

# UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Dipartimento di Fisica e Astronomia “Galileo Galilei”

Corso di Laurea in Fisica

Tesi di Laurea

## La Teoria di Ginzburg-Landau per i Vortici Quantizzati nei Superconduttori

Relatore:

Prof. Luca Salasnich

Laureando:

Simone Savio

Anno Accademico 2022/2023



# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>v</b>
<b>1 Fenomenologia della Superconduttività</b>	<b>1</b>
1.1 Caratteristiche Principali dei Superconduttori . . . . .	1
1.2 Superconduttori di Tipo I e Tipo II . . . . .	2
1.3 La Teoria di London . . . . .	4
<b>2 La Teoria di Ginzburg-Landau</b>	<b>7</b>
2.1 Formalismo delle Transizioni di Fase . . . . .	7
2.2 Ginzburg-Landau per i Superconduttori Non Omogenei . . . . .	9
2.3 Ginzburg-Landau per i Superconduttori in Campo Magnetico . . . . .	12
<b>3 Superconduttori di Tipo I e Tipo II e i Vortici Quantizzati</b>	<b>15</b>
3.1 Superconduttori di Tipo I . . . . .	15
3.2 Superconduttori di Tipo II . . . . .	16
3.2.1 Quantizzazione del Flusso . . . . .	16
3.2.2 Vortici di Abrikosov . . . . .	17
3.2.3 Campo Critico Inferiore . . . . .	21
3.2.4 Campo Critico Superiore . . . . .	22
3.2.5 Reticolo di Abrikosov . . . . .	23
<b>Conclusioni</b>	<b>27</b>



# Introduzione

La superconduttività è il fenomeno per cui un materiale presenta una resistività nulla al di sotto di una certa *temperatura critica* e manifesta il cosiddetto *effetto Meissner-Ochsenfeld* per il quale, durante la transizione da stato normale a quello superconduttivo in presenza di un campo magnetico debole, il materiale espelle quest'ultimo generando al suo interno una regione con campo complessivamente nullo.

Fin dalla scoperta di tale fenomeno nel 1911, ad opera dal fisico olandese H. Kamerlingh Onnes, vi fu un grandissimo interesse della comunità scientifica, in particolare per le vastissime possibili applicazioni tecnologiche che nel tempo portarono miglioramenti in molti campi differenti: dall'energia ai trasporti, dalla medicina alla fisica delle particelle.

Uno degli aspetti fondamentali su cui si sta concentrando gran parte della ricerca odierna sui superconduttori è lo studio e la scoperta di elementi che presentino temperature critiche via via maggiori di modo da rendere applicabili e sostenibili tecnologie che implementino tali materiali. Risultò quindi presto chiaro che era necessaria una teoria che portasse delle previsioni affidabili sulla temperatura critica di un dato composto, così, a partire dalla teoria delle transizioni di fase di Lev Landau e teoria classica dei fratelli Fritz e Heinz London (1935), Vitaly Ginzburg e Landau arrivarono a formulare nel 1950 la cosiddetta *teoria di Ginzburg-Landau* che proponeva di analizzare il fenomeno della superconduttività espandendo il formalismo delle teorie di campo medio di Landau allo studio delle fluttuazioni del parametro d'ordine ed esprimendo i risultati in termini di costanti fenomenologiche macroscopiche. Tale approccio si rivelò di estremo successo: riuscì difatti ad ottenere previsioni corrette per la temperatura critica (e altre grandezze termodinamiche) di una vasta gamma di materiali, compresi quelli non omogenei ed in presenza di campo magnetico, risultato che con la teoria di London non era possibile ottenere; riuscì inoltre, grazie al contributo di Alexei Abrikosov nel 1957, a spiegare il fenomeno della superconduttività di tipo II, per cui, in particolari condizioni di campo magnetico e temperatura, un materiale superconduttore permette un parziale attraversamento del campo magnetico in punti localizzati chiamati *vortici*.

La teoria di Ginzburg-Landau fu successivamente superata nel 1957 da John Bardeen, Leon Cooper e John Schriffer che proposero la nota *teoria BCS* che rendeva conto di una descrizione microscopica della superconduttività e la metteva in relazione con il fenomeno della condensazione di Bose-Einstein. Tuttavia i limiti di tale formulazione furono evidenziati nel 1986 quando fu scoperto un composto che presentava una temperatura critica superiore al limite teorico imposto dalla teoria BCS ( $T_c^{max} \approx 30$  K). Di seguito furono scoperti sempre più materiali che non potevano essere spiegati dalla teoria BCS, chiamiamo tali composti *superconduttori non-convenzionali*, la cui temperatura critica può arrivare fino a 138 K a pressione atmosferica. Anche in questo caso, tuttavia, nonostante l'impossibilità di dare una descrizione microscopica del fenomeno, la teoria di Ginzburg-Landau riesce a predire il comportamento di alcuni superconduttori non-convenzionali.

Nella presente tesi andremo quindi prima a descrivere alcuni aspetti fenomenologici che caratterizzano i superconduttori, descriveremo le differenze tra superconduttori di tipo I e di tipo II e studieremo il modello di London evidenziandone le criticità. Andremo quindi a introdurre il formalismo della teoria di campo medio di Landau, per poi generalizzarla ad un superconduttore omogeneo ed in assenza di campo magnetico, e successivamente estendendo l'approccio ad un superconduttore non omogeneo

---

per arrivare infine a caratterizzare i superconduttori in presenza di campo magnetico attraverso le cosiddette *equazioni di Ginzburg-Landau*. Mostriamo successivamente un'applicazione del formalismo descritto andando a caratterizzare nello specifico i due tipi di superconduttori trovando una relazione per i campi critici che delineano le transizioni tra i possibili stati del materiale. Approfondiremo in particolare le strutture dei vortici di Abrikosov che danno luogo allo stato misto per i superconduttori di tipo II, calcolando anche in questo caso le grandezze e le configurazioni caratteristiche di tale stato ed infine andando a definire la configurazione collettiva del sistema all'equilibrio.

# Capitolo 1

## Fenomenologia della Superconduttività

### 1.1 Caratteristiche Principali dei Superconduttori

Come introdotto, i materiali superconduttori sono caratterizzati da due principali caratteristiche che vengono a presentarsi sotto una determinata *temperatura critica*  $T_c$ , queste sono: l'assenza di resistività e l'espulsione dei un campo magnetico esterno (*effetto Meissner-Ochsenfeld*).

#### Resistività Nulla

All'inizio del XX secolo il fisico olandese H. Onnes riuscì ad ottenere elio liquefatto raggiungendo temperature più basse di 4.22 K (punto di ebollizione dell'elio a pressione atmosferica) [1]. Grazie a questo traguardo riuscì poi nel 1911 a studiare il comportamento del mercurio in condizioni di temperatura prossima allo zero assoluto ed osservò che, abbassando gradualmente la temperatura, la resistività (in corrente continua) del mercurio seguiva un andamento simile ad altri metalli solo fino ad una certa temperatura critica  $T_c \approx 4.1$  K, dopo la quale la resistività crollava a zero (fig. 1.1) [2].

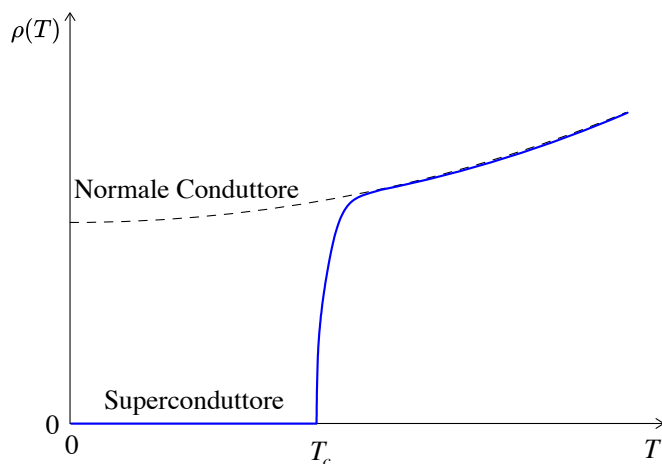


Figura 1.1: Tipico andamento della resistività  $\rho$  in funzione della temperatura  $T$  per un conduttore normale (linea tratteggiata) e un superconduttore (linea continua).  $T_c$  rappresenta la temperatura critica sotto la quale un superconduttore manifesta resistività nulla.

Questo bizzarro comportamento fu poi osservato in tantissimi materiali differenti. Una misura di questo effetto può essere ottenuta misurando la corrente indotta in un superconduttore: in un metallo normale ci aspetteremo che, per via della resistività  $\rho$  del materiale, la corrente circolante in esso decada secondo una legge esponenziale con tempo caratteristico  $\tau \propto 1/\rho$  (dalla teoria di Drude per la conduttività [3]); per i superconduttori questo decadimento non si verifica entro le incertezze sperimentali, da cui si ricava una stima di  $\rho \lesssim 10^{-26} \Omega\text{m}$  [4]; per confronto la resistività dell'oro è circa  $2.4 \cdot 10^{-8} \Omega\text{m}$ .

Osserviamo inoltre che dalla relazione che lega il campo elettrico alla densità di corrente,  $\mathbf{E} = \rho \mathbf{j}$ , nello stato superconduttivo ( $\rho = 0$ ) avremo che all'interno del campione il campo elettrico sarà nullo e di conseguenza, integrando la legge di Maxwell  $\nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t$ , il flusso del campo magnetico rimarrà costante su tutto il campione durante la fase superconduttiva. Un conduttore perfetto risponderà ad una variazione del flusso magnetico generando delle correnti perpetue d'induzione che si opporranno a tale variazione.

### Effetto Meissner-Ochsenfeld

Alcuni anni dopo la scoperta di Onnes, nel 1933 i fisici W. Meißner e R. Ochsenfeld osservarono [5] che un materiale superconduttore posto in un campo magnetico esterno debole  $\mathbf{H}$ , durante la transizione dallo stato normale a quello superconduttivo “espelleva” il campo magnetico esterno col risultato di ottenere un campo magnetico complessivamente nullo all'interno.

Quantitativamente, ricordiamo la relazione (in *unità SI*) che lega il campo magnetico totale in un mezzo  $\mathbf{B}$  al campo magnetico esterno  $\mathbf{H}$ :

$$\mathbf{B} = \mu_0(1 + \chi)\mathbf{H}, \tag{1.1}$$

dove  $\chi$  è la *suscettibilità magnetica*. Osserviamo quindi che se  $\mathbf{B} = 0$ , allora  $\chi = -1$ : il materiale in questo stato è dunque un *diamagnete perfetto*.

Ad uno studio più approfondito Meissner e Ochsenfeld si resero conto che l'effetto di espulsione del campo magnetica dipendeva dal valore del campo magnetico esterno e, come detto, dalla temperatura del campione: in particolare scoprirono che, per un dato valore di temperatura  $T < T_c$ , esiste un valore critico massimo  $H_c(T)$  del modulo del campo esterno superato il quale l'effetto di espulsione non si verifica più e il materiale torna nello stato normale.

## 1.2 Superconduttori di Tipo I e Tipo II

Ulteriori ricerche sull'effetto Meissner e la sua dipendenza dalla temperatura e dal campo magnetico esterno portarono alla luce due comportamenti peculiari: mentre alcuni materiali esibiscono l'effetto di espulsione totale del campo magnetico fino ad un unico e determinato valore del campo esterno per poi transire allo stato normale, altri manifestano una fase intermedia delimitata da due valori critici  $H_{c1}$  e  $H_{c2}$  durante la quale l'effetto di espulsione non è totale, ma il campo esterno attraversa il campione in zone localizzate che verranno in seguito dette *vortici* (fase di *Shubnikov*). Definiamo quindi la prima categoria superconduttori di *tipo I* e di *tipo II* quelli della seconda. I diagrammi di fase per i due tipi di superconduttività sono riportati di seguito.



