0^+\}$ forma, ora, un *semigruppoo dinamico continuo*. In particolare abbiamo costruito un semigruppoo *unitario* in quanto dotato di elemento neutro \mathcal{W}_0 . In generale, l'insieme \mathbb{W} non costituisce un *gruppo*, in quanto non è definito un elemento inverso per ogni suo elemento. Ciò equivale a dire che non tutte le trasformazioni descritte da una mappa dinamica sono invertibili. Il gruppo degli elementi invertibili di \mathbb{W} costituisce il gruppo delle trasformazioni unitarie. In rappresentazione, il gruppo delle trasformazioni unitarie si ottiene se nella somma di equazione (2.9) $\exists! k$ t.c. $E_k \neq \mathbb{O}$.

Un semigruppoo dinamico continuo è una struttura algebrica, ed è quindi possibile definire il suo *generatore infinitesimo* \mathcal{L} , che costituisce l'elemento di base dell'algebra associata.

$$\mathcal{W}_t = e^{\mathcal{L}t} , \quad t > 0 \quad (2.10)$$

Evidentemente una mappa dinamica così definita è la soluzione dell'equazione Markoviana (2.7).

2.1.1 Forma di Lindblad

È possibile derivare la forma generale di un generatore di semigruppoo dinamico, assumendo per semplicità di trattazione $m = \dim[\mathcal{H}] < +\infty$. Gli operatori limitati di \mathcal{H} formano uno spazio vettoriale di dimensione m^2 , il quale è uno spazio di Hilbert se equipaggiato del prodotto scalare di Hilbert-Schmidt,

$$\langle A, B \rangle := \text{Tr}[A^\dagger B]$$

Data una base ortonormale di operatori $\{A_j : 1 \leq j \leq m^2 \text{ t.c. } \langle A_j, A_{j'} \rangle = \delta_{j j'}\}$, un generico operatore B può essere scritto come,

$$B = \sum_{j=1}^{m^2} \langle A_j, B \rangle A_j$$

Scegliamo adesso la base in modo che uno degli operatori, ammettiamo l'ultimo, sia proporzionale all'operatore identità,

$$A_{m^2} = \frac{\mathbb{I}}{\sqrt{m}}$$

in modo che gli altri operatori di base siano tutti a traccia nulla,

$$\text{Tr}[A_j] = \begin{cases} 0 & , j = 0, 1, \dots, m^2 - 1 \\ \sqrt{m} & , j = m^2 \end{cases}$$

Applichiamo la decomposizione nella base scelta agli operatori di Kraus di una rappresentazione di una mappa dinamica,

$$\mathcal{W}_t(\varrho) = \sum_{j,l=1}^{m^2} \underbrace{\sum_k \langle A_j, E_k(t) \rangle \langle A_l, E_k(t) \rangle^*}_{c_{jl}(t)} A_j \varrho A_l^\dagger$$

Il generatore infinitesimo del semigruppò si calcola a partire dalla definizione (2.10),

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\varrho &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathcal{W}_h \varrho - \varrho}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \underbrace{\frac{c_{m^2 m^2}(h)/m - 1}{h}}_{c_0} \varrho + \lim_{h \rightarrow 0} \underbrace{\sum_j \frac{c_j m^2(h)}{h\sqrt{m}} A_j}_{B} \varrho + \varrho \lim_{h \rightarrow 0} \underbrace{\sum_l \frac{c_{m^2 l}(h)}{h\sqrt{m}} A_l^\dagger}_{B^\dagger} + \sum_{jl} \lim_{h \rightarrow 0} \underbrace{\frac{c_{jl}(h)}{h}}_{\alpha_{jl}} A_j \varrho A_l^\dagger \\ &\hookrightarrow \mathcal{L}\varrho = c_0 \varrho + B\varrho + \varrho B^\dagger + \sum_{jl=1}^{m^2-1} \alpha_{jl} A_j \varrho A_l^\dagger \end{aligned}$$

Si introducono gli operatori autoaggiunti con le dimensioni di un'energia,

$$G = \frac{\hbar}{2}(B + B^\dagger + c_0) \quad H = \frac{\hbar}{2i}(B - B^\dagger)$$

ottenendo

$$\mathcal{L}\varrho = \frac{[H, \varrho]}{i\hbar} + \frac{G\varrho + \varrho G}{\hbar} + \sum_{jl} \alpha_{jl} A_j \varrho A_l^\dagger$$

La condizione TP valida per le mappe dinamiche implica che $\text{Tr}[\mathcal{L}\varrho] = 0 \quad \forall \varrho$,

$$0 = \text{Tr}[\mathcal{L}\varrho] = 0 + \text{Tr}\left[\left(\frac{2G}{\hbar} + \sum_{jl} \alpha_{jl} A_l^\dagger A_j\right)\varrho\right] \quad \forall \varrho$$

Sfruttando tale condizione è possibile determinare una relazione tra l'operatore G e la matrice dei coefficienti $(\alpha_{jl})_{jl}$,

$$G = -\frac{\hbar}{2} \sum_{jl} \alpha_{jl} A_l^\dagger A_j$$

Si è quindi ottenuta la prima forma standard per il generatore infinitesimo di un semigruppò dinamico,

$$\mathcal{L}\varrho = \underbrace{\frac{[H, \varrho]}{i\hbar}}_{\text{evol. unitaria}} + \underbrace{\sum_{jl=1}^{m^2-1} \alpha_{jl} \left(A_j \varrho A_l^\dagger - \frac{1}{2} A_j^\dagger A_l \varrho - \frac{1}{2} \varrho A_j^\dagger A_l \right)}_{\text{evol. incoerente}} \quad (2.11)$$

La forma di Lindblad (equazione GKSL) per un generatore infinitesimo si ottiene diagonalizzando l'equazione (2.11). Ciò equivale ad applicare una trasformazione unitaria che soddisfi $U_{kj}\alpha_{jl}U_{li}^\dagger = \delta_{ki}\lambda_k$, e che agisca sugli operatori A_j definendo gli operatori di Lindblad $L_k = \sum_j A_j U_{jk}^\dagger$.

$$\mathcal{L}\varrho = \frac{[H, \varrho]}{i\hbar} + \sum_{k=1}^{m^2-1} \lambda_k \left(L_k \varrho L_k^\dagger - \frac{1}{2} L_k^\dagger L_k \varrho - \frac{1}{2} \varrho L_k^\dagger L_k \right) \quad (2.12)$$

2.1.2 Master Equation Microscopica

È possibile osservare che, a partire dal modello microscopico descritto ad inizio della presente sezione, è possibile ottenere una master equation in forma di Lindblad.

Partendo dall'equazione (2.4), applichiamo l'approssimazione di Born-Markov,

$$\begin{aligned} \partial_t \tilde{\varrho}(t) = & \frac{[\langle \tilde{H}_{int}(t) \rangle_E, \tilde{\varrho}(0)]}{i\hbar} - \\ & - \frac{1}{\hbar^2} \sum_{jk} \int_0^{+\infty} ds \left(\underbrace{\langle \tilde{B}_j(t) \tilde{B}_k(s) \rangle_E}_{\Gamma_{jk}(t,s)} [\tilde{A}_j(t) \tilde{A}_k(s) \tilde{\varrho}(t) - \tilde{A}_k(s) \tilde{\varrho}(t) \tilde{A}_j(t)] - \right. \\ & \left. - \underbrace{\langle \tilde{B}_k(s) \tilde{B}_j(t) \rangle_E}_{\Gamma_{kj}(t,s)} [\tilde{A}_j(t) \tilde{\varrho}(t) \tilde{A}_k(s) - \tilde{\varrho}(t) \tilde{A}_k(s) \tilde{A}_j(t)] \right) \end{aligned}$$

Richiediamo che le correlazioni Γ siano immediatamente disperse nell'ambiente, ovvero,

$$\Gamma_{jk}(t, s) = \tilde{\gamma}_{jk} \delta(t - s)$$

Ciò comporta che,

$$\begin{aligned} \partial_t \tilde{\varrho}(t) = & \frac{[\langle \tilde{H}_{int}(t) \rangle_E, \tilde{\varrho}(0)]}{i\hbar} - \\ & - \frac{1}{\hbar^2} \sum_{jk} \frac{\tilde{\gamma}_{jk}}{2} \left([\tilde{A}_j(t) \tilde{A}_k(t) \tilde{\varrho}(t) - \tilde{A}_k(t) \tilde{\varrho}(t) \tilde{A}_j(t)] - \right. \\ & \left. - [\tilde{A}_j(t) \tilde{\varrho}(t) \tilde{A}_k(t) - \tilde{\varrho}(t) \tilde{A}_k(t) \tilde{A}_j(t)] \right) \end{aligned}$$

Infine, definiamo $\gamma_{jk} = U \tilde{\gamma}_{jk} U^\dagger$ per abbandonare la visione interagente e ottenere una master equation markoviana in forma di Lindblad,

$$\dot{\varrho} = \frac{[H_{int} \rangle_E, \varrho]}{i\hbar} + \frac{1}{\hbar^2} \sum_{jk} \frac{\gamma_{jk}}{2} \left([A_j, \varrho A_k] + [A_j \varrho, A_k] \right)$$

2.1.3 Esempio di Master Equation Markoviana

Consideriamo un oscillatore armonico di Hamiltoniano $H = \hbar\omega(a^\dagger a + \frac{1}{2})$ che sia in contatto con un ambiente che determina un'evoluzione descritta dall'operatore di Lindblad $L = a$. L'equazione di Lindblad associata descrive la dinamica di un oscillatore armonico smorzato. Tale risultato sarà interpretato alla luce di un modello dinamico della decoerenza.

Nel definire l'Hamiltoniano si è fatto uso degli operatori di creazione e distruzione, i quali descrivono la presenza di quanti di vibrazione, detti fononi, il cui numero di occupazione è descritto dall'operatore $N = a^\dagger a$, il quale commuta con H .

