

Università degli Studi di Padova – Dipartimento di Ingegneria Industriale

Corso di Laurea in Ingegneria aerospaziale

***Relazione per la prova finale***  
***«Trasferimenti interplanetari: simulazione***  
***numerica della traiettoria orbitale»***

Tutor universitario: Prof. Carlo Bettanini Fecia  
di Cossato

Laureando: *Francesco Griguol*

*m. 1217889*

Padova, 17/11/2022

## Perché esplorare il sistema solare e l'universo:

- Studio dell'origine dell'evoluzione del sistema solare e delle interazioni tra Sole e pianeti.
- Ricerca della presenza di vita su altri pianeti per capire come essa può apparire ed evolvere.
- Studio della formazione e dell'evoluzione dei pianeti e dei sistemi planetari.
- Ricerca di esopianeti e comprensione più estesa del significato di «zona abitabile».

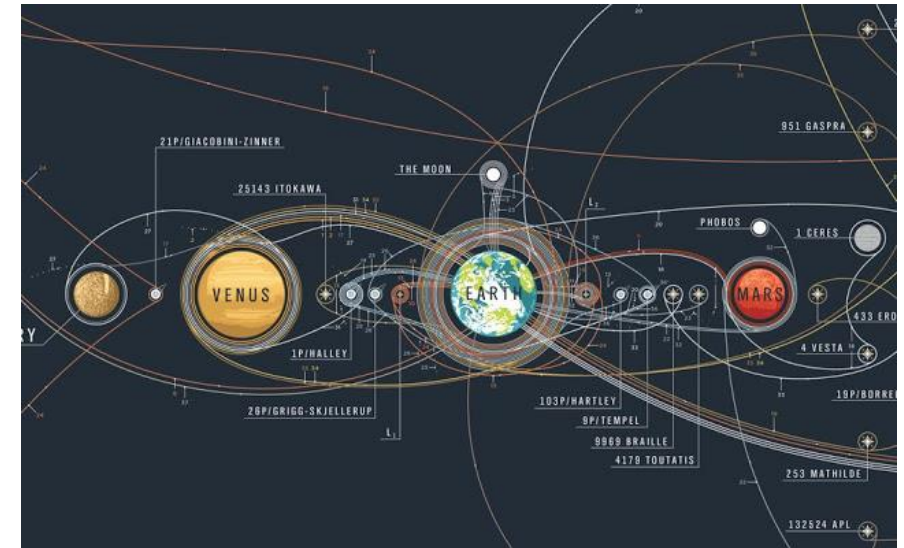


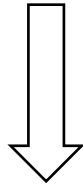
Figura: traiettorie delle principali missioni spaziali che hanno avuto successo dal 1959 al 2016. [3]

## Obiettivi del lavoro:

- Introdurre le leggi che governano il moto dei corpi sotto l'effetto della gravità e, in questo senso, le interazioni tra pianeta-navicella.
- Descrivere le orbite nello spazio e le grandezze con le quali si può univocamente determinare la traiettoria orbitale.
- Trattare la teoria dei trasferimenti interplanetari.
- Presentare un algoritmo che calcoli la traiettoria di un generico trasferimento interplanetario.
- Confrontare i risultati ottenuti in relazione alla missione *NASA – Mars2020 Perseverance*.

Si ricava la dinamica tra le due masse:

- Attrazione gravitazionale:  $\mathbf{F}_{21} = -\frac{Gm_1m_2}{r^2}\hat{\mathbf{u}}_r$
- Seconda equazione della dinamica:  $\mathbf{F}_{21} = m_2\ddot{\mathbf{R}}_2$
- Principio di azione e reazione:  $\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$



Operando algebricamente si ottiene:  $\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{G(m_1+m_2)}{r^2}\hat{\mathbf{u}}_r$

- Equazione del moto nel modello dei due corpi:  $\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\mu}{r^3}\mathbf{r}$

Durante un trasferimento interplanetario uno spacecraft interagisce gravitazionalmente con qualsiasi corpo dotato di massa, ma le varie interazioni saranno considerate individualmente mediante questo modello.

