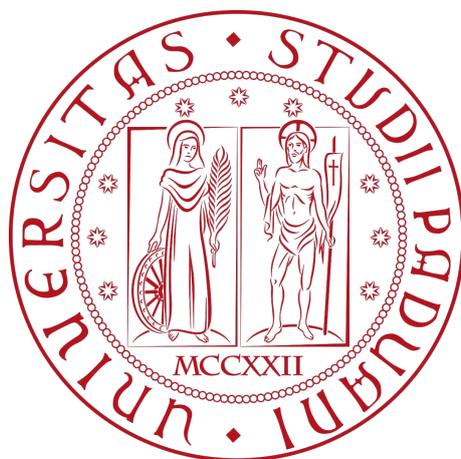


Università degli Studi di Padova

Dipartimento di Scienze Statistiche

Corso di Laurea Triennale in Statistica per
l'Economia e l'Impresa



RELAZIONE FINALE

Previsione della volatilità realizzata nei mercati azionari mediante modelli statistici

Relatore Prof: Luisa Bisaglia

Dipartimento di Scienze
Statistiche

Laureando: Riccardo

Vendraminetto

Matricola N: 2006418

Anno Accademico 2022/2023

Indice

Introduzione	4
1 Caratteristiche dei dati ad alta frequenza	6
1.1 Trading non sincrono	6
1.2 Memoria lunga	7
1.3 La volatilità	10
2 Indice di volatilità RVOL	12
2.1 Descrizione	12
2.2 Metodo di calcolo	13
3 Il modello HAR-RV	15
3.1 Il principio del modello	15
3.2 Il modello HAR(3)	16
3.3 Il modello EWMA-HAR-RV	18
4 Applicazione su dati reali	20
4.1 Serie storica	20
4.2 Risultati <i>in-sample</i>	23
4.3 Risultati <i>out-of-sample</i>	27
4.4 Confronto tra i due modelli	30
4.4.1 Previsioni a più passi in avanti	32
4.4.2 Finestre previsionali differenti	33
4.5 Differente metodo di valutazione	34
Conclusioni	40

Bibliografia	41
Ringraziamenti	44

Introduzione

La volatilità svolge un ruolo molto importante in diversi ambiti finanziari e non solo. Essa è di principale interesse per una gestione efficiente di diversi rischi di investimento, per la determinazione dei prezzi degli *asset*, per le decisioni di copertura e per la gestione di portafogli.

Quindi, accurate previsioni della volatilità dei mercati azionari sono molto importanti per il *policymaker*, i partecipanti al mercato e ricercatori.

Negli ultimi anni, un numero crescente di ricerche ha tentato di affrontare questo importante e complesso problema di previsione della volatilità.

Con il rapido sviluppo della globalizzazione economica e della continua crescita dell'economia globale, un numero crescente di partecipanti al mercato ha iniziato a prestare attenzione alla volatilità dei mercati azionari.

Quindi, la volatilità, come verrà analizzata in modo più approfondito nei prossimi capitoli, è dovuta dalla grande eterogeneità degli investitori e agenti di mercato che operano all'interno di esso.

Il modello HAR-RV, *Heterogeneous AutoRegressive model* di Corsi (Corsi 2009b) è uno dei modelli più diffusi e utilizzati per modellare e prevedere la volatilità realizzata. Oltre alla componente giornaliera della volatilità realizzata, il modello HAR-RV incorpora altre due dimensioni esplicative:

- Componente settimanale:

$$RV_t^w = \frac{1}{5}(RV_t^d + \dots + RV_{t-4}^d)$$

- Componente mensile:

$$RV_t^m = \frac{1}{22}(RV_t^d + \dots + RV_{t-21}^d)$$

Si può notare che le associazioni che contribuiscono al calcolo delle volatilità realizzate settimanali, così come quelle mensili, del modello HAR-RV hanno lo stesso peso, rispettivamente $1/5$ e $1/22$.

La cosa interessante da evidenziare, che verrà sviluppata nel terzo capitolo, è la modalità con cui questi pesi strutturali possano riflettere al meglio l'eterogeneità dei mercati azionari.

Altro quesito molto rilevante è quello che chiede se tutta la grande mole di informazioni dei dati storici può essere utile per la previsione della volatilità realizzata oppure bastano solamente le osservazioni più recenti, trascurando quelle più lontane.

Ovviamente le informazioni più vicine al momento presente sono più utili per la previsione corrente, avendo un peso maggiore e quest'ultimo dovrebbe mostrare una variazione di tendenza decrescente nel tempo. Motivati da questo contesto, nel terzo capitolo verrà esaminato il modello EWMA-HAR-RV (Liang et al. 2022) dove applicheremo il metodo delle medie mobili ponderate esponenzialmente al nostro modello di partenza, ricostruendo in questo modo le componenti settimanali e mensili.

Nel quarto capitolo, con opportuni indicatori robusti di valutazione, verranno messi a confronto i due modelli (HAR-RV e EWMA-HAR-RV) in termini di capacità previsiva della volatilità realizzata. Per effettuare tale confronto verrà analizzata una serie storica relativa all'indice RVOL (*Cboe Realized Volatility Index Series*) prodotto dalla Cboe (*Chicago Board Options Exchange*).

Per prima cosa verrà analizzata la serie storica includendo tutto il periodo informativo disponibile, ovvero dal primo febbraio 2001 al diciassette marzo 2023.

Successivamente la serie verrà ridotta per semplicità, escludendo i valori dell'indice RVOL dal gennaio 2020. Tale eliminazione dallo storico dei dati originari è necessaria per evitare una possibile distorsione dei risultati finali dovuta all'inattesa pandemia di COVID-19 che ha fatto impennare l'indice di volatilità realizzata. A questo proposito, sempre nel quarto capitolo, potremmo vedere nell'analisi preliminare della serie gli effetti dovuti alla pandemia subiti dalla volatilità realizzata nei mercati azionari.

Capitolo 1

Caratteristiche dei dati ad alta frequenza

1.1 Trading non sincrono

La non sincronia del trading azionario è un fenomeno intrigante e significativo nei mercati finanziari globali. Questo fenomeno si verifica quando gli investitori, i trader e le istituzioni finanziarie effettuano operazioni su azioni o altri strumenti finanziari in momenti casuali, creando così una discrepanza temporale tra le negoziazioni.

Questo significa che i diversi titoli non hanno la stessa frequenza di negoziazione e che l'intensità di un singolo titolo può variare nel corso di una stessa giornata. Infatti, in un mercato con ordini limite, gli investitori stabiliscono un prezzo minimo (oppure massimo) al quale sono disposti a vendere (oppure a comprare), e non appena il prezzo effettivo del mercato rientra nell'intervallo deciso avviene la transazione. Per esempio, prendiamo in considerazione due titoli indipendenti A e B e assumiamo che il titolo A venga scambiato più frequentemente del titolo B. Quindi, se una notizia che influisce sul mercato azionario aggregato si verifica pochi minuti prima della chiusura del periodo giornaliero di scambio, è più probabile che solamente il titolo A risenta di tale effetto, mentre questo potrebbe essere ritardato al giorno successivo sul titolo B.

Questa asincronia può avere un impatto notevole sul prezzo delle azioni e sulla volatilità dei mercati. Le cause possono essere di diversa tipologia:

- **Fusi orari globali:** I mercati azionari operano in diverse parti del mondo e seguono fusi orari diversi. Ciò significa, ad esempio, che quando la borsa di New York chiude, i mercati asiatici possono essere già aperti o viceversa. Questo crea una finestra temporale in cui il trading azionario può essere asincrono.
- **Notizie ed eventi:** Le notizie e gli eventi importanti possono influenzare le decisioni degli investitori e dei trader. Quando notizie rilevanti vengono rilasciate in momenti diversi, può verificarsi un aumento della non sincronia poiché gli operatori rispondono alle notizie secondo differenti modalità.
- **Stili di trading:** Gli investitori utilizzano una varietà di stili di trading, tra cui il *day trading*, il trading a breve termine e l'investimento a lungo termine. Questi stili di trading possono portare a decisioni di acquisto e vendita in momenti diversi.

In risposta a queste asincronie di mercato si creano importanti implicazioni sia positive che negative. La volatilità dei prezzi è l'implicazione a cui verrà data maggior rilevanza in questa tesi. Tale volatilità aumenta quando i *player* del mercato agiscono in maniera asincrona facendo oscillare i prezzi in modo più ampio rispetto a quando le negoziazioni avvengono in modalità più sincrona.

1.2 Memoria lunga

Con lo sviluppo delle tecnologie e degli strumenti informatici, spesso, sono avvenute anche importanti innovazioni nel campo della finanza. Per esempio a partire dagli anni '90, il progresso tecnologico dei processori, relativamente alla velocità di elaborazione, ha reso possibile lo sviluppo di tecniche di analisi dei dati più avanzate che in precedenza erano impensabili.

Una delle più importanti conseguenze del rapido sviluppo delle tecnologie è rappresentata dalla possibilità di poter archiviare e gestire database di dimensioni imponenti, gestiti mediante nuove apparecchiature hardware più capienti, più veloci e più economiche. Questo scenario, in ambito finanziario, ha reso possibile immagazzinare serie storiche con dati infragiornalieri, ovvero registrare tutte le transazioni avvenute

in un certo periodo di tempo.

