



UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI PADOVA



DIPARTIMENTO
DI INGEGNERIA
DELL'INFORMAZIONE

DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA DELL'INFORMAZIONE

CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA BIOMEDICA

“CONTROLLO CINEMATICO E DINAMICO DI SISTEMI ROBOTICI”

Relatore: Prof. Ferrante Augusto

Laureanda: Emma Ghezze
1217348

ANNO ACCADEMICO 2021 – 2022

21 settembre 2022

Ringraziamenti:

Al relatore, professor Augusto Ferrante

Alla mia famiglia, che mi sostiene da sempre

A chi mi è sempre rimasto accanto

Indice

Introduzione	1
Capitolo 1: La robotica	2
1.1 Storia della robotica	2
1.2 Definizione di Robotica	3
1.3 Robot manipolatore	5
Capitolo 2: Definizioni e teoremi	7
2.1 Stabilità.....	7
2.2 Teoremi di Lyapunov	9
2.2.1 Metodo indiretto di Lyapunov	9
2.2.2 Metodo diretto di Lyapunov	10
2.2.3 Teoremi del metodo diretto di Lyapunov	11
2.2.4 Estensione al caso di globale asintotica stabilità	11
2.3 Insieme invariante massimo	11
2.3.1 Teorema dell'Insieme Invariante Massimo – Teorema di Lasalle	12
2.3.2 Corollario di Barbashin-Krasovkii	12
2.3.3 Insieme invariante massimo e RAS	12
Capitolo 3: Problemi di controllo di robot	13
3.1 Controllo di robot.....	13
3.2 Controllo di applicazioni robotiche	13
3.3 Sistemi completamente attuati.....	14
Capitolo 4: Controllo cinematico di sistemi robotici	15
4.1 Controllo di postura	15
4.2 Inseguimento di movimento	17
4.3 Controllo su traccia	18
Capitolo 5: Controllo dinamico	21
5.1 Sistemi completamente attuati, sovra-attuati, sotto-attuati.....	21
5.2 Controllori Proporzionale-Derivativo Indipendenti	21
Conclusione	24
Bibliografia	25

Introduzione

Le applicazioni della robotica con le quali ci si interfaccia ogni giorno, senza nemmeno rendersene conto, sono davvero molte e relative ad un gran numero di ambiti anche molto differenti tra loro.

A partire dai miei interessi per l'ambito protesico mi sono avvicinata al settore delle protesi robotizzate, provando ad approfondire il controllo automatico dei sistemi robotici.

Dopo un breve excursus storico sulla robotica nei secoli, ho definito la robotica stessa e i principali concetti inerenti ad essa.

Infine, ho introdotto alcuni concetti propri dell'automatica necessari per una miglior comprensione dei capitoli successivi, nei quali ho poi analizzato il controllo automatico cinematico e dinamico dei sistemi robotizzati.

Capitolo 1: La robotica

1.1 Storia della robotica

La robotica è un ambito relativamente recente della tecnologia moderna, anche se si trova già in uso il concetto di ‘automa’ o ‘robot’ anche in epoche remote.

Tra i riferimenti più rilevanti vi è Aristotele (300 a.C.) il quale introduce il concetto di ‘automi’ allo scopo di liberare l’uomo dalla schiavitù; alcune fonti poi riferiscono che Erone d’Alessandria (I secolo a.C.), nei testi del quale troviamo il termine ‘automa’, avesse progettato alcuni robot; nel medioevo si incontrano esempi di automi come l’orologio meccanico di Su Song e i musicisti robotici di Al-Jazari e il progetto di un primo robot umanoide presente negli appunti di Leonardo da Vinci con l’ ‘Automa Cavaliere’ (non è noto se ne abbia tentato la realizzazione o meno).

Nel Settecento si giunge a manifestazioni concrete di automi con Jacques de Vaucanson che fabbricò un androide in grado di suonare il flauto, Pierre Jaquet-Droz che realizzò The Scribe, un robot antropomorfo che seguiva con lo sguardo un testo durante la sua scrittura; sul finire dell’Ottocento Sir Arthur Conan Doyle cita la parola *robot* ne ‘Il caso dell’uomo deforme’, mentre Ippolito Nievo parla in ‘Storia filosofica dei secoli futuri’ degli ‘omuncoli’, esseri ausiliari ossia robot antropomorfi per le funzioni di servizio.

Uno dei testi di maggior rilievo in cui compare il termine *robot* è ‘I robot universali di Rossum’, dramma letterario fantascientifico di Karel Capek del 1920; deriva dal ceco ‘robota’, termine che indica il lavoro di esecuzione; in particolare all’interno del dramma è riferito agli automi realizzati con materiale organico e comportamento influenzato dai sentimenti.

Isaac Asimov attorno al 1940 introduce l’immagine del robot meccanico, un automa con sembianze umane e comportamento programmato dall’uomo, e enuncia tre leggi della robotica. Da questo momento in poi, nel corso del Novecento, le applicazioni robotiche diventano più frequenti; si può citare ad esempio il robot progettato da Williams Richards e Alan Reffel, Eric, che sostituì il duca di York nel 1928, in quel momento assente, sostenendo un discorso di benvenuto alla folla.



Figura 1: articolo pubblicato nella rivista *Modern Mechanics* nel 1929

1.2 Definizione di Robotica

La definizione ufficiale del termine *robot* del Robot Institute of America (RIA) risale al 1979:

A robot is a reprogrammable multi-functional manipulator designed to make materials, parts, tools or specialized devices move through various programmed motion for the performance of a variety of tasks.

La robotica è quindi lo studio di macchine che sostituiscano gli uomini nell'esecuzione di compiti, sotto forma di attività o di decisioni.

Un sistema robotico è un sistema complesso costituito da sottosistemi:

- Sistema meccanico
- Sistema di attuazione
- Sistema sensoriale
- Sistema di governo

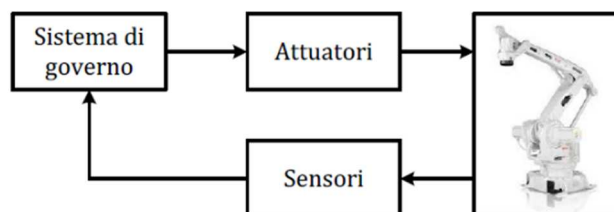


Figura 2: struttura di un sistema robotico

Si può distinguere la robotica in:

- Robotica Avanzata

Consiste nella progettazione di robot relativamente autonomi che operano in ambienti poco o non strutturati.

È una tecnologia non ancora matura.

Esempi: applicazioni per l'esplorazione, di servizio, etc.



Figura 3: Robot per esplorazione aerea: drone



Figura 4: Robot per la riabilitazione

- Robotica Industriale

Consiste nella progettazione di robot con limitata autonomia che operano in ambienti strutturati.

È una tecnologia matura e affidabile.

Esempi: applicazioni in ambito industriale.



Figura 5: Robot industriale per l'assemblaggio



Figura 6: Robot industriale carico-scarico

L'automazione si pone come scopo la sostituzione dell'uomo tramite la macchina sia nell'esecuzione di operazioni materiali sia nell'elaborazione intelligente delle informazioni sullo stato del procedimento nel processo produttivo.