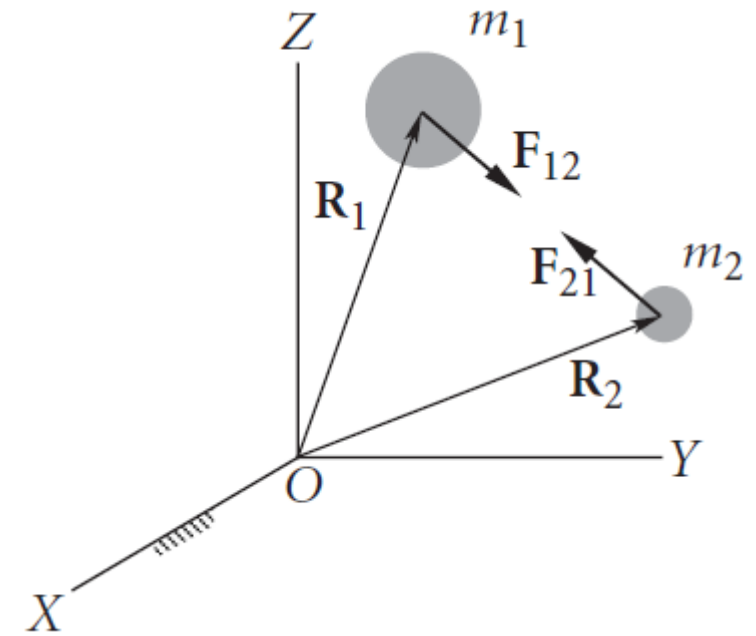


Figura: Modello dei due corpi. [1]

- Momento angolare specifico:  $\mathbf{h} = \mathbf{r} \times \mathbf{v}$ , è una costante del moto.

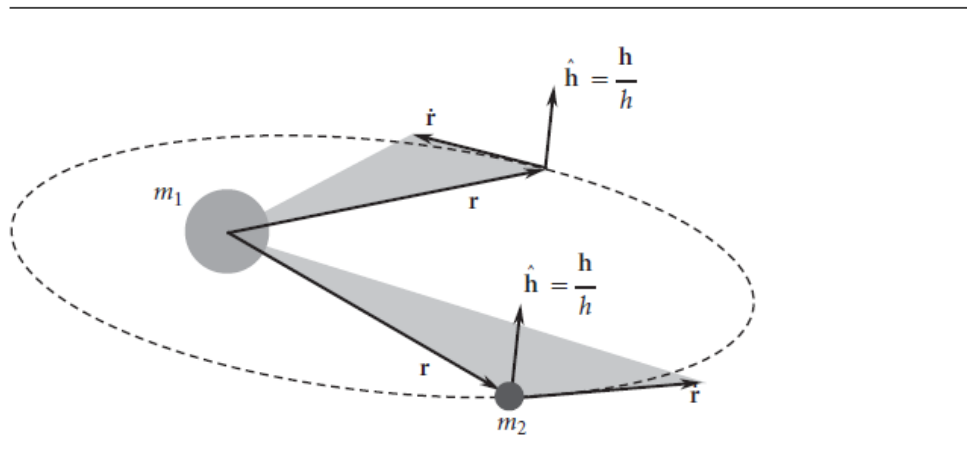


Figura: Piano orbitale. [1]

Moltiplicando vettorialmente il momento angolare specifico e l'accelerazione relativa tra i due corpi si ottiene:

- L'equazione generale dell'orbita è data da:  $r = \frac{h^2}{\mu} \frac{1}{1+e \cos \vartheta}$