Supponiamo che lo stato iniziale sia uno stato coerente, ovvero un autostato di a ,

$$\varrho(0) = |\alpha\rangle\langle\alpha| = e^{\alpha a^\dagger} |0\rangle\langle 0| e^{\alpha^* a}, \quad a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$$

È noto che uno stato coerente rimane tale sotto l'azione dell'evoluzione unitaria,

$$a |\alpha(t)\rangle = a \left(U(t) |\alpha(0)\rangle \right) = \alpha(t) |\alpha(t)\rangle, \quad \alpha(t) = e^{-i\omega t} \alpha(0)$$

Il nostro interesse è però volto verso l'evoluto all'istante t secondo l'equazione di Lindblad,

$$\dot{\rho} = \frac{[H, \rho]}{i\hbar} + \frac{1}{2} [2 \underbrace{a\rho a^\dagger}_{|\alpha|^2|\alpha\rangle\langle\alpha|} - \underbrace{a^\dagger a}_N \rho - \rho \underbrace{a^\dagger a}_N]$$

Sfruttando le proprietà sopra citate si ottiene che l'evoluto al tempo t vale,

$$\rho(t) = e^{\mathcal{L}t} \rho(0) = |\alpha_t\rangle\langle\alpha_t|$$

dove,

$$\alpha_t = \alpha e^{-i\omega t - \frac{\gamma}{2}t}$$

in particolare osserviamo che uno stato coerente rimane puro durante l'evoluzione. Il termine incoerente dell'equazione di Lindblad comporta l'introduzione del parametro γ che descrive la perdita di energia del sistema, che tende asintoticamente verso il suo stato fondamentale. Infatti,

$$\langle\alpha_t| H |\alpha_t\rangle = e^{-\gamma t} \langle\alpha| H |\alpha\rangle$$

Consideriamo adesso come stato fondamentale la sovrapposizione di stati coerenti,

$$\rho(0) = \frac{1}{A} [|\alpha\rangle\langle\alpha| + |\beta\rangle\langle\beta| + |\alpha\rangle\langle\beta| + |\beta\rangle\langle\alpha|], \quad A = 2 + 2 \operatorname{Re}[\langle\alpha|\beta\rangle]$$

La soluzione dell'equazione di Lindblad in questo caso risulta essere,

$$\rho(t) = \frac{1}{A} [|\alpha_t\rangle\langle\alpha_t| + |\beta_t\rangle\langle\beta_t| + c_t |\alpha_t\rangle\langle\beta_t| + c_t^* |\beta_t\rangle\langle\alpha_t|]$$

dove i coefficienti c_t hanno la forma,

$$c_t = \exp\left\{ \left(-\frac{1}{2}|\alpha - \beta|^2 + i \operatorname{Im}[\alpha\beta^*] \right) (1 - e^{-\gamma t}) \right\}$$

Le coerenze della matrice densità vengono, dunque, ulteriormente soppresse rispetto alla dissipazione descritta dal parametro γ . Il decadimento esponenziale conseguente al processo di decoerenza, considerando tempi sufficientemente corti rispetto alla scala temporale caratteristica della dissipazione, $t \ll \gamma^{-1}$, è descritto dal rate η ,

$$|c_t| = \exp\left\{ -\underbrace{\frac{\gamma}{2}|\alpha - \beta|^2}_{\eta} t \right\}$$

il quale dipende dalla distanza tra i due stati nello spazio delle fasi. Per stati *macroscopicamente distinti* vale,

$$\frac{\eta}{\gamma} = \frac{|\alpha - \beta|^2}{2} \gg 1 \quad (2.13)$$

Considerando oscillatori macroscopici, come ad esempio un comune pendolo, tale rapporto assume valori notevolmente elevati $\eta/\gamma \sim 10^{30}$. Ciò significa che per la matrice ridotta è possibile *distinguere* la sovrapposizione coerente dalla mistura classica solo nei casi in cui riuscissimo ad osservare il sistema entro un tempo almeno 10^{30} volte inferiore rispetto ai tempi caratteristici di dissipazione del sistema (ciò significa, mediamente, molteplici ordini di grandezza in meno del tempo necessario alla luce per attraversare un atomo). Tali condizioni si spingono ben oltre i limiti sperimentalmente raggiungibili.

Esempi di questo tipo permetterebbero di spiegare l'impossibilità pratica di rilevare le sovrapposizioni di stati

a livello macroscopico.

Volendo generalizzare ulteriormente il risultato fin qui ottenuto, ci aspettiamo che gli stati stazionari di un sistema non siano disturbati dall'interazione con l'ambiente se l'evoluzione non unitaria che ne consegue commuta con l'Hamiltoniano del sistema. Il caso più semplice è quello in cui agisce un unico operatore di Lindblad proporzionale all'Hamiltoniano stesso, $L = \sqrt{\gamma}H$. L'equazione associata,

$$\mathcal{L}\rho = \frac{[H, \rho]}{i\hbar} + \gamma \left(H\rho H - \frac{1}{2}H^2\rho - \frac{1}{2}\rho H^2 \right)$$

è risolta immediatamente nella base degli autostati di H ,

$$\rho_{jk}(t) = \rho_{jk}(0) e^{-\frac{i}{\hbar}(E_j - E_k)t - \frac{\gamma}{2}(E_j - E_k)^2 t} \quad (2.14)$$

mostrando il decadimento esponenziale delle coerenze.

2.2 Dai Semigruppì Dinamici alla dinamica Non-Markoviana

La dinamica di un sistema aperto è stata fin qui trattata rappresentando l'evoluzione temporale per mezzo di un semigruppò dinamico, il quale permette di introdurre master equation nella forma prevista da Lindblad. È stato, inoltre, verificato che una tale dinamica è equivalente ad un modello microscopico all'interno del quale in particolare si fa uso dell'*approssimazione di Born-Markov*. Una tale ipotesi è giustificata se ipotizziamo che le correlazioni che si instaurano tra sistema ed ambiente si disperdano rapidamente.

Tuttavia, in generale, le correlazioni rilevanti si sviluppano in tempi non necessariamente piccoli rispetto ai tempi caratteristici della decoerenza, e sono disperse in tempi ancora maggiori. Ciò accade ad esempio nel caso in cui l'ambiente sia posto a temperature (o pressioni) sufficientemente basse. Inoltre, nel caso di accoppiamento forte tra ambiente e sistema, o di correlazioni iniziali non trascurabili, non solo l'ipotesi di Born-Markov, ma anche le altre introdotte sembrano non essere giustificate.

Un approccio sistematico alla *dinamica non Markoviana* è permesso dalla tecnica dei *super-operatori di proiezione*. Tale tecnica, come mostrato nelle referenze [4] e [11], prevede l'introduzione di un super-operatore \mathcal{P} che agisca sullo stato totale con l'obiettivo di eliminare i gradi di libertà irrilevanti nella descrizione del sistema. Per fare ciò un operatore \mathcal{P} mappa una matrice densità in una sua apposita proiezione tale da descrivere la dinamica *effettiva* del sistema. Tale proiezione sarà uno stato che contenga le correlazioni rilevanti tra sistema ed ambiente, in modo da considerare gli effetti che sono responsabili della dinamica non Markoviana.

2.2.1 Super-operatori di Proiezione e Rappresentazione

Un super-operatore di proiezione \mathcal{P} è una mappa lineare tra operatori dello spazio di Hilbert $\mathcal{H}_{tot} = \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}_E$ che soddisfi le seguenti proprietà:

- $\mathcal{P}^2 = \mathcal{P} = \mathcal{P}^\dagger$,
- Affinchè mappi matrici densità in matrici densità, \mathcal{P} deve soddisfare le condizioni APTP,
- Assumiamo che il super-operatore di proiezione abbia la forma:

$$\mathcal{P} = \mathbb{I} \otimes \Lambda \quad (2.15)$$

dove \mathbb{I} è l'identità dello spazio \mathcal{H} , mentre Λ è un'opportuna mappa proiettiva ACPTP che agisce sullo stato dell'ambiente, rappresentato in \mathcal{H}_E .

Sfruttando tali proprietà, in particolare il fatto che Λ sia TP, è possibile determinare lo stato del sistema ad un istante fissato,

$$\text{Tr}_E[\mathcal{P}\rho] = \sum_k \langle k|_E (\mathbb{I} \otimes \Lambda)\rho |k\rangle_E = \text{Tr}_E[\rho] = \rho$$

Questa relazione afferma che per descrivere l'evoluzione della matrice ridotta ϱ non è necessario studiare l'evoluzione di tutto il sistema ρ , bensì solo della sua proiezione rilevante $\mathcal{P}\rho$.

Soddisfacendo Λ le ipotesi del *teorema della rappresentazione di Kraus*, esiste una rappresentazione di Kraus per il super-operatore di proiezione. Tuttavia, sarà brevemente proposta la derivazione di un'ulteriore rappresentazione maggiormente utile per la trattazione seguente.

Consideriamo lo spazio di Hilbert degli operatori di \mathcal{H}_E , assunto di dimensione finita, equipaggiato del prodotto scalare di Hilbert-Schmidt. Per ogni operatore X esistono gli insiemi completi di operatori linearmente indipendenti $\{A_j\}_j$ e $\{B_j\}_j$, con $\langle A_j, B_k \rangle = \delta_{jk}$, tali che,

$$\Lambda X = \sum_j B_j \langle A_j, X \rangle = \sum_j \text{Tr}_E[A_j^\dagger X] B_j$$

Infatti,

$$\Lambda^2 X = \Lambda \left(\sum_j B_j \langle A_j, X \rangle \right) = \sum_{jk} B_k \underbrace{\langle A_k, B_j \rangle}_{\delta_{jk}} \langle A_j, X \rangle = \Lambda X$$

Tale relazione non richiede, quindi, l'autoaggiuntezza di Λ .

In quanto Λ è autoaggiunto e soddisfa la condizione A , scegliamo gli operatori A_j e B_j autoaggiunti.

Assumendo ora di prendere stati $\rho = \sum_{ab} c_a c_b^* |a\tilde{a}\rangle\langle b\tilde{b}|$, notiamo che,

$$\mathcal{P}\rho = (\mathbb{I} \otimes \Lambda)\rho = \sum_{ab} c_a c_b^* |a\rangle\langle b| \otimes \underbrace{\Lambda |a\tilde{a}\rangle\langle b\tilde{b}|}_{\sum_j \langle a|A_j|b\rangle B_j} = \sum_j \text{Tr}_E[(\mathbb{I} \otimes A_j)\rho] \otimes B_j \quad (2.16)$$

Le condizioni soddisfatte da Λ permettono di limitare ulteriormente le possibilità di scelta degli operatori A_j e B_j . Infatti, dalla condizione TP discende,

$$\mathbb{I} = \sum_j \text{Tr}[B_j] A_j$$

mentre dalla richiesta CP discende la condizione necessaria¹,

$$\sum_j A_j \otimes B_j \geq 0$$

In particolare si osserva che tali relazioni sono soddisfatte, ad esempio, se $A_j \geq 0$ e $B_j \geq 0 \forall j$, mentre $\text{Tr}[B_j] = 1$, $\forall j$ e $\sum_j A_j = \mathbb{I}$. Tuttavia, la scelta di tali operatori non è ancora univoca, bensì a meno di una coppia di operatori U e W , con $U^\dagger W = \mathbb{I}$, tali che $A'_j = U_{jk} A_k$ e $B'_j = W_{jk} B_k$.