1.3 Robot manipolatore

Per definizione, dunque, un robot è un manipolatore multifunzionale.

Un manipolatore è una macchina costituita da corpi rigidi (bracci o link) posti in genere in serie, connessi tra loro tramite articolazioni (giunti) di rotazione o scorrimento relativo tra loro.

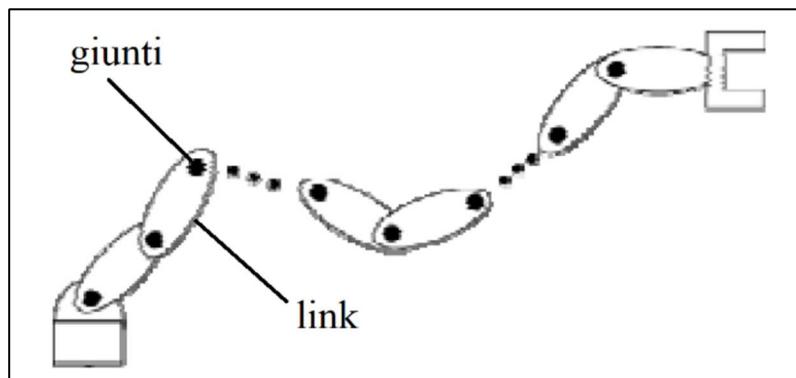


Figura 7: esempio di robot con indicazione di giunti e link

Se tra i bracci vi è moto relativo di rotazione siamo in presenza di giunti rotoidali, nel caso di moto relativo di traslazione siamo in presenza di giunti prismatici.

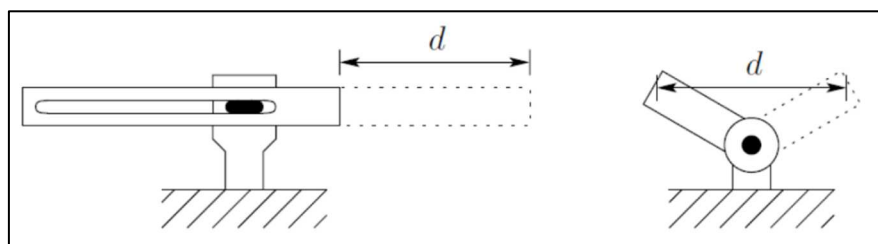


Figura 8: a sinistra un giunto prismatico, a destra un giunto rotoidale

Un manipolatore industriale è costituito da:

- Struttura portante: assicura la mobilità e regola la posizione della parte terminale a livello del pezzo da lavorare
- Polso: conferisce destrezza e regola l'orientamento dello strumento per la presa del pezzo
- Organo terminale (end-effector): esegue il compito assegnato al robot

Può avere struttura cinematica aperta, in cui una sequenza di bracci connette gli estremi della catena, o struttura cinematica chiusa, caratterizzato da una sequenza di bracci posti a formare un anello.

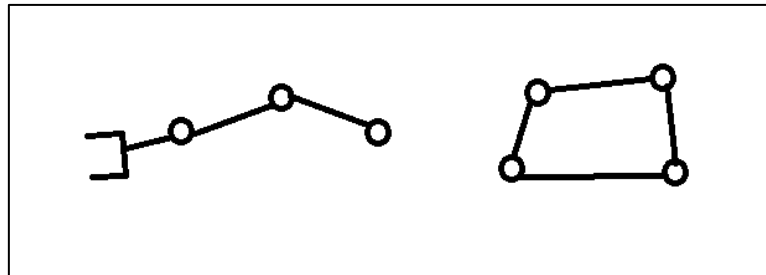


Figura 9: *a sinistra catena cinematica aperta e a destra catena cinematica chiusa*

I gradi di libertà devono essere in numero sufficiente per l'esecuzione dei compiti assegnati; se il numero di gradi di libertà (n) è minore delle variabili di compito (m) il manipolatore prende il nome di difettivo ($n < m$), se è maggiore ridondante ($n > m$).

Nel contesto dei robot manipolatori si possono distinguere diversi spazi a seconda delle peculiarità considerate:

- Spazio di movimento: corrisponde all'insieme dei punti che possono essere toccati da una parte del robot (escluso l'end-effector);
- Spazio massimo: corrisponde all'unione dello spazio di movimento e dell'insieme dei punti che possono essere toccati dall'end-effector e dal pezzo da lavorare;
- Spazio ristretto: corrisponde ad una contrazione dello spazio massimo, conseguente a dispositivi che limitano alcuni movimenti;
- Spazio operativo: corrisponde alla parte dello spazio ristretto usata nella realizzazione dei movimenti programmati;
- Spazio dei giunti: corrisponde all'insieme dei valori che le coordinate ai giunti possono assumere (definito matematicamente);
- Spazio di lavoro: corrisponde all'insieme delle posizioni che l'end-effector può assumere, ossia l'ambiente a cui l'end-effector può accedere.

Capitolo 2: Definizioni e teoremi

Per una miglior comprensione dei concetti che verranno trattati in seguito, si è ritenuto opportuno riportare alcune definizioni e alcuni teoremi.

2.1 Stabilità

Si consideri un sistema non-lineare

$$Dx = f(x, u, t) \quad [2.1]$$

in uno spazio Euclideo $x \in \mathbb{R}^n$, le cui condizioni iniziali sono $x(0) = \bar{x}$ e la funzione d'ingresso è $\bar{u}(t)$.

Una soluzione o movimento del sistema è $x(\bar{x}, \bar{u}, t)$, se la componente \bar{u} è assegnata e fissa viene sottintesa e il movimento si può scrivere $x(\bar{x}, t)$.

Gli equilibri del sistema sono movimenti specifici tali che $\bar{u}(t) = \bar{u}$ e $x(\bar{x}, \bar{u}, t) = \bar{x}$ sono costanti.

Un'orbita o traccia $T_{\bar{x}}$ di un sistema che passa per x è la curva percorsa dallo stato, ossia:

$$T_{\bar{x}} = \{\xi \in \mathbb{R}^n \mid \exists t, \xi = x(\bar{x}, t)\} \quad [2.2]$$

Qualsiasi movimento a partire da un punto dell'orbita rimane sull'orbita (l'orbita è un invariante del sistema).

Le orbite chiuse sono quelle che vengono percorse periodicamente dal sistema.

Se le orbite di un sistema sono chiuse e isolate prendono il nome di cicli limite del sistema, che sono propri solo di sistemi non-lineari.

La stabilità rispetto alle perturbazioni delle condizioni iniziali confronta le soluzioni del sistema in condizioni nominali $x(\bar{x}, \bar{u}, t)$ e in condizioni perturbate $x(\bar{x}', \bar{u}, t)$.

Quando, in presenza di piccole variazioni delle condizioni iniziali, i movimenti subiscono alterazioni ridotte prendono il nome di movimenti stabili.

Un movimento $x(t) = x(\bar{x}, t)$ è stabile per il sistema [2.1] se tutti i movimenti che partono da condizioni iniziali sufficientemente vicine a \bar{x} restano vicino a $x(\bar{x}, t)$ stesso.