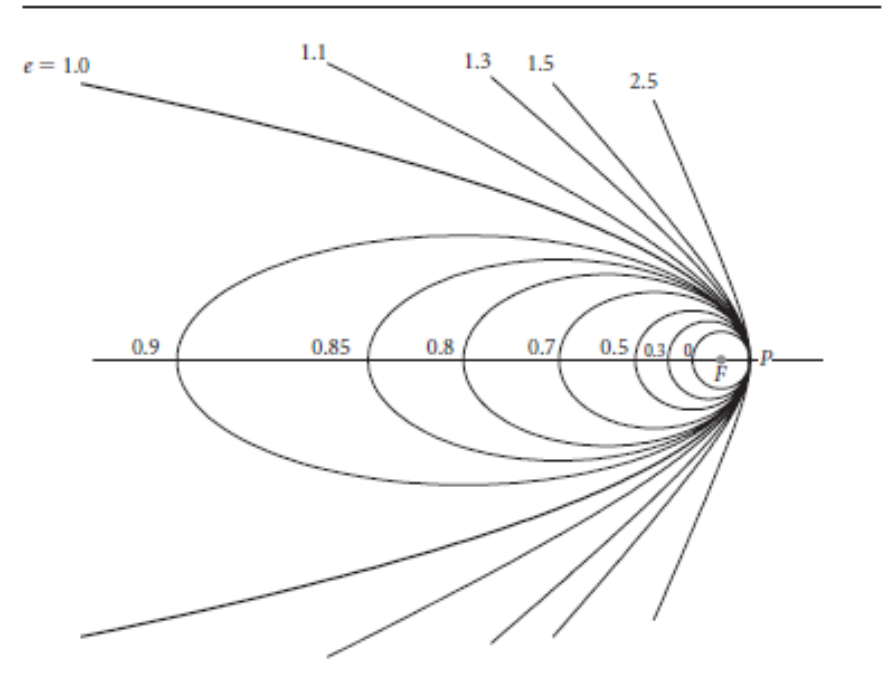


Figura: Tipologie di orbite con fuoco F e pericentro P in comune, al variare dell'eccentricità. [1]

- I. Eccentricità  $e$ : definisce la forma della sezione conica, che può essere circolare, ellittica, parabolica e iperbolica.
- II. Semiassse maggiore  $a$ : è la distanza tra il pericentro e l'apocentro dell'orbita, ovvero i punti nei quali lo spacecraft si trova rispettivamente più vicino e più lontano dal pianeta.
- III. Anomalia vera  $\vartheta$ : è la distanza angolare percorsa a partire dal pericentro dell'orbita come riferimento.
- IV. Inclinazione  $i$ : misura l'angolo che sussiste tra il piano equatoriale e il piano dell'orbita. Definisce se l'orbita è prograda o retrograda, ovvero se è percorsa seguendo la rivoluzione del pianeta o meno.
- V. Longitudine del nodo ascendente  $\Omega$ : misura l'angolo, nel piano equatoriale, che sussiste tra la direzione del punto dell'Ariete  $\gamma$  e il nodo ascendente.
- VI. Argomento di pericentro  $\omega$ : misura l'angolo, nel piano orbitale, tra il nodo ascendente e il vettore eccentricità, fornendo informazioni riguardo il pericentro dell'orbita.

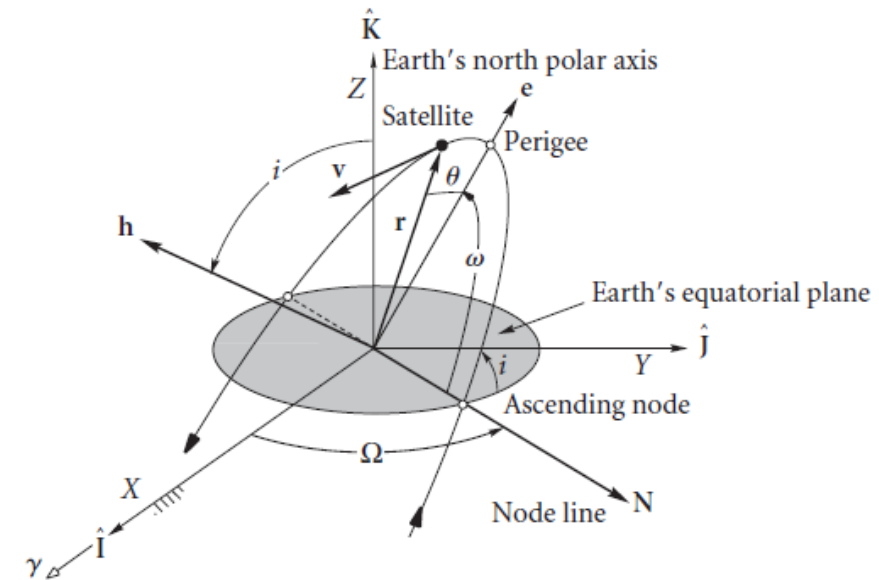
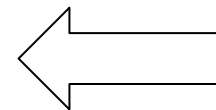