Contemporaneamente quindi, si è creata la necessità di sviluppare nuovi modelli statistici capaci di cogliere e spiegare le principali caratteristiche intrinseche contenute nei dati immagazzinati. In quest'ultimi è spesso presente una proprietà denominata memoria lunga, conosciuta già dal XIX secolo, (Rossi e Fantazzini 2014). Bensì solo recentemente gli statistici e probablisti hanno osservato empiricamente che le correlazioni tra le osservazioni via via più lontane convergono verso lo zero ad un tasso più lento di quello atteso nel caso di dati generati da un processo ARMA o processi Markoviani. Si può definire quindi un processo stocastico a memoria lunga un tipo di processo casuale in cui gli eventi futuri sono fortemente influenzati dagli eventi passati, anche a distanza di tempo considerevole. Questo principio è caratterizzato da una correlazione significativa e persistente tra le osservazioni passate e future.

Normalmente, nel caso di un processo stocastico a memoria corta, supponendo di disporre di un insieme di osservazioni x_1, x_2, \dots, x_n identicamente distribuite, negli istanti temporali $t = 1, 2, \dots, n$ le condizioni che si assume vengano soddisfatte sono:

1. la media della popolazione, $\mu = E[X_t]$, esiste finita;
2. la varianza della popolazione, $\sigma^2 = Var[X_t]$, esiste finita;
3. le variabili X_1, X_2, \dots, X_n sono incorrelate tra loro, ovvero:

$$\rho(i, j) = 0 \quad \forall i \neq j,$$

dove

$$\rho(i, j) = \frac{Cov(X_i, X_j)}{\sigma^2} = \frac{E[(X_i - \mu)(X_j - \mu)]}{\sigma^2}.$$

Inoltre, sotto le assunzioni 1, 2, 3 e definendo $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ come la media campionaria, si ha:

$$Var(\bar{X}_n) = \frac{\sigma^2}{n}. \tag{1.1}$$

Vediamo cosa succede alla 1.1 quando l'assunto di incorrelazione (condizione 3.) è indebolito. In tal caso la varianza di \bar{X}_n è pari a:

$$Var(\bar{X}_n) = \frac{1}{n^2} \sum_{i,j=1}^n \gamma(i,j) = \frac{\sigma^2}{n^2} \sum_{i,j=1}^n \rho(i,j) = \frac{\sigma^2}{n^2} [1 + \frac{1}{n} \sum_{i \neq j} \rho(i,j)]. \quad (1.2)$$

La varianza della media campionaria quindi, differisce dalla 1.1 e asintoticamente diventa:

$$Var(\bar{X}_n) \sim \frac{\sigma^2}{n} [1 + \delta(p)] \quad (1.3)$$

dove

$$\delta(p) = 2 \sum_{k=1}^{n-1} (1 - \frac{k}{n}) \rho(k). \quad (1.4)$$

Tuttavia, è stato rilevato che la varianza di \bar{X}_n differisce dalla 1.1 non solo per il termine costante positivo $(1 + \delta(p))$, ma anche e soprattutto per la più lenta convergenza a zero.

Quest'ultima può essere verificata ipotizzando che la convergenza a zero sia proporzionale a $n^{-\alpha}$ per $\alpha \in (0,1)$. In formula:

$$Var(\bar{X}_n) \sim \sigma^2 c(p) n^{-\alpha} \quad (1.5)$$

per $\alpha \in (0,1)$ e $c(p)$ definito da:

$$c(p) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{\alpha-2} \sum_{i \neq j} \rho(i,j) \quad (1.6)$$

Dalla 1.4 e dalla 1.6, aumentando la numerosità campionaria, si può dimostrare che:

$$\rho(k) \sim c_p |k|^{-\alpha} k \rightarrow \infty \quad (1.7)$$

dove c_p è una costante finita e positiva.

Intuitivamente, la 1.7 significa che le correlazioni decrescono verso lo zero con un andamento iperbolico e quindi la dipendenza fra osservazioni sempre più lontane diminuisce molto lentamente all'aumentare del ritardo k . Un processo stazionario con correlazioni che si comportano come la 1.7 è chiamato *processo a memoria lunga*.

1.3 La volatilità

In finanza, con il termine volatilità, ci si riferisce ad una caratteristica del mercato che al suo interno presenta dei "movimenti", dovuti al continuo cambiamento dei prezzi all'interno di un determinato periodo di tempo. Per misurare numericamente questi "movimenti" esistono diverse metodologie, ma una caratteristica importante da tenere in considerazione è l'orizzonte temporale a cui ci si riferisce. Per esempio, considerando la frontiera efficiente di Markowitz (Gallico n.d.), che rappresenta una colonna portante nell'ambito finanziario, per descrivere la distribuzione condizionata dei rendimenti è sufficiente utilizzare la media e la varianza campionarie. Questo è dovuto al fatto che, in questo caso, l'orizzonte temporale normalmente considerato è quello mensile, dove la varianza è un ottimo stimatore della variabilità dei prezzi.

Tuttavia, nel caso in cui le transazioni vengano effettuate in periodi più brevi, per esempio giornalmente, o addirittura infragiornalmente, è necessario cambiare metodo di stima, in quanto la varianza campionaria sovrastimerebbe la volatilità osservata. Una soluzione efficiente a questo problema è quella proposta da Andersen e Bollerslev (1998a) (Liu, Patton e Sheppard 2015), nella quale gli autori suggeriscono di dividere la giornata in esame in ulteriori sotto-intervalli (per esempio di 5 minuti, come i dati analizzati nel quarto capitolo). Solo successivamente si procederà a calcolare la volatilità di quel giorno mediante la somma dei quadrati dei rendimenti infra-giornalieri definendola *Volatilità Realizzata*.

Matematicamente la volatilità realizzata può essere scritta come:

$$RV_t = \sum_{j=1}^M r_{t,j}^2, \quad (1.8)$$

dove:

- RV_t è la volatilità realizzata nel giorno t ,
- $r_{t,j}$ si riferisce alla j -esima misurazione della volatilità infra-giornaliera del giorno t ,
- $M = 1/\Delta$ e Δ è la frequenza campionaria.

È molto importante analizzare la volatilità realizzata di una serie storica, soprattutto in ambito finanziario, perché un valore più alto di RV indica una maggiore volatilità o rischio associato all'asset. Al contrario, un valore più basso di RV indica una volatilità più bassa o una maggiore stabilità. Quindi è fondamentale studiarla, stimarla e prevederla per determinare decisioni in ambito di *asset allocation*, *risk management*, *option pricing*.

In seguito si farà riferimento alla volatilità realizzata anche per diversi orizzonti temporali, ovvero settimanali e mensili.

Capitolo 2

Indice di volatilità RVOL

2.1 Descrizione

In questo capitolo verrà descritta e analizzata la metodologia di calcolo dell'indice di volatilità realizzata RVOL (*Cboe Realized Volatility Index Series*), calcolato e diffuso dalla Cboe Global Indexes dopo la chiusura dell'orario di contrattazione negli Stati Uniti. Questo indice è una misura della variabilità dei prezzi di un asset finanziario o di un mercato nel corso del tempo ed è utilizzato come indicatore di volatilità storica offrendo un'analisi retrospettiva della fluttuazione dei prezzi.

Cboe Realized Volatility Index Series fa parte di una famiglia di indici di Volatilità Realizzata. Essi sono concepiti per fornire l'entità dei movimenti giornalieri dei prezzi misurando la deviazione standard annualizzata del rendimento giornaliero dei prezzi di un sottostante periodo specifico.

Come descrive in maniera molto accurata la *CBOE*, per ricavare il prezzo di un asset finanziario in un particolare periodo viene utilizzata la relazione di parità *put-call*. Vengono utilizzate le opzioni, "*put e call*" (come definite nel successivo paragrafo), al termine più vicino allo *strike-at-the-money* con scadenza maggiore o uguale ad un giorno (con il termine *strike-at-the-money* ci si riferisce alla situazione in cui il prezzo di esercizio di un asset è molto vicino al prezzo corrente, portando un profitto irrisorio al possessore). Queste includono le opzioni SPX con scadenza "standard", ovvero al terzo venerdì del mese e le opzioni SPX "settimanali" che scadono ogni venerdì, tranne il terzo venerdì di ogni mese.

2.2 Metodo di calcolo

Di seguito viene descritta la metodologia di calcolo delle serie di indici RVOL, comprendendo le formule e i dati applicabili.

In base al modo in cui vengono calcolati gli indici di RVOL, oltre all'indice puramente giornaliero, vi sono altri tre tipi di indici giornalieri: RVOL3M, RVOL6M e RVOL12M. Tali indici utilizzano periodi di lookback rispettivamente di 3 mesi (63 giorni di negoziazione), 6 mesi (126 giorni di negoziazione) e 12 mesi (252 giorni di negoziazione):

- Cboe 3-Month Realized Volatility Index (RVOL3M)
- Cboe 6-Month Realized Volatility Index (RVOL6M)
- Cboe 12-Month Realized Volatility Index (RVOL12M)

Esiste anche un indice calcolato sulla base retrospettica di un mese (21 giorni di negoziazione):

- Cboe Realized Volatility Index (RVOL)

Per le opzioni a più breve termine, il prezzo *spot* viene calcolato secondo la seguente metodologia:

Utilizzando la relazione di parità *put-call*, viene calcolato il prezzo *spot* implicito dei prezzi delle *call* e delle *put* secondo il metodo Europeo, intorno allo *strike-at-the-money*. Successivamente viene selezionato il prezzo d'esercizio al quale la differenza assoluta tra il prezzo della *call* e quello della *put* è minore alle 16:00 ET.

La parità *put-call* stabilisce che per le opzioni *call* e *put* con lo stesso *strike* e la stessa scadenza valga tale assunzione:

$$S = call - put + DF * K + Div \quad (2.1)$$

dove:

- S è il prezzo *spot* implicito;

- *call* è la media aritmetica delle ultime quotazioni *bid* e *ask* dell'opzione SPX/SPXW Call segnalate prima delle 16:00 ET;
- *put* è la media aritmetica delle ultime quotazioni *bid* e *ask* dell'opzione SPX/SPXW Put segnalate prima delle 16:00 ET;
- *DF* è il valore attuale di un'obbligazione a cedola zero con scadenza *T*;
- *K* è il prezzo *strike* dell'opzione;
- *Div* è l'importo discreto atteso dei dividendi tra *t* e *T*;
- *T* è la data di scadenza.