Ossia se:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \|\bar{x}' - \bar{x}\| < \delta \Rightarrow \|x(\bar{x}', t) - x(\bar{x}, t)\| < \varepsilon$$

Un movimento $x(t) = x(\bar{x}, t)$ è attrattivo per il sistema [2.1], ossia il sistema è convergente rispetto a quel movimento, se tutti i movimenti che partono da condizioni iniziali sufficientemente vicine a \bar{x} tendono a $x(\bar{x}, t)$ per tempi sufficientemente lunghi.

Ossia se:

$$\exists \delta > 0 : \|\bar{x}' - \bar{x}\| < \delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \|x(\bar{x}', t) - x(\bar{x}, t)\| = 0$$

Un movimento $x(t) = x(\bar{x}, t)$ è asintoticamente stabile per il sistema [2.1] se è al contempo stabile e attrattivo; è invece instabile se non è stabile.

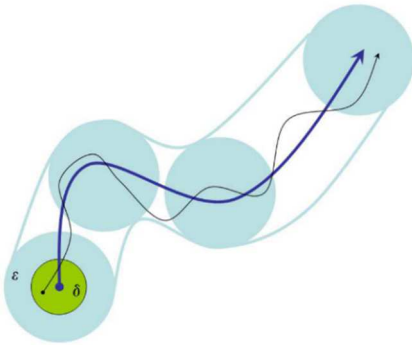


Figura 10: *stabilità di un movimento*

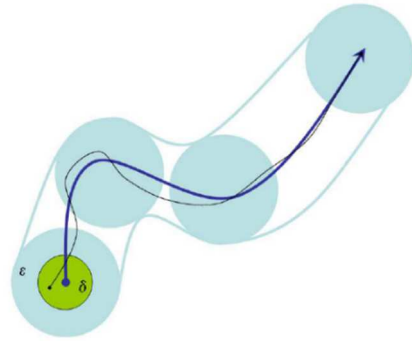


Figura 11: *asintotica stabilità di un movimento*

Considerato un punto di equilibrio $x(\bar{x}, t) = \bar{x}$, lo stato di equilibrio \bar{x} è stabile per il sistema [2.1] se

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0: \|\bar{x}' - \bar{x}\| < \delta \rightarrow \|x(\bar{x}', t) - \bar{x}\| < \varepsilon, \forall t$$

È invece attrattivo per il sistema [2.1] se

$$\exists \delta > 0: \|\bar{x}' - \bar{x}\| < \delta \rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \|x(\bar{x}', t) - \bar{x}\| = 0$$

È asintoticamente stabile per il sistema [2.1] se è allo stesso tempo stabile e attrattivo.

Se è solo stabile viene detto semplicemente o marginalmente stabile.

Se non è stabile è instabile.

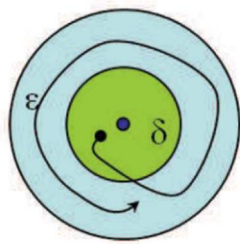


Figura 12: *equilibrio stabile*

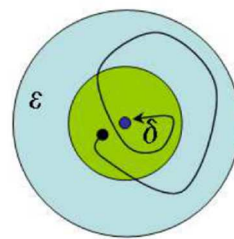


Figura 13: *equilibrio asintoticamente stabile*

Per studiare stabilità e attrattività di un qualsiasi stato di equilibrio di un sistema si possono considerare le stesse proprietà per l'origine oppure gli stessi problemi di stati di equilibrio di un altro sistema, i cui stati sono le differenze tra il movimento perturbato $x(t) = x(\bar{x}', t)$, e quello nominale $\bar{x}(t) = x(\bar{x}, t)$.

Quindi, posto $\tilde{x}(t) = x(t) - \bar{x}(t)$, si ottiene:

$$D\tilde{x}(t) = f(x(t)) - f(\bar{x}(t)) \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{f}(\tilde{x}, t)$$

con condizioni iniziali $\tilde{x}(0) = \bar{x}' - \bar{x}$ e equilibrio in $\tilde{x} = 0$.

Un'orbita $T_{\bar{x}}$ [2.2] è stabile per il sistema se tutti i movimenti che partono da condizioni iniziali abbastanza vicine all'orbita $T_{\bar{x}}$ restano vicine a $T_{\bar{x}}$ stessa.

Un'orbita $T_{\bar{x}}$ è attrattiva per il sistema se, per tempi sufficientemente lunghi, tutti i movimenti che partono da condizioni iniziali abbastanza vicine all'orbita $T_{\bar{x}}$ tendono a $T_{\bar{x}}$ stessa.

In seguito, si opererà prevalentemente su sistemi non-lineari, nei quali gli equilibri non hanno tutti uguali caratteristiche di stabilità, ed è necessario fornire ulteriori definizioni di stabilità.

Il bacino di attrattività o regione di asintotica stabilità (RAS) è la porzione dello spazio di stato formato dalle condizioni iniziali, le cui traiettorie convergono ad un equilibrio asintoticamente stabile.

Se il bacino di attrattività coincide con l'intero spazio di stato, l'equilibrio si dice globalmente asintoticamente stabile (GAS).

2.2 Teoremi di Lyapunov

Allo scopo di comprendere il controllo cinematico e dinamico risulta necessario spiegare i teoremi di Lyapunov.

Lo studio della stabilità dei sistemi non-lineari può essere effettuato tramite i teoremi di Lyapunov: il metodo indiretto, il metodo diretto, i teoremi del metodo diretto di Lyapunov e l'estensione al caso di globale asintotica stabilità.

2.2.1 Metodo indiretto di Lyapunov

Il sistema non-lineare stazionario con equilibrio nell'origine:

$$Dx = f(x) \quad [2.3]$$

viene approssimato linearmente con $Dx = Ax$ [2.4].

Se $Dx = Ax$:

- è asintoticamente stabile: l'origine è localmente asintoticamente stabile anche per il sistema originale [2.3]
- ha almeno un modo esponenzialmente divergente: l'origine è instabile anche per il sistema originale [2.3].

Si noti che non ci si può esprimere sulla stabilità dell'origine del sistema originale [2.3] se il sistema linearizzato [2.4] non ha modi esponenzialmente divergenti.

2.2.2 Metodo diretto di Lyapunov

Il metodo diretto può essere interpretato come una generalizzazione dei criteri di stabilità per sistemi meccanici, basati sullo studio dell'energia del sistema (funzione di energia scalare sempre positiva, tranne all'equilibrio, ossia in configurazione di quiete, in cui ha un minimo).