Equazione (2.16) implica, dunque, che dati opportuni insiemi di operatori, che soddisfino tutte le condizioni elencate, essi definiscono un super-operatore di proiezione. Parimenti, dato un super-operatore di proiezione esistono insiemi di osservabili $\{A_j\}_j$ e $\{B_j\}_j$ che possiedono le suddette proprietà i quali forniscono una sua rappresentazione. Nota la *rappresentazione* del super-operatore di proiezione è possibile studiare la *dinamica* di un sistema non Markoviano.

Lo stato totale ρ evolve unitariamente, come previsto dall'equazione (2.1). Lo stato ridotto all'istante t sarà invece descritto dalla seguente relazione,

$$\varrho(t) = \text{Tr}_E[\mathcal{P}\rho(t)] = \sum_j \text{Tr}_E[(\mathbb{I} \otimes A_j)\rho(t)] \underbrace{\text{Tr}_E[B_j]}_1 =: \sum_j \varrho_j(t)$$

¹Tale relazione si ottiene, infatti nel caso particolare in cui $\mathcal{H} = \mathcal{H}_E$

Sono state introdotte le variabili dinamiche $\varrho_j(t) = \text{Tr}_E[(\mathbb{I} \otimes A_j)\rho(t)]$, le quali formano un *insieme di operatori definiti positivi non normalizzati*. La positività deriva direttamente dalla scelta degli operatori A_j , mentre la normalizzazione è tuttavia valida per la matrice ridotta $\varrho(t)$,

$$\text{Tr}[\varrho(t)] = \sum_j \text{Tr}[\varrho_j(t)] = \text{Tr}_S[\text{Tr}_E[\mathbb{I} \otimes (\underbrace{\sum_j A_j}_{\mathbb{I}})\rho(t)]] = 1$$

Consideriamo come stato iniziale uno *stato rilevante*, cioè uno stato che viene lasciato invariato da \mathcal{P} ,

$$\rho(0) = \mathcal{P}\rho(0) = \sum_k \varrho_k(0) \otimes B_k \quad (2.17)$$

e valutiamo l'evoluto temporale delle variabili dinamiche,

$$\varrho_j(t) = \sum_k \text{Tr}_E[(\mathbb{I} \otimes A_j) U(t)(\varrho_k(0) \otimes B_k) U^\dagger(t)]$$

Tale equazione definisce una trasformazione dinamica della forma,

$$\mathcal{V}_t : \vec{\varrho}(0) \rightarrow \vec{\varrho}(t) \quad (2.18)$$

in cui è stato introdotto un *vettore* delle variabili dinamiche $\vec{\varrho} = (\varrho_j)_j$. Nonostante l'insieme $\mathbb{V} = \{\mathcal{V}_t : t \in \mathbb{R}_0^+\}$ sia una famiglia ad un parametro di mappe lineari che preservi autoaggiuntezza, normalizzazione e positività, esso è fortemente diverso dall'insieme descritto dall'equazione (2.8). Le mappe \mathcal{V}_t non agiscono, infatti, sulle matrici ridotte del sistema, bensì su opportuni *vettori*. In altre parole, l'evoluzione dallo stato ridotto $\varrho(0)$ allo stato $\varrho(t)$ non è una mappa, e quindi non può essere determinata univocamente noto solamente lo stato iniziale $\varrho(0)$. Ciò è conforme alle ipotesi di un modello dinamico non Markoviano.

2.2.2 Master Equation Non-Markoviana

Per determinare l'equazione di evoluzione delle variabili dinamiche, applichiamo il super-operatore di proiezione all'equazione (2.3). Per semplicità di notazione sarà omissa il simbolo di *tilde* dalla visuale di interazione.

$$\dot{\rho}(t) = \frac{[H_{int}(t), \rho(t)]}{i\hbar} =: \mathcal{L}(t)\rho(t)$$

Consideriamo una decomposizione di $\rho(t)$ nella sua parte rilevante e nella sua parte irrilevante,

$$\rho(t) = \mathcal{P}\rho(t) + \mathcal{Q}\rho(t)$$

dove \mathcal{Q} descrive il super-operatore di proiezione complementare a \mathcal{P} ($\mathcal{P} + \mathcal{Q} = \mathbb{I}$) sulla componente irrilevante dello stato totale.

Essendo \mathcal{P} indipendente dal tempo, si ottiene,

$$\begin{cases} (\dot{\mathcal{P}}\rho)(t) = \mathcal{P}\mathcal{L}(t)\mathcal{P}\rho(t) + \mathcal{P}\mathcal{L}(t)\mathcal{Q}\rho(t) \\ (\dot{\mathcal{Q}}\rho)(t) = \mathcal{Q}\mathcal{L}(t)\mathcal{P}\rho(t) + \mathcal{Q}\mathcal{L}(t)\mathcal{Q}\rho(t) \end{cases}$$

Per descrivere correttamente la soluzione formale per la parte irrilevante risulta necessario introdurre la definizione di *path-ordered exponential*,

$$\vec{T} \exp[A(t)] = 1 + \int_0^t dt_1 A(t_1) + \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 A(t_1) A(t_2) + \dots = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^t dt_n \int_0^{t_n} dt_{n-1} \dots \int_0^{t_2} dt_1 A(t_n) \dots A(t_1)$$

Allora la soluzione per la parte irrilevante, assumendo uno stato iniziale interamente rilevante (2.17),

$$\mathcal{Q}\rho(t) = \int_0^t ds G(t, s) \mathcal{Q}\mathcal{L}(s) \mathcal{P}\rho(s)$$

dove il propagatore G assume la forma,

$$G(t, s) = \vec{T} \exp \left[\int_s^t du \mathcal{Q}\mathcal{L}(u) \right]$$

Applicando tali sostituzioni al sistema, si ottiene,

$$\frac{d}{dt} \mathcal{P}\rho(t) = \mathcal{P}\mathcal{L}(t) \mathcal{P}\rho(t) + \int_0^t ds \mathcal{P}\mathcal{L}(t) G(t, s) \mathcal{Q}\mathcal{L}(s) \mathcal{P}\rho(s)$$

Il primo termine di tale equazione descrive effetti di auto-interazione della componente rilevante rispetto a se stessa. Esso è, pertanto, generalmente trascurato, in quanto non descrive gli effetti caratteristici della dinamica non Markoviana, ovvero la non-località nel tempo e lo scambio di informazione tra parte rilevante e parte irrilevante.

Si ottiene, pertanto, l'equazione di Nakajima-Zwanzig,

$$\frac{d}{dt} \mathcal{P}\rho(t) = \int_0^t ds \mathcal{P}\mathcal{L}(t) G(t, s) \mathcal{Q}\mathcal{L}(s) \mathcal{P}\rho(s) = \int_0^t ds \mathcal{K}(t, s) \mathcal{P}\rho(s) \quad (2.19)$$

Si noti la similitudine tra tale equazione ed equazione (2.5), in cui compare un nucleo di memoria del sistema dipendente dal passato dello stesso. La dinamica che, tuttavia, descrivono sono comunque diverse. In questo caso l'equazione si risolve introducendo un'ulteriore ipotesi, secondo cui lo stato del sistema per $s < t$ si scrive,

$$\rho(s) = G_1(t, s) \rho(t)$$

L'operatore G_1 introdotto ha l'effetto di un propagatore che inverte l'ordine temporale di evoluzione del sistema,

$$G_1(t, s) = \vec{T} \exp \left[\int_t^s du \mathcal{L}(u) \right]$$

e comporta,

$$\mathcal{Q}\rho(t) = \underbrace{\int_0^t ds G(t, s) \mathcal{Q}\mathcal{L}(s) \mathcal{P}G_1(t, s)}_{=:\Sigma(t)} \rho(t)$$

Utilizzando il superoperatore $\Sigma(t)$ introdotto,

$$\mathcal{Q}\rho(t) = \Sigma(t) \mathcal{P}\rho(t) + \Sigma(t) \mathcal{Q}\rho(t)$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{Q}\rho(t) = [\mathbb{I} - \Sigma(t)]^{-1} \Sigma(t) \mathcal{P}\rho(t)$$

in quanto l'esistenza di $[\mathbb{I} - \Sigma(t)]^{-1}$ è garantita in ipotesi di accoppiamento debole.

A questo punto l'evoluzione di \mathcal{Q} dipende solamente dall'istante t e dalla parte rilevante, pertanto l'equazione che si ottiene prende il nome di *time convolutionless* (TCL) master equation, in quanto sarà caratterizzata da un *generatore lineare locale nel tempo e tempo dipendente*.

$$\frac{d}{dt} \mathcal{P}\rho(t) = \mathcal{K}(t) \mathcal{P}\rho(t) \quad (2.20)$$

A questo punto, applicando il super-operatore della forma (2.16), si ottiene un sistema di equazioni accoppiate,

$$\frac{d}{dt} \varrho_j(t) = \mathcal{K}_j(t, \varrho_1, \varrho_2, \dots) \quad (2.21)$$

Supponiamo che tali generatori siano in prima approssimazione tempo-indipendenti $\mathcal{K}_j(t, \vec{\varrho}) \sim \mathcal{K}_j(\vec{\varrho}) \quad \forall j$. Sotto tale ipotesi la famiglia ad un parametro di mappe \mathcal{V}_t rappresenta ora un *semigruppoo dinamico*. Ancora una volta, però, la natura di tale semigruppoo non implica che la dinamica della matrice ridotta sia rappresentabile nella forma di un semigruppoo, in accordo con le ipotesi di dinamica non Markoviana, in quanto la struttura di semigruppoo agisce sulle variabili dinamiche $\varrho_j(t)$ considerate singolarmente.

