

# UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Dipartimento di Fisica e Astronomia “Galileo Galilei”

Corso di Laurea in Fisica

Tesi di Laurea

## Il decadimento doppio-gamma

Relatore

Prof. Lorenzo Fortunato

Laureando

Irene Malfatti

Anno Accademico 2023/2024



# Indice

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Il decadimento gamma</b>	<b>5</b>
<b>3</b>	<b>Tasso di transizione <math>\gamma</math></b>	<b>7</b>
3.1	Sezione di confronto . . . . .	8
<b>4</b>	<b>Il decadimento doppio gamma</b>	<b>11</b>
<b>5</b>	<b>Tasso di transizione <math>\gamma\gamma</math></b>	<b>13</b>
5.1	Sezione di confronto . . . . .	14
<b>6</b>	<b>Conclusioni</b>	<b>15</b>



# Capitolo 1

## Introduzione

In questo elaborato si espone una proposta per il calcolo esplicito del tasso di transizione nel caso del decadimento doppio gamma, che è una variante molto rara del noto decadimento gamma, in cui vengono emessi simultaneamente due fotoni invece di uno. In prima battuta la trattazione si concentrerà sul decadimento gamma e solo successivamente i risultati ottenuti verranno allargati al problema in esame, di cui per semplicità viene descritto solo il caso relativo alle transizioni di tipo elettrico. Infine dalle conclusioni tratte si cercherà di fornire un confronto tra gli ordini di grandezza di transizioni successive per i due casi studiati, che metta in rilievo la differenza di probabilità con cui essi avvengono in natura.



## Capitolo 2

# Il decadimento gamma

Il decadimento gamma è un tipo di decadimento elettromagnetico in cui il nucleo di un atomo passa da un suo stato eccitato ad uno ad energia inferiore, emettendo un fotone gamma con energie tipiche del regime nucleare.

In virtù della natura stessa del fenomeno, esso può essere ricondotto all'emissione di radiazione da parte di un campo elettromagnetico oscillante nel tempo, le cui sorgenti si possono descrivere mediante sviluppo in multipoli.

La notazione utilizzata per descrivere un decadimento gamma discende direttamente dalle caratteristiche di tale campo elettromagnetico e si compone di due termini:

1. un termine  $\sigma$  relativo all'origine del campo
2. un termine  $L$  che indica l'ordine dello sviluppo in multipoli.

Il primo termine differenzia le due possibili origini del campo elettromagnetico, che può essere generato da oscillazioni nel tempo di campi elettrici (che per la legge di Ampere-Maxwell inducono successivamente campi magnetici oscillanti) o di campi magnetici (che per la legge di Faraday-Neumann-Lenz inducono successivamente campi elettrici oscillanti). In base alla tipologia di campo che per convenzione induce l'oscillazione, il valore di  $\sigma$  si distingue in E (elettrico) o B (magnetico).

Il secondo termine è invece relativo all'ordine dello sviluppo in multipolo cui è necessario fermarsi per descrivere correttamente i generatori del suddetto campo e, a livello quantitativo, corrisponde al valore del momento angolare orbitale del fotone emesso, che è vincolato dalla legge di composizione dei momenti in meccanica quantistica come segue:  $|J_i - J_f| \leq L_\gamma \leq J_i + J_f$  (si indicano con  $J_{i,f}$  i momenti angolari totali del nucleo rispettivamente prima e dopo il decadimento).