Posto B_r un intorno dell'origine, una funzione $V(x): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ può essere:

- positiva definita (p.d.): $V(x)$ vale zero nell'origine ed è positiva in un intorno dell'origine, esclusa l'origine

$$V(0) = 0 \wedge \exists B_r | V(x) > 0, \forall x \in B_r \setminus 0 \Rightarrow V(x) > 0$$

- positiva semi-definita (p.s.d.): $V(x)$ è maggiore o uguale a 0 in un intorno dell'origine

$$\exists B_r | V(x) \geq 0, \forall x \in B_r \Rightarrow V(x) \geq 0$$

- negativa definita (n.d.): se $-V(x)$ è p.d.

$$V(x) < 0$$

- negativa semi-definita (n.s.d.): se $-V(x)$ è p.s.d.

$$V(x) \leq 0$$

- globalmente positiva definita: $V(x)$ è positiva in tutti i punti di \mathbb{R}^n , esclusa l'origine

$$V(x) > 0 \forall x \in: \mathbb{R}^n \setminus 0$$

- globalmente positiva semi-definita: $V(x)$ è positiva o nulla in tutti i punti di \mathbb{R}^n , esclusa l'origine

$$V(x) \geq 0 \forall x \in: \mathbb{R}^n \setminus 0$$

- globalmente negativa definita: $V(x)$ è negativa in tutti i punti di \mathbb{R}^n , esclusa l'origine

$$V(x) < 0 \forall x \in: \mathbb{R}^n \setminus 0$$

- globalmente negativa semi-definita: $V(x)$ è negativa o nulla in tutti i punti di \mathbb{R}^n , esclusa l'origine

$$V(x) \leq 0 \forall x \in: \mathbb{R}^n \setminus 0$$

Se la funzione $V(x)$ è positiva definita, le superfici di livello $\bar{\Omega}_l = \{x \in \mathbb{R}^n | V(x) = l\}$ sono chiuse e limitate, almeno per piccoli valori del livello l .

Tra le funzioni che nel metodo di Lyapunov vengono utilizzate spesso ci sono le forme quadratiche:

$$V = x^T P x$$

in cui P è una matrice di dimensione $n \times n$, che si assume simmetrica (in quanto se P avesse una parte antisimmetrica essa non sarebbe rilevante. Indichiamo con α è l'angolo compreso tra x e Px).

V è positiva definita ($x^T P x > 0, \forall x \neq 0$), se e solo se anche P lo è, caratteristica che viene stabilita tramite due criteri:

- se tutti gli autovalori della matrice P sono positivi
- se il determinante delle sottomatrici principali è positivo

Se P è positiva definita, allora $\alpha < \pi/2, \forall x \in \mathbb{R} \mid \det(R) \neq 0 \wedge P = R^T R$.

2.2.3 Teoremi del metodo diretto di Lyapunov

Si ponga $x = 0$ punto di equilibrio di un sistema tempo invariante e si consideri una funzione $V(x)$ continua, positiva definita.

Nei sistemi a tempo continuo il sistema è: $\dot{x} = f(x)$; la derivata direzionale di $V(x)$ lungo il campo $f(x)$ è: $L_f V(x) = \frac{\partial V}{\partial x} \cdot f(x)$.

Nei sistemi a tempo discreto il sistema è: $x(t+1) = f(x(t))$; la differenza direzionale di $V(x)$ lungo il campo $f(x)$ è: $\Delta_f V(x) = V(f(x)) - V(x)$.

Se la derivata direzionale $L_f V(x)$ o la differenza direzionale $\Delta_f V(x)$ sono negative semi-definite (n.s.d.), l'origine è stabile; se sono positive definite (p.d.), l'origine è instabile.

Una funzione $V(x)$ positiva definita (p.d.), con derivata direzionale negativa semi-definita (n.s.d.), è funzione di Lyapunov per il sistema $\dot{x} = f(x)$ nell'equilibrio considerato.

2.2.4 Estensione al caso di globale asintotica stabilità

Se esiste una funzione $V(x)$ globalmente positiva definita, la cui derivata è globalmente negativa definita (g.n.d. - ipotesi del metodo diretto di Lyapunov per l'asintotica stabilità) e si aggiunge l'ipotesi che garantisca che le superfici di livello di $V(x)$ siano chiuse per ogni valore del livello, allora è assicurata la globale asintotica stabilità.

Se $V(x)$ è radialmente illimitata, ossia $\lim_{|x| \rightarrow \infty} V(x) = \infty$, le superfici di livello di $V(x)$ sono chiuse.

2.3 Insieme invariante massimo

Talvolta il metodo diretto di Lyapunov non è adatto e si rende necessario l'utilizzo del teorema dell'insieme invariante massimo, principalmente quando si discute l'attrattività dell'equilibrio nel caso in cui la derivata direzionale sia globalmente negativa semi-definita (g.n.s.d.) e quando si studiano i comportamenti dei sistemi attorno alle proprie orbite.

Dato un sistema dinamico, se tutte le sue traiettorie che intersecano un insieme M ad un tempo T, sono interamente contenute in M per ogni $t \geq T$, l'insieme M è positivamente invariante.

Ogni insieme invariante è un'unione di orbite; queste, assieme agli equilibri, ai cicli limite e alle regioni contenute all'interno di una superficie di livello chiusa di una funzione di

Lyapunov per un sistema in cui valga $\dot{V} \leq 0$, costituiscono esempi di insiemi invarianti; l'unione di insiemi invarianti è a sua volta un insieme invariante.

2.3.1 Teorema dell'Insieme Invariante Massimo – Teorema di Lasalle

Si pone $V(x)$ funzione limitata inferiormente e S un sottoinsieme dello spazio di stato che comprende l'origine, in cui $L_f V(x) \leq 0, \forall x \in S$.

Si pone l'esistenza di qualche valore di l , tale per cui le superfici di livello $V(x) = l$ sono chiuse e delimitano l'insieme $\Omega_l = \{x | V(x) < l\}$, con $\Omega_l \subseteq S$.

Posti infine $R = \{x \in \Omega_l | L_f V(x) = 0\}$ e M il massimo insieme invariante contenuto in R , ogni traiettoria $x(x_0, t)$, in cui $x_0 \in \Omega_l$, converge all'insieme M .

Per determinare l'attrattività dei cicli limite si può utilizzare il teorema dell'insieme invariante massimo, in cui non è più necessario che la funzione di Lyapunov sia positiva definita, ma Ω_l dev'essere limitato.

2.3.2 Corollario di Barbashin-Krasovkii

Se, considerata una funzione di Lyapunov $V(x)$ positiva definita con $L_f V(x)$ negativa semi-definita, l'unica orbita del sistema contenuta in R è un equilibrio, allora quest'ultimo è asintoticamente stabile.

2.3.3 Insieme invariante massimo e RAS

Si pone $V(x)$ funzione di Lyapunov per il sistema $\dot{x} = f(x)$, in cui l'origine è un punto di equilibrio asintoticamente stabile.

La condizione $L_f V(x) < 0$ non è sufficiente per determinare se la traiettoria che parte da uno stato iniziale \bar{x} , converge all'origine o meno, ma si ricorre ad un teorema.

Data una curva di livello $V(x) = l$ che delimiti una regione chiusa Ω_l , se all'interno di questa vale in tutti i punti eccetto nell'origine $L_f V(x) < 0$, allora la regione stessa è compresa nella RAS dell'origine.

Di conseguenza se si vuole determinare un sottoinsieme della RAS di un equilibrio si può cercare la curva più ampia $V(x) = l > 0$ contenuta in una regione in cui $L_f V(x) < 0$.