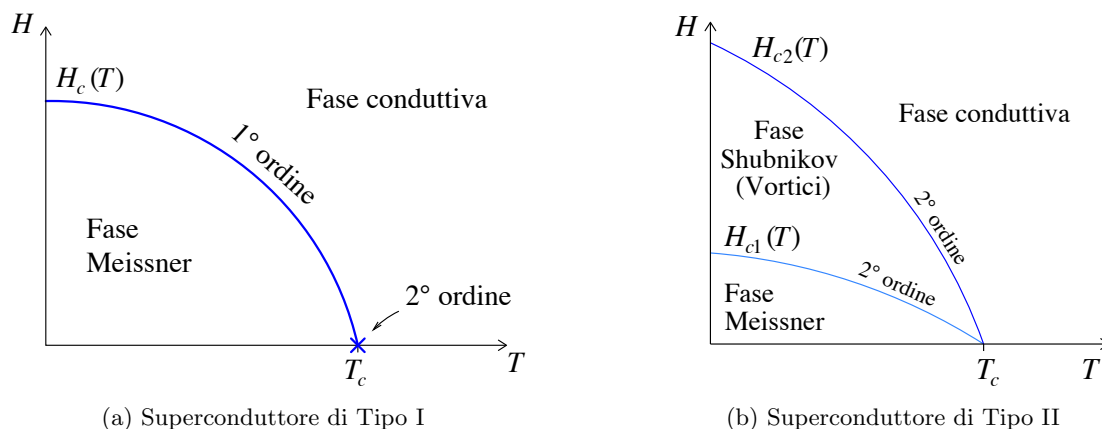


Figura 1.2: Diagrammi di fase per superconduttori di tipo I e tipo II in funzione della temperatura  $T$  e campo magnetico applicato  $H$ . Per i primi vi è un'unica curva di transizione caratterizzata dalla temperatura critica a campo magnetico nullo  $T_c$  e campo magnetico critico  $H_c$ ; la transizione in questo caso è del primo ordine per campo non nullo mentre del secondo ordine a campo nullo. Per i superconduttori di tipo II è presente anche una fase “mista” tra la fase totalmente superconduttiva e la fase normale caratterizzata dalla presenza di punti localizzati in cui il campo magnetico penetra detti vortici. Le tre fasi sono separate da transizioni del secondo ordine e caratterizzate dai campi critici  $H_{c1}$  e  $H_{c2}$  e dalla temperatura critica  $T_c$ .

Si noti inoltre che la (1.1) può essere riscritta (in *unità SI*) come  $\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M})$  con  $\mathbf{M}$  la magnetizzazione del mezzo, per cui la condizione di Meissner ( $\mathbf{B} = 0$ ) impone  $\mathbf{M} = -\mathbf{H}$ .

Per i superconduttori di tipo I si ha quindi che la magnetizzazione segue esattamente il campo esterno schermandolo completamente fino al raggiungimento del valore critico  $H_c$  per poi annullarsi improvvisamente tornando allo stato di normale conduttività; tale discontinuità è caratteristica delle transizioni del primo ordine. D'altra parte per i superconduttori di tipo II la magnetizzazione segue il campo esterno solo fino al primo valore critico  $H_{c1}$ , ma successivamente decresce gradualmente fino ad annullarsi ad  $H_{c2}$ ; in corrispondenza di tali valori critici vi è una discontinuità della derivata della magnetizzazione, peculiare delle transizioni di fase del secondo ordine (fig. 1.3).

Tale classificazione verrà caratterizzata solo attraverso la teoria GL, la teoria di London non è infatti in grado di dare una spiegazione per i superconduttori di tipo II.

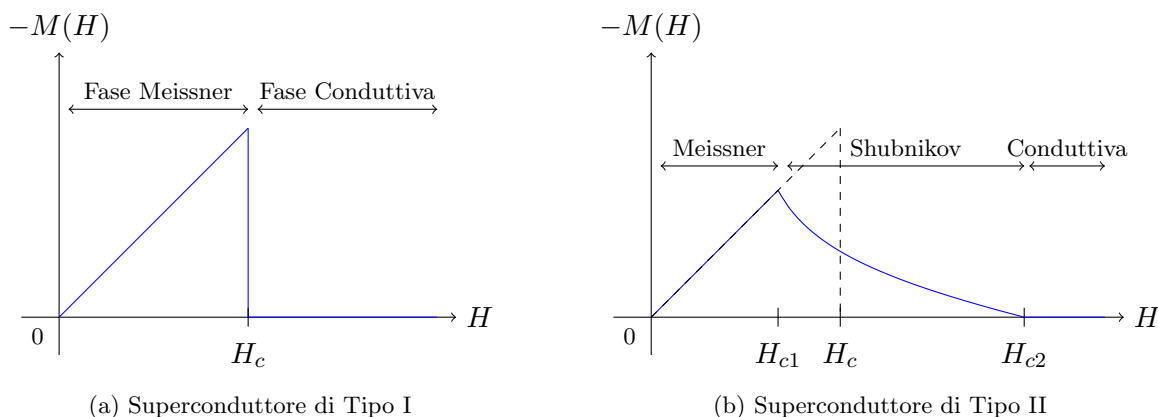


Figura 1.3: Andamento della magnetizzazione  $M$  in funzione dell'intensità del campo magnetico esterno  $H$  per i due tipi di superconduttori. Nel caso dei superconduttori di tipo I (sinistra) la magnetizzazione compensa esattamente il campo esterno rendendo il campo magnetico interno nullo (fase Meissner) fino al valore critico  $H_c$ , dopo il quale presenta una discontinuità a zero (transizione del primo ordine). Per i superconduttori di tipo II, vi è un andamento analogo fino al valore  $H_{c1}$ , dopo il quale la magnetizzazione cala gradualmente fino ad annullarsi ad  $H_{c2}$  con la conseguenza di un campo magnetico interno non più totalmente nullo in questa fase (fase di Shubnikov); si noti la discontinuità nella derivata (transizione del secondo ordine) ai punti  $H_{c1}$  e  $H_{c2}$ .

### 1.3 La Teoria di London

Dopo la scoperta del fenomeno della superconduzione molti sforzi furono impiegati per descrivere dal punto di vista teorico gli effetti osservati. Una prima formulazione fu ottenuta nel 1935 dai fratelli F. e H. London [6] che tentava di spiegare l'effetto di espulsione del campo magnetico a partire da semplici considerazioni elettrodinamiche.

I fratelli London ipotizzarono che, in analogia con la conduzione in stato normale, nello stato superconduttivo le correnti fossero generate da spostamento di portatori di carica con una data densità numerica  $n$  e che questi potessero essere distinti in portatori “normali” con densità  $n_n$  e portatori “super” con densità  $n_s$ , tali che  $n = n_n + n_s$ . Un'ulteriore importante ipotesi fu di considerare tali densità *uniformi e stazionarie*: la presenza di tale vincolo limiterà la teoria di London al solo studio di materiali omogenei e in condizioni stazionarie, vincoli che verranno poi superati dalla teoria GL. La densità di corrente totale sarà dunque data da  $\mathbf{j} = \mathbf{j}_n + \mathbf{j}_s$  dove la parte superconduttiva può essere espressa come

$$\mathbf{j}_s = -en_s \mathbf{v}_s.$$

Questa può essere riscritta considerando che la velocità  $\mathbf{v}_s$  dei portatori soddisfa  $d\mathbf{v}_s/dt = \mathbf{F}/m_e = -e\mathbf{E}/m_e$ , perciò giungiamo a

$$\frac{\partial \mathbf{j}_s}{\partial t} = \frac{e^2 n_s}{m_e} \mathbf{E}, \quad (1.2)$$

detta *prima equazione di London*.

Da quest'ultima relazione, prendendo il rotore di entrambi i membri e ricordando  $\nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B}/\partial t$  otteniamo

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{j}_s = \frac{e^2 n_s}{m_e} \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{e^2 n_s}{m_e} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t},$$

e interando entrambi i membri risulta:

$$\nabla \times \mathbf{j}_s = -\frac{e^2 n_s}{m_e} \mathbf{B} + \mathbf{C}(\mathbf{r}),$$

dove  $\mathbf{C}(\mathbf{r})$  è una costante d'integrazione da determinare sulla base delle condizioni iniziali. I fratelli London a questo punto *postularono* che  $\mathbf{C}(\mathbf{r}) \equiv 0$  su tutta la regione considerata: si noti che questo equivale a considerare delle condizioni iniziali con campo esterno nullo, per cui  $\mathbf{B} \equiv 0$  e  $\mathbf{j}_s \equiv 0$ . Si giunge dunque alla *seconda legge di London*:

$$\nabla \times \mathbf{j}_s = -\frac{e^2 n_s}{m_e} \mathbf{B}. \quad (1.3)$$

Prendendo ora il rotore di ambo della legge di Maxwell  $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} = \mu_0 (\mathbf{j}_n + \mathbf{j}_s)$  e usando la relazione appena trovata riscriviamo:

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}_n - \mu_0 \frac{e^2 n_s}{m_e} \mathbf{B}.$$

Considerando quindi solo la parte superconduttiva e utilizzando le proprietà del prodotto triplo assieme al fatto che  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$  risulta

$$-\nabla^2 \mathbf{B} + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{B}) = -\frac{\mu_0 e^2 n_s}{m_e} \mathbf{B}.$$

Definendo infine la *lunghezza di penetrazione di London* come

$$\lambda := \sqrt{\frac{m_e}{\mu_0 e^2 n_s}},$$

possiamo esprimere la relazione precedente semplicemente come:

$$\nabla^2 \mathbf{B} = \frac{1}{\lambda^2} \mathbf{B}.$$

Se ora consideriamo un campione di materiale superconduttore infinitamente esteso per  $x > 0$  e un campo magnetico esterno  $\mathbf{B} = B_0 \hat{\mathbf{y}}$ , la precedente equazione ha come soluzione

$$\mathbf{B}(x) = B_0 e^{-x/\lambda} \hat{\mathbf{y}}, \quad x \geq 0.$$

Come dalle attese dunque il campo magnetico decresce esponenzialmente col penetrare all'interno del materiale tendendo a zero per le zone interne (*bulk*) del campione.

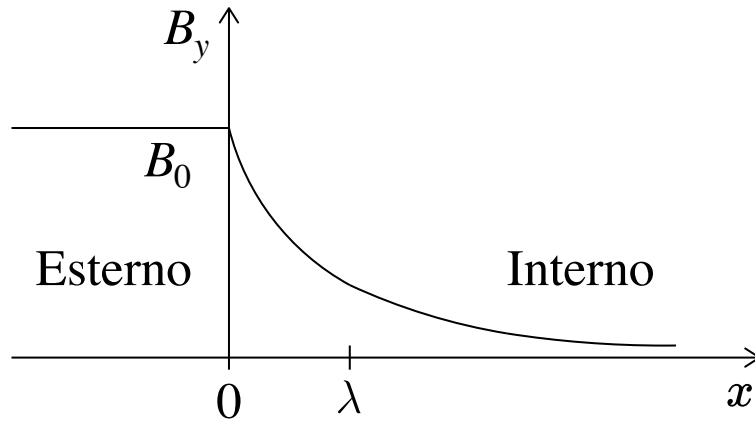


Figura 1.4: Intensità del campo magnetico  $B$  in funzione della profondità  $x$  all'interno del superconduttore. Fuori dal superconduttore ( $x < 0$ ), nel vuoto, il campo magnetico è costante  $B = B_0$ , mentre all'interno del materiale decresce esponenzialmente con lunghezza caratteristica  $\lambda$  tendendo ad annullarsi in profondità del campione, come atteso dall'effetto Meissner.

Possiamo inoltre ottenere l'andamento della corrente superconduttiva dalla (1.3) assieme all'equazione di continuità in condizioni stazionarie  $\nabla \cdot \mathbf{j}_s = 0$ :

$$\mathbf{j}_s(x) = -\frac{1}{\mu_0 \lambda^2} B_0 e^{-x/\lambda} \hat{\mathbf{z}}, \quad x \geq 0.$$

Le correnti di superconduttività si spostano dunque parallelamente alla superficie di interfaccia del campione e perpendicolarmente al campo magnetico applicato decrescono esponenzialmente mano a mano che ci si allontana dalla superficie. In questo contesto tali correnti possono essere pensate come *correnti di schermaggio* che impediscono la penetrazione del campo magnetico esterno.