Dopo questa premessa di seguito è illustrato e spiegato il calcolo dell'indice di volatilità realizzata.

Alla chiusura di ogni data operativa, ciascun indice calcola la deviazione standard dei rendimenti giornalieri del prezzo nel periodo di riferimento, la media è fissata a zero.

$$Index_t = 100 * \frac{252}{N} \sum_{i=1}^N \left(\ln \frac{S_{t-i+1}}{S_{t-i}} \right)^2 \quad (2.2)$$

dove:

- $Index_t$ è la volatilità realizzata al giorno *t*;
- S_t è il valore del prezzo *spot* implicito al giorno *t*;
- *N* è il numero di giorni lavorativi nel periodo *lookback*.

Capitolo 3

Il modello HAR-RV

3.1 Il principio del modello

La proposta dei modelli HAR, descritti più in dettaglio nelle prossime sezioni, deriva dall'introduzione dell'ipotesi del mercato eterogeneo (*HMH*) proposta per la prima volta da Müller nel 1993 (Chun e Kim 2022) e successivamente da Peters nel 1999 in "*Fractal Market Hypothesis*".

Questi lavori portano alla luce la presenza di fattori eterogenei nel mercato finanziario che derivano dalle diverse caratteristiche dei player del mercato. Poiché gli operatori differiscono per preferenze di rischio, regolamenti, orizzonti temporali e altro, essi potrebbero interpretare le stesse informazioni in modo diverso portando così a risposte diverse. (Tim Bollerslev et al. 2018)

Dal punto di vista dei diversi orizzonti temporali in cui avvengono le operazioni, si può dimostrare che la volatilità relativa ad un lungo periodo ha un'influenza maggiore sulla volatilità di breve periodo, mentre non accade il contrario. Per questo motivo il comportamento della volatilità può essere definito asimmetrico. Infatti, in ambito finanziario, le transazioni di breve periodo sono condizionate dalla volatilità di lungo periodo la quale rappresenta un indicatore di rischio e di prezzi futuri.

Basandosi sull'ipotesi di mercato eterogeneo, Corsi ha proposto il modello eterogeneo autoregressivo di volatilità realizzata (*HAR-RV*) (Corsi 2009b).

3.2 Il modello HAR(3)

In questa sezione viene spiegato in maniera più approfondita il modello proposto da Corsi (2009), denominato HAR(3). (Corsi 2009b)

Con questo modello è possibile modellare la volatilità realizzata giornaliera, che è calcolata usando una combinazione lineare delle volatilità realizzate ritardate e calcolate su orizzonti temporali differenti.

Prima di proseguire, è necessario definire la volatilità latente parziale, $\tilde{\sigma}_t$, come la volatilità generata da una determinata componente di mercato. Secondo i principi enunciati nelle sezioni precedenti, la volatilità non osservata è funzione di quella al momento precedente (t-1), e del valore atteso delle componenti di orizzonte temporali maggiori.

L'autore ha proposto un modello con solamente tre intervalli: un giorno (1d), una settimana (1w) e un mese (1m).

Le componenti di volatilità latente parziale quindi diventano rispettivamente: $\tilde{\sigma}_t^{(d)}$, $\tilde{\sigma}_t^{(w)}$, $\tilde{\sigma}_t^{(m)}$ e di seguito vengono riportate in formula matematica:

$$\begin{aligned}\tilde{\sigma}_{t+1m}^{(m)} &= c^{(m)} + \phi^{(m)} RV_t^{(m)} + \tilde{\omega}_{t+1d}^{(d)} \\ \tilde{\sigma}_{t+1w}^{(w)} &= c^{(w)} + \phi^{(w)} RV_t^{(w)} + \gamma^{(w)} E_t[\tilde{\sigma}_{t+1m}^{(m)}] + \tilde{\omega}_{t+1w}^{(w)} \\ \tilde{\sigma}_{t+1d}^{(d)} &= c^{(d)} + \phi^{(d)} RV_t^{(d)} + \gamma^{(d)} E_t[\tilde{\sigma}_{t+1d}^{(d)}] + \tilde{\omega}_{t+1d}^{(d)}\end{aligned}\tag{3.1}$$

dove $RV_t^{(d)}$, $RV_t^{(w)}$, $RV_t^{(m)}$ sono rispettivamente le volatilità realizzate giornaliere, settimanali e mensili. Per il loro confronto sono definite come la media dei valori giornalieri come riportati di seguito:

$$\begin{aligned}RV_t^{(w)} &= \frac{1}{5}(RV_t^{(d)} + RV_{t-1d}^{(d)} + \dots + RV_{t-4d}^{(d)}) \\ RV_t^{(m)} &= \frac{1}{22}(RV_t^{(d)} + RV_{t-1d}^{(d)} + \dots + RV_{t-21d}^{(d)})\end{aligned}$$

Da specificare, inoltre, nelle equazioni 3.1 sono presenti le innovazioni della volatilità, con notazione $\tilde{\omega}_{t+1m}^{(m)}$, $\tilde{\omega}_{t+1w}^{(w)}$, $\tilde{\omega}_{t+1d}^{(d)}$. Quest'ultime sono indipendenti e a media zero

con un troncamento della coda sinistra per garantire così la positività delle volatilità parziali.

La spiegazione economica del modello proposto è che ogni componente della volatilità si basa sulla volatilità realizzata corrente e che il valore atteso della volatilità a lungo termine, come già detto in precedenza, influisce sui valori futuri della volatilità a breve termine, a causa della propagazione asimmetrica della volatilità. Procedendo per sostituzione, il modello 3.1 può essere scritto come un modello di volatilità stocastica a tre fattori, con le volatilità realizzate calcolate a frequenze differenti:

$$\sigma_{t+1d}^{(d)} = c + \beta^{(d)} RV_t^{(d)} + \beta^{(w)} RV_t^{(w)} + \beta^{(m)} RV_t^{(m)} + \tilde{\omega}_{t+1d}^{(d)} \quad (3.2)$$

con $c = c^d + c^w + c^m$ e $\tilde{\omega}_{t+1d}^{(d)}$ che incorpora tutti i rumori.

Si può notare che, *ex-post*, è possibile definire $\sigma_{t+1d}^{(d)}$ come:

$$\sigma_{t+1d}^{(d)} = RV_{t+1d}^{(d)} + \omega_{t+1d}^{(d)} \quad (3.3)$$

dove $\omega_{t+1d}^{(d)}$ include sia il calcolo della volatilità latente giornaliera, sia la stima dell'errore.

Detto ciò, per garantire che $\omega_{t+1d}^{(d)}$ sia una misura a media zero si ha che $E[\omega_{t+1d}^{(d)}] = 0$ solo se $E[\sigma_{t+1d}^{(d)}] = E[RV_{t+1d}^{(d)}]$. Per rendere questo possibile, la volatilità realizzata deve essere uno stimatore ottimo della volatilità integrata, quindi è necessario effettuare una correzione degli effetti microstrutturali nel calcolo delle volatilità realizzate. Se viene sostituita la 3.3 nella 3.2 otteniamo la seguente rappresentazione della volatilità realizzata:

$$RV_{t+1d}^{(d)} = c + \beta^{(d)} RV_t^{(d)} + \beta^{(w)} RV_t^{(w)} + \beta^{(m)} RV_t^{(m)} + \omega_{t+1d}, \quad (3.4)$$

con

$$\omega_{t+1d} = \tilde{\omega}_{t+1d}^{(d)} - \omega_{t+1d}^{(d)}$$

L'equazione 3.4 può essere vista come un particolare modello autoregressivo della volatilità realizzata. Per stimare i parametri, possiamo considerare come osservate

le volatilità nel lato destro della 3.4 e applicare una semplice regressione lineare, inoltre gli stimatori sono anche normalmente distribuiti.

3.3 Il modello EWMA-HAR-RV

Il modello HAR-RV, presenta vantaggi ma allo stesso tempo anche svantaggi, come molti altri modelli esenti da un metodo di ponderazione oppure avente un sistema strutturale di pesi relativi alle osservazioni, i quali sono uguali per tutti i valori contenuti nel sistema informativo.

Un vantaggio è che i prezzi e i tassi storici sono facilmente osservabili e collezionabili. Uno svantaggio, invece, può far riferimento ai problemi che si riscontrano nel misurare le volatilità e le correlazioni sulla base di andamenti passati, i quali potrebbero non rappresentare al meglio i possibili andamenti futuri dei rendimenti, in particolare in situazioni critiche di instabilità ed incertezza.

In generale quasi tutti i modelli previsionali, compreso il modello HAR-RV, presentano diverse criticità sotto vari aspetti e richiedono interventi di affinamento e particolari aggiustamenti di ponderazione al fine di avere come risposta, in termini di previsione, il valore più esatto possibile.

Per quanto riguarda il caso in esame in questa tesi è stato adottato il metodo delle *medie mobili esponenziali* per attribuire alla volatilità dei fattori di mercato una ponderazione non uniforme di σ_t .

Nel caso in cui le medie mobili applicate non fossero esponenziali, cioè caratterizzate da un'eguaglianza dei pesi, si otterrebbero risultati non sempre soddisfacenti in quanto tutti i punti della serie verrebbero trattati con lo stesso livello di ponderazione. In questo modo potremmo notare rapidi movimenti verso l'alto della media mobile quando nella serie vi sono valori molto elevati e contemporaneamente movimenti decrescenti ogniqualvolta vi siano valori molto piccoli.