L'unione di insiemi contenuti nella RAS è a sua volta contenuto nella RAS, infatti, il metodo viene utilizzato consequenzialmente con funzioni $V(x)$ differenti, allo scopo di rendere più precise le stime.

Capitolo 3: Problemi di controllo di robot

3.1 Controllo di robot

Controllare un sistema robotico significa completare un programma di lavoro correttamente, eseguire con precisione una traiettoria di moto e ridurre a zero (o, comunque, entro una tolleranza prefissata) l'errore di posizionamento.

Il controllo può essere distinto in comando ad anello aperto e ad anello chiuso; il primo consiste nel controllo del robot che agisce poi sull'ambiente, nel secondo invece viene effettuato il controllo del robot, il quale fornisce un feedback al sistema di controllo e agisce sull'ambiente, che è a sua volta connesso in retroazione con il robot e con il controllo.

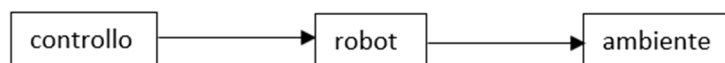


Figura 14: comando ad anello aperto

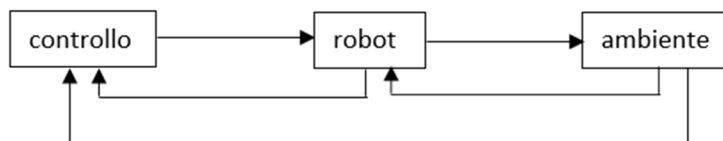


Figura 15: comando ad anello chiuso

3.2 Controllo di applicazioni robotiche

La maggior parte dei sistemi per l'automazione e dei robot hanno una dinamica fortemente non-lineare e sono caratterizzati da riprogrammabilità.

Questa peculiarità rende difficile linearizzare i sistemi attorno a traiettorie prestabilite; perciò, si cerca un controllo che tenga conto completamente delle caratteristiche non-lineari, in modo tale da compensarle e, se possibile, sfruttarle.

Il controllo delle applicazioni robotiche è caratterizzato da tre obiettivi:

- Controllo di postura
- Inseguimento di movimento
- Controllo su traccia

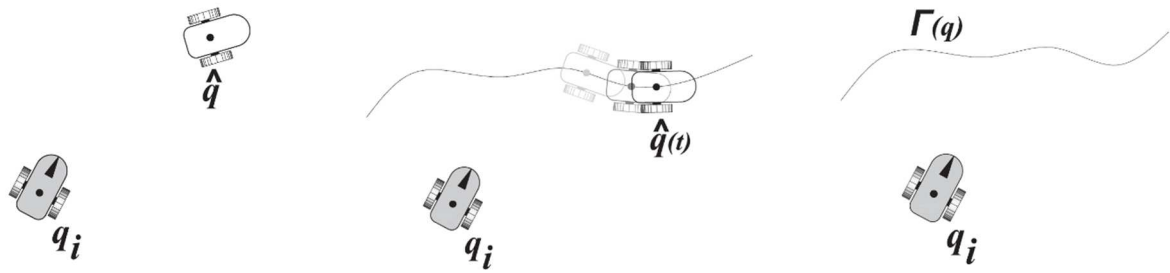


Figura 16: *In ordine controllo di postura, inseguimento di movimento, controllo su traccia*

3.3 Sistemi completamente attuati

Di seguito verranno considerati i sistemi completamente attuati, meccanismi con tanti attuatori a disposizione quanti i loro gradi di libertà, e in grado di raggiungere e mantenere l'equilibrio in una configurazione arbitraria, compatibile con i vincoli.

Tra le tecniche di controllo per sistemi meccanici completamente attuati vi è il controllo cinematico o controllo in velocità, che considera solo le relazioni cinematiche tra le velocità del sistema, al quale segue poi il controllo dinamico.

Capitolo 4: Controllo cinematico di sistemi robotici

Il controllo cinematico o in velocità considera un modello semplificato del sistema, in cui si tiene conto solo delle relazioni cinematiche tra le velocità del sistema.

Sono dati:

- $\xi \in \mathbb{R}^m$: configurazione del sistema nello spazio operativo
- $q \in \mathbb{R}^n$: configurazione nello spazio delle variabili di giunto
- $\xi = Q(q)$: mappa cinematica diretta

4.1 Controllo di postura

Nel controllo di postura, o Point to point control, il robot deve portarsi e rimanere in una postura fissa particolare desiderata.

Può essere rappresentato da: $q(t) \rightarrow q_d = \text{costante}$

Viene trattato il raggiungimento di una configurazione desiderata nello spazio operativo $\xi_d \in \mathbb{R}^m$, cercando una delle possibili soluzioni $q \in \mathbb{R}^n$ del sistema di equazioni non-lineari $Q(q) = \xi_d$.

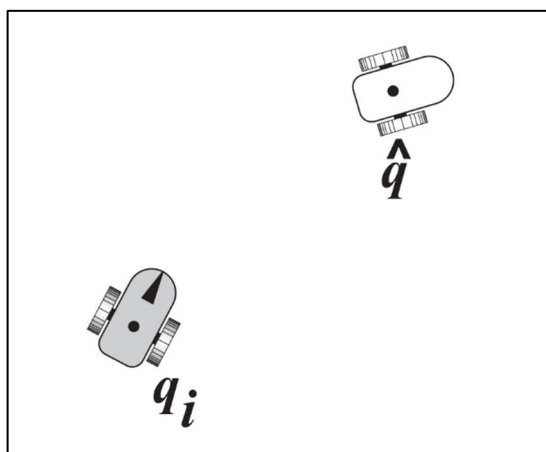


Figura 17: Controllo di postura di un veicolo

È un problema di cinematica inversa risolvibile tramite diversi metodi:

1. in forma chiusa per alcuni casi
 - a. Soluzione di carattere algebrico: vengono effettuate manipolazioni delle equazioni cinematiche fino a che non si ottiene un insieme di relazioni che permettono l'inversione delle equazioni; non ci sono considerazioni generali che guidino alla soluzione;

- b. Soluzione di carattere geometrico: si basa su considerazioni geometriche dipendenti dalla struttura del manipolatore che possono aiutare nella soluzione (non sempre possibili).
2. Se non è possibile o conveniente la soluzione 1, si procede a soluzioni numeriche, risolvendo un sistema di equazioni non-lineari.

Si effettua quindi un controllo cinematico delle variabili di giunto, considerando come variabili le configurazioni dei giunti, che vengono inizializzate da un dato valore q_0 .

Ogni valore q_0 corrisponde ad una diversa postura $\xi_0 = Q(q_0)$ e può essere eventualmente modificato secondo una legge $q(t)$ tale che $\xi(t) = Q(q(t))$ converga a ξ_d .

Tale convergenza può essere guidata tramite la scelta delle velocità dei giunti, ossia il valore u della variabile di controllo cinematico nell'espressione: $\dot{q} = u$

Lo scopo del controllo è annullare l'errore di posizionamento:

$$e(t) = \xi_d - \xi(t) \quad [4.1]$$

La scelta può essere fatta in retroazione $u = u(e)$.