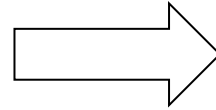
Figura: Classici elementi orbitali nel sistema di riferimento geocentrico inerziale. [1]



Questi sei parametri descrivono univocamente una qualsiasi orbita nello spazio tridimensionale

I vettori di stato orbitali sono:

- Il vettore posizione:  $\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{I}} + y\hat{\mathbf{J}} + z\hat{\mathbf{K}}$
- Il vettore velocità:  $\mathbf{v} = v_x\hat{\mathbf{I}} + v_y\hat{\mathbf{J}} + v_z\hat{\mathbf{K}}$



Bloccano i sei gradi di libertà e descrivono univocamente l'orbita nello spazio tridimensionale.

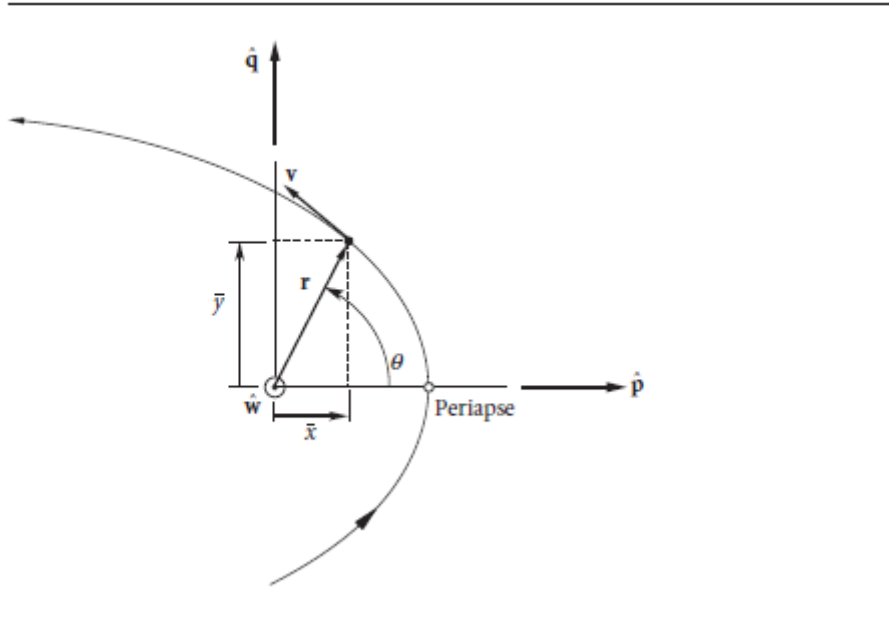


Figura: I vettori di stato orbitali nel piano perifocale. [1]

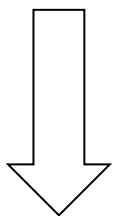
Noti i vettori di stato orbitali ad un certo istante  $t_0$ , allora anche la posizione e la velocità ad un tempo successivo  $t$  risultano essere determinate.

- Posizione iniziale:  $\mathbf{r}_0 = x_0\hat{\mathbf{p}} + y_0\hat{\mathbf{q}}$
- Velocità iniziale:  $\mathbf{v}_0 = \dot{x}_0\hat{\mathbf{p}} + \dot{y}_0\hat{\mathbf{q}}$

- Funzioni di Lagrange:  $f = \frac{x\dot{y}_0 - y\dot{x}_0}{h}$  e  $g = \frac{-xy_0 + yx_0}{h}$

- Posizione finale:  $\mathbf{r} = f\mathbf{r}_0 + g\mathbf{v}_0$
- Velocità finale:  $\mathbf{v} = \dot{f}\mathbf{r}_0 + \dot{g}\mathbf{v}_0$

**Teorema di Lambert:** "il tempo di trasferimento  $\Delta t$  dal punto  $P_1$  al punto  $P_2$  è indipendente dall'eccentricità dell'orbita e dipende solamente dalla somma dei moduli dei vettori posizione  $r_1$  e  $r_2$ , dal semiasse maggiore dell'orbita e dalla distanza tra i due punti".