Per determinare la struttura generale del generatore infinitesimo \mathcal{K}_j , assumiamo di rappresentare il vettore $\vec{\varrho}$ introdotto in equazione (2.18), estendendo lo spazio di Hilbert in cui è ambientato lo stato ridotto per mezzo di un sistema ausiliario descritto in uno spazio isomorfo a \mathbb{C}^n , dotato di base ortonormale $\{|m\rangle\}_m$. Identifichiamo il generico vettore con la matrice densità diagonale a blocchi nello spazio esteso $\mathcal{H} \otimes \mathbb{C}^n$,

$$\vec{\varrho} = \sum_m \varrho_m \otimes |m\rangle\langle m|$$

Lo spazio ausiliario introdotto rappresenta i gradi di libertà aggiuntivi che contengono le correlazioni rilevanti tra sistema ed ambiente. L'evoluzione dinamica \mathcal{V}_t può quindi essere vista come una mappa ACPTP nello spazio esteso, tale da preservare la struttura diagonale a blocchi.

$$\sum_m \varrho_m(t) \otimes |m\rangle\langle m| = e^{\mathcal{L}t} \left(\sum_m \varrho_m(0) \otimes |m\rangle\langle m| \right) \quad (2.22)$$

Il generatore di Lindblad introdotto \mathcal{L} assume la forma prevista dall'equazione (2.12). Gli operatori presenti agiscono però sullo spazio esteso e pertanto possono essere scritti come combinazioni di prodotti tensoriali,

$$H = \sum_{jl} H_{jl} \otimes |j\rangle\langle l| \quad L_k = \sum_{jl} R_{kjl} \otimes |j\rangle\langle l|$$

Utilizzando le rappresentazioni scelte, si ottiene che il generatore di Lindblad assume una forma,

$$\mathcal{L} \vec{\varrho} = \sum_{jl} \underbrace{\left[\frac{H_{jl} \varrho_l - \varrho_j H_{jl}}{i\hbar} + \sum_{km} \left(R_{kjm} \varrho_m R_{kml}^\dagger - \frac{1}{2} R_{kjm}^\dagger R_{kml} \varrho_l - \frac{1}{2} \varrho_j R_{kjm}^\dagger R_{kml} \right) \right]}_{\mathcal{D}_{jl}} \otimes |j\rangle\langle l|$$

Affinchè venga mantenuta la struttura diagonale dell'evoluto temporale, si impone la relazione $\mathcal{D}_{jl} = 0 \quad \forall j \neq l$. Ciò porge un'evoluzione descritta dal generatore,

$$\frac{d}{dt} \varrho_j = \mathcal{K}_j(\varrho_1, \varrho_2, \dots) = \frac{[H_j, \varrho_j]}{i\hbar} + \sum_{kl} \left(R_{kjl} \varrho_k R_{kjl}^\dagger - \frac{1}{2} \{ R_{klj}^\dagger R_{klj}, \varrho_j \} \right) \quad (2.23)$$

tale che

$$\mathcal{L} \left(\sum_m \varrho_m \otimes |m\rangle\langle m| \right) = \sum_m \mathcal{K}_m(\varrho_1, \varrho_2, \dots) \otimes |m\rangle\langle m|$$

Capitolo 3

Modello decoerente di un processo di Misura

Nella sezione precedente si è mostrato come la teoria della dinamica dei sistemi aperti fornisca le equazioni che permettono di descrivere l'evoluzione temporale effettiva di una matrice densità. Inoltre, equazione (2.14) mostra come una *master equation Markoviana* predica effetti di decoerenza sul sistema. Nella presente sezione si cercherà di osservare come una master equation non Markoviana permetta di prevedere analoghi effetti di decoerenza e come, sotto opportune richieste, possa rappresentare dinamicamente un processo di misura.

Nel caso generale, l'equazione (2.23) prevede un sistema di equazioni accoppiate per l'evoluzione delle variabili dinamiche ϱ_j , la cui soluzione può essere a priori estremamente complicata. Supponiamo di poter scegliere gli operatori R_{kjl} nella forma $R_{kjl} = \delta_{kj} R_{jl}$. Il sistema di equazioni che descrive la dinamica non Markoviana diventa, sotto tale ipotesi, un sistema di equazioni disaccoppiate. Ogni variabile dinamica è descritta da un'equazione Markoviana e quindi da un opportuno semigruppato, tuttavia, l'evoluzione dello stato rappresentato da $\rho(t)$ è in generale fortemente non Markoviana, come mostrato in precedenza.

Tralasciando i termini di evoluzione unitaria presenti nelle master equations, la componente di evoluzione incoerente permette di prevedere l'emergere di effetti di decoerenza. Considerando, infatti, un operatore autoaggiunto $A = \sum_m a_m |m\rangle\langle m|$, avviene la diagonalizzazione esponenziale nella base $\{|m\rangle\}_m$ se A commuta con gli operatori che compaiono nelle equazioni di Lindblad delle singole variabili dinamiche. Ciò implica che $R_{jl} = \mu_{jl} \sum_m \gamma_m |m\rangle\langle m|$. Tale risultato generalizza l'effetto mostrato in equazione (2.14).

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \varrho_j(t) = & \\ & = \sum_l \mu_{jl} \sum_{m,n,\alpha,\beta} \left[\gamma_m \gamma_n (\rho_j)_{\alpha\beta} |m\rangle\langle m| |\alpha\rangle\langle\beta| |n\rangle\langle n| - \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} \gamma_m \gamma_n (\rho_j)_{\alpha\beta} \left(|m\rangle\langle m| |n\rangle\langle n| |\alpha\rangle\langle\beta| - |\alpha\rangle\langle\beta| |m\rangle\langle m| |n\rangle\langle n| \right) \right] \end{aligned}$$

$$(\varrho_j)_{\alpha\beta}(t) = \langle \alpha | \varrho_j(t) | \beta \rangle = (\varrho_j)_{\alpha\beta}(0) e^{-\frac{\sum_l \mu_{jl}}{2} (\gamma_\alpha - \gamma_\beta)^2 t} \quad (3.1)$$

Le equazioni dinamiche comportano, dunque, il fatto che la soppressione delle coerenze avvenga in una base privilegiata, la quale dipende, come mostrato, dal tipo di interazione con l'ambiente che si instaura, ovvero dalla scelta di opportuni operatori di Lindblad. Gli stati che appartengono a tale base sono immuni agli effetti della decoerenza, e coincidono con gli *stati robusti* introdotti nella prima sezione.

All'interno del modello microscopico sviluppato in sezione [2], è possibile interpretare tale risultato. Consideriamo a tale proposito un Hamiltoniano del tipo (2.2). Supponiamo che esista un'osservabile A del sistema che commuti con il termine di interazione,

$$[H_{int}, A \otimes \mathbb{I}] = 0$$

Assumendo la decomposizione del termine di interazione precedentemente utilizzata $H_{int} = \sum_k A_k \otimes B_k$, e sfruttando la linearità degli operatori di commutazione si ottiene,

$$[A_k, A] = 0 \quad \forall k$$

Essendo gli operatori di Lindblad in ipotesi Markoviana combinazioni lineari degli operatori A_k , il *criterio di commutabilità* introdotto implica la *simultanea diagonalizzabilità* tra gli operatori di Lindblad e l'osservabile A del sistema. Tale risultato è possibile assumerlo valido anche in ipotesi non Markoviana in quanto, applicando il super-operatore di proiezione definito in equazione (2.15) al termine di interazione dell'Hamiltoniano, non viene modificata la sua decomposizione in \mathcal{H} , agendo Λ solo su \mathcal{H}_E .

L'equazione (3.1) mostra che sotto tale ipotesi avviene la soppressione delle coerenze.

È inoltre evidente che l'evoluzione incoerente prevista da un'equazione di Lindblad si annulla se la matrice densità commuta con gli operatori di Lindblad. Da tale osservazione segue che solo gli stati che commutano con l'osservabile A del sistema sono immuni alla decoerenza. Tali stati sono o autostati dell'osservabile stessa, o opportuni stati misti.

La teoria dei sistemi aperti permette, dunque, di giustificare a livello dinamico il principio introdotto nella prima sezione come *environment induced superselection rule*, ovvero giustifica l'esistenza di *stati robusti*, come autostati di un'opportuna osservabile che commuti con il termine di interazione tra sistema ed ambiente. Gli stati appartenenti a tale base privilegiata sono quelli che possono essere *osservati* in seguito all'interazione con l'ambiente, in quanto mostrano proprietà classiche: in particolare essi sono *robusti* rispetto alla decoerenza e loro eventuali sovrapposizioni sono, al contrario, fortemente instabili. Per questa ragione, tali stati prendono il nome di *pointer states*, ovvero sono interpretati come gli stati che "puntano" ai valori macroscopicamente distinti che possono essere letti da uno strumento di misura. L'esistenza di *pointer states* per un sistema è, quindi, il pre-requisito per una descrizione dinamica di un processo di misura ideale.

Supponiamo a questo punto di compiere una misura all'istante t_0 dell'osservabile A che agisce sullo spazio di Hilbert \mathcal{H} . Cerchiamo un modello dinamico di un processo di misura, che non ricorra al postulato di proiezione di von Neumann.

Per poter compiere una misura dell'osservabile sarà necessario considerare l'*accoppiamento* del sistema, rappresentato nello spazio di Hilbert su cui agisce A , con un apposito apparato di misura, il quale sarà trattato quantisticamente, rappresentato in \mathcal{H}_A . Il modello dinamico di riferimento è, quindi, quello della teoria dei sistemi aperti. L'interazione tra sistema ed apparato avviene secondo un modello dinamico non Markoviano, in quanto ci aspettiamo che l'apparato non disperda le correlazioni con i gradi di libertà del sistema con cui interagisce in tempi sufficientemente brevi. Osserviamo, inoltre, che nella descrizione di un modello di evoluzione non Markoviana assumono un ruolo *rilevante* un certo numero di gradi di libertà dell'ambiente, i quali rappresentano gli stati dell'apparato che puntano ai *pointer states* del sistema, mantenendosi ortogonali tra loro, ovvero macroscopicamente distinguibili.