Scelta come funzione di Lyapunov di controllo:

$$V = \frac{1}{2} \cdot e^T e \quad [4.2]$$

con $J(q)$: Jacobiano analitico del manipolatore:

$$J(q) = \frac{\partial Q}{\partial q} \quad [4.3]$$

$$\dot{\xi} = J(q) \cdot \dot{q} \quad [4.4]$$

la derivata di [4.2] risulta: $\dot{V} = -e^T \cdot J(q) \cdot u \quad [4.5]$

Si pone la dimensione del compito assegnato m e il numero dei giunti n .

- a. Metodo di Gauss-Newton: se $m = n$, jacobiano $J(q)$ invertibile:

posta K matrice positiva definita, viene scelta:

$$u = J^{-1}(q) K e \quad [4.6.a]$$

Sostituendo la [4.6.a] nell'equazione [4.5], si ottiene:

$$\dot{V} = -e^T K e \quad [4.7.a]$$

Mentre la dinamica dell'errore risulta:

$$\dot{e} = -K e \quad [4.8.a]$$

- b. se $m < n$, jacobiano $J(q) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ rettangolare (manipolatori ridondanti):

si utilizza un'inversa destra $J^R(q)^2$ di $J(q)$ e si pone $N_J(q) \in \mathbb{R}^{n \times (n-m)}$, matrice di base dello spazio nullo di $J(q)$, tale che $J(q)N_J(q) = 0$ e $\lambda \in \mathbb{R}^{n-m}$

Si ha:

$$u = J^R(q) K e + N_J(q) \lambda \quad [4.6.b]$$

la dinamica dell'errore è identica al caso precedente, ma resta libero il parametro λ , che può essere sfruttato per soddisfare altri compiti del robot.

- c. Approccio del gradiente (steepest descent) viene scelta

$$u = K J^T(q)e \quad [4.6.c]$$

Sostituendo la [4.6.c] nell'equazione [4.5], si ottiene:

$$\dot{V} = -e^T J(q) K J^T(q)e \quad (K > 0) \quad [4.7.c]$$

Se $J(q)$ non ha singolarità, \dot{V} è definita negativa e l'errore ha convergenza asintotica a zero; se $J(q)$ ha singolarità, \dot{V} è semi-definita negativa e l'errore può avere convergenza nello spazio nullo che si crea nella singolarità del Jacobiano, ossia nelle configurazioni tali che $J(q) (\xi_d - Q(q)) = 0$

- d. Metodo di Levenberg-Marquard:

si pone:

$$u = J^T(q)(J(q)J^T(q) + \mu I)^{-1}e \quad (\mu > 0) \quad [4.6.d]$$

Si noti che per $\mu = 0$ si può ricondurre con al metodo b. scegliendo una matrice pseudoinversa, mentre per μ grandi coincide con il metodo c. del gradiente.

Sostituendo la [4.6.d] nell'equazione [4.5], si ottiene:

$$\dot{V} = -e^T J(q) J^T(q) (J(q) J^T(q) + \mu I)^{-1} e \quad [4.7.d]$$

Risulta che \dot{V} è negativa semi-definita.

Spesso questo metodo viene applicato sostituendo la matrice I con una matrice diagonale che scali in modo diverso le differenti variabili.

Inoltre in genere il valore di μ viene variato ad ogni passaggio; quando la variazione dell'errore è maggiore, viene aumentato affinché si 'smorzi' la soluzione della pseudoinversa, quando invece la variazione dell'errore è lenta, il valore viene diminuito affinché diventi più veloce la discesa lungo il gradiente.

4.2 Inseguimento di movimento

Nell'inseguimento di movimento, o Trajectory tracking, il robot deve raggiungere e seguire una legge di moto di un obiettivo desiderato, ossia una configurazione nello spazio operativo.

Può essere rappresentato da: $q(t) \rightarrow q_d(t)$

Viene trattato il problema che, assegnata una traiettoria $\xi_d(t)$, cerca una legge temporale per i giunti $q(t)$, tale che $Q(q(t))$ converga a $\xi_d(t)$.

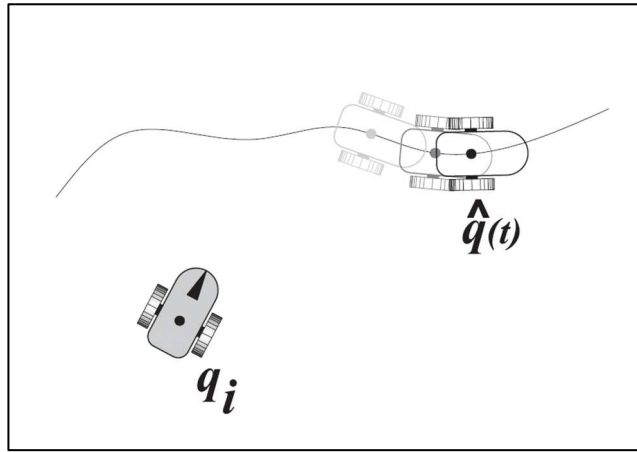


Figura 18: *Inseguimento di movimento di un veicolo*

Si procede analogamente al caso per il controllo di postura.

Inizialmente si pone il valore u della variabile di controllo cinematico:

$$\dot{q} = u$$

e l'errore di posizionamento:

$$e(t) = \xi_d - \xi(t) \quad [4.1]$$

Considerata la funzione di Lyapunov:

$$V = \frac{1}{2} \cdot e^T e \quad [4.2]$$

Derivando quindi la [2] si ottiene:

$$\dot{V} = -e^T \cdot J(q) \cdot u \quad [4.5]$$

La legge di controllo cinematico si può ottenere a partire dal metodo di Gauss Newton (2a), aggiungendo un termine anticipativo:

$$u = J^{-1}(q) (\dot{\xi}_d + K e) \quad [4.6]$$

Utilizzando il metodo del gradiente o di Levenberg-Marquard, invece, si ottiene solo una stabilità pratica, in quanto entrambi garantiscono solo che l'errore tenda ad un intorno dell'origine, la cui dimensione aumenta all'aumentare della velocità desiderata $\dot{\xi}$.

4.3 Controllo su traccia

Nel controllo su traccia, o Path following, il robot deve raggiungere e percorrere una curva, ossia una traccia assegnata, nello spazio operativo n-dimensionale, senza che venga data una legge oraria.

La traccia assegnata viene definita da n-1 equazioni implicite $C(\xi) = 0$, con $C(\xi) \in \mathbb{R}$ e $C: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$.

La parte terminale della catena cinematica deve quindi raggiungere questa traccia e percorrerla ad una certa velocità assegnata.

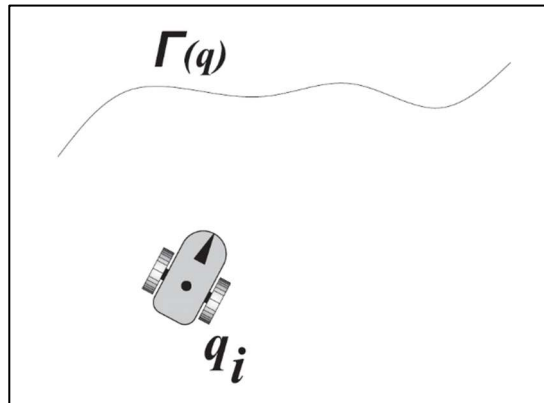


Figura 19: Controllo su traccia di un veicolo

Usando come modello cinematico:

$$\begin{aligned}\dot{q} &= u \\ \dot{\xi} &= J(q) \cdot \dot{q} \quad [4.4]\end{aligned}$$

Dopo aver posto la funzione:

$$V(\xi) = \frac{C^T(\xi)C(\xi)}{2} \quad [4.9]$$

Si noti che $V(\xi)$ è sempre positiva, tranne sulla traccia in cui è nulla.