## Capitolo 2

# La Teoria di Ginzburg-Landau

Come evidenziato nel paragrafo precedente, la teoria di London per la superconduttività rivela diversi limiti, dovuti in larga parte all'ipotesi di considerare la densità  $n_s$  come costante ed uniforme.

Così nel 1950 Ginzburg e Landau [7], partendo dalla teoria delle transizioni di fase sviluppata da quest'ultimo, affrontarono la trattazione dei superconduttori con un approccio termodinamico e macroscopico. Di seguito introdurremo il formalismo di Landau per le transizioni di fase per poi estenderlo ai superconduttori non omogenei in assenza di campo magnetico e successivamente ai superconduttori in presenza di campo magnetico arrivando alle celebri *equazioni di Ginzburg-Landau*.

### 2.1 Formalismo delle Transizioni di Fase

L'idea di Landau è quella di descrivere le transizioni di fase attraverso il cosiddetto *parametro d'ordine*, ovvero una quantità nulla in uno stato del sistema e che risulta invece diversa da zero al compimento della transizione. Landau suppone inoltre che tale parametro rimanga costante nel tempo ed uniforme su tutto il volume considerato: la teoria di Landau, a questo livello, è perciò un *teoria di campo medio*.

A questo punto si assume che sia possibile esprimere il potenziale termodinamico d'interesse (ad esempio l'*energia libera* o l'*entalpia*), come *funzione regolare* del parametro d'ordine (e delle variabili termodinamiche) e sia possibile espanderlo in termini del parametro d'ordine attorno alla condizione di equilibrio; si ipotizza inoltre che tale procedura rispetti le simmetrie espresse dal sistema.

Nel caso dei superconduttori, Ginzburg e Landau assunsero che l'energia libera  $\mathcal{F}$  del sistema potesse dipendere in generale da un parametro d'ordine complesso  $\psi$  che fosse responsabile della transizione da stato normale a quello superconduttivo: tale quantità doveva perciò essere identicamente nulla per  $T > T_c$  e diversa da zero per  $T < T_c$ .

È dunque possibile esprimere l'energia libera come funzione di  $\psi$  attorno al punto di transizione ( $\psi = 0$ ) espandendo in serie di Taylor, tuttavia, poiché  $\mathcal{F}$  è una quantità reale essa dipenderà dal parametro d'ordine solo attraverso il modulo  $|\psi|$ :

$$\mathcal{F}(T) = F_n(T) + F_s(T) = F_n(T) + \int d^3r \left[ \alpha(T)|\psi|^2 + \frac{\beta(T)}{2}|\psi|^4 + \dots \right], \quad (2.1)$$

dove si è distinto tra la parte normale da quella superconduttiva e si sono eliminati i termini con esponente dispari in quanto non differenziabili in  $|\psi| = 0$ .

I coefficienti  $\alpha$  e  $\beta$  sono dei parametri fenomenologici e sono in generale funzioni della temperatura (si noti che il fattore 2 è per convenzione); si suppone inoltre che  $\beta > 0$  così da assicurare che l'energia libera abbia un minimo, in caso contrario non si avrebbe una situazione fisicamente accettabile e sarebbe necessario espandere  $\mathcal{F}$  ad ordini superiori.

Nel caso considerato di parametro d'ordine uniforme, la precedente relazione può essere riscritta come

$$\mathcal{F}(T) = F_n(T) + \alpha(T)V|\psi|^2 + \frac{\beta(T)}{2}V|\psi|^4 + \dots \quad (2.2)$$

dove  $V$  è il volume del campione considerato.

È possibile a questo punto osservare che l'andamento dell'energia libera in funzione del parametro d'ordine è totalmente regolata dal coefficiente  $\alpha$  (fig. 2.1), per cui vi possono essere due casi:

- $\alpha(T) \geq 0$  :  $\mathcal{F}$  ha un singolo minimo in  $\psi = 0$ , ovvero l'equilibrio del sistema corrisponde allo stato normale.
- $\alpha(T) < 0$  :  $\mathcal{F}$  presenta la caratteristica forma di potenziale *a cappello messicano* con un anello di punti di minimo dati da una fase arbitraria e dal modulo  $|\psi|$  tale che:

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial |\psi|} = 2\alpha|\psi| + 2\beta|\psi|^3 = 0 \quad \Rightarrow \quad |\psi| = \sqrt{-\frac{\alpha}{\beta}} \text{ (minimo)} \quad \text{oppure} \quad |\psi| = 0 \text{ (massimo)}.$$

Il sistema in questo caso tenderà dunque ad un punto di equilibrio con  $\psi \neq 0$ , ovvero ad uno stato superconduttivo.

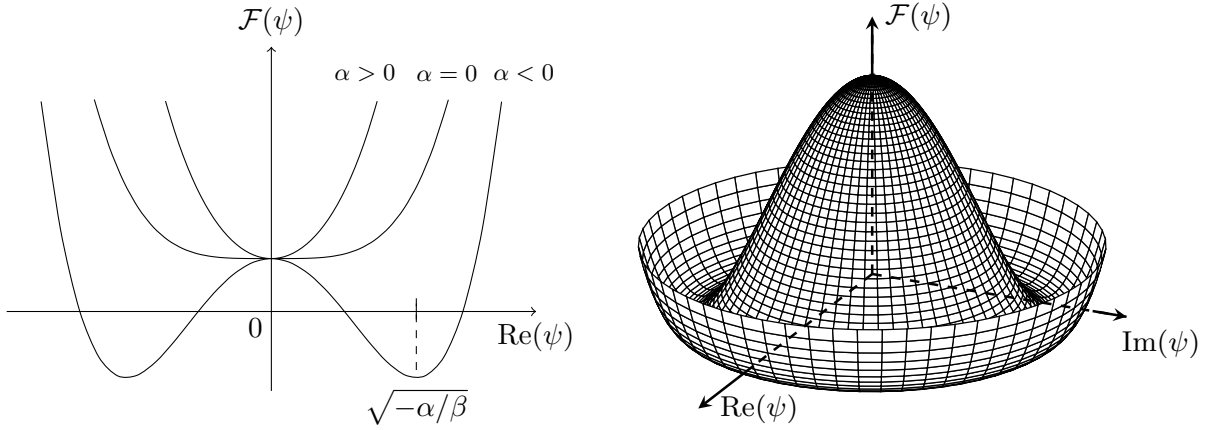


Figura 2.1: A sinistra, grafico dell'energia libera  $\mathcal{F}$  data dalla (2.2) per un superconduttore omogeneo in assenza di campo magnetico in funzione della parte reale del parametro d'ordine  $\psi$  al variare di  $\alpha$ . L'energia presenta un unico minimo in  $\psi = 0$  per  $\alpha \geq 0$ , mentre per  $\alpha < 0$  si delinea un intero anello di possibili minimi in corrispondenza di  $|\psi| = \sqrt{-\alpha/\beta}$ . Quest'ultima casistica è rappresentata nel grafico a destra.

Risulta perciò chiaro che la transizione di fase in questione occorre per  $\alpha(T) = 0$  con  $T = T_c$ , per cui, per piccole variazioni di temperatura attorno alla temperatura critica, possiamo esprimere:

$$\begin{aligned} \alpha(T) &\simeq a(T - T_c), \quad \text{con } a > 0 \\ \beta(T) &\simeq \text{const.} \end{aligned}$$

E si ottiene perciò per il parametro d'ordine:

$$|\psi(T)| = \begin{cases} 0, & \text{se } T \geq T_c \\ \sqrt{\frac{a}{\beta}(T_c - T)}, & \text{se } T < T_c. \end{cases} \quad (2.3)$$

A questo punto, nonostante la natura macroscopica dell'approccio appena indagato, Ginzburg e Landau cercarono di dare una prima interpretazione della natura del parametro d'ordine: in analogia con il *condensato di Bose-Einstein* e la teoria di London, si potrebbe in generale intendere  $\psi \equiv \psi(\mathbf{r})$

come una “macro” funzione d’onda legata alla parte ‘super’ del sistema, e in questo senso imporre la normalizzazione:

$$\int d^3r |\psi(\mathbf{r})|^2 \stackrel{!}{=} \tilde{N}_s = \int d^3r \tilde{n}_s(\mathbf{r}),$$

con  $\tilde{N}_s$  il numero totale di costituenti legati alla natura superconduttiva del materiale. In seguito alla teoria BCS [8, 9], risulterà chiaro che la funzione d’onda  $\psi(\mathbf{r})$  si riferisce alle cosiddette *coppie di Cooper*, stati legati di due elettroni (o due lacune) che viaggiano all’unisono all’interno del materiale superconduttivo. Avendo dunque già indicato nel capitolo precedente  $n_s$  la densità di elettroni contribuenti allo stato superconduttivo, si hanno le seguenti relazioni generali tra parametro d’ordine  $\psi$ , densità di coppie di Cooper  $\tilde{n}_s$  e densità di elettroni ‘super’  $n_s$ :

$$|\psi(\mathbf{r})|^2 = \tilde{n}_s(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}n_s(\mathbf{r}). \quad (2.4)$$

Alla luce di tale interpretazione risulta inoltre naturale spiegare la dipendenza di  $\mathcal{F}$  dal solo modulo di  $\psi = |\psi|e^{i\phi}$ , difatti due stati quantistici distinti solamente da un fattore globale di fase sono tra loro indistinguibili, tale simmetria viene detta *simmetria globale* U(1) (dal fatto che lo stato è invariante sotto trasformazioni di matrici unitarie  $1 \times 1$ , i.e.  $e^{i\phi}$ ). Si osservi tuttavia che tale simmetria viene violata ogni qualvolta il sistema sceglie (spontaneamente) una condizione di equilibrio, lo stato  $\psi$  in sé non è difatti invariante per cambio di fase: si parla in questo caso di *rottura spontanea* della simmetria U(1).

## 2.2 Ginzburg-Landau per i Superconduttori Non Omogenei

L’approccio di Landau appena descritto, come evidenziato più volte, si limita a considerare il parametro d’ordine, e di conseguenza la densità  $n_s$ , costante su tutto il campione. Per estendere la trattazione a materiali non omogenei Ginzburg e Landau proposero di estendere la dipendenza dell’energia libera anche al *gradiente* del parametro d’ordine. L’espressione (2.1) diviene così

$$\mathcal{F}[\psi] = F_n + \int d^3r \left[ \alpha |\psi(\mathbf{r})|^2 + \frac{\beta}{2} |\psi(\mathbf{r})|^4 + \gamma |\nabla \psi(\mathbf{r})|^2 \right]. \quad (2.5)$$

Si osservi dunque che, alla luce dell’interpretazione data in precedenza per il parametro d’ordine, il termine appena aggiunto può essere inteso come l’energia cinetica associata alle coppie di Cooper. Potremo difatti riscrivere

$$\mathcal{F}[\psi] = F_n + \int d^3r \left[ \alpha |\psi(\mathbf{r})|^2 + \frac{\beta}{2} |\psi(\mathbf{r})|^4 + \frac{1}{2m^*} \left| \frac{\hbar}{i} \nabla \psi(\mathbf{r}) \right|^2 \right],$$

per cui  $\gamma = \hbar^2/2m^*$  e dove  $m^*$  rappresenta la *massa efficace* delle coppie di Cooper. Considereremo dunque di seguito  $\gamma > 0$ .

Analogamente a quanto svolto per il caso omogeneo, cerchiamo allora un’espressione del parametro d’ordine  $\psi(\mathbf{r})$  tale che minimizzi  $\mathcal{F}[\psi]$ . Poiché ora la (2.5) è un *funzionale*, sarà necessario applicare il principio variazionale.

Si consideri dunque una piccola variazione (a estremi fissati<sup>1</sup>)  $\eta(\mathbf{r})$  del parametro d’ordine rispetto alla soluzione da noi cercata  $\psi(\mathbf{r})$ , allora  $\psi$  minimizzerà  $\mathcal{F}$  se vale che

$$\delta \mathcal{F} = 0, \quad \forall \eta. \quad (2.6)$$

<sup>1</sup>S’intende che  $\eta(\mathbf{r}) \equiv 0$  per i punti sul bordo del conduttore.