A partire dallo sviluppo in multipoli è possibile calcolare la potenza media irradiata in un generico decadimento  $\sigma L$ , al pari di come si farebbe nel caso di un campo elettromagnetico. La forma analitica che si ottiene è la seguente, data da Ref.[1]:

$$W(\sigma L) = \frac{2c}{\epsilon_0} \frac{1}{[(2L+1)!!]^2} \left(\frac{L+1}{L}\right) \left(\frac{\omega}{c}\right)^{2L+2} |M(\sigma L)|^2 \quad (2.1)$$

Da tale potenza è poi possibile calcolare il tasso di transizione  $T(\sigma L)$ , definito come il rapporto tra  $W(\sigma L)$  e l'energia  $\hbar\omega$  di un singolo fotone:

$$T(\sigma L) = \frac{W(\sigma L)}{\hbar\omega} = \frac{2}{\epsilon_0 \hbar} \frac{1}{[(2L+1)!!]^2} \left(\frac{L+1}{L}\right) \left(\frac{\omega}{c}\right)^{2L+1} |M(\sigma L)|^2 \quad (2.2)$$

Si osserva che dal calcolo della potenza emerge una dipendenza dal modulo quadro dell'elemento di matrice che rappresenta la transizione tra stato iniziale e stato finale del nucleo, mediata da un determinato operatore di multipolo  $O(\sigma L)$ , che è specifico del decadimento e si occupa di generare un fotone con energia e momento angolare che rispettino le leggi di conservazione. Tale dipendenza si riflette poi nel tasso di transizione dove si può definire il modulo quadro dell'elemento di matrice come la potenza ridotta:

$$B(\sigma L) = |M(\sigma L)|^2$$

Da cui è possibile utilizzare le stime di Weisskopf per particella singola, che verranno esplicitamente ricavate nei capitoli successivi.



## Capitolo 3

# Tasso di transizione $\gamma$

Si riprende la trattazione partendo dall'elemento di matrice  $M(\sigma L)$  sopra citato e definito come in Ref.[1]:

$$M(\sigma L) = \int \psi_f^*(\bar{r}) O(\sigma L) \psi_i(\bar{r}) d\bar{r} \quad (3.1)$$

dove l'integrale è un integrale tridimensionale sul volume del nucleo.

Per le transizioni elettriche, il generico operatore di multipolo è della forma data da Ref.[1]:

$$O(EL) = er^L Y_L^m(\theta, \phi) \quad (3.2)$$

dove  $e$  è la carica elettrica fondamentale e  $Y_L^m(\theta, \phi)$  l'armonica sferica di riferimento ad un dato ordine di sviluppo in multipolo.

Le funzioni d'onda in (3.1) si possono dividere in una componente radiale ed una angolare come:

$\psi_{i,f}(\bar{r}) = \psi_{i,f}(r) Y_{L_i,f}^{m_i,f}(\theta, \phi)$  e l'elemento di matrice diventa:

$$\begin{aligned} M(\sigma L) &= \int \psi_f^*(r) Y_{L_f}^{m_f^*}(\theta, \phi) er^L Y_L^m(\theta, \phi) \psi_i(r) Y_{L_i}^{m_i}(\theta, \phi) d\bar{r} \\ &= e \int \psi_f^*(r) r^L \psi_i(r) r^2 dr \int Y_{L_f}^{m_f^*}(\theta, \phi) Y_L^m(\theta, \phi) Y_{L_i}^{m_i}(\theta, \phi) \sin \theta d\theta d\phi \end{aligned} \quad (3.3)$$

dove nell'ultimo passaggio sono state separate le componenti radiali e angolari e si è sostituito:  $d\bar{r} = r^2 dr \sin \theta d\theta d\phi$ .

Al fine di una risoluzione più chiara si denominano i due integrali soprastanti come:

$$I_R = \int \psi_f^*(r) r^L \psi_i(r) r^2 dr \quad (3.4)$$

$$I_A = \int Y_{L_f}^{m_f^*} Y_L^m(\theta, \phi) Y_{L_i}^{m_i}(\theta, \phi) \sin \theta d\theta d\phi \quad (3.5)$$

dove il pedice indica l'integrazione sulle componenti radiali e angolari rispettivamente, e si procede con una risoluzione separata.