Derivando l'equazione [4.2] e utilizzando le informazioni del modello cinematico si ottiene:

$$\dot{V} = C^T(\xi) C_{\xi}(\xi) J(q) u \quad [4.10]$$

Viene definita $C_{\xi}(\xi) = \frac{\partial C(\xi)}{\partial \xi}$, matrice $(n-1) \times n$, che ammette uno spazio nullo e una sua base che viene detta $S(\xi)$ tale che $C_{\xi}(\xi) S(\xi) = 0$.

Considerato il punto $\hat{\xi}$ sulla curva $C(\hat{\xi}) = 0$, la matrice $S(\hat{\xi})$ rappresenta un vettore tangente alla curva nel punto stesso $\hat{\xi}$.

Dati k, α parametri scalari liberi, la legge di controllo cinematico potrà essere quindi:

$$u = -J^{-1}(q)C^T(\xi) C_{\xi}(\xi)k + J^{-1}(q)S(\xi)\alpha \quad [4.11]$$

Sostituendo l'equazione [4.11] all'interno della [4.10] si ottiene:

$$\dot{V} = -C^T(\xi)C_{\xi}(\xi) C_{\xi}^T(\xi)C(\xi)k \quad [4.12]$$

Con $k > 0$, la derivata della funzione di Lyapunov \dot{V} è semi-definita negativa e ciò garantisce la stabilità dei punti che stanno sulla curva $C(\xi) = 0$.

Si noti che \dot{V} si annulla nei punti in cui $C^T(\xi)C(\xi) = 0$; ciò significa che si annulla solo nei punti che stanno sulla traiettoria desiderata $C(\xi) = 0$.

Per curve regolari, esiste un intorno della curva assegnata $C(\xi) = 0$ a partire da cui il sistema converge asintoticamente verso la stessa curva, di conseguenza l'intorno appartiene al bacino di attrazione per la curva.

La cinematica del controllo su traccia risulta:

$$\dot{\xi} = C_{\xi}^T(\xi)C(\xi)k + S(\xi)\alpha \quad [4.13]$$

in cui il parametro α viene sfruttato per assegnare alla velocità di percorrenza della curva un valore specifico, ma non influisce sulla stabilizzazione.

Si può concludere quindi che la scelta della legge di controllo [4.11] è tale che la curva risulta stabile e attrattiva per l'intera regione in cui C_{ξ} non è singolare.

Capitolo 5: Controllo dinamico

Viene assegnata una legge alle velocità del sistema, affinché le configurazioni seguano l'andamento desiderato, dopodiché le velocità vengono imposte come riferimenti a cui la velocità del sistema deve tendere e che sarà governata dall'equazione della dinamica Lagrangiana del sistema tramite il controllo delle forze generalizzate mediante attuatori.

La dinamica di un sistema Lagrangiano soggetto a forze generalizzate τ , descritto da n coordinate q non vincolate, viene espressa come:

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = \tau \quad [5.1]$$

Le forze generalizzate τ fanno lavoro sulle coordinate lagrangiane q scelte e possono non coincidere con le forze f effettivamente esercitate dagli l attuatori, ma sono in relazione assunta lineare:

$$\tau = F(q)f \quad [5.2]$$

5.1 Sistemi completamente attuati, sovra-attuati, sotto-attuati

Posto n il numero di gradi di libertà, se la matrice $F(q)$ è quadrata, ossia $l = n$, e invertibile su tutto il dominio di configurazione di interesse, allora il sistema è detto completamente attuato.

Se $l > n$ e il rango di $F(q)$ è sempre n ($\text{rank}(F(q)) = n$), l'attuazione è ridondante e il sistema è detto sovra-attuato.

Se il rango di $F(q)$ è minore di n ($\text{rank}(F(q)) < n$), il sistema è detto sotto-attuato.

Nel contesto del controllo dinamico consideriamo i sistemi completamente attuati; riconduciamo i sovra-attuati a questi, tramite l'aggiunta della possibilità di scegliere una f ottima per una data scelta di τ , mentre i sotto-attuati non vengono analizzati.

5.2 Controllori Proporzionale-Derivativo Indipendenti

Si cerca una legge di controllo della dinamica per le coppie τ del sistema [5.1], applicando controllori standard alle variabili di giunto, poste indipendenti tra loro.

I riferimenti che si desiderano inseguire sono $q_d(t) : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ e gli errori di inseguimento sono:

$$e(t) = q_d(t) - q(t) \quad [5.3]$$

Si sceglie una legge di controllo per la i -esima componente formata da due componenti, una proporzionale all'errore, una alla sua derivata:

$$\tau_i = K_{p,i}e_i + K_{v,i}\dot{e}_i \quad [5.4]$$

Con $K_{p,i} > 0$ e $K_{v,i} > 0$.

Che diventa:

$$\tau = K_p e + K_v \dot{e} \quad [5.5]$$

K_p e K_v sono matrici diagonali positive definite, i cui elementi sono gli elementi delle componenti i -esime:

$$K_p = \text{diag}(K_{p,i})$$

$$K_v = \text{diag}(K_{v,i})$$

Questo tipo di legge di controllo prende il nome di Proporzionale-Derivativo (PD) e si è iniziata ad utilizzare nei controllori dei primi esemplari di manipolatori industriali articolati negli anni Sessanta.

Sostituendo il valore di τ dell'equazione [5.5] nella [5.1], se si usano le variabili di stato $(e, \dot{e}) \in \mathbb{R}^{2n}$ la dinamica del sistema controllato diventa:

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = K_p e + K_v \dot{e} \quad [5.6]$$

Dall'equazione [5.3] ricaviamo $q = q_d - e$ e derivando $\dot{q} = \dot{q}_d - \dot{e}$.

L'origine del sistema $(e, \dot{e})=(0,0)$ è un equilibrio del sistema [5.1] se per $\tau = 0$ l'equazione del sistema stesso viene soddisfatta per $q = q_d(t)$:

$$M(q_d)\ddot{q}_d + C(q_d, \dot{q}_d)\dot{q}_d + G(q_d) = 0 \quad [5.7]$$

Si pone $\ddot{q}_d = \dot{q}_d = 0$, ossia si considera il caso in cui la configurazione desiderata è costante, con $q_d(t) = q_d H(t)$, con $H(t)$ ad esempio funzione gradino.