Applicando la definizione di variazione di funzionale risulta

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{F} &= \int d^3r \left[ \eta \frac{\delta\mathcal{F}}{\delta\psi^*} + \eta^* \frac{\delta\mathcal{F}}{\delta\psi} \right] = \mathcal{F}[\psi + \eta] - \mathcal{F}[\psi] = \\ &= \int d^3r \left[ \alpha\psi^*\eta + \alpha\psi\eta^* + \beta\psi^*|\psi|^2\eta + \beta\psi|\psi|^2\eta^* + \gamma(\nabla\psi \cdot \nabla\eta^*) + \gamma(\nabla\psi^* \cdot \nabla\eta) \right] + \mathcal{O}(\eta^2, (\eta^*)^2),\end{aligned}\quad (2.7)$$

dove trascuriamo i termini non lineari in  $\eta$  ed  $\eta^*$ . A questo punto possiamo procedere integrando per parti rispetto a  $\eta$  i termini contenenti i gradienti della variazione e raccogliendo per  $\eta$  ed  $\eta^*$ , ottenendo

$$\delta\mathcal{F} = \int d^3r \left[ \eta (\alpha\psi^* + \beta\psi^*|\psi|^2 - \gamma\nabla^2\psi^*) + \eta^* (\alpha\psi + \beta\psi|\psi|^2 - \gamma\nabla^2\psi) \right] + \mathcal{O}(\eta^2, (\eta^*)^2), \quad (2.8)$$

dove i termini di bordo si annullano in quanto  $\eta(\mathbf{r})$  è a estremi fissati<sup>2</sup>. La condizione (2.6) è quindi soddisfatta per qualsiasi scelta di  $\eta$  e  $\eta^*$  se i fattori tra parentesi sono identicamente nulli su tutto il volume considerato (si noti inoltre che tali fattori sono l'uno il coniugato dell'altro), arrivando dunque alla cosiddetta *prima equazione di Ginzburg-Landau* per i superconduttori non omogenei:

$$-\frac{\hbar^2}{2m^*}\nabla^2\psi(\mathbf{r}) + \alpha\psi(\mathbf{r}) + \beta\psi(\mathbf{r})|\psi(\mathbf{r})|^2 = 0. \quad (2.9)$$

Si noti l'analogia tra l'espressione appena ottenuta e l'equazione di Schrödinger lineare, a differenza della quale compare un termine dell'ordine cubico.

Prima di procedere con il ricavare una soluzione nel caso unidimensionale, si osservi che il procedimento appena svolto equivale all'applicare, in forma opportunamente modificata, le *equazioni di Eulero-Lagrange*: nell'ambito delle teorie di campo, difatti, possiamo considerare il funzionale  $\mathcal{F}$  come l'analogo di un funzionale d'azione (nel nostro caso un funzionale di energia) applicato ad una *densità lagrangiana*<sup>3</sup>  $\mathcal{L}(\psi(\mathbf{r}), \nabla\psi(\mathbf{r}), \mathbf{r}) = \alpha|\psi(\mathbf{r})|^2 + \frac{\beta}{2}|\psi(\mathbf{r})|^4 + \gamma|\nabla\psi(\mathbf{r})|^2$ . Confrontando difatti la prima uguaglianza della (2.7) con la (2.8) si verifica la corrispondenza:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi^*} - \nabla \cdot \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\nabla\psi^*)} = \frac{\delta\mathcal{F}}{\delta\psi^*} = -\frac{\hbar^2}{2m^*}\nabla^2\psi(\mathbf{r}) + \alpha\psi(\mathbf{r}) + \beta\psi(\mathbf{r})|\psi(\mathbf{r})|^2,$$

dove nella prima uguaglianza abbiamo usato la definizione di derivata funzionale applicata ad  $\mathcal{F}$ . Derivando invece rispetto a  $\psi$  piuttosto che  $\psi^*$  avremo ottenuto la complessa coniugata della (2.9).

## Lunghezza di Coerenza

Mostriamo quindi un'applicazione dei risultati appena trovati per un superconduttore unidimensionale infinitamente esteso nel semiasse  $x > 0$  e con interfaccia ad  $x = 0$ . Possiamo dunque riscrivere la (2.9) in funzione della sola  $x$ :

$$-\frac{\hbar^2}{2m^*}\ddot{\psi}(x) + \alpha\psi(x) + \beta\psi(x)^3 = 0, \quad x \geq 0,$$

dove abbiamo assunto reale il parametro d'ordine e per cui ci si aspetta che all'interno del volume il parametro tenda alla soluzione di campo medio (2.3); consideriamo perciò le condizioni al contorno:

$$\begin{cases} \psi(0) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \psi(x) = \psi_0 = \sqrt{-\frac{\alpha}{\beta}}. \end{cases} \quad (2.10)$$

<sup>2</sup>Più precisamente, detto  $\Omega$  il volume del campione, l'integrazione per parti assieme al teorema di Stokes porta per il termine di bordo  $\int_{\Omega} d^3r \nabla \cdot (\eta(\mathbf{r})\nabla\psi(\mathbf{r})) = \oint_{\partial\Omega} \eta(\mathbf{r})\nabla\psi(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{\Sigma} \equiv 0$  poiché  $\eta(\mathbf{r}) \equiv 0 \forall \mathbf{r} \in \partial\Omega$ .

<sup>3</sup>Più in generale, nell'ambito delle teorie di campo (scalare), una *densità lagrangiana* è una funzione  $\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu\phi, x^\mu)$  di un campo scalare  $\phi(x^\mu)$ , delle sue derivate e delle quadricordinate  $x^\mu$ .



Riscrivendo a questo punto  $\psi(x) = \psi_0\varphi(x)$  otteniamo l'equazione

$$\underbrace{-\frac{\hbar^2}{2m^*\alpha}}_{>0} \ddot{\varphi}(x) + \varphi(x) - \varphi(x)^3 = 0, \quad x \geq 0, \quad (2.11)$$

e dove definiamo la *lunghezza di coerenza di Ginzburg-Landau*  $\xi > 0$ , data da:

$$\xi(T)^2 := -\frac{\hbar^2}{2m^*\alpha(T)} \simeq \frac{\hbar^2}{2m^*a(T_c - T)}. \quad (2.12)$$

Possiamo perciò risolvere la (2.11) attraverso l'uso di un integrale primo. In analogia con le equazioni della dinamica si ottiene infatti

$$\ddot{\varphi}(x) = -\frac{1}{\xi^2}(\varphi(x) - \varphi(x)^3) = -\frac{\partial W(\varphi)}{\partial \varphi} \Rightarrow \frac{1}{2}\dot{\varphi}(x)^2 + W(\varphi(x)) \equiv k,$$

dove  $W(\varphi) = 1/\xi^2 \int d\varphi (\varphi - \varphi^3) = 1/(4\xi^2) (2\varphi^2 - \varphi^4)$  e  $k$  è una costante. Imponendo dunque le condizioni all'infinito per  $\varphi(x)$  a partire da (2.10):  $\varphi(x) \rightarrow 1$  e  $\dot{\varphi}(x) \rightarrow 0$  per  $x \rightarrow \infty$ <sup>4</sup>, da cui  $k = 1/(4\xi^2)$  ed è quindi possibile risolvere per  $\varphi(x)$  ricordando che questa è necessariamente positiva:

$$\dot{\varphi}(x) = \sqrt{2k - 2W(\varphi(x))} \Rightarrow \int_{\varphi(0)}^{\varphi(x)} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - 2\varphi^2 + \varphi^4}} = \tanh^{-1}(\varphi(x)) = \frac{x}{\sqrt{2}\xi},$$

nella quale si è usata l'altra condizione della (2.10) che impone  $\varphi(0) = 0$ .

Si giunge dunque all'espressione per il parametro d'ordine, legato ricordiamo alla densità di particelle 'super', data da:

$$\psi(x) = \sqrt{-\frac{\alpha}{\beta}} \tanh\left(\frac{x}{\sqrt{2}\xi}\right), \quad x \geq 0. \quad (2.13)$$

L'andamento del parametro d'ordine è riportato nel grafico seguente:

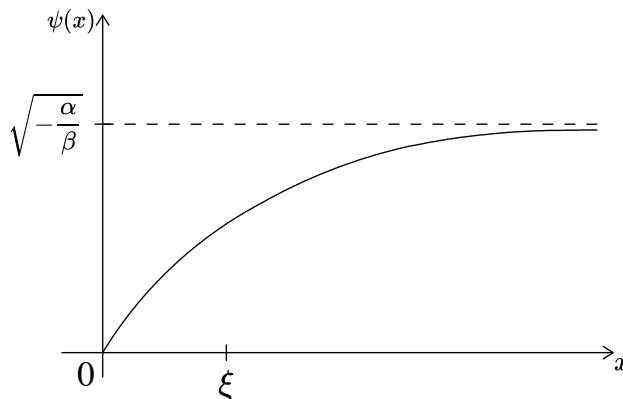


Figura 2.2: Andamento del parametro d'ordine  $\psi(x)$  in funzione della profondità  $x$  all'interno di un superconduttore unidimensionale non omogeneo in assenza di campo magnetico. Questo tende alla soluzione di campo medio in profondità nel materiale crescendo esponenzialmente con costante caratteristica  $\xi(T)$ , in generale funzione della temperatura. L'andamento analitico è dato dalla formula (2.13).

<sup>4</sup>La condizione sulla derivata è dedotta dal comportamento asintotico di  $\psi(x)$  assieme alla richiesta che  $\psi \in C^\infty$ .

## 2.3 Ginzburg-Landau per i Superconduttori in Campo Magnetico

La discussione fin qui elaborata è stata utile per descrivere il comportamento di materiali le cui particelle ‘super’ non presentino carica elettrica e che dunque non interagiscano con il campo magnetico; la teoria formulata da Ginzburg e Landau mostra tuttavia la sua piena versatilità quando vi si include anche quest’ultima possibilità. Per tenere dunque conto della presenza del campo magnetico e dell’accoppiamento tra questo e le particelle che costituiscono il condensato superconduttivo è necessario operare alcune modifiche al funzionale della (2.5):

- Per includere l’accoppiamento tra le particelle ‘super’ di carica  $q$  e il campo magnetico  $\mathbf{B}(\mathbf{r})$  consideriamo l’ipotesi di *accoppiamento minimale*, per cui si opera la sostituzione

$$-i\hbar\nabla \rightarrow -i\hbar\nabla - q\mathbf{A}(\mathbf{r}),$$

con  $\mathbf{A}$  il potenziale vettore tale che  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ .

A rigore sarebbe inoltre necessario includere un termine proporzionale a  $\mathbf{S} \cdot \mathbf{B}$  che tenga conto dell’interazione tra lo spin dei portatori di carica e il campo magnetico; tuttavia nel proseguo della trattazione considereremo solamente sistemi con spin nullo (ipotesi che comunque va ad applicarsi alla maggior parte dei materiali superconduttori).

- Per la presenza del campo magnetico bisogna inoltre considerare anche l’energia da esso associata. Aggiungeremo perciò anche un termine di densità di energia magnetica pari a  $B^2/2\mu_0$ .  
Ad essere precisi, a priori sarebbe necessario includere anche il termine relativo alla densità di campo elettrico, tuttavia, come osservato (§1.1) all’interno di un superconduttore all’equilibrio il campo elettrico è identicamente nullo.
- In presenza di un campo magnetico esterno  $\mathbf{H}$  sarebbe opportuno aggiungere anche l’energia magnetica  $\mu_0/2H^2$ : a questo punto si avrebbe effettivamente un’*energia libera* [10]; tuttavia nella seguente trattazione il campo esterno rimarrà fisso e dunque non contribuirà alla variazione del funzionale. Ci riserviamo dunque di inserire tale contributo successivamente per quando sarà necessario.