Per quanto riguarda  $I_R$  si procede con il calcolo diretto, tenendo conto della normalizzazione e considerando le funzioni d'onda costanti all'interno del nucleo, ovvero per  $r \leq R$ , e nulle all'esterno, ovvero

per  $r > R$  (da cui gli estremi di integrazione):

$$\begin{aligned} I_R &= \frac{\int_0^R \psi_f^*(r) r^{L+2} \psi_i(r) dr}{\int_0^R r^2 dr} \\ &= \frac{\int_0^R r^{L+2} dr}{\int_0^R r^2 dr} \\ &= \frac{3}{L+3} R^L \end{aligned} \quad (3.6)$$

dove si può utilizzare per  $R$  la relazione  $R = r_0 A^{\frac{1}{3}}$ .

Per il caso di  $I_A$  ci si trova invece davanti al prodotto di tre armoniche sferiche, che è un integrale noto la cui risoluzione sfrutta il teorema di Wigner-Eckart (come enunciato in Ref.[2]):

$$\begin{aligned} I_A &= \int Y_{L_f}^{m_f*}(\theta, \phi) Y_L^m(\theta, \phi) Y_{L_i}^{m_i}(\theta, \phi) \sin \theta d\theta d\phi \\ &= \langle L_f, m_f | Y_L^m(\theta, \phi) | L_i, m_i \rangle \\ &= (-1)^{m_f} \sqrt{\frac{(2L_i+1)(2L+1)(2L_f+1)}{4\pi}} \begin{pmatrix} L_i & L & L_f \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_i & L & L_f \\ m_i & m & m_f \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.7)$$

dove l'ultima matrice si può riscrivere mediante i coefficienti di Clebsch-Gordan come:

$$\begin{pmatrix} L_i & L & L_f \\ m_i & m & m_f \end{pmatrix} = \frac{(-1)^{L_i-L-m_f}}{\sqrt{2L_f+1}} \langle L_i, m_i, L_f, m_f | L_i, m_i, L, m \rangle \quad (3.8)$$

In conclusione, unendo le due componenti in 3.6 e 3.7, si ottiene come forma analitica dell'elemento di matrice nel caso di decadimenti di tipo elettrico:

$$M(\sigma L) = \frac{e}{\sqrt{4\pi}} \left( \frac{3}{L+3} \right) R^L \quad (3.9)$$

dove per 3.7 si può considerare arbitrariamente  $L_i = L_f = 0$ , così da riconoscere in  $I_A$  un fattore  $1/\sqrt{4\pi}$ .

Nel modulo quadro di 3.9 si riconoscono le stime di Weisskopf per particella singola nel caso del decadimento gamma, che si indicano come  $B(\sigma L)$ , come visto in precedenza, e si possono scrivere in funzione del numero di massa atomica  $A$ :

$$B(\sigma L) = |M(\sigma L)|^2 = \frac{e^2}{4\pi} \left( \frac{3}{L+3} \right)^2 r_0^{2L} A^{2L/3} \quad (3.10)$$

dove si è usato  $R = r_0 A^{1/3}$ .

Inserendo l'espressione 3.9 in quella del tasso di transizione in 2.2 si ottiene:

$$T(EL) = 8\pi c \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} \frac{1}{[(2L+1)!!]^2} \left( \frac{L+1}{L} \right) \left( \frac{E}{\hbar c} \right)^{2L+1} \left( \frac{3}{L+3} \right)^2 R^{2L} \quad (3.11)$$

dove si sono svolti alcuni passaggi algebrici al fine di evidenziare la costante di struttura fine:

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} \simeq \frac{1}{137}$$

### 3.1 Sezione di confronto

In questa sezione ci si pone l'obiettivo di valutare i diversi ordini di grandezza di decadimenti con diverso ordine di sviluppo in multipoli.