Si pone inoltre $G(q_d) = 0$, che significa che nel sistema non ci sono elasticità e effetti della gravità; la mancanza dell'effetto della forza peso sui giunti può essere legata alla sua trascurabilità, ossia il moto del sistema si trova solo sul piano orizzontale, oppure può essere correlata al fatto che il termine $G(q)$ venga eliminato esattamente da un termine equivalente applicato agli attuatori, motivo per cui si aggiunge all'equazione [5.5] un termine $G(q)$ che lo azzeri.

La legge di controllo modificata PD con compensazione di gravità risulta:

$$\tau = K_p e + K_v \dot{e} + G(q) \quad [5.8]$$

Anche se la legge di controllo di ogni coordinata è indipendente dalle altre, vi sono accoppiamenti dinamici forti per cui non risulta immediato che il controllo PD stabilizzi il sistema in $(e, \dot{e})=(0,0)$.

Si utilizza quindi la tecnica di Lyapunov diretta per studiare la stabilità del sistema, considerando la funzione di Lyapunov:

$$V(t) = \frac{1}{2} \dot{e}^T M(q) \dot{e} + \frac{1}{2} e^T K_p e \quad [5.9]$$

Dato $\dot{q}_d = 0$, possiamo associare i due addendi dell'equazione [5.9] a due forme di energia; il primo termine corrisponde all'energia cinetica del sistema $T = \frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q} > 0$, mentre il secondo termine all'energia potenziale associata ad un elemento elastico multidimensionale con elongazione e , la cui rigidità è K_p . Se K_p è una matrice diagonale, l'elasticità risulta uguale a quella di molle virtuali per ciascun giunto, che si oppongono agli spostamenti rispetto alle posizioni di riferimento del giunto stesso.

Derivando l'equazione [5.9] si ottiene:

$$\dot{V}(t) = -\dot{q}^T K_v \dot{q} \quad [5.10]$$

La funzione $\dot{V}(e, \dot{e})$ è negativa semi-definita.

Si analizza la stabilità del sistema utilizzando il teorema dell'invariante massimo.

La matrice di inerzia $M(q)$ e la matrice diagonale di termini proporzionali K_p sono entrambe positive definite, di conseguenza la funzione $\dot{V}(e, \dot{e})$ è radialmente illimitata e le sue curve di livello Ω_l sono chiuse per ogni livello. Al loro interno viene definito l'insieme $R = \{(e, \dot{e}) \in \Omega_l \mid \dot{V}(e, \dot{e}) = 0, \dot{e} = 0\}$ in cui $V(t)$ non decresce.

Posti $\dot{q}_d = 0$, in R $\dot{q} = \ddot{q} = 0$, si ottiene l'insieme invariante massimo in R per sostituzione nel sistema [5.1] (con perfetta compensazione di gravità) e risulta $M = \{(e, \dot{e}) \in R \mid K_p e = 0\}$.

Essendo K_p definita positiva, M coincide con l'origine $(e, \dot{e}) = (0, 0)$, punto in cui qualsiasi traiettoria che parta da Ω_l converge; l'equilibrio del sistema risulta quindi globalmente asintoticamente stabile.

Il controllo Proporzionale-Derivativo indipendente ai giunti garantisce che si raggiungano asintoticamente i riferimenti q_d costanti, ma non il valore desiderato e la stabilità del sistema se non valgono le ipotesi sopra dette.

Per ottenere un comportamento simile nello spazio operativo del robot, ossia nelle variabili $\xi = Q(q)$, si definisce l'errore $e_\xi = \xi_d - \xi$ e si assume $\dot{\xi}_d = 0$; la legge di controllo risulta:

$$\tau = J^T(q) K_\xi e_\xi - K_v \dot{q} + G(q) \quad [5.11]$$

con $J(q)$: Jacobiano analitico del manipolatore: $J(q) = \frac{\partial Q}{\partial q}$, tale che la postura desiderata ξ_d sia asintoticamente stabile.

Conclusione

L'applicazione di un'azione di controllo adatta ad un determinato sistema è ciò che permette, a partire da uno stato iniziale, di raggiungere uno stato finale desiderato.

Il controllo analizzato in questa trattazione è basato principalmente sulle tecniche di Lyapunov. L'obiettivo che si tenta di raggiungere attraverso il controllo automatico dei sistemi robotizzati è quello di sostituire l'uomo attraverso macchinari e ciò può avvenire integrando l'ambito del controllo automatico con la meccanica, l'elettronica, l'informatica e molti altri ambiti.

Si sono considerati solo i sistemi completamente attuati, dei quali si è analizzato brevemente il controllo cinematico e successivamente quello dinamico.

Con il primo si prendono in considerazione le relazioni cinematiche tra le velocità dei giunti; la cinematica incerta, problema di controllo di posizione o di traiettoria quando alcuni dei parametri geometrici che definiscono la geometria del robot non siano noti, non viene analizzata, anche se in determinati casi può risultare utile.

Attraverso il controllo dinamico si effettua invece un controllo delle forze generalizzate.

All'interno del controllo dinamico è stato trattato solo il caso in cui il problema sia il controllo di un braccio che deve posizionarsi in una data configurazione, ma è necessario per controlli riguardanti il problema nel quale il braccio effettui percorsi prestabiliti sviluppare calcoli più complessi e inoltre è necessario eliminare l'ipotesi di modello perfetto, che nella realtà non è ovviamente presente.

Sviluppando l'argomento scelto mi sono resa conto della complessità, della vastità e dell'importanza del tema trattato.

In particolare la teoria è estremamente generale e sofisticata e propone risultati matematici di grande interesse; in secondo luogo le applicazioni sono sempre più importanti e pervasive nella società moderna.

Bibliografia

- ‘Fondamenti di Automatica – II parte’, Antonio Bicchi, Università di Pisa, A.A. 2021-2022
<https://www.centropiaggio.unipi.it/sites/default/files/fda2-text.pdf>
- Corso di controllo dei robot, ‘Introduzione’, Paolo Lino, Politecnico di Bari, A.A. 2018-2019
https://c3lab.poliba.it/images/2/2f/01_Introduzione.pdf
- Corso di robotica 2, ‘Introduzione al controllo’, Alessandro De Luca, ‘Sapienza’ Università di Roma, A.A. 2008-2009
http://www.diag.uniroma1.it/deluca/rob2/07_IntroControllo.pdf
- Corso di controllo dei robot, ‘Introduzione al corso’, Paolo Rocco, Politecnico di Milano, 2008-2009
https://rocco.faculty.polimi.it/controlrobot/introduzione_2p.pdf
- ‘Elementi di cinematica e dinamica dei robot’, Claudio Melchiorri, Università di Bologna, A.A. 2013-2014
<https://core.ac.uk/download/31041225.pdf>
- ‘Introduction to Robotics’, Vikram Kapila, Associate Professor - Mechanical Engineering – New York University, A.A. 2003-2004
<http://engineering.nyu.edu/mechatronics/smart/pdf/Intro2Robotics.pdf>
- Corso di controlli automatici II, ‘Controllo dei robot manipolatori’, Giuseppe Oriolo, ‘Sapienza’ Università di Roma, A.A. 2004-2005
<http://www.diag.uniroma1.it/~oriolo/rm3/cca/matdid/slides/ContrRobot.pdf>
- <https://robotica.news/breve-storia-della-robotica/>