Possiamo così riportare la scrittura completa del *funzionale di energia libera di Ginzburg-Landau*:

$$\mathcal{F}[\psi, \mathbf{A}] = F_n + \int d^3r \left[ \alpha |\psi(\mathbf{r})|^2 + \frac{\beta}{2} |\psi(\mathbf{r})|^4 + \frac{1}{2m^*} \left| \left( -i\hbar\nabla - q\mathbf{A}(\mathbf{r}) \right) \psi(\mathbf{r}) \right|^2 + \frac{|\nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r})|^2}{2\mu_0} \right]. \quad (2.14)$$

Per ricavare dunque le condizioni che minimizzano tale energia libera possiamo applicare le equazioni di Eulero-Lagrange nel senso delle teorie di campo così come già evidenziato nel caso dei superconduttori non omogenei:

$$\frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \psi^*} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^*} - \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi^*)} \right) = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \mathbf{A}} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu} - \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} \right) = 0, \quad \forall \nu,$$

dove  $\mathcal{L}$  è la quantità tra parentesi quadre nella (2.14) e dove siamo passati alla notazione indicizzata per maggiore chiarezza (si noti che nel nostro caso gli indici  $\mu$  e  $\nu$  corrono solo sulle tre componenti spaziali e indici ripetuti sono sommati secondo la convenzione di Einstein).

Per la prima si ottiene facilmente la *prima equazione di Ginzburg-Landau* per i superconduttori:

$$\left( \frac{1}{2m^*} (i\hbar\nabla + q\mathbf{A})^2 + \alpha + \beta |\psi|^2 \right) \psi = 0. \quad (2.15)$$

Per la seconda equazione occorre invece fare attenzione al termine di densità magnetica, difatti per il secondo termine dell'equazione di Eulero-Lagrange si ha:

$$\begin{aligned}\partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} \right) &= \frac{1}{2\mu_0} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left[ \frac{\partial}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} \left( (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) \right) \right] = \frac{1}{2\mu_0} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left[ \frac{\partial}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} \left( (\epsilon_{ijk} \partial_i A_j) (\epsilon_{lmk} \partial_l A_m) \right) \right] \\ &= \frac{\epsilon_{ijk} \epsilon_{lmk}}{2\mu_0} \partial_\mu [\delta_{\mu i} \delta_{\nu j} (\partial_l A_m) + \delta_{\mu l} \delta_{\nu m} (\partial_i A_j)] = \frac{2}{2\mu_0} \epsilon_{\mu\nu k} \partial_\mu [\epsilon_{lmk} \partial_l A_m] = -\frac{(\nabla \times \nabla \times \mathbf{A})_\nu}{\mu_0},\end{aligned}$$

dove si è usato  $(\nabla \times \mathbf{A})_k = \epsilon_{ijk} \partial_i A_j$  con  $\epsilon_{ijk}$  il simbolo di Levi-Civita. Aggiungendo il primo termine dell'equazione di Eulero-Lagrange si arriva alla condizione:

$$-i \frac{\hbar q}{2m^*} (\psi \nabla \psi^* - \psi^* \nabla \psi) + \frac{q^2}{m^*} |\psi|^2 \mathbf{A} + \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \nabla \times \mathbf{A}) = 0.$$

Ricordando l'equazione di Maxwell  $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$  si ottiene la *seconda equazione di Ginzburg-Landau*:

$$\mathbf{j}_s = i \frac{\hbar q}{2m^*} (\psi \nabla \psi^* - \psi^* \nabla \psi) - \frac{q^2}{m^*} |\psi|^2 \mathbf{A}, \quad (2.16)$$

dove  $\mathbf{j}_s$  è la *densità di supercorrente* generata dai portatori di carica 'super' nell'assunzione che la densità di carica normale sia in confronto trascurabile.

Se ora consideriamo un parametro d'ordine nella forma generale  $\psi(\mathbf{r}) = |\psi(\mathbf{r})| e^{i\theta(\mathbf{r})}$ , il primo termine dell'equazione appena ottenuta può essere scritto come

$$\frac{i\hbar q}{2m^*} (\psi \nabla \psi^* - \psi^* \nabla \psi) = q |\psi|^2 \frac{\hbar}{m^*} \nabla \theta =: q |\psi|^2 \mathbf{v}_s,$$

dove abbiamo definito la *velocità superfluida* come

$$\mathbf{v}_s(\mathbf{r}) := \frac{\hbar}{m^*} \nabla \theta(\mathbf{r}). \quad (2.17)$$

Il primo termine della seconda equazione di Ginzburg-Landau può essere così inteso come il contributo alla densità di supercorrente dovuto ai portatori di carica  $q$ , massa  $m^*$  e densità  $|\psi|$ , che viaggiano a velocità  $\mathbf{v}_s$  all'interno del materiale. Possiamo allora riscrivere la (2.16) in termini di questa nuova quantità:

$$\mathbf{j}_s = q |\psi|^2 \mathbf{v}_s - \frac{q^2}{m^*} |\psi|^2 \mathbf{A}. \quad (2.18)$$

Si osservi inoltre che nel limite di parametro d'ordine uniforme la seconda equazione di Ginzburg-Landau si semplifica a

$$\mathbf{j}_s = -\frac{q^2}{m^*} |\psi|^2 \mathbf{A}.$$

Ricordando dunque le considerazioni fatte alla luce della teoria BCS espresse al paragrafo 2.1 e la relazione (2.4) che lega il modulo del parametro d'ordine alla densità di elettroni, risulta naturale interpretare la carica  $q$  e la massa efficace  $m^*$  come la carica e la massa associate alle coppie di Cooper presenti nel materiale. Se infatti si applicano le sostituzioni:  $2|\psi|^2 = n_s$ ,  $q = -2e$  e  $m^* = 2m_e$  si ottiene:

$$\mathbf{j}_s = -\frac{e^2 n_s}{m_e} \mathbf{A},$$

che risulta equivalente all'espressione (1.3) per la seconda legge di London. La teoria di Ginzburg-Landau si conferma quindi essere una generalizzazione della teoria di London, la quale ne rappresenta il limite per un parametro d'ordine uniforme.

È quindi inoltre possibile esprimere la *lunghezza di penetrazione* ricavata dalla teoria di London (ottenuta ricordiamo nella condizione densità  $n_s$  uniforme) in funzione dei soli parametri della teoria di Ginzburg-Landau:

$$\lambda = \sqrt{\frac{m_e}{\mu_0 e^2 n_s}} = \sqrt{\frac{m_e}{2\mu_0 e^2 |\psi|^2}} \simeq \sqrt{\frac{m_e}{2\mu_0 e^2 (-\alpha/\beta)}}. \quad (2.19)$$

Abbiamo fin qui identificato due lunghezze caratteristiche dipendenti dai parametri fenomenologici della teoria: la *lunghezza di penetrazione*  $\lambda(T)$ , che regola la profondità di penetrazione del campo magnetico esterno all'interno del materiale, e la *lunghezza di coerenza*  $\xi(T)$ , che modula invece carattere superconduttivo del materiale attraverso il parametro d'ordine. Notiamo che entrambe queste lunghezze sono dipendenti dalla temperatura e per valori di essa vicini alla temperatura critica scalano entrambe come  $1/\sqrt{T_c - T}$ ; definiamo dunque la quantità adimensionale

$$\kappa := \frac{\lambda(T)}{\xi(T)}, \quad (2.20)$$

il *parametro di Ginzburg-Landau*, indipendente dalla temperatura in un intorno di  $T_c$ . Come vedremo nel prossimo capitolo tale parametro sarà fondamentale per la caratterizzazione dei superconduttori di tipo I e tipo II.

## Capitolo 3

# Superconduttori di Tipo I e Tipo II e i Vortici Quantizzati

Ci proponiamo dunque di caratterizzare i due tipi di superconduttori cercando innanzitutto un'espressione per i relativi campi critici in un intorno della temperatura critica a partire dai superconduttori di tipo I per poi analizzare nel dettaglio quelli di tipo II ed in particolare le strutture dei vortici quantizzati presenti in questi ultimi.

### 3.1 Superconduttori di Tipo I

È utile a questo punto esprimere l'energia del sistema considerato attraverso l'*energia libera di Gibbs* piuttosto che quella di Helmholtz come fatto finora: difatti per l'energia di Gibbs in presenza di campo magnetico esterno ha come variabile naturale il campo  $\mathbf{H}$ , direttamente controllato dallo sperimentatore, mentre quella di Helmholtz presenta come variabile naturale la magnetizzazione  $\mathbf{M}$ , molto più difficile da regolare. L'appropriata<sup>1</sup> *trasformata di Legendre* fornisce l'energia di Gibbs a partire da quella di Helmholtz in funzione della temperatura  $T$  e del campo magnetico  $\mathbf{H}$  [10, 13]:

$$G(T, \mathbf{H}) = F - \int d^3r \mathbf{B}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{H}(\mathbf{r}) = \mathcal{F} + \frac{\mu_0}{2} \int d^3r |\mathbf{H}(\mathbf{r})|^2 - \int d^3r \mathbf{B}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{H}(\mathbf{r}), \quad (3.1)$$

dove  $F$  è l'energia libera di Helmholtz e  $\mathcal{F}$  data dalla (2.14).

Se consideriamo il materiale nello stato superconduttivo, in una zona lontana dai bordi il parametro d'ordine tenderà alla soluzione di campo medio  $|\psi| \equiv \sqrt{-\alpha/\beta}$  e, per effetto Meissner, avremo  $\mathbf{B} = 0$  e dunque  $\mathbf{A} = 0$  (nella gauge di London). Perciò la *densità* di energia libera di Gibbs in tale stato risulterà:

$$g_s = f_n + f_s + \frac{\mu_0}{2} |\mathbf{H}|^2 - \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} = f_n + \alpha |\psi|^2 + \frac{\beta}{2} |\psi|^4 + \frac{1}{2m^*} \left| \left( -i\hbar \nabla - q\mathbf{A} \right) \psi \right|^2 + \frac{|\mathbf{B}|^2}{2\mu_0} + \frac{\mu_0}{2} H^2 = f_n - \frac{\alpha^2}{2\beta} + \frac{\mu_0}{2} H^2.$$

D'altra parte, nel caso in cui il materiale fosse nello stato normale avremo che  $\psi = 0$  e  $\mathbf{B} \approx \mu_0 \mathbf{H}$ , dove la magnetizzazione nello stato normale è in questo caso trascurabile [12, 13, 14]. Otteniamo dunque:

$$g_n = f_n + \alpha |\psi|^2 + \frac{\beta}{2} |\psi|^4 + \frac{1}{2m^*} \left| \left( -i\hbar \nabla - q\mathbf{A} \right) \psi \right|^2 + \frac{B^2}{2\mu_0} + \frac{\mu_0}{2} H^2 - \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} = f_n.$$

Il sistema tenderà quindi a passare allo stato superconduttivo solamente quando questo rappresenta un guadagno in termini di energia libera, ovvero quando

<sup>1</sup>Non vi è una convezione comune in letteratura per indicare l'energia libera in presenza di campi elettromagnetici. Le discordanze nascono dal considerare o meno come energia del mezzo anche quella dovuta all'allestimento e al mantenimento dei campi magnetici esterni dell'apparato, per dettagli si veda [11]. Di seguito non considereremo l'energia dovuta alle correnti esterne dell'apparato, per un approccio complementare si veda [12].

$$g_s - g_n = -\frac{\alpha^2}{2\beta} + \frac{\mu_0}{2} H^2 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad H < H_c(T) := \sqrt{\frac{\alpha(T)^2}{\mu_0\beta}}, \quad (3.2)$$

dove abbiamo ottenuto un'espressione per il *campo critico* esterno  $H_c(T)$ .

Attraverso quest'ultima relazione è inoltre possibile esprimere i parametri fenomenologici  $\alpha$  e  $\beta$  in termini delle quantità sperimentalmente misurabili  $H_c$  e  $\lambda$ , difatti ricordando la (2.19) nel caso di soluzione di campo medio, si ha:

$$\alpha = -2\mu_0^2 \frac{e^2}{m_e} H_c^2 \lambda^2, \quad \beta = \mu_0^3 \frac{e^2}{m_e} H_c^2 \lambda^4. \quad (3.3)$$

## 3.2 Superconduttori di Tipo II

Come visto al primo capito, la differenza principale che distingue i superconduttori di tipo I da quelli di tipo II è la presenza in quest'ultimi di una *fase mista* delimitata da due campi critici  $H_{c1}$  e  $H_{c2}$  nella quale il campo magnetico esterno riesce a penetrare in punti localizzati del materiale, detti *vortici*.