In prima battuta si considerino due decadimenti gamma di tipo elettrico, con valore di  $L$  che differisce di un'unità. Per essi vale la 3.11, da cui si può calcolare la differenza tra loro in termini di ordine di grandezza, considerando un nucleo medio con numero di massa  $A = 100$  e un fotone con  $E_\gamma = 0,5 \text{ MeV}$ , come:

$$\frac{T[EL]}{T[E(L+1)]} = 10^4$$

Si nota quindi che per ogni unità di cui aumenta  $L$ , il tasso di transizione diminuisce di quattro ordini di grandezza.

Inoltre, dalla relazione in 3.11 si può graficare il tasso di transizione  $T(\sigma L)$  in funzione dell'energia del raggio  $\gamma$  per ottenere l'immagine seguente (Ref. [3]):

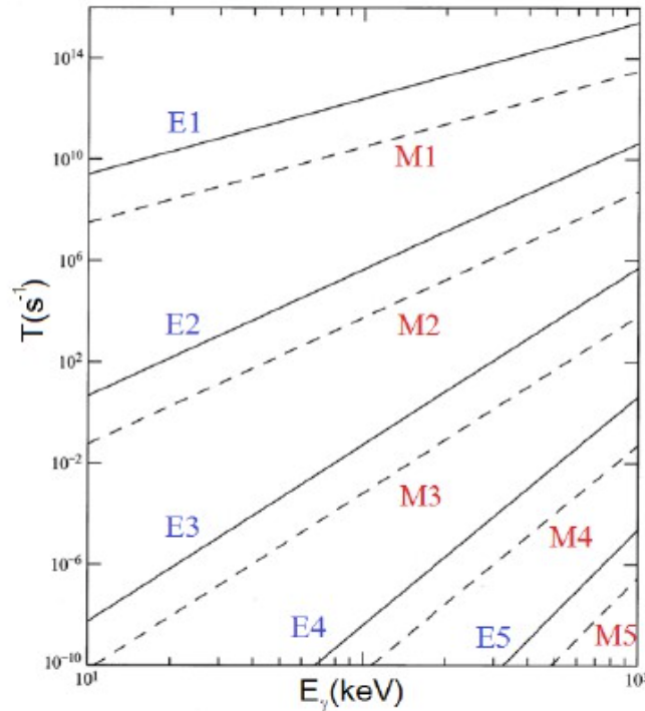


Figura 3.1: Tassi di transizione in funzione dell'energia del fotone con scala logaritmica su entrambi gli assi (in figura sono presenti anche alcuni esempi di decadimenti magnetici, che non sono oggetto di questo elaborato)



## Capitolo 4

# Il decadimento doppio gamma

Il decadimento doppio gamma è un processo elettromagnetico del secondo ordine dove il nucleo atomico si diseccita liberando due fotoni simultanei, secondo la relazione:

$$X^* = X + \gamma_1 + \gamma_2$$

dove  $X^*$  rappresenta lo stato eccitato del nucleo.

Questo processo avviene con una probabilità molto ridotta rispetto al più noto decadimento  $\gamma$  (è circa  $10^{-6}$  volte più debole), ma è possibile per transizioni che sono invece proibite a quest'ultimo, come la transizione  $0^+ \rightarrow 0^+$ .

Il decadimento  $\gamma\gamma$  venne per la prima volta trattato da Maria Göppert-Mayer nella sua tesi di dottorato del 1929 (ulteriori studi sono descritti in Ref. [4]), mentre le prime osservazioni sperimentali risalgono al 1959 e ai decenni successivi e si concentrano principalmente sui nuclei atomici di  $^{137}\text{Ba}$ ,  $^{90}\text{Zr}$ ,  $^{16}\text{O}$  e  $^{40}\text{Ca}$ .



## Capitolo 5

# Tasso di transizione $\gamma\gamma$

Nel caso del decadimento doppio gamma, come descritto in precedenza, la transizione non coinvolge un solo fotone, bensì due. Essi sono simultanei, ma ai fini della trattazione si suppone che si possano considerare al pari di due decadimenti gamma distinti: il primo tra il livello energetico nucleare iniziale e un livello energetico virtuale, con energia compresa tra quella di stato finale e quella di stato iniziale; ed il secondo tra il livello energetico virtuale e quello finale del nucleo.