Conoscendo il tempo di volo impiegato, il problema di Lambert consiste allora nel determinare la traiettoria percorsa durante di esso.

- Noti  $r_1$  e  $r_2$  si calcola:  $\cos \Delta\vartheta = \frac{r_1 \cdot r_2}{r_1 r_2}$
- Si calcolano i coefficienti di Lagrange in funzione dell'anomalia:  
 $f = 1 - \frac{\mu r_2}{h^2} (a - \cos \Delta\vartheta)$  e  $g = \frac{r_1 r_2}{h} \sin \Delta\vartheta$
- Noti  $f$  e  $g$  e le loro derivate temporali si possono ottenere le velocità e quindi determinare i vettori di stato.
- Tramite i vettori di stato è ottenuta univocamente la traiettoria percorsa.

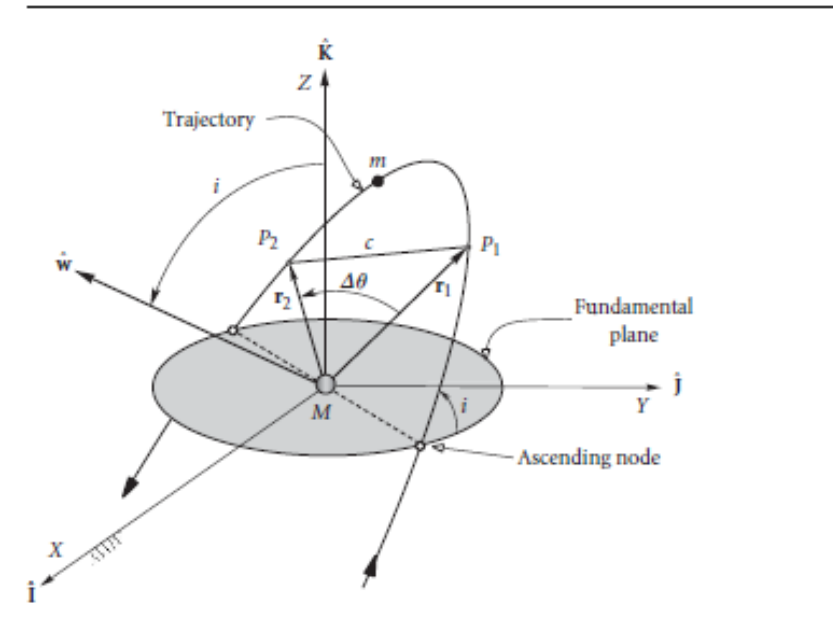


Figura: Schema rappresentativo del problema di Lambert. [1]