Per evitare questa tipologia di problemi è preferibile l'utilizzo di medie mobili esponenziali, le quali considerano le ultime osservazioni della serie storica "più im-

portanti", attribuendo loro un peso maggiore rispetto alle osservazioni più lontane. Infatti, le medie mobili esponenziali, dette *Exponentially Weighted Moving Average* (EWMA)(Liang et al. 2022) forniscono numerosi vantaggi. Il primo è dovuto ad una reazione più veloce delle previsioni della volatilità agli shock di mercato, il secondo è che le stime decrescono gradualmente nel tempo dopo una forte depressione dei prezzi. Un altro vantaggio ottenuto dall'utilizzo del metodo EWMA è quello che le stime sono poco influenzate dai valori di picco della serie storica, essendo infatti le osservazioni più recenti quelle ad avere maggior peso.

Definiamo con il simbolo λ la costante denominata come *discount coefficient*, il quale indica il grado di persistenza delle osservazioni campionarie passate, attribuendogli un determinato peso. Essendo una costante compresa tra 0 e 1 si può affermare che con $(1 - \lambda)$ si misura la velocità di decadimento delle osservazioni passate nella media.

$$1 - \lambda = \frac{2}{N + 1}$$

Basandoci sul metodo di ponderazione EWMA si possono ricostruire le componenti giornaliera, settimanale e mensile del modello HAR-RV creando così un nuovo modello di nome EWMA-HAR-RV (Liang et al. 2022). Questo funziona nel medesimo modo di quello precedente al netto delle ponderazioni strutturali apportate alla serie, possiamo specificare il modello in questa maniera:

$$RV_t = \beta_0 + \beta_d RV_{t-1} + \beta_w^{EWMA} RV_{t-1,w}^{EWMA} + \beta_m^{EWMA} RV_{t-1,m}^{EWMA} + \omega_t \quad (3.5)$$

dove

$$RV_{t-1}^{EWMA}(RV_{t-1}, \dots, RV_1 | \lambda) = \frac{RV_{t-1} + \lambda RV_{t-2} + \dots + \lambda^{t-2} RV_1}{1 + \lambda + \lambda^2 + \dots + \lambda^{t-2}} \quad (3.6)$$

Nel quarto capitolo, il modello HAR(3) e il modello EWMA-HAR-RV verranno implementati su dati reali e saranno messe in evidenza le loro caratteristiche e efficienze previsionali.

Capitolo 4

Applicazione su dati reali

4.1 Serie storica

La serie storica utilizzata in questa tesi è una collezione di valori adeguatamente trasformati in indici di volatilità realizzata dalla CGI (*Cboe Global Indexes*) riferiti a un periodo di osservazione che va dal 1 Febbraio 2001 fino al 17 Marzo 2023.

Una delle ragioni che hanno portato ad analizzare questi dati è la loro elevata frequenza di campionamento originaria, ovvero una distanza di cinque minuti tra una rilevazione e l'altra. Molti ricercatori e studiosi hanno ampiamente utilizzato e raccomandato questo approccio. (Liu, Patton e Sheppard 2015)

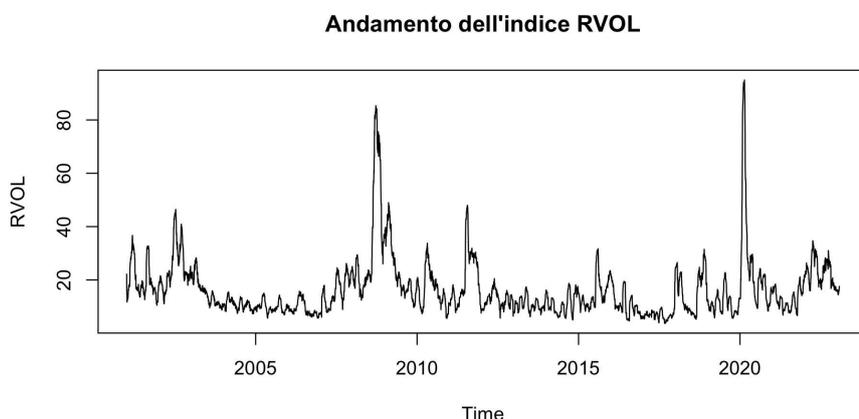


Figura 4.1: Serie storica degli indici di volatilità realizzata RVOL per il periodo 01-02-2001, 17-03-2023.

La figura 4.1 riportata è l'andamento della serie storica presa in considerazio-

ne. Come si può osservare dal grafico delle volatilità realizzata RVOL, si notano dei picchi dei valori dell'indice in alcuni momenti storici. Questi ultimi, sul piano temporale, sono localizzati in prossimità di periodi in cui sono accaduti particolari avvenimenti che hanno causato uno squilibrio nel sistema finanziario e traumi nel mercato generale. In particolare questo è accaduto attorno agli anni 2001/2002, per ripresentarsi successivamente negli anni 2008/2009 e inoltre sono rilevabili evidenti picchi di volatilità anche verso la fine della serie storica dopo l'anno 2020.

Le motivazioni alla base di questi avvenimenti possono avere origine diverse. Ad esempio tra gli anni 2001 e 2002 è stato introdotto l'euro, come valuta, nel mercato di dodici stati dell'Unione Europea, Italia compresa. Questo, ha frequentemente causato conversioni da 1000 lire a 1 euro, soprattutto nei settori alimentari e dei beni di consumo, riducendo a quasi la metà il valore reale della moneta; tuttavia nello stesso periodo si sono verificati violenti fenomeni climatici che hanno compromesso gran parte dei raccolti comportando il conseguente aumento dei prezzi di frutta e verdura. Si può citare anche il caso dei forti arrotondamenti in eccesso su prezzi e tariffe applicati nel mercato dei servizi pubblici; al contrario nel mercato dei beni durevoli i prezzi hanno subito leggere diminuzioni. Tutto questo ha provocato delle variazioni (positive e negative) del livello generale dei prezzi creando controversie, diffidenze e un aumento della volatilità dei prezzi.

Passando ad analizzare i picchi di volatilità presenti nei periodi adiacenti al 2008, la causa principale è il mercato immobiliare statunitense e la bolla finanziaria che si è sviluppata in questo settore, creando effetti che si sono propagati anche in tutta l'Europa. Le banche smisero di concedere mutui ad alto rischio di insolvenza compromettendo la domanda immobiliare e di conseguenza facendone collassare il valore, coinvolgendo anche tutto il territorio Europeo e oltre.

Il terzo picco significativo che si osserva nel grafico della serie storica è dovuto dall'inaspettata e improvvisa pandemia di COVID-19. Un imprevisto shock negativo dell'offerta e contemporaneamente della domanda, causati dalle misure restrittive alla mobilità individuale, hanno provocato grandi variazioni dei consumi e dei prezzi.

Gli effetti della pandemia si ripercuotono anche sui mercati finanziari determinando una diminuzione del valore dei titoli.

Di seguito sono presentate alcune statistiche descrittive della serie dell'indice RVOL accorciata per semplicità al periodo che va dal 1 Febbraio 2001 al 31 Dicembre 2019. Si specifica, inoltre, che tutte le RV utilizzate in questa tesi sono volatilità annualizzate, quindi partendo da una serie di RV di frequenza 5 minuti, ridimensionandola per $100^2 * 252$ prendendo la radice quadrata, che viene interpretata come volatilità annualizzata.

Indice	Tot. Oss.	Media	Minimo	Massimo	Std.dev	Skew.	Kurt.
RVOL	4757	15.618	3.730	85.330	10.131	2.908	15.741

Tabella 4.1: Statistiche descrittive della serie storica degli indici RVOL nel periodo di campionamento dal 01-02-2001 al 31-12-2019.

La seconda colonna (Tot. Oss.) rappresenta il numero totale delle rilevazioni avvenute nel periodo in considerazione.

La terza colonna (Media) mostra il valore medio degli indici RV osservati. Si può notare che esso si posiziona, relativamente a poca distanza dal valore minimo (come si può vedere nella quarta colonna) e molto più lontano dal valore massimo (nella quinta colonna) osservato durante i picchi di volatilità durante gli squilibri di mercato citati precedentemente.

Nella sesta colonna è presente il valore dell' *indice di asimmetria o Skewness*, il quale cerca di fornire una misura della possibile mancanza di simmetria.

In questo caso l'indice di asimmetria risulta avere un valore positivo (2.908), il che conferma la presenza di un'asimmetria a destra, ovvero un accumulo di valori nella parte bassa e una lunga coda nei valori più alti.

Nella settima ed ultima colonna è presente l'indice K di curtosi (*Kurtosis*). Tale indice misura quanto una distribuzione è appuntita rispetto alla distribuzione normale. Di conseguenza esso indica il maggiore o minore peso dei valori posti agli

estremi della distribuzione (code), rispetto a quelli nella parte centrale. L'indice di curtosi può assumere tre diversi stati:

- Indice di curtosi $K = 0$: forma normale
- Indice di curtosi $K > 0$: forma leptocurtica
- Indice di curtosi $K < 0$: forma platicurtica

Come si può notare dalla tabella 4.1 il valore calcolato sui dati in esame è positivo, il che significa che la distribuzione ha una forma leptocurtica rispetto a quella gaussiana. Tale forma è caratterizzata da un'aspetto meno appuntito e code più pesanti.

4.2 Risultati *in-sample*

In questa sezione sono riportati i risultati dell'analisi all'interno del campione utilizzando i due rispettivi modelli, HAR-RV e EWMA-HAR-RV. Le stime riportate nelle tabelle seguenti sono state calcolate seguendo il metodo dei minimi quadrati ordinari, OLS (*Ordinary Least Squares*).