È necessario a questo punto introdurre delle richieste riguardanti A . L'osservabile A deve, infatti, essere *locale*, nel senso per cui l'apparato strumentale o lo sperimentatore che compie la misura devono essere considerati esterni rispetto al sistema. Il ruolo della località nel processo di decoerenza è già stato reso esplicito nella sezione iniziale. Inoltre, l'interazione che si instaura tra apparato strumentale e sistema deve essere tale da permettere l'esistenza di *pointer states* che, come mostrato in precedenza, dipendono dalla base di autoaggiuntezza dell'osservabile A . Si richiede, ovvero, che l'osservabile sia simultaneamente diagonalizzabile rispetto al termine di interazione dell'Hamiltoniano, considerato H della forma (2.2). L'evoluzione dinamica dello stato ridotto che descrive il sistema prevede, di conseguenza, il decadimento esponenziale delle coerenze.

Supponiamo che lo stato iniziale del sistema composto sia lo stato separabile $|\Psi\rangle = |\psi\rangle |\varphi_A\rangle$ appartenente ad $\mathcal{H}_{tot} = \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}_A$. Il sistema è, allora, preparato in un suo stato puro $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$, ed è solo successivamente accoppiato con l'apparato che consideriamo, ad esempio, nel suo stato fondamentale.

Il valore di aspettazione dell'osservabile si ottiene,

$$\langle A \rangle = \langle \Psi | e^{\frac{i}{\hbar} H t} (A \otimes \mathbb{I}) e^{-\frac{i}{\hbar} H t} | \Psi \rangle = \text{Tr} [e^{\frac{i}{\hbar} H t} (A \otimes \mathbb{I}) e^{-\frac{i}{\hbar} H t} | \Psi \rangle \langle \Psi |]$$

Come conseguenza dell'interazione tra sistema ed apparato, supponiamo che esista un istante t_d , successivo a t_0 , dopo il quale le coerenze possono essere considerate *ai fini pratici* completamente soppresse. Per ogni istante successivo a tale t_d lo stato del sistema è, quindi, descritto praticamente da una matrice densità σ_0 diagonale nella base dei pointer states. Segue,

$$\langle A \rangle = \text{Tr}[\sigma_0(e^{\frac{i}{\hbar}\tilde{H}t} A e^{-\frac{i}{\hbar}\tilde{H}t})]$$

dove \tilde{H} rappresenta il termine di evoluzione unitaria incluso all'interno di una master equation.

In generale, il tempo di decoerenza t_d dipende fortemente dalla specifica interazione con l'ambiente. Nel caso descritto da equazione (2.13) abbiamo osservato che tale tempo è molto breve, in modo che la diagonalizzazione della matrice densità avvenga, come conseguenza dell'interazione con l'ambiente, molto prima dell'istante in cui l'informazione trasferita dal sistema allo stesso possa essere *effettivamente* utilizzata (o letta) *per fini pratici*. Questo fatto è valido per molteplici modelli di decoerenza noti in letteratura, pertanto assumiamo sia valido in generale, considerando osservabili il cui spettro comprende valori macroscopicamente distinti.

Essendo σ_0 e A simultaneamente diagonalizzabili, è, ora, possibile interpretare il risultato di un esperimento secondo le regole della probabilità classica, una volta note le popolazioni della matrice densità e gli autovalori dell'osservabile A .

Cercando di riassumere, quindi, i fenomeni descritti nella presente sezione, come affermato in [5], la *decoerenza* comporta:

- un'azione di *filtro* sullo spazio delle fasi della Meccanica Quantistica, in quanto viene bloccata l'evoluzione di tutti gli stati che non presentano proprietà classiche, ovvero di tutti gli stati che sono sovrapposizioni coerenti di stati robusti. In questo senso la decoerenza affronta il problema dell'emergere del mondo classico da un contesto puramente quantistico,
- l'evoluzione *effettiva* di uno stato puro in una distribuzione classica di probabilità. Conseguenza di ciò è il poter interpretare il risultato di un esperimento secondo le regole della probabilità classica, compatibilmente con la *regola di Born*.

Tale modello trova la sua giustificazione formale all'interno della teoria dei sistemi aperti, che fornisce equazioni di evoluzione effettiva per una matrice densità rappresentante uno stato ridotto del sistema. Il fenomeno che rende possibile del processo è la *produzione di entanglement tra il sistema e l'ambiente* a cui è per necessità accoppiato, in modo che l'informazione contenuta nelle coerenze venga delocalizzata.

Ciò nonostante, è necessario affermare che la decoerenza non risolve il *problema della misura* inizialmente introdotto, in quanto non permette di selezionare uno stato puro come stato finale del processo.

3.1 Produzione di Entropia e Passaggio di Informazione

Nella sezione precedente si è mostrato come l'effetto principale del fenomeno della decoerenza sia interpretabile come un'evoluzione effettiva di uno stato puro in una distribuzione classica, in cui le probabilità sono determinate in accordo con la regola di Born. Sebbene questo effetto non permetta di risolvere il problema della misura, risulta, tuttavia, *irreversibile* nello stesso modo in cui, si assume da un punto di vista fenomenologico, lo sia un processo di misura in Meccanica Quantistica. Nella presente sezione proporrò un argomento puramente qualitativo che discuta l'irreversibilità del processo di decoerenza, in accordo con un modello fenomenologico di un processo di misura in Meccanica Quantistica.

In primo luogo è necessario quantificare l'irreversibilità sotto forma di *produzione di Entropia*, che avviene tra t_0 e t_d . Un'adeguata definizione di Entropia viene introdotta in *Teoria dell'Informazione* come conseguenza del *Principio di Landauer* (cfr. [8]).

Principio di Landauer. *Cancellare una certa quantità di informazione I comporta la produzione di una quantità di calore che non può essere diminuita sotto una certa soglia, la quale dipende da I .*

Il Principio di Landauer evidenzia, dunque, il fatto che è sempre necessario codificare l'informazione I all'interno di un sistema fisico. L'osservazione che tale principio permetta di risolvere l'argomento del *Demone di Maxwell* stabilisce un solido legame tra il concetto di Informazione e le leggi della Termodinamica, ovvero, in particolare, la definizione di Entropia. In particolare un *Demone* non viola le leggi della Termodinamica se estendiamo il concetto di Entropia Totale di un sistema introducendo un termine che quantifichi la quantità di informazione I che il Demone possiede riguardo ad esso. Evidenziamo il fatto che, in questo caso, *possedere* informazione significa codificarla all'interno di un sistema fisico che costituisce la *memoria* del Demone.

Si introduce, allora, l' *Entropia di Shannon*,

$$H_S = - \sum_j p_j \log(p_j)$$

dove l'insieme $\{p_j\}_j$ rappresenta una distribuzione discreta di probabilità classiche indipendenti tra loro, tale da rappresentare lo stato misto del sistema.

L'acquisizione di Informazione riguardante lo stato di un sistema modifica la sua Entropia, semplicemente in quanto l'Entropia è una misura della nostra ignoranza riguardo lo stato del sistema.

Si deve a Von Neumann la generalizzazione del concetto di Entropia alla Meccanica Quantistica,

$$\begin{aligned} S_V(\rho) &= - \text{Tr}[\rho \log[\rho]] \\ &= - \sum_j \lambda_j \log(\lambda_j) \end{aligned} \quad (3.2)$$

L'Entropia di Von Neumann possiede, al pari della formulazione classica di Shannon, molte proprietà matematiche che la accomunano all'Entropia Termodinamica. Saranno, tuttavia elencate di seguito solo quelle proprietà utili per la presente trattazione:

- L'Entropia S_V è invariante per trasformazioni unitarie. Per questa ragione, l'entropia di uno stato viene valutata nella base che diagonalizza la matrice densità, come indicato nella definizione (3.2), in cui compare l'insieme degli autovalori $\{\lambda_j\}_j$.
- L'Entropia di Von Neumann è sempre maggiore (o uguale) di zero e minore (o uguale) di $\log(d)$, $d = \dim[\mathcal{H}]$. Analizziamo cosa rappresentano i due possibili valori estremi assunti da S_V :
 - Se $S_V(\rho) = 0$, allora il sistema si trova in uno stato puro. Assumendo di considerare uno spettro discreto di possibili risultati, ciò significa che *esiste* un'osservabile (o meglio, una classe di osservabili) per le quali, se viene effettuata una misura di esse sullo stato, si ottiene un risultato con indeterminazione nulla. Tali osservabili sono quelle che commutano con la matrice densità. Il fatto che esista una classe di osservabili i cui valori di aspettazione sono privi di incertezza, e che, quindi, esistano molte altre osservabili il cui risultato di una loro misura sullo stato è incerto, è una grande differenza rispetto al caso classico. Quando $H_S = 0$, ovvero il sistema si trova in uno stato puro classico, valutando una qualsiasi osservabile in senso classico il risultato di una misura è privo di incertezza. Ciò è una conseguenza del fatto, non valido in Meccanica Quantistica, che ogni stato puro è autostato di qualunque osservabile. L'ignoranza riguardante il risultato di una misura è quantificabile per mezzo della produzione di Entropia, come sarà reso più chiaro in seguito.
 - Se $S_V(\rho) = \log(d)$, allora lo stato si dice massimamente misto, ovvero si comporta classicamente. In tal caso, la sua Entropia di Von Neumann coincide con quella di Shannon. Ciò non è valido a priori, in quanto, preso uno stato descritto da $\rho = \sum_j p_j |\psi_j\rangle\langle\psi_j|$, esso non è necessariamente in forma diagonale. Pertanto, nel caso generale si osserva che $S_V(\rho) \leq H_S(\{p_j\}_j)$.

La formulazione della decoerenza che abbiamo introdotto nella sezione precedente prevede di considerare la necessaria interazione tra il sistema e un apparato di misura (al più comprendente l'osservatore stesso) che dev'essere considerato esterno rispetto al sistema stesso.

L'*Universo* da considerare, dunque, all'interno di un processo di misura, è il sistema composto comprendente sistema S ed ambiente A . L'Universo è un *sistema isolato che evolve unitariamente*.

La teoria dell'Informazione classica di Shannon, descritta in [12], fornisce gli elementi necessari per affrontare una tale situazione. L'estensione al caso quantistico sarà immediata.