Nei calcoli seguenti viene fissato un unico livello virtuale con cui mediare la transizione, ma si sottolinea che la scelta dello stesso può cadere con opportune probabilità su ogni stato avente energia intermedia tra quella di stato iniziale e finale. Per una descrizione completa, i calcoli che seguono andrebbero implementati integrando su tutte le possibilità del caso per lo stato virtuale.

Da qui in poi, si indichino con  $\psi_{i,v,f}$  gli stati rispettivamente iniziale, virtuale e finale e con  $E_{i \rightarrow v}$  e  $E_{v \rightarrow f}$  le energie dei fotoni liberati nelle transizioni indicate a pedice. Infine si definiscano i tassi di transizione  $T_1(\sigma_1 L_1)$  e  $T_2(\sigma_2 L_2)$ , relativi rispettivamente alle transizioni  $i \rightarrow v$  e  $v \rightarrow f$ .

Con tale notazione si può considerare il tasso di transizione totale  $T(\sigma_{\gamma,\gamma} L_{\gamma,\gamma})$  del decadimento doppio gamma come la somma dei singoli tassi di transizione:

$$T(\sigma_{\gamma,\gamma} L_{\gamma,\gamma}) = T_1(\sigma_1 L_1) + T_2(\sigma_2 L_2) \quad (5.1)$$

dove  $T_1(\sigma_1 L_1)$  e  $T_2(\sigma_2 L_2)$  sono della forma generale 2.2.

Questa relazione è giustificata dai calcoli dettagliati che conducono alla derivazione di 2.1 e che vengono esposti in Ref.[1]. La descrizione completa dei passaggi algebrici relativi elude gli argomenti di questo elaborato, ma è importante sottolineare che il processo, nel caso del decadimento gamma semplice, coinvolge il campo elettrico  $\vec{E}$  ed il campo magnetico  $\vec{B}$ , che nel caso di un decadimento doppio gamma vengono sostituiti dalle somme vettoriali  $(\vec{E}_1 + \vec{E}_2)$  e  $(\vec{B}_1 + \vec{B}_2)$ , dove i pedici sono relativi rispettivamente al primo ( $i \rightarrow v$ ) e al secondo ( $v \rightarrow f$ ) decadimento che compongono la transizione complessiva. Questa sostituzione porta alla comparsa di nuovi elementi nella trattazione, che conduce infine alla forma generale di 2.1 che si trova in [5]. Nell'intero processo si possono trascurare in prima approssimazione i prodotti scalari tra elementi misti, che restituiranno valori mediamente più piccoli rispetto agli altri, in quanto c'è una probabilità minore che  $\vec{E}_1$  ed  $\vec{E}_2$  siano allineati lungo la stessa direzione (segue che il valore del coseno compreso nel prodotto scalare sarà ridotto rispetto al caso di prodotto tra termini uguali, che sono allineati e danno quindi il massimo valore possibile del coseno, che è 1).

Si pone l'attenzione sul fatto che questa trattazione, non essendo direttamente parte dell'argomento

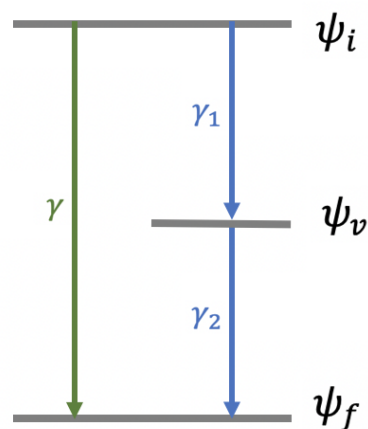


Figura 5.1: Esempio di decadimento  $\gamma\gamma$ , dove in verde si trova il decadimento competitivo, mentre in azzurro i due decadimenti  $\gamma$  in cui può essere suddiviso

in esame, è qui discussa in modo approssimato e per essere completa richiederebbe un'analisi più dettagliata e specifica del caso.