Tabella 4.2: **Stime modello HAR-RV**

RVOL	β_0	β_d	β_w	β_m	$Adj.R^2$
Coefficiente	0.170975***	1.074390***	-0.038958*	-0.046451***	0.9901
Std. dev	0.028060	0.013588	0.016571	0.005305	—

Nota: Questa tabella riporta i risultati delle stime dei coefficienti, con i relativi errori standard, interni al campione stimati con il modello HAR-RV. Il periodo di misurazione considerato va dal 01-02-2001 al 31-12-2019.

Nella tabella 4.2 oltre alle stime delle tre componenti temporali del modello HAR-RV, giornaliera, settimanale e mensile (terza, quarta e quinta colonna), sono stati riportati il valore dell'intercetta del modello, e la misura corretta di bontà di adattamento del modello ai dati. Da specificare che ogni coefficiente β esprime il

grado di variazione della variabile risposta ad un cambiamento unitario di una variabile esplicativa, al netto di tutte le altre.

Concentrandosi su β_0 si può dare l'interpretazione che eliminando tutte le componenti temporali, ovvero β_d , β_w e β_m , ad ogni movimento unitario in avanti il coefficiente di volatilità aumenterebbe del 17.09 per cento.

Seguendo la stessa logica, osservando le altre componenti si nota un effetto positivo da parte del parametro giornaliero (1.074390), e un effetto negativo dei rimanenti due, settimanale e mensile, rispettivamente (-0.038958) e (-0.046451).

Nell'ultima colonna è presente l'indice R^2 corretto, il quale, con un valore di (0.9901), segnala un buon adattamento del modello ai dati.

Di seguito è riportata la tabella con le medesime stime e valutazioni ottenute con il modello EWMA-HAR-RV.

Tabella 4.3: **Stime modello EWMA-HAR-RV**

RVOL	β_0	β_d	β_w^{EWMA}	β_m^{EWMA}	$Adj.R^2$
Coefficiente	0.303665***	0.128092***	1.116951***	-0.264483***	0.9931
Std. dev	0.023661	0.019621	0.023333	0.006127	—

Nota: Questa tabella riporta i risultati delle stime dei coefficienti, con i relativi errori standard, interni al campione stimati con il modello EWMA-HAR-RV. Il periodo di misurazione considerato va dal 01-02-2001 al 31-12-2019.

Come prima cosa tutte le stime dei coefficienti sono altamente significative. Si nota anche un valore elevato dell'indice R^2 corretto (0.9931), il che ci porta a pensare che il nuovo modello in competizione con il classico HAR-RV è in grado di adattarsi meglio ai dati e spiegarli in maniera ottimale.

Per l'interpretazione di tutti i parametri nella tabella si può fare riferimento a quanto affermato per la tabella 4.2.

Un'analisi degna di attenzione, è lo studio della parte residuale dei modelli appena implementati. Infatti l'analisi dei residui, ovvero la differenza tra il vero valore osservato e la stima ottenuta dal modello, permette di verificare l'adeguatezza del modello scelto per stimare le componenti deterministiche. Attraverso l'identificazione di irregolarità e *pattern* nella distribuzione dei residui e nelle relative funzioni di autocorrelazioni, si può determinare quanto bene il modello scelto coglie la variabilità dei dati. Per esempio, una causa di tali irregolarità potrebbe essere l'omissione di uno o più parametri nel modello.

Si assume che i residui idealmente rispettino diverse proprietà, come quella di omoschedasticità, ovvero quando gli errori si distribuiscano in modo uniforme e regolare attorno allo zero. Altre proprietà che i residui devono rispettare per avere un buon modello, sono quelle di normalità, indipendenza e incorrelazione.

Di seguito sono riportate le distribuzioni dei residui rispettivamente dei modelli HAR-RV e EWMA-HAR-RV.

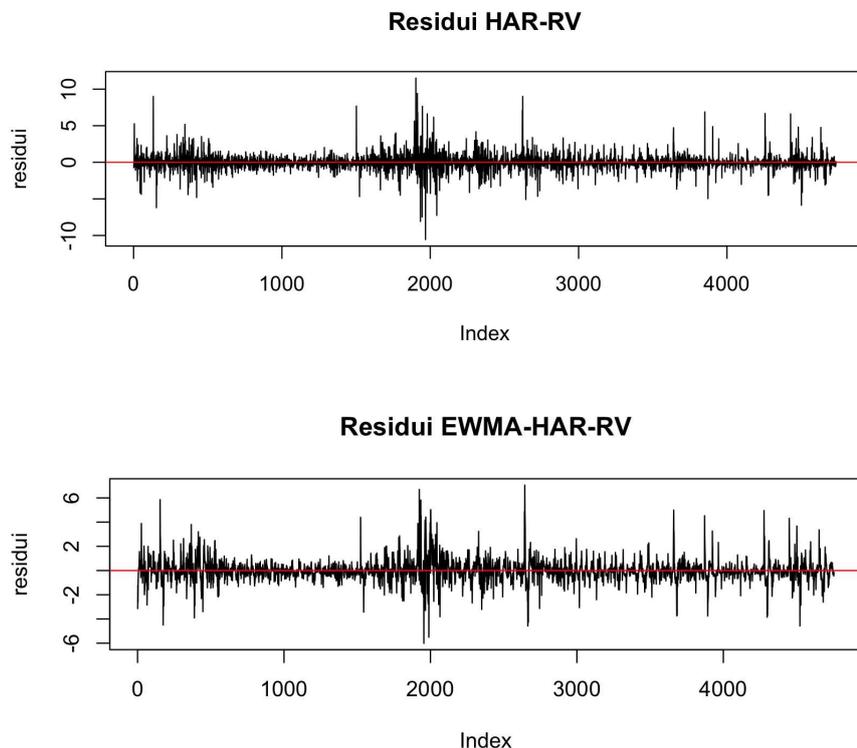


Figura 4.2: Distribuzione dei residui ottenuti dai modelli HAR-RV e EWMA-HAR-RV.

Come si può notare dalla figura 4.2, i residui di entrambi i modelli presentano della stagionalità al loro interno.

Un altro aspetto importante da considerare è la loro funzione di autocorrelazione, osservabile tramite il grafico ACF (*Auto-Correlation Function*) dei residui, ovvero quanto i residui siano correlati tra loro nei diversi lag temporali. Sono riportati di seguito i grafici ACF dei residui rispettivamente dei modelli HAR-RV e EWMA-HAR-RV.

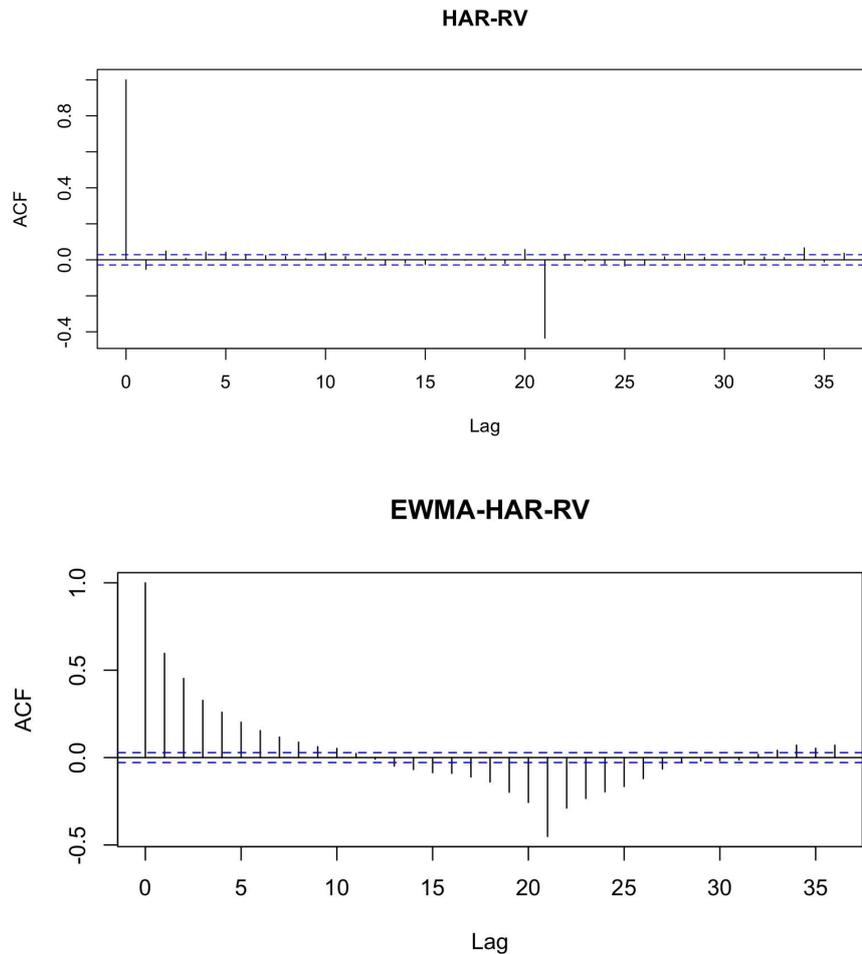


Figura 4.3: Funzione di autocorrelazione dei residui dei modelli HAR-RV e EWMA-HAR-RV.

Osservando i due grafici nella figura 4.3 si può dire che i residui del modello HAR-RV sono migliori di quelli del modello EWMA-HAR-RV. Infatti i primi non presentano autocorrelazioni significative, al netto di un valore anomalo al 21-esimo lag, cosa che invece, succede nei residui del modello ponderato. Il *pattern* presente nel grafico dell'ACF del modello EWMA può essere causato da una minore capacità da parte del modello EWMA-HAR-RV, di cogliere e spiegare la componente stagionale contenuta nei dati.