È noto che l'Entropia gode della proprietà della *subadditività*,

$$H_{univ} \leq H_S(S) + H_S(A)$$

In particolare, l'uguaglianza vale in assenza di correlazioni tra i due sistemi. Nel caso generale, si introduce il concetto di *mutua informazione* \mathcal{J}

$$H_{univ} = H_S(S) + H_S(A) - \mathcal{J}(S : A) \quad (3.3)$$

La mutua informazione descrive quanta Informazione riguardante il sistema S posso ottenere osservando solamente A . Ottenendo informazione riguardante lo stato dell'apparato, quindi, si ottiene un conseguente guadagno di Informazione pari a $H_S(S|A) = H_{univ} - H_S(A)$ riguardo al sistema, riducendo pertanto l'Entropia $H_S(S)$ di tale quantità. Vale la pena osservare che la mutua informazione è simmetrica, e descrive, pertanto, un passaggio di informazione che potrebbe a priori avvenire anche nel verso opposto. Essa è, infine, nulla in assenza di correlazioni tra S ed A , ovvero se l'Entropia condizionata $H_S(S|A)$ è indipendente dallo stato dell'apparato $H_S(S|A) = H_S(S)$.

La generalizzazione al caso quantistico è immediata. Considerando uno stato ρ rappresentato in $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}_A$,

$$H_{univ}(\rho) = S_V(\varrho) + S_V(\rho_A) - \mathcal{J}_\rho(S : A) \quad (3.4)$$

Si può dimostrare che, partendo da una preparazione pura dello stato ρ , le Entropie marginali valutate sugli stati ridotti soddisfano la condizione,

$$S_V(\varrho) = S_V(\rho_A) \quad (3.5)$$

mentre $H_{univ}(\rho) = 0$.

Questa condizione implica che l'Entropia condizionata $S_V(S|A) = H_{univ} - S_V(\rho_A) < 0$, a differenza del caso classico, in cui ci aspettiamo che una misura di Entropia sia sempre maggiore (o uguale) a zero. Per descrivere questo aspetto, si introduce nel caso quantistico il concetto di *informazione coerente* $\mathcal{J}(|S\rangle A) = S_V(\rho_A) - H_{univ}(\rho)$, la quale rappresenta Informazione che è stata trasferita dal sistema all'apparato per mezzo della produzione di entanglement. Allora, l'informazione mutua del sistema è descritta dalla formula $\mathcal{J}_\rho(S : E) = S_V(\varrho) + \mathcal{J}(|S\rangle A)$. Nel caso generale, l'informazione coerente non è simmetrica, prevedendo una direzione preferenziale del passaggio di informazione.

Con il supporto del formalismo introdotto, studiamo il flusso dell'Informazione che caratterizza un processo di misura decoerente, come descritto nella precedente sezione. Supponiamo siano valide tutte le ipotesi precedentemente introdotte, qui brevemente riassunte:

- Sia il nostro *Universo* il sistema composto formato da sistema da misurare ed apparato di misura, ambientato nello spazio di Hilbert $\mathcal{H}_{tot} = \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}_A$. L'*Universo* è un sistema chiuso che evolve unitariamente,
- Supponiamo di preparare il sistema in un suo stato puro $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ e di configurare l'apparato in modo tale che si trovi nel suo stato fondamentale $|\varphi_A\rangle \in \mathcal{H}_A$. Il sistema composto si troverà inizialmente nello stato separabile $|\Psi\rangle = |\psi\rangle |\varphi_A\rangle \in \mathcal{H}_{tot}$,
- Consideriamo di effettuare una misura all'istante t_0 dell'osservabile A , che agisce localmente su \mathcal{H} . L'osservabile deve essere diagonale rispetto al termine di interazione dell'Hamiltoniano che descrive l'evoluzione di $|\Psi\rangle$. All'interno di un modello decoerente, ciò che è osservabile dipende dal tipo di interazione con l'ambiente. Pertanto, conoscere un'osservabile A significa configurare un apparato di misura in modo che interagisca correttamente con il sistema.

Supponiamo, almeno inizialmente, che $|\psi\rangle$ non sia autostato di A ,

- Sul sistema agisce il fenomeno della decoerenza. Supponiamo che l'intervallo di tempo $t_d - t_0$ sia sufficientemente breve,

- Consideriamo terminato il processo di misura nel momento in cui una certa quantità di informazione I sarà stata codificata all'interno di un sistema fisico che costituisce la memoria dell'osservatore. A riguardo è rilevante osservare che non è necessario richiedere l'azione di un *osservatore cosciente* dotato di memoria, bensì la presenza di un qualsiasi registro che possa codificare l'informazione e renderla *utilizzabile*.

La decoerenza prevede la formazione di correlazioni quantistiche sotto forma di entanglement tra i due sottosistemi. In seguito all'emergere di tali correlazioni il sistema ridotto evolve, durante un processo di misura, *effettivamente* verso uno stato classico. La conseguenza di tale evoluzione è, dunque, un effetto di produzione di Entropia e, equivalentemente, di passaggio di Informazione tra i due sottosistemi.

Per descrivere la produzione di Entropia, consideriamo per semplicità di trattazione un sistema in cui sistema ed apparato siano in equilibrio termico, ovvero il tasso di assorbimento e di dissipazione del calore per quanto riguarda il sistema si eguagliano. In tal caso il *tasso di produzione di Entropia* per il sistema vale,

$$\sigma(t) = \frac{d}{dt} S_V(\rho(t)) = -\frac{d}{dt} [\text{Tr}[\rho(t) \log[\rho(t)]]]$$

Nel caso in cui la dinamica del sistema sia descritta da un semigruppato dinamico, ovvero $\dot{\rho}(t) = \mathcal{L}\rho(t)$, il tasso di produzione di Entropia vale,

$$\sigma(t) = -\text{Tr}[\log[\rho(t)]\mathcal{L}\rho(t) + \mathcal{L}\rho(t)] = -\text{Tr}[\log[\rho(t)]\mathcal{L}\rho(t)] \geq 0 \quad (3.6)$$

Tale disuguaglianza è verificata come conseguenza della disuguaglianza di Spohns [9], ed è consistente con la Seconda Legge della Termodinamica. Una tale osservazione vale, però, solo in *ipotesi di semigruppato*, la quale è soddisfatta, come osservato nel modello microscopico proposto in sezione [2], se sono soddisfatte le ipotesi di accoppiamento debole, l'ipotesi di Born e l'ipotesi di Markov. Come precedentemente affermato, l'ipotesi di Markov non risulta necessariamente verificata in un modello decoerente di misura, pertanto equazione (3.6) non è valida in generale. Esistono, infatti, in letteratura esempi di sistemi che seguono una dinamica non-Markoviana e caratterizzati da tassi di produzione di Entropia negativi (cfr. [3]). Tuttavia, in generale, tali modelli sfruttano ipotesi di accoppiamento forte tra sistema ed ambiente. Assumendo, invece, un'ipotesi di accoppiamento debole è già stato precedentemente osservato che è possibile introdurre una master equation TCL per descrivere la dinamica non-Markoviana del sistema. Una tale equazione prevede, come descritto da equazione (2.22), che il vettore delle variabili dinamiche evolva secondo un semigruppato dinamico. Un'evoluzione descritta da un semigruppato dinamico comporta equazione (3.6). Ciò equivale a considerare il flusso di Informazione che passa dalla parte rilevante dello stato a quella irrilevante (e quindi dentro l'apparato di misura), trascurando di fatto il flusso opposto, il quale è pur ammesso secondo altri modelli dinamici. Come già sottolineato, tale approssimazione è sensata in ipotesi di accoppiamento debole. Tale osservazione integra quanto già detto riguardo equazione (1.8).

La decoerenza, pertanto, comporta il passaggio per lo stato ridotto da un'Entropia inizialmente nulla, ad un valore massimo che *tende* asintoticamente all'Entropia di Shannon valutata nella base dei pointer states. Tale valore potrà essere considerato raggiunto all'istante t_d solo *effettivamente*, in quanto le coerenze possono essere considerate soppresse solo dopo un tempo di decoerenza asintoticamente lungo oppure, equivalentemente, quando il loro valore non potrà essere considerato sperimentalmente osservabile.

Noti questi aspetti, possiamo descrivere il bilancio dell'Entropia all'istante t_0^- , che prevede,

$$H_{univ}(|\Psi\rangle\langle\Psi|) = 0 = \underbrace{S_V(|\psi\rangle\langle\psi|)}_0 + \underbrace{S_V(|\varphi_A\rangle\langle\varphi_A|)}_0$$

L'effetto principale dell'azione della decoerenza comporta la trasformazione effettiva dello stato puro $|\psi\rangle\langle\psi|$ in uno stato classico per la matrice ridotta, rappresentato da σ_0 . Con l'aiuto di equazione (3.5), e ricordando l'invarianza dell'Entropia dell'Universo, descriviamo il bilancio dell'Entropia del sistema all'istante t_d ,

$$H_{univ}(|\Psi(t)\rangle\langle\Psi(t)|) = 0 = S_V(\sigma_0) + S_V(\rho_A) - J_\rho(S : A)$$

$$J_\rho(S : A) = S_V(\sigma_0) + S_V(\rho_A)$$

Nel formalismo della *Teoria dell'Informazione* introdotto ciò equivale ad un passaggio di *informazione coerente* $\mathcal{J}(|S\rangle A) = S_V(\rho_A) > 0$ tra sistema ed ambiente. È stato osservato, per l'equazione (1.8), che questo processo è equivalente ad una *misura indiretta effettuata dall'apparato sul sistema, il cui risultato risulta a noi ancora incognito*. Il risultato di tale misura indiretta risulterà utilizzabile solo successivamente a t_d . L'acquisizione di Informazione da parte dell'apparato è equivalente alla diagonalizzazione della matrice densità del sistema, ed è descritto dalla produzione di entropia.

A questo punto il sistema si trova rispetto alla misura dell'osservabile in considerazione effettivamente in uno stato classico, pertanto il risultato di un esperimento sarà interpretato secondo le regole della probabilità classica. Come mostrato nella referenza [14], infatti, un processo di misura considerato dinamicamente, deve includere due passaggi successivi,

$$|\psi\rangle\langle\psi| = \underbrace{\sum_{nm} c_n c_m^* |n\rangle\langle m|}_{S_V=0} \longrightarrow \underbrace{\sum_n |c_n|^2 |n\rangle\langle n|}_{S_V \geq 0} \longrightarrow \underbrace{|n\rangle\langle n|}_{S_V=0} \quad (3.7)$$

Il secondo passaggio descrive una *riduzione* di un *ensemble classico*, la quale deve essere ammessa in quanto quantifica la diminuzione locale dell'Entropia del sistema conseguente all'acquisizione di Informazione riguardo il suo stato da parte di un osservatore esterno ad esso. Il primo passaggio, invece, è da interpretare come una misura irreversibile da parte dell'ambiente sul sistema di cui non è noto il risultato. Il meccanismo dinamico che permette ciò è la decoerenza.