Tornando all'Eq. 5.1, si ha che nel caso in cui entrambe le transizioni  $i \rightarrow v$  e  $v \rightarrow f$  siano di tipo elettrico, le componenti  $T_{1,2}(\sigma_{1,2}L_{1,2})$  diventano della forma più specifica 3.11, dove gli elementi di matrice all'interno del modulo quadro (che nell' Eq. 3.11 è già sviluppato) sono della forma 3.9.

## 5.1 Sezione di confronto

In questa sezione ci si propone di fare alcune stime relative agli ordini di grandezza coinvolti in diversi decadimenti doppio gamma, al pari di quanto fatto in 3.1.

Per semplicità ci si concentrerà su casi in cui lo stato virtuale cade esattamente a metà tra quello iniziale e finale e si considererà un valore medio del numero di massa  $A = 100$ .

In quest'ottica la 5.1 si può semplificare, supponendo  $E_1 = E_2$ , al fine di realizzare il grafico sottostante, in cui il tasso di transizione per un decadimento doppio gamma è messo in funzione dell'energia liberata nelle singole transizioni ( $E_\gamma = E_1 = E_2$ ) e la scala è logaritmica su entrambi gli assi.

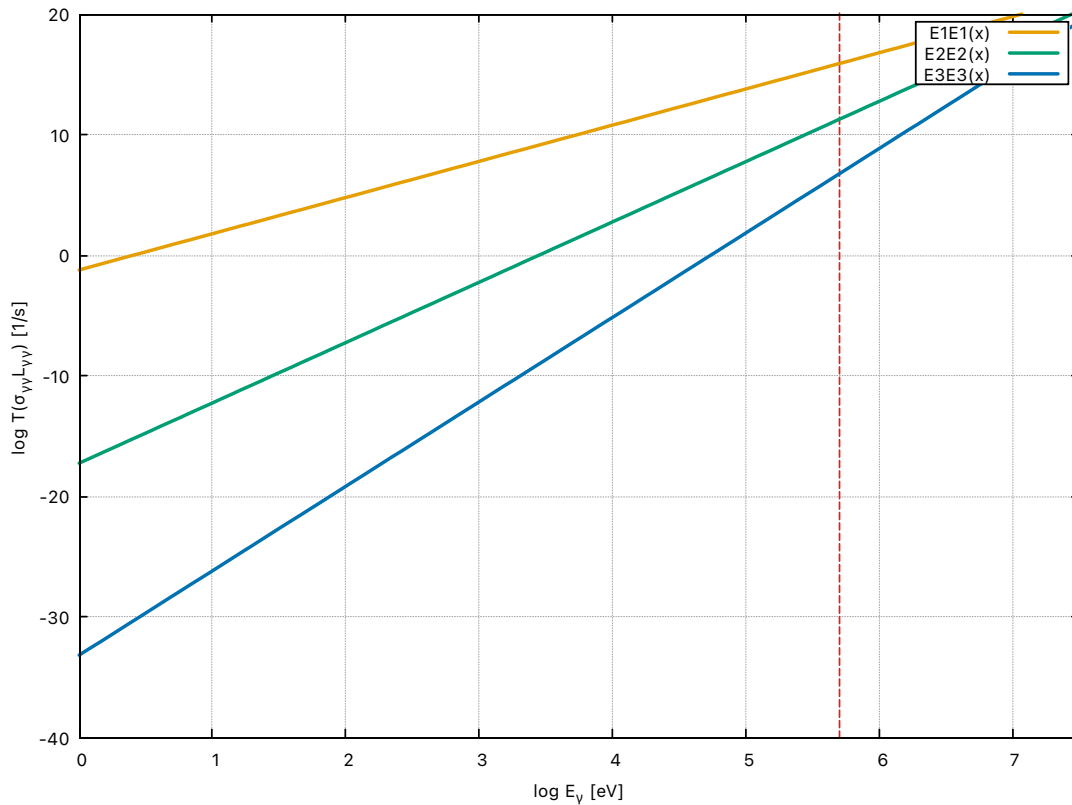


Figura 5.2: Tassi di transizione in funzione dell'energia dei fotoni emessi, con scala logaritmica su entrambi gli assi, per alcuni decadimenti doppio gamma