4.3 Risultati *out-of-sample*

In questa sezione vengono analizzate le capacità predittive dei modelli HAR-RV e EWMA-HAR-RV implementando il metodo delle finestre mobili (*rolling windows*) generando così delle previsioni al di fuori del campione informativo. In questo caso ogni finestra contiene il maggior numero di osservazioni possibili, avendo un bagaglio informativo molto ampio (4685 osservazioni), offrendo una previsione ad un passo in avanti ad ogni ciclo di traslazione per un orizzonte temporale di 50 giorni.

Per catturare e successivamente valutare le capacità predittive dei due modelli vengono utilizzati diversi strumenti statistici utili a evidenziare tali abilità. Solamente in seguito sarà possibile confrontarli. Tecnicamente per effettuare tali verifiche sono stati utilizzati cinque indicatori di funzione di perdita: QLIKE, MSE, MAE, HMSE e HMAE. Questi sono calcolati come riportato di seguito:

$$\begin{aligned}QLIKE &= \frac{1}{q} \sum_{t=m+1}^{m+q} \left(\ln(\widehat{RV}_t) + \frac{RV_t}{\widehat{RV}_t} \right), \\MSE &= \frac{1}{q} \sum_{t=m+1}^{m+q} \left(RV - \widehat{RV}_t \right)^2, \\MAE &= \frac{1}{q} \sum_{t=m+1}^{m+q} \left| RV - \widehat{RV}_t \right|, \\HMSE &= \frac{1}{q} \sum_{t=m+1}^{m+q} \left(1 - \frac{\widehat{RV}_t}{RV_t} \right)^2, \\HMAE &= \frac{1}{q} \sum_{t=m+1}^{m+q} \left| 1 - \frac{\widehat{RV}_t}{RV_t} \right|.\end{aligned}\tag{4.1}$$

dove

- RV_t rappresenta il valore osservato dell'indice di volatilità realizzata nel giorno t ,
- \widehat{RV}_t indica la previsione generata dal modello del giorno t ,
- m si riferisce alla lunghezza del campione in esame,
- p si riferisce all'orizzonte di previsione fuori dal campione.

Successivamente verrà implementato anche un popolare test di confronto a coppie suggerito da Diebold e Mariano (1995), ovvero il test DM, per confrontare l'accuratezza previsionale dei due modelli in competizione (Diebold 2015).

Questo test è stato concepito come *DM test for predictive accuracy*, quindi cerca di individuare il modello previsivo più accurato, non quello più preciso. Euristicamente ci si può riferire ad un modello accurato come quel modello che commette errori di previsione "ampi" ma di segno alterno, mentre ad un modello preciso come ad uno che commette errori "più piccoli" ma di segno che tende a ripetersi. Questo concetto viene spiegato molto bene dal best-seller di N.Silver (2012) come si può vedere dalla figura 4.4:

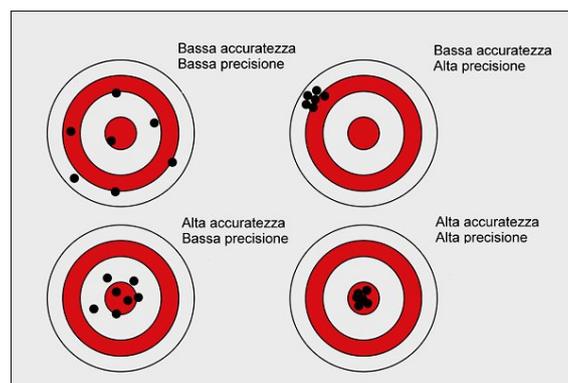


Figura 4.4: Accuratezza vs Precisione secondo N. Silver (2012)(Shirmohammadi, Mari e Petri n.d.)

Data una serie storica definiamo con f_{1t} e f_{2t} due differenti previsioni per y_t ottenute da due distinti modelli, il test di *Diebold e Mariano (1995)*, test DM Diebold 2015, risponde alla domanda se entrambe le misurazioni riescono a prevedere in modo ottimale y_t oppure se una è preferibile all'altra.

E' necessario definire l'errore di previsione tramite la seguente espressione:

$$e_{it} = f_{it} - y_t \quad \text{con } t= 1,2$$

A questo punto si definisce la funzione di perdita con notazione $L(e_{it})$ su tale errore di previsione, avente le seguenti caratteristiche.

1. $L(0) = 0$, ovvero la funzione di perdita è nulla se l'errore di previsione è nullo, quindi risulta che $f_{it} = y_t$ per ogni $t = 1, 2, \dots, T$;
2. $L(e_{it}) > 0$ quando $f_{it} \neq y_t$ per almeno un valore di t ;
3. $L(e_{it})$ è monotona non decrescente rispetto all'errore di previsione.

Il test DM si basa sulle differenze delle funzioni di perdita calcolate per le previsioni, quindi risulta:

$$d_t = L(e_{1t}) - L(e_{2t}) = L(f_{1t} - y_t) - L(f_{2t} - y_t).$$

Le due previsioni f_{1t} e f_{2t} si possono considerare ugualmente accurate se e solo se il valore di questa differenza risulta nullo, quindi:

$$\begin{cases} H_0 : E[d_t] = 0 & f_{1t} \text{ e } f_{2t} \text{ hanno la stessa accuratezza previsiva} \\ H_1 : E[d_t] \neq 0 & f_{1t} \text{ e } f_{2t} \text{ una delle due previsioni è pi\`u accurata} \end{cases}$$

Ora si pu\`o specificare la statistica test con la seguente equazione:

$$DM = \frac{\bar{d}}{\sqrt{\frac{\hat{\omega}_m(d_t)}{h}}} = \frac{\bar{d}}{\sqrt{\frac{1}{h} \sum_{i=-m}^m \kappa_i \hat{\gamma}_i}} \quad (4.2)$$

Passiamo ora ad analizzare i risultati ottenuti dagli indici robusti citati nella 4.1 calcolati utilizzando i due differenti modelli HAR-RV e EWMA-HAR-RV.

Nota: le previsioni sono state generate seguendo il metodo delle rolling-windows dove ogni finestra copre 4685 osservazioni, con previsione ad un passo in avanti e

Tabella 4.4: **Indici robusti calcolati con il modello HAR-RV**

Indice	QLIKE	MSE	MAE	HMSE	HMAE
RVOL	3.104803	0.541412	0.527279	0.007693	0.065007

Tabella 4.5: **Indici robusti calcolati con il modello EWMA-HAR-RV**

Indice	QLIKE	MSE	MAE	HMSE	HMAE
RVOL	3.103998	0.350271	0.432753	0.005226	0.054476

orizzonte temporale di 50 giorni.

Nota: le previsioni sono state generate seguendo il metodo delle rolling-windows dove ogni finestra copre 4685 osservazioni, con previsione ad un passo in avanti e orizzonte temporale di 50 giorni.

4.4 Confronto tra i due modelli

In questa sotto-sezione verranno trattate le principali differenze previsionali tra i due modelli HAR-RV e EWMA-HAR-RV-

Per prima cosa si possono notare dalle precedenti tabelle, precisamente la 4.4 e la 4.5, delle differenze significative nei valori degli indici robusti di valutazione.

La misurazione a variare di meno, passando da un modello all'altro, è quella riportata nella seconda colonna, QLIKE. Quest'ultima è una funzione di perdita comunemente utilizzata in statistica e nell'analisi dei dati per valutare la discrepanza tra un modello statistico e i dati osservati e può essere meno sensibile agli outlier rispetto a misure di perdita più tradizionali, come l'errore quadratico medio (MSE). La funzione di perdita QLIKE è basata sulla deviazione tra i dati osservati e i valori previsti dal modello, ma utilizza la deviazione quadratico-troncata, il che significa che penalizza in modo meno severo gli errori più grandi rispetto a una funzione di perdita basata su deviazioni quadrate. È un valore importante da considerare

perchè è molto utile per misurare la discrepanza tra il modello in questione e i dati che possono contenere *outlier* o dati con distribuzioni non gaussiane. Infatti la penalizzazione meno severa degli errori più grandi consente al modello di essere meno influenzato da punti dati estremi o anomali. In questo caso un valore leggermente più basso dell'indice robusto QLIKE, da parte del modello EWMA-HAR-RV, evidenzia una maggiore corrispondenza tra valori osservati e stimati dal modello, il che può portare a differenze previsionali significative con conseguenze onerose da parte degli investitori.

Passando alla colonna adiacente, sulla destra, è presente un altro misuratore di perdita, ovvero il MSE (*Mean Squared Error*). Questa è una metrica comunemente utilizzata e calcola il quadrato della differenza tra i valori previsti e quelli osservati, quindi ne calcola la media. Un valore di MSE più basso indica un migliore adattamento del modello ai dati, poiché significa che le differenze tra i valori previsti e quelli osservati sono più piccole e quindi il modello EWMA-HAR-RV è più accurato. Il MSE è ampiamente utilizzato nelle applicazioni di regressione, tuttavia è sensibile agli *outlier*. Se il dataset contiene punti dati estremi (come in questo caso), il MSE può essere influenzato in modo significativo da questi punti e può rendersi necessario l'uso di altri indicatori più robusti.

Nella quarta colonna è riportato il valore del MAE (*Mean Absolute Error*), dove a differenza del *Mean Squared Error* (MSE), il MAE calcola la media delle differenze assolute tra i valori previsti e quelli osservati. Inoltre il MAE non penalizza gli errori più grandi in modo significativo, infatti è meno sensibile agli *outlier* rispetto al MSE ed è particolarmente utile quando si desidera valutare la robustezza del modello rispetto a dati anomali. In generale, un valore più basso di MAE indica un migliore adattamento del modello ai dati, come avviene anche questa volta utilizzando il modello EWMA-HAR-RV.