Un contributo fondamentale per la scoperta dei superconduttori di tipo II è dovuto alle misure sperimentali di L.V. Shubnikov nel 1937 [15] e alla successiva formulazione teorica di A.A. Abrikosov nel 1957 [16] che utilizzò la teoria da poco formulata da Ginzburg e Landau per descrivere in modo formale la creazione dei vortici.

### 3.2.1 Quantizzazione del Flusso

Il concetto fondamentale da cui partì Abrikosov fu osservare che le equazioni di Ginzburg-Landau portavano alla quantizzazione del flusso del campo magnetico all'interno di un materiale superconduttore.

Si consideri infatti una superficie chiusa  $S$  di cui almeno il bordo  $\partial S$  sia all'interno di un materiale nello stato superconduttivo. In tali condizioni possiamo calcolare il flusso del campo magnetico  $\Phi$  come:

$$\Phi = \int_S d^2\mathbf{s} \cdot \mathbf{B} = \int_S d^2\mathbf{s} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = \oint_{\partial S} d\boldsymbol{\ell} \cdot \mathbf{A},$$

dove nell'ultima uguaglianza si è usato il teorema di Stokes. Risolvendo ora la seconda equazione di Ginzburg-Landau (2.16) per  $\mathbf{A}$  e inserendola in quest'ultima espressione si ottiene

$$\begin{aligned} \Phi &= \oint_{\partial S} d\boldsymbol{\ell} \cdot \left( -\frac{m^*}{q^2|\psi|^2} \mathbf{j}_s + i\frac{\hbar}{2q|\psi|^2} (\psi \nabla \psi^* - \psi^* \nabla \psi) \right) \\ &= -\frac{2m^*}{q^2 n_s} \oint_{\partial S} d\boldsymbol{\ell} \cdot \mathbf{j}_s + \frac{m^*}{q} \oint_{\partial S} d\boldsymbol{\ell} \cdot \mathbf{v}_s, \end{aligned}$$

in cui abbiamo utilizzato le relazioni (2.17) e (2.4) per  $\mathbf{v}_s$  ed  $n_s$ .

A questo punto, riprendendo le osservazioni di L. Onsager [17] e R. Feynman [18], si nota che poiché la velocità superfluida  $\mathbf{v}_s = \hbar/m^* \nabla \theta$  è definita da un campo gradiente, vale, in una regione semplicemente connessa,  $\nabla \times \mathbf{v}_s \equiv 0$ , ovvero la circuitazione della velocità è identicamente nulla; tuttavia, se il circuito racchiude un dominio non semplicemente connesso, deve valere che:

$$\oint_{\partial S} d\boldsymbol{\ell} \cdot \mathbf{v}_s = \frac{\hbar}{m^*} \oint_{\partial S} d\boldsymbol{\ell} \cdot \nabla \theta = \frac{\hbar}{m^*} \oint_{\partial S} d\theta = \frac{\hbar}{m^*} 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Se quindi  $n \neq 0$  all'interno della superficie  $S$ , vi saranno dei cosiddetti *difetti topologici*, che identificheremo di seguito con i *vortici di Abrikosov*. Come si nota in effetti dall'ultima riscrittura, tale condizione impone che la fase del parametro d'ordine vari di un multiplo di  $2\pi$  dopo aver percorso un

cammino chiuso attorno all'origine così che il valore di  $\psi$  rimanga invariato.

In altri termini possiamo scrivere che

$$|\nabla \times \nabla \theta| = 2\pi n \delta^{(2)}(\mathbf{r}), \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (3.4)$$

per cui se si calcola il flusso attraverso una superficie piana orientata  $S$  che contiene l'origine si ottiene il risultato di cui sopra, mentre se  $S$  non contiene l'origine si trova che la circuitazione di  $\nabla \theta$  è nulla<sup>2</sup>.

Definiamo quindi infine *flussoide* la quantità quantizzata

$$\Phi' := \Phi + \frac{2m^*}{q^2 n_s} \oint_{\partial S} d\ell \cdot \mathbf{j}_s = \frac{\hbar}{2e} 2\pi n = \frac{h}{2e} n =: \Phi_0 n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

dove abbiamo definito il *quanto di flusso*  $\Phi_0$ . Si noti che talvolta in letteratura si dice che è il *flusso* (del campo magnetico)  $\Phi$  ad essere quantizzato, in tali casi si sta implicitamente assumendo che la regione sia situata in profondità nel materiale dove la densità di corrente  $\mathbf{j}_s \sim 0$  e per cui il flusso e il flussoide  $\Phi'$  risultano uguali.

### 3.2.2 Vortici di Abrikosov

Per quanto visto al paragrafo precedente, in presenza di difetti topologici dati dalla fase del parametro d'ordine, un materiale superconduttivo può essere attraversato da un campo magnetico di modo che il suo flusso risulti un multiplo intero del quanto di flusso fondamentale  $\Phi_0$ . Tale fenomeno avviene attraverso i *vortici di Abrikosov*, di cui ora cercheremo di descrivere la struttura.

Assumiamo innanzitutto che tali strutture abbiano una simmetria cilindrica: tale ipotesi è chiaramente giustificata dal fatto che, come visto, per un percorso chiuso attorno all'asse del vortice (o *linea di vortice*), il parametro d'ordine varia la sua fase di  $2\pi$ . Poiché inoltre la fase  $\theta$  non è definita nell'origine, l'unico modo per mantenere continuo il parametro d'ordine è che  $\psi(0) = 0$ : in altri termini il materiale al centro del vortice è nello stato normale.

Per ottenere quindi l'andamento del parametro d'ordine e del campo magnetico in presenza di un vortice isolato è necessario risolvere le equazioni accoppiate di Ginzburg-Landau. Questo può essere fatto in modo esatto solamente numericamente per via del termine cubico nella prima equazione di GL: i risultati esatti sono rappresentati in figura 3.1.

È tuttavia possibile trovare delle espressioni approssimate che, in determinate condizioni, descrivano l'andamento del campo magnetico in presenza di un vortice.

Possiamo innanzitutto approssimare un vortice di Abrikosov come un cilindro di raggio  $\xi$  di materiale conduttivo (*core*) circondato da correnti di schermaggio  $\mathbf{j}_s$  che generano un campo  $\mathbf{B}$  che si estende per un raggio  $\lambda$  dal centro del vortice; supponiamo inoltre che il parametro d'ordine abbia modulo  $|\psi|^2 = n_s/2$  costante (approssimazione accettabile se  $\xi < r \ll \lambda$ ), che ci riduce quindi al formalismo di London. Partiamo riconsiderando la seconda equazione di Ginzburg-Landau (2.16), che, come visto, può essere riscritta come:

$$\mathbf{j}_s = q|\psi|^2 \mathbf{v}_s - \frac{q^2}{m^*} |\psi|^2 \mathbf{A} = -\frac{e^2 n_s}{m_e} \left( \frac{\hbar}{2e} \nabla \theta + \mathbf{A} \right).$$

Se quindi ne prendiamo il rotore, ricordando che  $\mu_0 \nabla \times \mathbf{j}_s = \nabla \times \nabla \times \mathbf{B}$ , e riarrangiamo i termini otteniamo:

$$\underbrace{\frac{m_e}{\mu_0 e^2 n_s}}_{=\lambda^2} \nabla \times \nabla \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} - \frac{\hbar}{2e} \nabla \times \nabla \theta.$$

Riprendendo dunque la (3.4), per una sezione circolare  $S$  del vortice si ha

<sup>2</sup>Più precisamente, se  $S$  contiene l'origine si ha che  $\nabla \times \nabla \theta = 2\pi n \delta^{(2)}(\mathbf{r}) \hat{u}(0)$ , dove  $\hat{u}(0)$  è il versore normale ad  $S$  nell'origine, per cui  $\int_{\partial S} \nabla \theta \cdot d\ell = \int_S \nabla \times \nabla \theta \cdot \hat{u} d^2s = 2\pi n \hat{u}(0) \cdot \hat{u}(0) = 2\pi n$ , mentre se  $S$  non contiene l'origine l'integrale è nullo.

$$\lambda^2 \nabla \times \nabla \times \mathbf{B} + \mathbf{B} = n \Phi_0 \delta^{(2)}(\mathbf{r}), \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (3.5)$$

in cui  $n$ , in questo contesto, è la *carica topologica* del vortice che rappresenta il numero di quanti di flusso con cui attraversa il campione, e  $\Phi_0$  è un vettore con norma il quanto di flusso, e verso e direzione concordi a  $\mathbf{B}$ .

Supponiamo ora (senza perdita di generalità) che l'asse del vortice sia orientato lungo l'asse  $z$  e così dunque il campo magnetico  $\mathbf{B}(\mathbf{r}) = B_z(r)\hat{z}$  e di considerare un  $n$ -vortice isolato; allora prendendo l'integrale di flusso di quest'ultima espressione attraverso la superficie circolare  $S$  di raggio  $r$   $\xi < r \ll \lambda$  centrata sull'asse del vortice, si ricava che:

$$n\Phi_0 = \int_S (\lambda^2 \nabla \times \nabla \times \mathbf{B} + \mathbf{B}) \cdot d^2\mathbf{s} = \lambda^2 \oint_{\partial S} (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot d\boldsymbol{\ell} + \int_S \mathbf{B} \cdot d^2\mathbf{s} \simeq \lambda^2 \oint_{\partial S} (\nabla \times \mathbf{B}(r)) \cdot d\boldsymbol{\ell},$$

dove si è trascurato il contributo del flusso del campo magnetico all'interno del core in quanto questo sarà trascurabile rispetto al primo termine (il flusso sarà dell'ordine di  $r^2 \ll \lambda^2$ ). Sfruttando ora il fatto che, in coordinate cilindriche  $(r, \varphi, z)$ , se  $\mathbf{B} \propto \hat{z} \Rightarrow (\nabla \times \mathbf{B}) \propto \hat{\varphi}$ , e che  $\mathbf{B}$  dipende solo da  $r$ , allora l'ultimo integrale di linea si calcola facilmente

$$\lambda^2 \oint_{\partial S} (\nabla \times \mathbf{B}(r)) \cdot d\boldsymbol{\ell} = \lambda^2 |\nabla \times \mathbf{B}(r)| 2\pi r \simeq n\Phi_0 \quad \Rightarrow \quad |\nabla \times \mathbf{B}(r)| \simeq \frac{n\Phi_0}{2\pi\lambda^2 r}, \quad \xi < r \ll \lambda. \quad (3.6)$$

Nelle ipotesi descritte, allora, l'equazione (3.5) si riduce (in coordinate cilindriche) all'equazione scalare:

$$-\frac{d^2 B_z(r)}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{dB_z(r)}{dr} + \frac{B_z(r)}{\lambda^2} = \frac{n\Phi_0}{\lambda^2} \delta^{(2)}(r),$$

che è nota come una particolare forma delle *equazioni di Bessel* e che, con la condizione al contorno<sup>3</sup> (3.6), ha come soluzione [10, 12]:

$$B_z(r) = \frac{n\Phi_0}{2\pi\lambda^2} K_0\left(\frac{r}{\lambda}\right). \quad (3.7)$$

dove  $K_0$  è la *funzione di Neumann modificata del secondo tipo di ordine zero* [19] (anche detta *funzione di Bessel iperbolica del secondo tipo di ordine zero*) che fa parte della più ampia classe delle cosiddette *armoniche cilindriche*. Tale funzione presenta un andamento asintotico tale per cui

$$\begin{aligned} B_z(r) &\sim -\frac{n\Phi_0}{2\pi\lambda^2} \ln\left(\frac{r}{\lambda}\right), \quad r \ll \lambda \\ B_z(r) &\sim \frac{n\Phi_0}{2\pi\lambda^2} \sqrt{\frac{\pi r}{2\lambda}} e^{-r/\lambda}, \quad r \gg \lambda. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Si noti che, per regioni abbastanza distanti dal core, l'espressione trovata ricalca piuttosto bene l'andamento della soluzione esatta, tuttavia questa diverge se ci si avvicina troppo alla linea di vortice: questo è dovuto chiaramente all'ipotesi che il parametro d'ordine rimanga costante su tutto lo spazio, assunzione che peggiora tanto più ci si avvicina all'asse del vortice.