Dalla figura emerge che l'ordinamento delle transizioni doppio gamma elettriche in termini di probabilità si scosta leggermente da quanto detto in 3.1 per i decadimenti gamma singoli: ad un'energia di circa  $0,5\text{MeV}$  (rappresentata dalla linea rossa in figura), una transizione doppio gamma del tipo  $ELEL$  ha un tasso di transizione circa  $10^{4,55}$  volte maggiore rispetto a quella del tipo  $E(L+1)E(L+1)$ . Inoltre, rimane vero dalle osservazioni sperimentali (come in Ref. [6]), che il generico decadimento doppio gamma ( $\sigma L_1 \sigma L_2$ ) è circa  $10^6$  volte meno probabile del decadimento gamma ad esso competitivo.



## Capitolo 6

# Conclusioni

Da quanto esposto nei capitoli precedenti si possono trarre informazioni generali riguardo l'andamento del tasso di transizione e della probabilità per un decadimento doppio gamma, che ad oggi rimane comunque oggetto di studio dal punto di vista sperimentale.

Si vuole però sottolineare che questi risultati, sebbene compatibili con quanto atteso, sono frutto di una trattazione semplificata, in cui sono state adottate convenzioni volte ad agevolare il calcolo e a snellire il processo di realizzazione grafica. Pertanto, per una descrizione teorica completa è opportuno integrare l'elaborato con ulteriori considerazioni fisiche e matematiche (come ad esempio quelle contenute nei titoli in Bibliografia).

Infine, è importante porre l'attenzione sul fatto che, come per qualsiasi trattazione di tipo teorico, le conclusioni tratte da questo elaborato vadano necessariamente confrontate con i risultati di carattere sperimentale (come quelli in Ref. [6],[7],[8]), al fine di verificarne la congruenza con la realtà.



# Bibliografia

- [1] Kenneth S. Krane. *Introductory Nuclear Physics*. John Wiley & Sons, 1988. Cap. 10.2, p. 331. ISBN: 0-471-80553-X.
- [2] Donald Knuth. *Knuth: Computers and Typesetting*. URL: <http://electron6.phys.utk.edu/qm2/modules/m4/wigner.htm>. (accessed: 01.09.2016).
- [3] Lorenzo Fortunato. *Appunti di Fisica Nucleare*. GEDI Gruppo Editoriale S.p.A., 2018. Cap. 5.4, p. 119.
- [4] Maria Goeppert Mayer. *Elementary Theory of Nuclear Shell Structure*. Hassell Street Press, 2021. ISBN: 978-1014329929.
- [5] Victor F. Weisskopf John M. Blatt. *Theoretical Nuclear Physics*. Dover Pubns, 2003. Cap. Appendice B, p. 799. ISBN: 978-0486668277.
- [6] D.Brugnara et al. “Perspectives on the measurement of competitive double gamma decay with the AGATA tracking array”. In: *Il Nuovo Cimento* 42 C.92 (2019). DOI: 10.1393/ncc/i2019-19092-y.
- [7] A. Nagy et al. “Searching for the double -decay of the X(17) particle”. In: *Il Nuovo Cimento* 42 C.124 (2019). DOI: 10.1393/ncc/i2019-19124-8.
- [8] E. Merchán et al. “ $^{137}\text{Ba}$  Double Gamma Decay Measurement with GAMMASPHERE”. In: *EPJ Web of Conferences* 93.01033 (2015). DOI: 10.1051/epjconf/20159301033.