L'Informazione codificata in seguito alla riduzione dello stato classico è da considerarsi *classica for all practical purposes*, in quanto i termini fuori dalla diagonale della matrice densità in seguito alla decoerenza devono essere considerati effettivamente nulli, in quanto non fisicamente osservabili.

La produzione di Entropia per mezzo della decoerenza quantifica, quindi, il nostro grado di ignoranza riguardante il sistema.

Una tale affermazione è dotata di significato solo nel caso quantistico, in quanto uno stato puro *non* è autostato di ogni osservabile. Se effettuiamo, infatti, una misura di un'osservabile di cui $|\psi\rangle$ è autostato, non avviene il processo di decoerenza, ovvero non vi è produzione di entropia. Questa situazione è la configurazione di *Informazione Massimale*, e pertanto *nessun'ulteriore Informazione* relativa ad A può essere codificata. La *condizione di Informazione Massimale* può, dunque, essere formalizzata nella relazione,

$$[|\psi\rangle\langle\psi|, A] = 0 \quad (3.8)$$

A livello classico, dato uno stato puro, la condizione (3.8) è realizzata per ogni osservabile. Nel caso quantistico, invece, non tutti gli stati, seppure puri, la realizzano: come conseguenza di ciò nella misura di A il sistema evolve producendo entropia irreversibilmente. Un processo di misura descritto dal meccanismo proposto permette sempre di raggiungere una condizione di informazione massimale. Una volta raggiunta, nessun'ulteriore ingoranza è presente.

In altri termini, la definizione di stato puro, come stato di cui è noto deterministicamente l'evoluto temporale all'istante generico t tramite il formalismo di Schrödinger nel caso quantistico e il formalismo Hamiltoniano nel caso classico, coincide con una definizione di stato di massima informazione per ogni osservabile solamente nel caso classico. Nel caso quantistico, ciò vale solo considerando osservabili A che verificano la relazione (3.8). È quindi possibile ridurre la nostra ignoranza su A riguardante il sistema, pur partendo da uno stato iniziale ad Entropia nulla che, come unica condizione, non verifichi tale relazione.

Considerando, invece, un modello di misura puramente proiettivo, in accordo con gli assiomi della CI, non sembra possibile descrivere la presenza di indeterminazione partendo da uno stato ad Entropia nulla. Una proiezione che mappi uno stato puro in uno stato puro (senza quindi verificare la condizione espressa in equazione (3.7)), infatti, non comporta produzione di Entropia, pertanto, posso ottenere Informazione riguardante un'osservabile del sistema senza modificare l'Entropia dello stesso, violando di fatto il Principio di Landauer. Cosa ciò significhi, risulta chiaro per mezzo del seguente esempio. Consideriamo, come nella più diffusa formulazione del *Demone di Maxwell*, una particella all'interno di una scatola, e la possibilità di effettuare una misura della sua posizione ad un certo istante. A livello classico, l'Entropia iniziale vale $H_S = \frac{1}{2} \log 2 + \frac{1}{2} \log 2 = \log 2$,

nel caso di una distribuzione discreta uniforme di probabilità. In seguito alla misura l'Entropia collassa a zero, equivalentemente all'acquisizione di una quantità di Informazione I pari a $\log 2$, ovvero un singolo *bit* di Informazione. Nel caso quantistico, adoperando un formalismo proiettivo, acquisisco un bit di Informazione riguardante la posizione della particella senza produrre variazioni di Entropia. La decoerenza risolve questo problema ipotizzando che immediatamente dopo l'accoppiamento con l'apparato di misura, e immediatamente prima della codifica dell'Informazione, il sistema si trovi in uno stato massimamente misto di Entropia $S_V = \log 2$, riconducendomi al caso classico.

Un modello proiettivo sembra poter descrivere un passaggio di Informazione solo ipotizzando che l'apparato accoppiato al sistema subisca un'evoluzione decoerente verso uno stato classico. Sotto questa ipotesi avviene passaggio di Informazione coerente tra sistema ed apparato. Tuttavia, ciò equivale a richiedere che nell'intervallo di tempo compreso tra t_d e t_0 il sistema composto evolva per mezzo di un'evoluzione unitaria che sia separabile in un'evoluzione proiettiva sullo spazio \mathcal{H} e un'evoluzione decoerente sullo spazio \mathcal{H}_A . Una simile evoluzione non solo non è giustificata a livello dinamico, ovvero da una teoria fondata sull'equazione di evoluzione di Schrödinger, ma sembra proprio impossibile, confermando di fatto la paradossale compresenza di evoluzione unitaria e proiettiva, già evidente dagli assiomi della CI. Era stato, inoltre, osservato nell'introduzione la necessità di prevedere l'esistenza di un *confine* tra mondo microscopico e mondo macroscopico per garantire la solidità della descrizione del processo di misura. Lo studio del passaggio dell'Informazione permette di giustificare la presenza di un tale *confine* tra sistema e apparato di misura, che evolvono in maniera differente.

La teoria della decoerenza semplicemente fornisce un modello dinamico che permette di aggirare la presenza dei suddetti problemi interpretativi della CI. La differenza fondamentale tra i due approcci è il riconoscimento del ruolo dell'*entanglement* tra sistema ed apparato, che viene trascurato all'interno della visione CI.

In altri termini, la teoria della decoerenza sembra fornire una descrizione dinamica di un processo che permetta di considerare l'Entropia classica di Shannon per quantificare l'incertezza associata al risultato di una misura. La produzione di Entropia permette ad un osservatore esterno di codificare Informazione riguardo ad una osservabile senza violare il Principio di Landauer. Essendo un tale argomento basato su concetti di Entropia e su conseguenze del Principio di Landauer, risulterà in accordo con le leggi della Termodinamica e con il Principio di Aumento dell'Entropia. Ciò significa che il *Principio di Landauer* garantisce che, se il sistema da osservare non si trovasse in uno stato classico nell'istante in cui l'informazione viene resa utilizzabile, sarebbe possibile violare le leggi della Termodinamica.

La produzione di Entropia, di cui la decoerenza è la principale causa, quantifica l'indeterminazione associata al risultato di una misura compiuta sullo stato del sistema.

L'ultimo passaggio del presente argomento consiste, infatti, nell'osservare che la *condizione di Informazione Massimale* (3.8) dipende strettamente dal *Principio di Indeterminazione* nel seguente modo: uno stato puro che realizza la condizione di Informazione Massimale rispetto all'osservabile A , non la realizza presa una qualsiasi osservabile X tale che $[X, A] \neq 0$.

Per rendere maggiormente esplicito tale legame, consideriamo un *esperimento delle due fenditure*, in cui presso ciascuna delle fenditure è posto un detector per la rivelazione del passaggio della particella attraverso una di esse. È noto che una tale configurazione strumentale comporti la scomparsa della figura di interferenza altrimenti osservata, e l'emergere del carattere corpuscolare della materia. Da un punto di vista matematico la sovrapposizione coerente delle due funzioni d'onda che descrivono il passaggio attraverso una singola fenditura, viene sostituita dal corrispondente stato misto.

La teoria della decoerenza giustifica questo fatto considerando l'evoluzione conseguente all'interazione della particella con i detector. All'interno di un modello decoerente dell'Informazione, invece, possiamo affermare che il sistema evolva in uno stato massimamente misto come condizione per il passaggio di Informazione coerente dallo stesso al detector. La scomparsa della figura di interferenza è spiegata naturalmente all'interno di una tale teoria.

Il legame tra decoerenza, Entropia e Principio di Indeterminazione può essere reso maggiormente evidente.

Supponiamo di poter violare il Principio di Indeterminazione codificando Informazione priva di incertezza riguardante, ad esempio, la posizione (ovvero il passaggio attraverso una singola fenditura) e il momento (ovvero la posizione delle frange di interferenza sullo schermo) di una particella. Ci si aspetta, di conseguenza, di poter

violare i Principi della Termodinamica. Ciò è proprio quello che accade all'interno della formulazione originaria del *Demone di Maxwell*, il quale conosce posizione e momento delle particelle contemporaneamente e con precisione arbitraria.

In nostro soccorso sopraggiunge il seguente principio,

Principio di Indeterminazione Entropico. *Consideriamo una preparazione pura dello stato del sistema, e le misure delle osservabili $X = \sum_x x|x\rangle\langle x|$ e $Y = \sum_y y|y\rangle\langle y|$ sullo stesso. Allora l'incertezza riguardo i risultati dell'esperimento soddisfa il seguente limite inferiore,*

$$H_S(\rho_X) + H_S(\rho_Y) \geq \log(1/c) \quad (3.9)$$

dove $H_S(\rho_X)$ denota l'Entropia di Shannon della distribuzione di probabilità associata ai risultati di una misura dell'osservabile X sullo stato puro iniziale. Il parametro di overlap $c = \max_{x,y} \{|\langle x|y\rangle|^2\}$ è una misura della distanza tra le due osservabili.

Di tale principio sono note due differenti derivazioni:

- La prima, formulata da Maassen e Uffink nel 1988 [7], risulta essere la diretta generalizzazione del Principio di Indeterminazione di Heisenberg ed utilizza il concetto di Entropia per descrivere l'indeterminazione del risultato di una misura. La formula associa ai risultati di una misura di un'osservabile una distribuzione classica di probabilità, e la corrispondente Entropia classica di Shannon. Questa assunzione *fenomenologica* potrebbe essere giustificata da un modello decoerente del processo di misura. Supponiamo di effettuare una misura dell'osservabile Y su uno stato che sia autostato dell'osservabile X . Per effetto della decoerenza viene prodotta una quantità di Entropia che non può essere ridotta sotto una certa soglia. Supponiamo che $|\langle x|y\rangle|^2 = 1/d \quad \forall x, y$ con $d = \dim[\mathcal{H}]$, allora,

$$H_S(Y) = \sum_j \frac{1}{d} \log(d) = \log(d)$$

Nel caso generale, notiamo che il parametro c presente in equazione (3.9) deve soddisfare la condizione $1/d \leq c \leq 1$, per cui otteniamo che la produzione di Entropia varia da zero, nel caso di osservabili simultaneamente diagonalizzabili, al valore massimo pari a $\log(d)$, in dipendenza dalle osservabili le quali individuano le basi in cui avviene il processo di decoerenza.