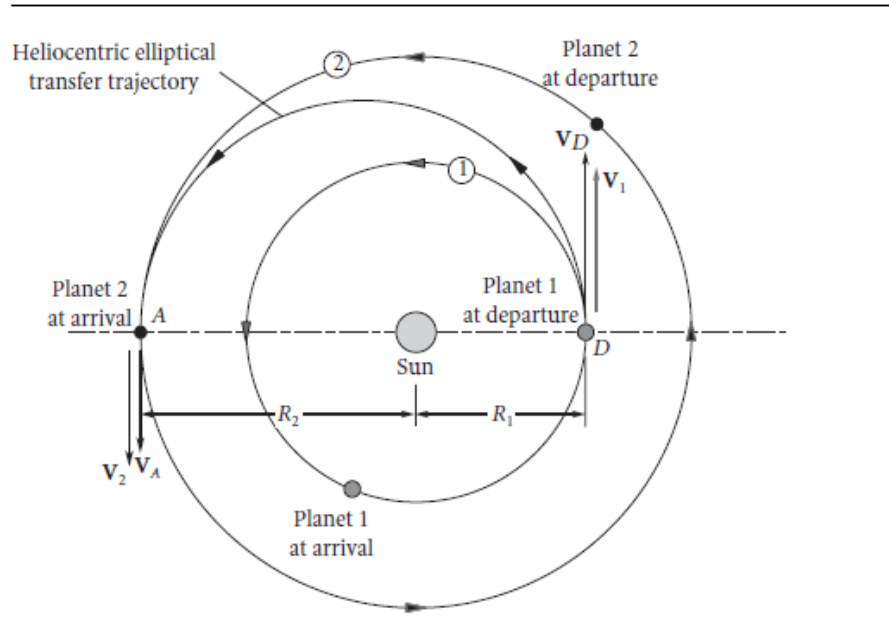


Figura: Orbita di trasferimento alla Hohmann [1]

Un generico trasferimento interplanetario comporta un dispendio di carburante che permetta il cambio di orbita. Lo scienziato tedesco Hohmann ha teorizzato una tipologia di trasferimento che comportasse il minor  $\Delta v$  possibile.

Caratteristiche del trasferimento alla Hohmann:

- Orbita di trasferimento tangente nei punti absidali.
- Punto di partenza coincide con il pericentro dell'orbita di trasferimento.
- Punto di arrivo coincide con l'apocentro del punto di trasferimento.

Si determinano il  $\Delta v$  totale richiesto dal trasferimento sommando i contributi di partenza e di arrivo:

$$\begin{aligned}
 \text{➤ } \Delta V_D &= V_D - V_1 = \frac{h}{R_1} - \sqrt{\frac{\mu_{sun}}{R_1}} = \sqrt{\frac{\mu_{sun}}{R_1}} \left( \sqrt{\frac{2R_2}{R_1+R_2}} - 1 \right) \\
 \text{➤ } \Delta V_A &= V_2 - V_A = \frac{h}{R_1} - \sqrt{\frac{\mu_{sun}}{R_1}} = \sqrt{\frac{\mu_{sun}}{R_1}} \left( 1 - \sqrt{\frac{2R_1}{R_1+R_2}} \right)
 \end{aligned}
 \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \Delta V_D \\ \Delta V_A \end{aligned}} \right\} \Delta V_{tot} = \Delta V_D + \Delta V_A$$



La **sfera di influenza** di un corpo determina la distanza dal suo centro di massa entro la quale è possibile trascurare l'effetto gravitazionale di altri corpi.

Il metodo delle **patched conics** sfrutta il concetto di sfera di influenza per separare il trasferimento in tre fasi:

1. Fase di partenza: orbita iperbolica di allontanamento dal primo pianeta, fino alla sua sfera di influenza.
2. Fase di crociera eliocentrica: orbita kepleriana alla hohmann che intercetta i pianeti nelle loro orbite, considerando le loro sfere di influenza come puntiformi.
3. Fase di arrivo: orbita iperbolica di entrata nella sfera di influenza del pianeta di arrivo.

- Velocità di eccesso iperbolico in partenza:  $V_{\infty} = \sqrt{\frac{\mu_{sun}}{R_1}} \left( \sqrt{\frac{2R_2}{R_1+R_2}} - 1 \right)$
- Velocità di eccesso iperbolico all'arrivo:  $V_{\infty} = \sqrt{\frac{\mu_{sun}}{R_1}} \left( 1 - \sqrt{\frac{2R_1}{R_1+R_2}} \right)$

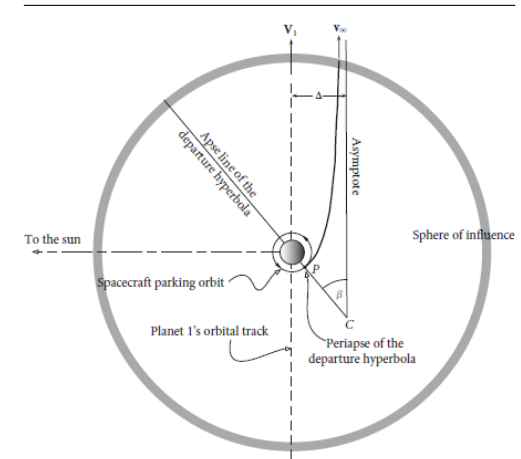


Figura: Orbita iperbolica di partenza. [1]