È possibile migliorare quest'ultimo risultato attraverso il metodo variazionale ideato da J.R. Clem [20] che illustriamo brevemente di seguito.

Ponendoci in coordinate cilindriche  $(r, \varphi, z)$  con asse  $z$  coincidente con la linea di vortice, per simmetria e per quanto detto sulla fase  $\theta$ , possiamo esprimere il parametro d'ordine e il campo magnetico come:

$$\psi(\mathbf{r}) = |\psi(r)|e^{i\varphi}, \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}) = B_z(r)\hat{z}.$$

<sup>3</sup>Si noti che nel caso scalare in esame  $|\nabla \times B_z \hat{z}| = -dB_z/dr$  e dunque la (3.6) fornisce delle condizioni al contorno di Neumann per  $r = \xi$  e  $r \rightarrow \infty$ .



e di conseguenza il potenziale vettore e la supercorrente si possono scrivere come  $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = A_\varphi(r)\hat{\varphi}$  e  $\mathbf{j}_s(\mathbf{r}) = j_\varphi(r)\hat{\varphi}$ . L'idea di Clem è stata dunque di assumere che il modulo del parametro d'ordine potesse essere approssimato da una funzione del tipo

$$|\psi(r)| = f(r)\sqrt{\frac{-\alpha}{\beta}} = \frac{r}{\sqrt{r^2 + \xi_v^2}}\sqrt{\frac{-\alpha}{\beta}}, \quad (3.9)$$

in cui  $\xi_v$  è un parametro variazionale che rappresenta il raggio del core. Con questa assunzione, la seconda equazione di Ginzburg-Landau diventa:

$$\mathbf{j}_s = \frac{1}{\mu_0\lambda^2} \left( \frac{\Phi_0}{2\pi r} - A_\varphi(r) \right) f(r)^2 \hat{\varphi},$$

che, usando nuovamente  $\mu_0\mathbf{j}_s = \nabla \times \nabla \times \mathbf{A}$ , si ottiene una ODE non omogenea del secondo ordine per  $A_\varphi$ :

$$\frac{d^2 A_\varphi(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dA_\varphi(r)}{dr} - \left( \frac{1}{r^2} + \frac{f(r)^2}{\lambda^2} \right) A_\varphi(r) = -\frac{\Phi_0}{2\pi\lambda^2 r} f(r)^2$$

la cui soluzione è data da [20]:

$$A_\varphi(r) = \frac{\Phi_0}{2\pi r} \left( 1 - \frac{RK_1(R/\lambda)}{\xi_v K_1(\xi_v/\lambda)} \right),$$

dove  $R := \sqrt{\xi_v^2 + r^2}$  e  $K_1$  è la funzione di Neumann modificata del primo ordine. Il modulo del campo magnetico  $B_z(r)$  e della supercorrente  $j_\varphi(r)$  sono quindi ottenuti derivando opportunamente e sfruttando le proprietà delle funzioni di Neumann:

$$\begin{aligned} B_z(r) &= \frac{\Phi_0}{2\pi\lambda\xi_v} \frac{K_0(R/\lambda)}{K_1(\xi_v/\lambda)}, \\ j_\varphi(r) &= \frac{\Phi_0}{2\pi\mu_0\lambda^2\xi_v} f(r) \frac{K_1(R/\lambda)}{K_1(\xi_v/\lambda)}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Si noti che a differenza della soluzione precedente (3.7), ora la dipendenza da  $r$  attraverso  $R(r) = \sqrt{\xi_v^2 + r^2}$  fa sì che il campo magnetico non diverga più nell'origine.

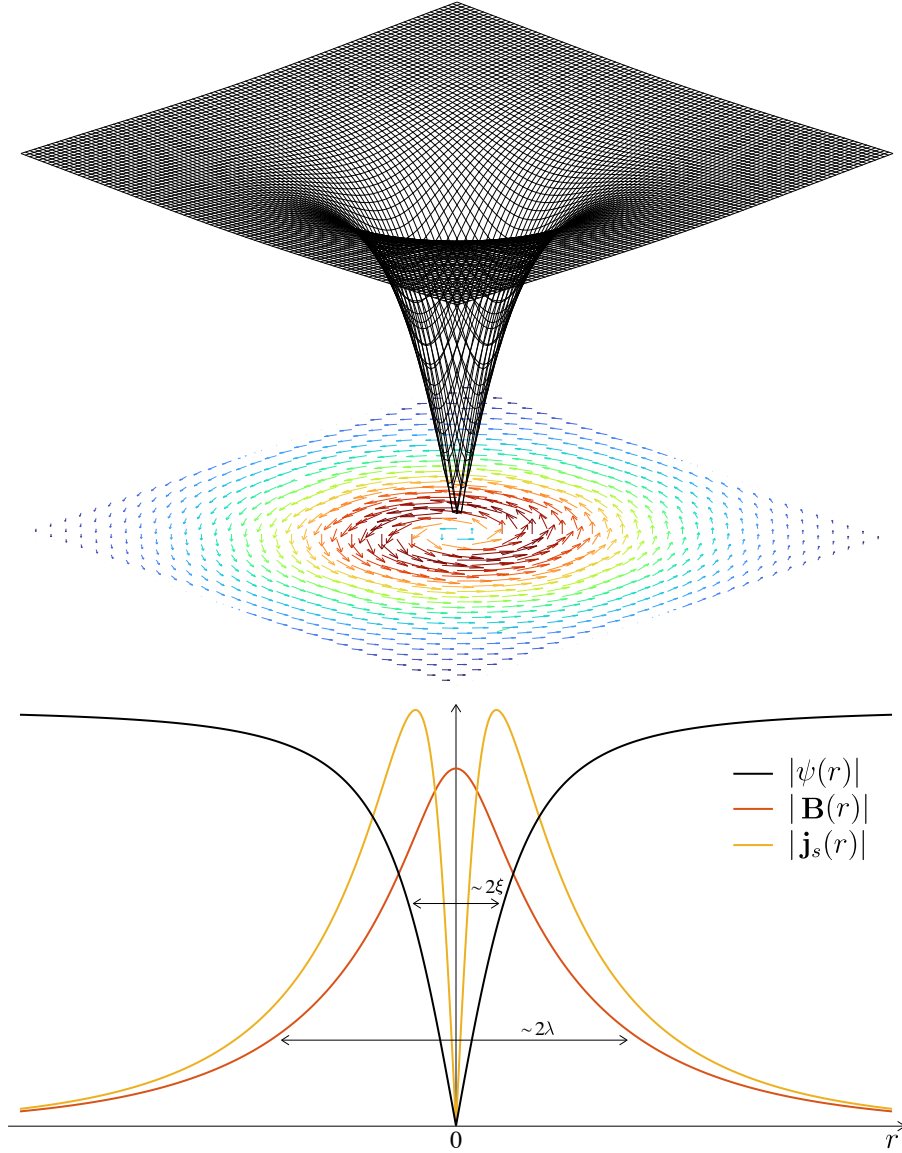


Figura 3.1: In alto: rappresentazione tridimensionale dell'andamento del modulo del parametro d'ordine  $|\psi(\mathbf{r})|$  (in nero) e una sezione piana della densità di corrente  $\mathbf{j}_s(\mathbf{r})$  (campo vettoriale colorato, i colori più caldi rappresentano moduli di  $\mathbf{j}_s$  maggiori) nell'intorno di un vortice di Abrikosov isolato. In basso: andamento rispetto alla distanza  $r$  dall'asse del vortice del modulo del parametro d'ordine  $|\psi(r)|$ , del campo magnetico interno  $|\mathbf{B}(r)|$  e della densità di supercorrente  $|\mathbf{j}_s(r)|$ . Si noti che  $|\psi|$  tende velocemente al valore di campo medio dopo una distanza  $\sim \xi$  dall'asse del vortice e lo stesso vale per il campo magnetico e la densità di supercorrente che decadono velocemente a zero con una profondità caratteristica  $\sim \lambda$ . Al centro del vortice è presente una regione di materiale nello stato normale ( $|\psi| = 0$ ) e campo magnetico non nullo. I profili descritti si ricavano per risoluzione numerica delle equazioni di GL, una buona approssimazione è data dalla (3.9) e (3.10).

Per concludere, Clem prosegue col calcolare il contributo energetico del vortice al sistema a partire dal campo magnetico che lo attraversa ed arrivando ad esprimere una relazione tra il campo critico  $H_{c1}$  in funzione del parametro variazionale  $\xi_v$ ; il valore ottimale di  $\xi_v$  sarà quindi quello che rende minimo il campo critico inferiore e di conseguenza l'energia del sistema. Clem ottiene così che  $\xi_v$  dipende dal parametro  $\kappa$  e risulta nello stesso ordine della lunghezza di coerenza di GL  $\xi$ : in particolare, per  $\kappa \gg 1$ , si ottiene  $\xi_v \simeq \sqrt{2}\xi$ .

Chiaramente la procedura appena descritta risulta ancora una soluzione approssimata delle equazioni di GL, ma la sua validità è stata confermata confrontandola con le simulazioni numeriche per tutti i range di possibili  $\kappa$  [20, 21].

### 3.2.3 Campo Critico Inferiore

Ricaviamo ora attraverso delle considerazioni energetiche una relazione per il campo critico inferiore  $H_{c1}$  nel caso di un superconduttore con  $\kappa \gg 1$ .

È esprimere l'energia associata ad un vortice come la somma dell'energia magnetica dovuta al campo  $\mathbf{B}$  e l'energia cinetica dovuta alle supercorrenti  $\mathbf{j}_s$ , trascurando tuttavia il contributo dato dal core in quanto  $\xi \ll \lambda$  e dunque considerando solo la regione  $\Omega = \{(r, \varphi, z) \mid \xi \leq r \ll \lambda\}$  esterna al core (si ricordi che per  $r \gtrsim \lambda \Rightarrow \mathbf{B} \sim 0, \mathbf{j}_s \sim 0$ ):

$$E_v = \int_{\Omega} d^3r \left[ \frac{\mathbf{B}^2}{2\mu_0} + \frac{\lambda^2}{2\mu_0} (\nabla \times \mathbf{B})^2 \right].$$

Si noti innanzitutto che il secondo termine può essere in effetti ricondotto alla nota espressione dell'energia cinetica ricordando che  $\lambda^2 = m_e/\mu_0 e^2 n_s$  ed esprimendo la densità di supercorrente attraverso elettroni 'super' di velocità  $\mathbf{u}_s$  e densità  $n_s$ :  $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}_s = -\mu_0 e n_s \mathbf{u}_s \Rightarrow \lambda^2/2\mu_0 (\nabla \times \mathbf{B})^2 = 1/2 m_e n_s u_s^2$ .

Proseguiamo quindi con il calcolo dell'energia sfruttando la relazione  $(\nabla \times \mathbf{B}) \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \nabla \times \mathbf{B}) + \nabla \cdot (\mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{B}))$  e inserendo al primo termine l'equazione (3.5) per un vortice isolato

$$E_v = \frac{\Phi_0}{2\mu_0} \int_{\Omega} d^3r \delta^{(2)}(\mathbf{r}) + \frac{\lambda^2}{2\mu_0} \int_{\Omega} d^3r \nabla \cdot (\mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{B})) = \frac{\lambda^2}{2\mu_0} \int_{\partial\Omega} d^2\mathbf{s} \cdot (\mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{B})),$$

in cui il primo termine non porta contributo dato che  $\{0\} \notin \Omega$  e si è usato il teorema della divergenza per il secondo. Osservando quindi che l'integrale di flusso è svolto sulla superficie cilindrica  $\partial\Omega = \{(r, \varphi, z) \mid r = \xi\}$  con versore normale uscente  $-\hat{\mathbf{r}}$  e che, come già visto per la (3.6),  $\nabla \times \mathbf{B} = |\nabla \times \mathbf{B}| \hat{\boldsymbol{\varphi}}$ , si ricava che l'energia associata ad un vortice di Abrikosov nel caso di  $\xi \ll \lambda$  è:

$$E_v = \frac{\lambda^2}{2\mu_0} \int_{\partial\Omega} dz d\varphi (-\hat{\mathbf{r}}) \cdot (B_z(\xi) \hat{\mathbf{z}} \times |\nabla \times \mathbf{B}(\xi)| \hat{\boldsymbol{\varphi}}) = \int \left( \frac{\lambda^2}{2\mu_0} B_z(\xi) |\nabla \times \mathbf{B}(\xi)| 2\pi\xi \right) dz.$$

Poiché nelle reali applicazioni si ha a che fare con campioni di spessore finito, è più utile definire la *tensione lineare* del vortice come l'energia per unità di lunghezza:

$$\varepsilon_v := \frac{dE_v}{dz} = \frac{n^2 \Phi_0^2}{2\pi\mu_0 \lambda^2} K_0 \left( \frac{\xi}{\lambda} \right) \simeq \frac{n^2 \Phi_0^2}{4\pi\mu_0 \lambda^2} \ln(\kappa), \quad \kappa \gg 1.$$

Si osservi quindi che l'energia associata ad un  $n$ -vortice scala come  $n^2$ : sono quindi energeticamente favoriti i vortici con carica topologica più bassa possibile (i.e.  $n = \pm 1$ ).