Ma allora, un demone di Maxwell che effettua misure di velocità su particelle quantistiche localizzate all'interno della scatola, produce Entropia che non può essere ridotta sotto un certo limite. L'Entropia prodotta determina la quantità di Informazione che egli può codificare. La Termodinamica è quindi salva.

- All'interno della teoria dell'Informazione equazione (3.9) può essere estesa come soluzione del *guessing game* che, nel formalismo usuale della Teoria dell'Informazione, avviene tra Alice e Bob (cfr. [2]). Per comodità sostituiamo Bob con Simon nella nostra formulazione,

$$H_S(X|S) + H_S(Y|S) = \log(1/c) + H(A|S)$$

Il *guessing game* prevede che Simon prepari uno stato formato da due qubit. In seguito, manda un qubit ad Alice e mantiene il secondo. Alice può decidere di compiere una misura di X oppure di Y sul suo qubit. Dopo aver compiuto la scelta, la comunica a Simon, il quale deve cercare di indovinare il risultato della misura.

La soluzione di tale gioco sta nel fatto che Simon possa sfruttare l'entanglement tra i due qubit, ad esempio se egli ha preparato inizialmente uno stato di Bell, in modo che l'Entropia condizionata $H(A|S)$ sia negativa e permetta di abbassare l'incertezza riguardo i risultati della misura fino a zero.

Le Entropie condizionate $H_S(X|S) = H_S(XS) - H_S(S)$ sono valutate sugli stati ottenuti in seguito alla misura compiuta da A il cui risultato è ignoto,

$$\rho_{XS} = \sum_x p_x |x\rangle\langle x| \otimes \rho_S^x$$

e rappresentano la quantità di Informazione (classica) che deve essere condivisa da Alice affinché Simon conosca il risultato della misura, noto però che Simon ha accesso al suo stato. Come accennato, tale

Entropia può essere ridotta a zero all'interno del guessing game.

Il meccanismo delle misure indirette di cui non è noto il risultato descritto nel *guessing game* sembra essere il medesimo utilizzato per interpretare in equazione (1.8) il processo di decoerenza. La scelta dei nomi non è stata, infatti, casuale. Il modello decoerente è completato supponendo che Simon, sia privo di memoria, ovvero non sia possibile accedere direttamente allo stato del sistema, ma solo in seguito all'osservazione dell'informazione contenuta nell'apparato. È noto che, sotto tali ipotesi, le entropie condizionate $H(X|S) = H(X)$ e, pertanto, si ottenga l'equazione,

$$H(X) + H(Y) \geq \log(1/c) + H(\varrho)$$

la quale si riduce ad equazione (3.9) assumendo una preparazione pura iniziale del sistema.

Sembra, dunque, esistere un solido legame tra Principio di Indeterminazione e Principio di Landauer, e quindi, per estensione, tra le leggi che governano la Termodinamica e l'Informazione e quelle che descrivono il mondo della Meccanica Quantistica. Il ponte tra i due mondi sembra poter essere il fenomeno della decoerenza, in cui il concetto di Entropia è centrale. Evidentemente, ulteriori approfondimenti circa la natura di tale legame sembrano necessari.

3.2 Conclusioni

Come suggerito in referenza [5] lo studio del processo di decoerenza permette di affermare che,

per una classe opportuna di osservabili A in \mathcal{H}_{obs} (tale classe dipende dalle proprietà dell'interazione del sistema con l'ambiente) esteso a \mathcal{H}_{int} per mezzo dell'operatore $A \otimes \mathbb{I}$ e per un'opportuna classe di stati iniziali $\Psi \in \mathcal{H}_{tot}$ si può trovare un operatore K di \mathcal{H}_{obs} , uno stato σ_0 e un istante t_0 tale che per $t \geq t_0 > 0$

$$| \langle \Psi, e^{itH}(A \otimes \mathbb{I})e^{-itH}\Psi \rangle - \text{Tr}[\sigma_0(e^{itK}Ae^{-itK})] | \leq \varepsilon_N, \quad \lim_{N \rightarrow +\infty} \varepsilon_N = 0$$

dove N rappresenta i gradi di libertà dell'ambiente, e H è l'Hamiltoniano del sistema totale. Il limite indicato rappresenta, dunque, il passaggio dal modello dinamico non Markoviano, il quale richiede un ambiente limitato e controllato, al modello Markoviano, in cui l'ambiente è sufficientemente esteso.

Tale equazione descrive l'*evoluzione dinamica effettiva* subita da uno stato inizialmente puro in uno stato misto per effetto della decoerenza che avviene nel corso di un processo di misura di un'osservabile su di un sistema. È stato osservato nelle sezioni [2] e [3] quali condizioni devono soddisfare lo stato iniziale e l'osservabile affinché tale equazione sia valida:

1. *L'ipotesi di accoppiamento debole*, la quale è facilmente verificata nel caso di osservabili con autovalori macroscopicamente distinti, come mostrato nelle sezioni [2.1.3] e [1.3.1],
2. *L'approssimazione di Born*, che è verificata per mezzo della scelta di uno stato iniziale Ψ di tipo separabile. Tale richiesta è facilmente estendibile al caso non Markoviano, richiedendo che lo stato iniziale sia un opportuno *stato rilevante*, come descritto in equazione (2.17),
3. *L'approssimazione di Born-Markov*, che permette di valutare come precedentemente detto il limite indicato. È stato comunque fornito in sezione [2.2] un opportuno modello dinamico non Markoviano,
4. Le osservabili A sono vincolate dalla *località*, agendo solo sul sottosistema rappresentato in \mathcal{H} . La dimensione di \mathcal{H} determina il sistema che sarà osservato, o viceversa. Effettuando una misura sul sistema, si richiede, dal punto di vista formale, di estendere la rappresentazione di A per identità allo spazio \mathcal{H}_{tot} , senza introdurre osservabili dell'ambiente. Comportano decoerenza solo le osservabili che, una volta adeguatamente estese allo spazio totale, commutano con il termine di interazione di H , in modo che è il tipo di interazione tra sistema ed ambiente, ovvero il modo in cui costruiamo nello specifico un opportuno apparato di misura, a determinare cosa può essere osservato.
5. Lo stato σ_0 è un'opportuna matrice densità ridotta diagonale nella base degli autostati di A , ottenuta a partire da $\varrho = \text{Tr}_E[|\Psi\rangle\langle\Psi|]$ secondo l'evoluzione prevista da equazione (2.12), oppure (2.23), le quali descrivono la dinamica dei sistemi aperti. Le popolazioni sono determinate dalla regola delle probabilità

di Born.

L'istante t_0 (che corrisponde all'istante t_d citato in sezione [3]) è l'istante in cui la soppressione esponenziale delle coerenze può essere considerata completa. In altri termini si tratta dell'istante oltre il quale non è più possibile per fini pratici distinguere una sovrapposizione coerente dal corrispondente stato misto.

L'argomento presentato successivamente in sezione [3.1] mostra come sia richiesto che il sistema evolva verso uno stato massimamente misto al fine di produrre la quantità corretta di Entropia necessaria per quantificare l'incertezza relativa al risultato di una misura di un'osservabile, ed equivalentemente permettere ad un osservatore esterno di acquisire Informazione riguardo ad esso. La *riduzione* subita conseguentemente dallo stato classico è ammessa dal Principio di Landauer, mentre una *riduzione* sul modello del Postulato di Proiezione di Von Neumann non sembra esserlo altrettanto. La decoerenza è, come mostrato, il processo che permette l'evoluzione effettiva in uno stato misto e la produzione di Entropia, aggirando di fatto le incongruenze del Postulato di Proiezione.

Equazione (3.9) mostra, infine, l'evidenza del legame tra Termodinamica e Meccanica Quantistica, permettendo di intravedere un ponte tra la Seconda Legge della Termodinamica e il Principio di Indeterminazione, fondato sul processo dinamico della decoerenza e sulla sua irreversibilità.

Bibliografia

- [1] G. Benenti, G. Casati, and G. Strini. *Principles of quantum computation and information*. World Scientific, 2005.
- [2] M. Berta, M. Christandl, R. Colbeck, J. M. Renes, and R. Renner. The uncertainty principle in the presence of quantum memory. *Nature Physics* 6, 659-662, 2010.
- [3] S. Bhattacharya, A. Misra, C. Mukhopadhyay, and A. K. Pati. Exact master equation for a spin interacting with a spin bath: Non-markovianity and negative entropy production rate. *Phys. Rev. A* 95, 012122, 2017.
- [4] H.-P. Breuer. Non-markovian generalization of the lindblad theory of open quantum systems. *Phys. Rev. A* 75, 022103, 2007.
- [5] G. Dell'Antonio. *Lectures on the Mathematics of Quantum Mechanics I*. Atlantis Press, 2015.
- [6] K. Hornberger. Introduction to decoherence theory. *K. Hornberger, Lect. Notes Phys.* 768, 221-276, 2009.
- [7] H. Maassen and J. B. M. Uffink. Generalized entropic uncertainty relations. *Phys. Rev.* 60(12), 1988.
- [8] M. B. Plenio and V. Vitelli. The physics of forgetting: Landauer's erasure principle and information theory. *Contemporary Physics* 42, 25 - 60, 2001.
- [9] A. Rivas. Quantum thermodynamics in the refined weak coupling limit. *Entropy* 21, 725, 2019.
- [10] M. Schlosshauer. The quantum-to-classical transition and decoherence. 2014.
- [11] B. Vacchini. Non-markovian dynamics in open quantum systems. 2011.
- [12] M. Wilde. *Quantum information theory*. Cambridge University Press, 2017.
- [16] H. D. Zeh. Roots and fruits of decoherence. Talk given at the Seminaire Poincare (Paris, 2005).
- [13] H. D. Zeh. Decoherence: Basic concepts and their interpretation. In *Decoherence and the Appearance of a Classical World in Quantum Theory, 2nd edn.*, chapter 2. Springer-Verlag, 1995.
- [14] H. D. Zeh. *The physical basis of the direction of time*. Springer, 1999.
- [15] H. D. Zeh. The meaning of decoherence. *Lect. Notes Phys.* 538 19-42, 2000.
- [17] W. H. Zurek. Decoherence, chaos, quantum-classical correspondence, and the algorithmic arrow of time. *Phys. Scripta* T76:186-198, 1998.
- [18] W. H. Zurek. Decoherence, einselection, and the quantum origins of the classical. *Rev. Mod. Phys.* 75, 715, 2003.