Come ultime due colonne della tabella sono riportati i valori degli indici HMSE e HMAE, i quali sono due ricostruzioni delle funzioni di perdite viste precedentemente e anch'essi misurano il grado di adattamento delle previsioni ai valori osservati,

interpretate però in maniera leggermente differente. Tuttavia, anche in questo caso, entrambe le misurazioni risultano più piccole laddove è stato implementato il modello EWMA-HAR-RV.

Tabella 4.6: **Confronto modelli tramite DM test e indicatore Adjusted R^2**

MODELLO	$Adj.R^2$	$\Delta R^2(\%)$	DM
HAR-RV	0.9901	—	6.9804***
EWMA-HAR-RV	0.9931	0.30	6.9804***

Nota: indicatore in-sample di bontà di adattamento Adjusted R^2 e test out-of-sample di Diebold e Mariano (1995).

Come si nota dalla tabella 4.6 sia il test R^2 corretto che il test DM precludono ad un leggero ma significativo miglioramento dell'accuratezza previsionale utilizzando il modello EWMA-HAR-RV.

4.4.1 Previsioni a più passi in avanti

Nella precedente analisi empirica, abbiamo esaminato solo le previsioni a un giorno di distanza, quindi ad un passo in avanti. In questa sezione si può osservare l'analisi condotta sull'efficienza previsionale dei due modelli, utilizzando però il metodo delle *rolling-windows* a 5 (una settimana) e a 22 (un mese) passi in avanti, mantenendo costante il numero di osservazioni per ogni finestra (4685) e l'orizzonte temporale di 50 giorni.

Nelle tabelle seguenti sono riportate le misurazioni di efficienza previsionale nei due differenti casi.

Nota: nelle tabelle 4.7 e 4.8 sono riportati i valori delle misurazioni degli indici robusti rispettivamente a 5 (una settimana) passi in avanti e a 22 (un mese) passi in avanti; mantenendo inalterato l'orizzonte temporale e la grandezza della finestra.

Tabella 4.7: **Funzioni di perdita per previsioni a 5 passi in avanti**

Panel A: h=5 (una settimana)

MODELLO	QLIKE	MSE	MAE	HMSE	HMAE
HAR-RV	3.105178	0.626482	0.575046	0.0088252	0.069765
EWMA-HAR-RV	3.103895	0.257801	0.373583	0.004365	0.048618

Tabella 4.8: **Funzioni di perdita per previsioni a 22 passi in avanti**

Panel B: h=22 (un mese)

MODELLO	QLIKE	MSE	MAE	HMSE	HMAE
HAR-RV	3.108622	1.252782	0.915928	0.018142	0.110262
EWMA-HAR-RV	3.108490	0.572199	0.583958	0.010657	0.076268

Dalle tabelle 4.7 e 4.8 si nota un incremento dei valori degli indicatori causato dall'incremento dei passi in avanti compiuti da ogni previsione in ogni finestra. Nonostante tutti i valori siano aumentati per entrambi i modelli, quelli generati dal modello EWMA-HAR-RV risultano ancora una volta inferiori a quelli generati dal modello rivale.

4.4.2 Finestre previsionali differenti

Viste tali differenze, si passa ora a sperimentare il comportamento dei due modelli variando il campione informativo di ogni finestra, mantenendo lo stesso orizzonte previsivo. In altre parole i due modelli vengono implementati seguendo il metodo delle *rolling-windows*, dove ogni finestra ora copre una quantità di informazioni ridotta rispetto ai precedenti, arrivando a 2000 osservazioni per ogni finestra (contro alle 4685 osservazioni precedenti), sempre ad un passo in avanti ($h=1$). Di seguito sono riportati gli output delle stesse funzioni di perdita calcolate per i due nuovi modelli.

Nota: nelle tabelle 4.9 e 4.10 sono riportati i valori delle misurazioni degli indici robusti calcolati con il metodo delle rolling-windows dove ogni finestra copre rispet-

Tabella 4.9: **Funzioni di perdita per previsioni a contenuto informativo ridotto (3000 oss.)**

MODELLO	QLIKE	MSE	MAE	HMSE	HMAE
HAR-RV	3.521403	1.721352	0.7930711	0.009945	0.061834
EWMA-HAR-RV	3.514972	1.044249	0.510448	0.007962	0.049002

Tabella 4.10: **Funzioni di perdita per previsioni a contenuto informativo ridotto (2000 oss.)**

MODELLO	QLIKE	MSE	MAE	HMSE	HMAE
HAR-RV	3.534096	2.069711	0.896855	0.010854	0.068385
EWMA-HAR-RV	3.531722	1.274169	0.706042	0.006661	0.053820

tivamente 3000 e 2000 osservazioni.

Quello che si può interpretare dai risultati empirici ottenuti, è che variando la finestra informativa in *lookback* varia anche l'accuratezza previsionale e che diverse finestre di previsione fuori campione portano a diversi risultati empirici. Nonostante ciò si afferma che ponderando esponenzialmente tali osservazioni passate, dando maggiore importanza alle rilevazioni recenti, l'efficienza previsiva aumenta.

4.5 Differente metodo di valutazione

In questa sezione viene presentato, in supplemento ai metodi di valutazione visti e analizzati precedentemente, un nuovo strumento di valutazione della qualità previsionale denominato come R_{OOS}^2 (R^2 *Out-Of-Sample*).

Questo test viene ampiamente utilizzato e raccomandato in numerosi studi (per esempio da Campbell & Thompson (2008); Liang, Wei e Li (2020); Rapach (2013); Wang (2018)).

L' R_{OOS}^2 indica la riduzione percentuale dell'errore di previsione medio al quadrato (MFSE) del modello previsionale della volatilità d'interesse, rispetto all'MSFE del modello di riferimento. Tale indicatore può essere espresso matematicamente come:

$$R_{OOS}^2 = 1 - \frac{\sum_{k=1}^q (RV_{m+k} - \widehat{RV}_{m+k})^2}{\sum_{k=1}^q (RV_{m+k} - \widehat{RV}_{m+k,bench})^2} \quad (4.3)$$

dove

- RV_{m+k} è il valore effettivo dell'indice RV nel giorno $m+k$;
- \widehat{RV}_{m+k} è il valore della previsione dell'indice RV nel giorno $m+k$;
- $\widehat{RV}_{m+k,bench}$ è il valore della previsione dell'indice RV nel giorno $m+k$ ottenuto dal modello di *benchmark*;
- m e q rappresentano la lunghezza del periodo iniziale di campionamento (*in-sample*) e del periodo fuori dal campione (*out-of-sample*), rispettivamente.

Come si può facilmente intuire, se il valore di R_{OOS}^2 è maggiore di 0, le previsioni ottenute dal modello di interesse superano quelle calcolate tramite il modello benchmark rivale.

Di seguito sono riportati i valori di R_{OOS}^2 nei tre casi in cui la previsione venga fatta a 1 passo in avanti ($h=1$, un giorno), a 5 passi in avanti ($h=5$, una settimana) e a 22 passi in avanti ($h=22$, un mese).

Tabella 4.11: **Indice R_{OOS}^2 Panel A: $h=1$ (un giorno)**

Indice	R_{OOS}^2	MSFE-adj.
RVOL	0.83098***	3.18932

Tabella 4.12: **Indice R_{OOS}^2 Panel B: $h=5$ (una settimana)**

Indice	R_{OOS}^2	MSFE-adj.
RVOL	0.99800***	2.94587

Nota: le tabelle 4.11, 4.12 e 4.13 riportano i valori dell'indice R^2 out-of-sample per tre diversi orizzonti temporali ($h=1$, $h=5$ e $h=22$) per il modello EWMA-HAR-RV contro HAR-RV.

Tabella 4.13: **Indice R_{OOS}^2 Panel C: h=22 (un mese)**

Indice	R_{OOS}^2	MSFE-adj.
RVOL	0.97794**	2.18731

Come si può notare nella terza colonna (MSFE-adjusted) delle tabelle sopra citate, la significatività di R_{OOS}^2 è calcolata mediante la statistica *MSFE-Adjusted* proposta da Clark e West (2007). Più tecnicamente, tale test verifica l'ipotesi nulla che la previsione del modello di riferimento MSFE sia minore o uguale dell'MSFE del modello di previsione di interesse, contro l'ipotesi alternativa che il valore dell'MSFE del modello di interesse sia minore di quello di riferimento.

Matematicamente la statistica proposta da Clark e West (2007) è definita come:

$$f_t = \left(RV_t - \widehat{RV}_{t,bench} \right)^2 - \left(RV_t - \widehat{RV}_{t,model} \right)^2 + \left(\widehat{RV}_{t,bench} - \widehat{RV}_{t,model} \right)^2. \quad (4.4)$$

Le tabelle 4.11, 4.12 e 4.13 riportano i risultati dei test R_{OOS}^2 per tre orizzonti temporali differenti (h=1, h=5 e h=22) del modello EWMA-HAR-RV. Come si può notare i tre valori sono compresi tra il 0.83% e il 0.998% e tutti con un livello di significatività superiore all'1%. Questo implica che il modello EWMA-HAR-RV è in grado di fornire migliori previsioni *out-of-sample* per l'indice RVOL, rispetto al modello rivale HAR-RV.

Si considera anche che il valore di R^2 *out-of-sample* è significativamente maggiore nel panel B, ovvero per le previsioni a 5 passi avanti, il che vuol dire che il modello ponderato EWMA ha una maggiore predicibilità nelle previsioni a 5 giorni prima rispetto al rivale.

In ugual misura anche nel panel C si può affermare che il modello HAR-RV non è in grado di generare buone previsioni fuori campione a 22 giorni (un mese), rispetto al modello d'interesse.