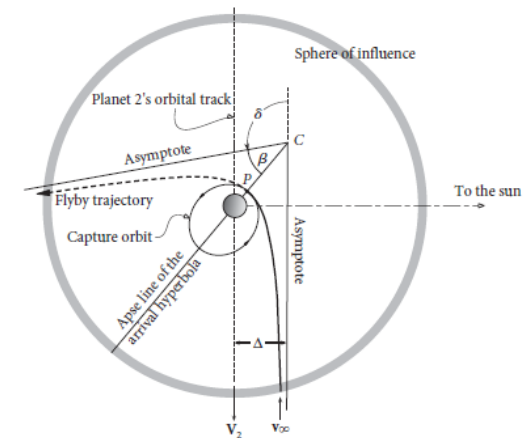


Figura: Orbita iperbolica di arrivo. [1]

## Obiettivo della simulazione:

Implementazione sistematica del metodo delle patched conics per la determinazione della traiettoria orbitale di un generico trasferimento interplanetario.

### GRANDEZZE NOTE:

- Orbite dei due pianeti e rispettivi elementi orbitali.
- Posizioni dei pianeti alla partenza.
- Tempo di volo.

### GRANDEZZE INCOGNITE:

- Vettori velocità dei pianeti.
- Velocità dello spacecraft alla partenza e all'arrivo.
- Elementi orbitali e velocità di eccesso iperbolico.

### I tre step principali della strategia di implementazione:

1. Ottenere i vettori di stato  $\mathbf{R}_1$  e  $\mathbf{V}_1$  al tempo  $t_1$  e analogamente quelli relativi al secondo pianeta al tempo  $t_2 = t_1 + t_{volò}$ .
2. Assumere il modello delle patched conics per le posizioni dello spacecraft in partenza e all'arrivo. Usare il problema di Lambert per trovare le velocità  $\mathbf{V}_D$  e  $\mathbf{V}_A$ . Trovati i vettori di stato l'orbita è univocamente determinata ed è possibile calcolare i classici elementi orbitali.
3. Calcolare le velocità di eccesso iperbolico.

**PARTENZA:**

Pianeta : Earth  
Anno : 2020  
Mese : July  
Giorno : 30  
Ora : 16  
Minuto : 50  
Secondo : 0

Giorno giuliano: 2459061.201

Posizione pianeta (km) = [9.28515e+07 -1.20168e+08 4486.57]  
Modulo = 1.51861e+08

Velocità pianeta (km/s) = [23.0872 18.1016 -0.00103888]  
Modulo = 29.3375

Velocità spacecraft (km/s) = [26.5465 19.2128 1.14846]  
Modulo = 32.7898

v-infinito in partenza (km/s) = [3.45932 1.11122 1.1495]  
Modulo = 3.81091

Tempo di volo = 202.837 giorni

**ARRIVO:**

Pianeta : Mars  
Anno : 2021  
Mese : February  
Giorno : 18  
Ora : 12  
Minuto : 55  
Secondo : 0

Giorno giuliano: 2459264.038

Posizione pianeta (km) = [-2.04675e+06 2.34948e+08 4.97453e+06]  
Modulo = 1.51861e+08

Velocità pianeta (km/s) = [-23.3109 1.84709 0.611137]  
Modulo = 23.392

Velocità spacecraft (km/s) = [-21.1942 2.70277 -0.530539]  
Modulo = 21.3724

v-infinito in arrivo (km/s) = [2.11676 0.855675 -1.14168]

*Figura a.*

*Figura b.*

**ELEMENTI ORBITALI DELLA TRAIETTORIA DI VOLO:**

Momento angolare specifico (km<sup>2</sup>/s) = 4.97704e+09  
Eccentricità = 0.232314  
Longitudine del nodo ascendente (deg) = 307.644  
inclinazione (deg) = 2.00812  
Argomento di pericentro (deg) = 350.495  
Anomalia vera in partenza (deg) = 9.55343  
Anomalia vera in arrivo (deg) = 152.343  
Semiasse maggiore (km) = 1.97299e+08  
Periodo (giorni) = 553.221