In questa sezione, in aggiunta al test R_{OOS}^2 , è riportata anche la differenza cumulativa tra gli errori di previsione al quadrato dei due modelli di previsione nel periodo fuori campione. Per garantire che la scala dell'immagine sia coerente, gli errori di previsione al quadrato del modello di previsione vengono espressi in forma logaritmica.

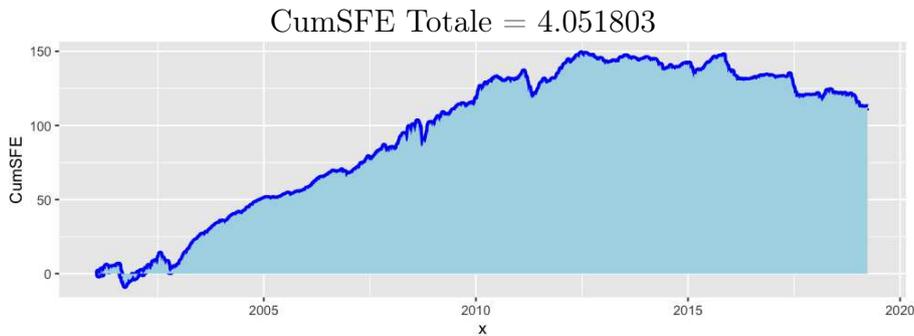
Tale differenza cumulativa prende il nome di *CumSFE*, ed è uno strumento comunemente utilizzato negli studi di previsione per evidenziare le prestazioni predittive nel tempo del nuovo modello rispetto al modello di riferimento.

Matematicamente *CumSFE* è espressa come:

$$CumSFE = \sum_{t=m+1}^{m+q} \left(\log \left(\left(\widehat{RV}_t^{HAR} - RV_t \right)^2 + 1 \right) - \log \left(\left(\widehat{RV}_t^{EWMA} - RV_t \right)^2 + 1 \right) \right) \quad (4.5)$$

La rappresentazione grafica è la seguente:

Figura 4.5: **Grafico dell'evoluzione di CumSFE.**



Evoluzione della serie storica delle differenze cumulative tra gli errori quadratici di previsione a un giorno di distanza del modello HAR-RV e del modello EWMA-HAR-RV.

Il grafico riportato nella figura 4.5 mostra l'evoluzione della serie temporale della differenza cumulativa tra gli errori di previsione al quadrato ad un passo in avanti, del modello HAR-RV e del modello EWMA-HAR-RV. In particolare, si può facilmente determinare se il modello EWMA-HAR-RV si comporta meglio rispetto al

modello di riferimento nel periodo fuori campione, confrontando l'altezza della curva all'inizio e alla fine del periodo.

Inoltre, a conferma, se CumSFE è maggiore di 0 (in questo caso il CumSFE Totale è 4.051803) implica che il modello EWMA-HAR-RV si comporta meglio nelle previsioni fuori campione.

Conclusioni

Lo scopo principale di questo studio è stato quello di verificare se un nuovo modello HAR-RV (versione modificata), proposta da Liang et al. 2022, mostri una capacità predittiva superiore rispetto al modello HAR-RV (versione classica), proposta da Corsi 2009b, nella previsione della volatilità realizzata (RVOL) degli indici azionari. Ricostruendo le componenti HAR settimanali e mensili utilizzando il metodo delle medie mobili ponderate esponenzialmente (EWMA) è stato creato il modello EWMA-HAR-RV.

Sono emersi diversi risultati degni di nota. In primo luogo, i risultati della stima all'interno del campione suggeriscono che il modello EWMA-HAR-RV è in grado di produrre valori R^2 maggiori, indicando che il modello EWMA-HAR-RV ha una migliore capacità di adattamento ai dati. In secondo luogo, utilizzando il metodo *rolling-window* per generare le previsioni *out-of-sample* dei modelli HAR-RV e EWMA-HAR-RV e analizzando le performance di quest'ultime mediante test DM e altri metodi di valutazione, si mostra che il modello EWMA-HAR-RV ha un potere predittivo maggiore.

Inoltre, i risultati empirici basati su diversi risultati di previsione fuori campione, previsioni a lungo termine e diversi metodi di valutazione confermano ulteriormente la solidità delle conclusioni appena citate.

In conclusione, si può affermare che, pur essendo un modello facilmente implementabile e flessibile, il modello EWMA-HAR-RV può generare previsioni più accurate della volatilità realizzata.

Bibliografia

- Alfarano, S. e Thomas Lux (2007). “A noise trader model as a generator of apparent financial power laws and long memory”. In: *Macroeconomic Dynamics* 11.S1, pp. 80–101.
- Andersen, Torben G. e T. Bollerslev (1998). “Answering the Skeptics: Yes, Standard Volatility Models do Provide Accurate Forecasts”. In: *International Economic Review* 4, pp. 885–905.
- Barndorff-Nielsen, Ole E e Neil Shephard (2002). “Econometric analysis of realized volatility and its use in estimating stochastic volatility models”. In: *Journal of the Royal Statistical Society Series B: Statistical Methodology* 64.2, pp. 253–280.
- Bollerslev, T., Andrew J. Patton e R. Quaedvlieg (2016). “Exploiting the errors: A simple approach for improved volatility forecasting”. In: *Journal of Econometrics* 192.1, pp. 1–18.
- Bollerslev, Tim et al. (mag. 2018). “Risk Everywhere: Modeling and Managing Volatility”. In: *The Review of Financial Studies* 31.7, pp. 2729–2773.
- Campbell, John Y. e Samuel B. Thompson (nov. 2007). “Predicting Excess Stock Returns Out of Sample: Can Anything Beat the Historical Average?” In: *The Review of Financial Studies* 21.4, pp. 1509–1531.
- Chun, Dohyun e Donggyu Kim (2022). “State Heterogeneity Analysis of Financial Volatility using high-frequency Financial Data”. In: *Journal of Time Series Analysis* 43.1, pp. 105–124.
- Clark, Todd E. e Kenneth D. West (2007). “Approximately normal tests for equal predictive accuracy in nested models”. In: *Journal of Econometrics* 138.1, pp. 291–311.
- Corsi, Fulvio (feb. 2009a). “A Simple Approximate Long-Memory Model of Realized Volatility”. In: *Journal of Financial Econometrics* 7.2, pp. 174–196.

- Corsi, Fulvio (2009b). “A simple approximate long-memory model of realized volatility”. In: *Journal of Financial Econometrics* 7.2, pp. 174–196.
- Diebold, Francis X. (2015). “Comparing Predictive Accuracy, Twenty Years Later: A Personal Perspective on the Use and Abuse of Diebold–Mariano Tests”. In: *Journal of Business & Economic Statistics* 33.1, pp. 1–1.
- Diebold, Francis X. e Roberto S. Mariano (1995). “Comparing Predictive Accuracy”. In: *Journal of Business & Economic Statistics* 13.3, pp. 253–263.
- Gallico, Di Guido (n.d.). “Conoscere i mercati finanziari: la frontiera efficiente ed i modelli di equilibrio del mercato dei capitali”. In: ().
- Ghysels, E., P. Santa-Clara e R. Valkanov (2006). “Predicting volatility: getting the most out of return data sampled at different frequencies”. In: *Journal of Econometrics* 131.1, pp. 59–95.
- Jarque, Carlos M. e Anil K. Bera (1987). “A Test for Normality of Observations and Regression Residuals”. In: *International Statistical Review / Revue Internationale de Statistique* 55.2, pp. 163–172.
- Liang, Chao et al. (2022). “Forecasting international equity market volatility: A new approach”. In: *Journal of Forecasting* 41.7, pp. 1433–1457.
- Liu, Lily Y., Andrew J. Patton e K. Sheppard (2015). “Does anything beat 5-minute RV? A comparison of realized measures across multiple asset classes”. In: *Journal of Econometrics* 187.1, pp. 293–311. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jeconom.2015.02.008>.
- Rossi, Eduardo e Dean Fantazzini (feb. 2014). “Long Memory and Periodicity in Intraday Volatility”. In: *Journal of Financial Econometrics* 13.4, pp. 922–961.
- Shirmohammadi, Shervin, Luca Mari e Dario Petri (n.d.). “A proposito della (spesso sbagliata...) rappresentazione grafica dell’accuratezza e della precisione”. In: ().
- Wang, Y. et al. (2016). “Forecasting realized volatility in a changing world: A dynamic model averaging approach”. In: *Journal of Banking Finance* 64, pp. 136–149.
- Wang, Yudong, Zhiyuan Pan e Chongfeng Wu (2017). “Time-Varying Parameter Realized Volatility Models”. In: *Journal of Forecasting*.

- Wooldridge, Jeffrey M. (1991). “A note on computing r-squared and adjusted r-squared for trending and seasonal data”. In: *Economics Letters* 36.1, pp. 49–54.
- Zhang, Yaojie et al. (2019). “Out-of-sample volatility prediction: A new mixed-frequency approach”. In: *Journal of Forecasting* 38.7, pp. 669–680.

Ringraziamenti

In primo luogo, vorrei ringraziare la mia relatrice per avermi dato l'opportunità di scrivere questa tesi.

Desidero inoltre ringraziare i miei amici e colleghi di corso per il sostegno morale durante i momenti più impegnativi di questo percorso accademico e per le gioie e le sfide intraprese in questi anni.

Un ringraziamento speciale va anche ai miei genitori, a mio fratello e alla mia fidanzata per il loro costante supporto, incoraggiamento e comprensione. Senza il loro amore e il loro sostegno, questa realizzazione, come molti altri traguardi, sarebbero stati molto più difficili da raggiungere. Non ci sono parole sufficienti per esprimere la mia gratitudine, vi voglio bene.