*Figura c.*

**ELEMENTI ORBITALI DELLA TRAIETTORIA DI VOLO:**

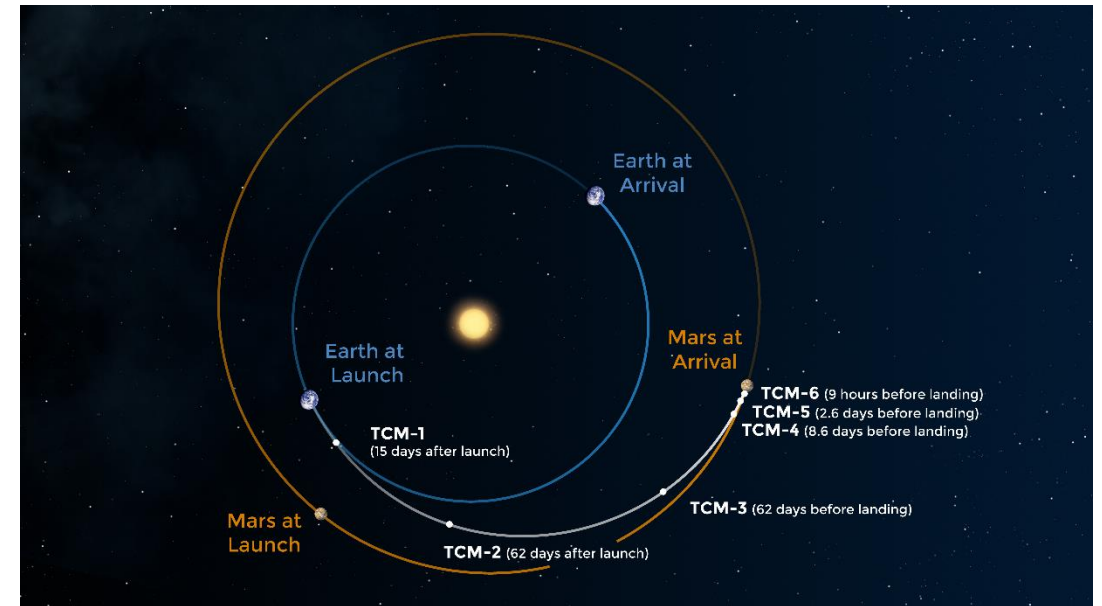
Momento angolare specifico (km<sup>2</sup>/s) = 5.02319e+09  
Eccentricità = 0.25519  
Longitudine del nodo ascendente (deg) = 307.546  
inclinazione (deg) = 0.663295  
Argomento di pericentro (deg) = 351.069  
Anomalia vera in partenza (deg) = 9.07724  
Anomalia vera in arrivo (deg) = 128.984  
Semiasse maggiore (km) = 2.03373e+08  
Periodo (giorni) = 578.963

*Figura d.*

- *Figura a: input relativi alla partenza e velocità di eccesso iperbolico[2]).*
- *Figura b: input relativi all'arrivo e velocità di eccesso iperbolico[2]).*
- *Figura c: elementi orbitali (relativi alle date ufficiali di lancio e atterraggio [2]).*
- *Figura d: elementi orbitali relativi alla data ufficiale di lancio e a 45 giorni prima dell'entrata in atmosfera [4]).*

Gli elementi orbitali trovati in precedenza si ricorda essere frutto delle seguenti approssimazioni:

- Modello dei due corpi.
- Sistema di riferimento geocentrico e inerziale J2000.
- Trasferimento interplanetario su orbite complanari.
- Sfera di influenza.
- Modello delle patched conics.



*Figura: Traiettoria eliocentrica seguita dalla sonda nella missione NASA-Mars2020 Perseverance. [2]*

#### BIBLIOGRAFIA:

- [1] - Howard D. Curtis, \textit{Orbital Mechanics for Engineering Students}, Embry-Riddle Aeronautical University (Daytona Beach Florida), Elsevier Butterworth-Heinemann, 2020;
- [2] - <https://www.nasa.gov/perseverance>
- [3] - Direct transfer trajectory design options for interplanetary orbiter missions using an iterative patched conic method, Indian Institute of Space Science and Technology, Trivandrum, Kerala 695 547, India