In secondo luogo notiamo nuovamente come questo sia un risultato approssimato per non aver innanzi tenuto conto dell'energia associata al core e per aver utilizzato le espressioni del campo magnetico ottenute nell'ipotesi di parametro d'ordine uniforme. Tuttavia, risulta che l'inclusione dell'energia del core porta una correzione dell'ordine relativo del  $\mathcal{O}(0.1)$  [10, 22]; mentre l'utilizzo delle approssimazioni di Clem porta comunque dei risultati confrontabili con le simulazioni numeriche [20].

Possiamo quindi ora dare una stima del campo critico inferiore  $H_{c1}$ : ci aspettiamo infatti che a tale valore del campo esterno la presenza di un singolo 1-vortice (che quindi contribuisce con un quanto di flusso  $\Phi_0$ ) porti un guadagno energetico in termini dell'energia di Gibbs rispetto allo stato Meissner ( $G_0$ ). In altre parole, dato  $L$  lo spessore del campione, la differenza di energia tra i due stati sarà:

$$G_v - G_0 = F_0 + L\varepsilon_v - \int d^3r \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}_v - \left( F_0 - \int d^3r \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}_0 \right),$$

dove  $F_0$  è l'energia libera del campione e dove si elide l'ultimo termine in quanto  $\mathbf{B}_0 = 0$  per la fase Meissner.

Se quindi  $\mathbf{B}_v$  è il campo magnetico in presenza di vortice, parallelo al campo esterno  $\mathbf{H}$  e diretto ad esempio lungo  $\hat{z}$ , possiamo esprimere l'integrale di volume come un integrale di flusso sulla superficie perpendicolare alla linea di vortice e integrare poi sulla lunghezza, ottenendo dunque:

$$G_v - G_0 = L\varepsilon_v - H \int_0^L dz \int d^2s B = L\varepsilon_v - HL\Phi_0.$$

Si ha quindi un guadagno energetico (i.e.  $G_v < G_0$ ) solo per

$$H > H_{c1} = \frac{\varepsilon_v}{\Phi_0} \simeq \frac{\Phi_0}{4\pi\mu_0\lambda^2} \ln(\kappa) = \frac{H_c}{\sqrt{2\kappa}} \ln(\kappa).$$

### 3.2.4 Campo Critico Superiore

Cerchiamo infine un'espressione per il campo critico superiore  $H_{c2}$  che delimita la fase mista, ancora superconduttiva, dalla fase normale.

Poiché la transizione tra lo stato misto e quello normale è del secondo ordine (Sec. 1.2) ci aspettiamo che in un intorno di  $H_{c2}$  il parametro d'ordine sia molto piccolo e così anche la magnetizzazione; potremo dunque approssimare il campo magnetico interno  $\mathbf{B} \approx \mu_0\mathbf{H}$ , con  $\mathbf{H}$  uniforme. Assumiamo quindi, senza perdita di generalità, che  $\mathbf{B} = B\hat{z} \approx \mu_0H\hat{z}$  e scegliamo un potenziale nella forma  $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = (0, xB, 0)$  che rispetta la gauge di London. La prima equazione di Ginzburg-Landau risulta perciò:

$$\frac{1}{2m^*} \left( i\hbar\nabla + qBx\hat{y} \right)^2 \psi + \alpha(T)\psi + \beta|\psi|^2\psi = 0.$$

Per via del fatto che  $\psi$  è prossimo allo zero in un intorno del campo critico è naturale trascurare il termine di ordine cubico, per cui, definendo la *pulsazione di ciclotrone* come

$$\omega_c := \frac{qB}{m^*} \approx \frac{\mu_0q}{m^*} H,$$

si ottiene l'equazione di Ginzburg-Landau *linearizzata*:

$$\left( -\frac{\hbar^2}{2m^*} \nabla^2 - i\hbar\omega_c x \frac{\partial}{\partial y} + \frac{1}{2} m^* \omega_c^2 x^2 \right) \psi(\mathbf{r}) = -\alpha(T)\psi(\mathbf{r}). \quad (3.11)$$

Notiamo innanzitutto che il coefficiente  $\alpha(T) < 0$  in quanto stiamo considerando una zona il cui del diagramma di fase con  $T < T_c$ . Risulta perciò che l'espressione appena ottenuta è l'equazione di Schrödinger per una particella di massa  $m^*$  e carica  $q$  in un campo magnetico uniforme  $\mathbf{B}$  la quale può essere facilmente ricondotta all'equazione dell'oscillatore armonico traslato: si verifica infatti una possibile soluzione è nella forma

$$\psi(\mathbf{r}) = e^{ik_y y} e^{ik_z z} f(x), \quad k_y, k_z \in \mathbb{R}, \quad (3.12)$$

che se risostituita nella (3.11) fornisce:

$$\left( -\frac{\hbar^2}{2m^*} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2} m^* \omega_c^2 (x - x_0)^2 \right) f(x) = \left( -\alpha - \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m^*} \right) f(x),$$

in cui si è definito  $x_0 := -\hbar k_y / m^* \omega_c$  il nuovo punto di minimo. Le soluzioni saranno dunque date dalle autofunzioni d'oscillatore armonico traslate della quantità  $x_0$  e delle "autoenergie"

$$\left( \frac{1}{2} + n \right) \hbar\omega_c = -\alpha(T) - \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m^*}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad \text{e} \quad k_z \in \mathbb{R}, \quad (3.13)$$

formalmente equivalenti ai *livelli di Landau* per la particella carica in campo magnetico; si noti inoltre che tale espressione risulta infinitamente degenerare in  $k_y$ .

Ricordando infine l'espressione di  $\alpha(T) \simeq a(T - T_c)$  per temperature prossime alla temperatura critica  $T_c$ , notiamo che la relazione appena ricavata ha soluzioni in  $T$  fin tanto che

$$-\alpha(T) \simeq a(T_c - T) \geq \frac{\hbar\omega_c}{2} = \frac{\mu_0\hbar e}{m^*}H,$$

il cui lato destro rappresenta il minimo valore possibile per la (3.13), i.e.  $n = k_z = 0$ . Fissando perciò  $T \leq T_c$  si ha almeno una soluzione se vale che

$$H \leq H_{c2}(T) := -\frac{m^*}{\mu_0\hbar e}\alpha(T) = \frac{\Phi_0}{2\pi\mu_0\xi(T)^2},$$

dove si sono utilizzate le espressioni  $\xi^2 = -\hbar^2/2m^*\alpha$  e  $\Phi_0 = h/2e$  per la lunghezza di coerenza ed il quanto di flussoide. È interessante notare che, in quest'ultima riscrittura, si possa interpretare la condizione di campo critico superiore come lo stato del sistema in cui in un'area di materiale pari a  $2\pi\xi^2$  è attraversata da esattamente un solo quanto di flusso  $\Phi_0$ , che fissa perciò la massima densità di vortici oltre la quale i vortici cominciano a sovrapporsi distruggendo la fase superconduttiva.

Quest'ultima espressione per il campo critico ha inoltre il pregio di fornire una relazione per determinare sperimentalmente la lunghezza di coerenza di un determinato materiale a partire da una misura di  $H_{c2}$ .

Si osservi infine che è possibile esprimere il campo critico superiore  $H_{c2}$  in termini del parametro di Ginzburg-Landau  $\kappa$  e campo critico  $H_c$  per i superconduttori di tipo I: riarrangiando la prima equazione della (3.3) si ricava che

$$H_c = \frac{\sqrt{-m^*\alpha}}{2\mu_0 e\lambda} = \frac{1}{2\mu_0 e\lambda} \frac{\hbar}{\sqrt{2}\xi} = \frac{1}{\sqrt{2}\kappa} \left(\frac{h}{2e}\right) \frac{1}{2\pi\mu_0\xi^2} = \frac{H_{c2}}{\sqrt{2}\kappa}.$$

Risulta perciò che per valori di  $\kappa > 1/\sqrt{2}$  allora  $H_c < H_{c2}$  e avremo dunque una transizione di fase del secondo ordine dallo stato normale a quello superconduttivo, con il parametro d'ordine che cresce gradualmente da zero, ovvero avremo un superconduttore di tipo II; d'altra parte per valori di  $\kappa < 1/\sqrt{2}$  avremo che  $H_c > H_{c2}$  e perciò la transizione tra i due stati sarà del primo ordine col parametro d'ordine che presenterà una discontinuità in corrispondenza della transizione, il materiale sarà cioè un superconduttore di tipo I. È quindi chiaro che il valore del parametro di Ginzburg-Landau  $\kappa = 1/\sqrt{2}$  caratterizza totalmente i due tipi di superconduttori:

$$\begin{cases} \kappa < 1/\sqrt{2} & \rightarrow \text{Tipo I} \\ \kappa > 1/\sqrt{2} & \rightarrow \text{Tipo II.} \end{cases}$$

### 3.2.5 Reticolo di Abrikosov

Fino a questo momento abbiamo considerato solamente vortici isolati, vorremmo quindi ricavare la struttura macroscopica formata dai vortici nell'intorno di  $H_{c2}$  (i.e.  $H \approx H_{c2}$ )

Abrikosov ipotizzò che nello stato di Shubnikov i vortici si disponessero in una struttura reticolare periodica sul piano  $(x, y)$  perpendicolare alle linee di vortice con periodi lungo le due direzioni  $a_x$  ed  $a_y$ . Riprendendo ora l'equazione (3.12), abbiamo trovato nel paragrafo precedente che questa può essere espressa, a meno di fattori di fase, attraverso le autofunzioni di un oscillatore armonico con pulsazione  $\omega_c$  e traslate di  $x_0$ :

$$\psi_n(\mathbf{r}) = e^{ik_y y} e^{ik_z z} f_n(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad k_y, k_z \in \mathbb{R}.$$

La periodicità in  $y$  con periodo  $a_y$  (i.e.  $\psi(x, y + a_y, z) \stackrel{!}{=} \psi(x, y, z)$ ) impone la condizione:

$$k_y = \frac{2\pi}{a_y}q, \quad q \in \mathbb{Z} \quad \Rightarrow \quad x_0 = -\frac{\hbar k_y}{m^* \omega_c} = -\frac{\Phi_0}{H a_y}q.$$

Abbiamo inoltre ricavato che lo stato energetico più favorevole è dato da  $n = 0$  e  $k_z = 0$  e perciò, l'autofunzione associata può essere scritta come

$$\psi_0(\mathbf{r}) = e^{ik_y y} f_0(x) = C e^{i\frac{2\pi q}{a_y}y} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{m^* \omega_c}{\hbar} \left[x + \underbrace{\frac{\Phi_0}{H a_y}q}_{-x_0}\right]^2\right),$$

in cui  $C$  è una costante di normalizzazione. Osserviamo che, nella condizione  $H \approx H_{c2}$ , nel fattore gaussiano è presente la quantità

$$\frac{\hbar}{m^* \omega_c} \approx \frac{\hbar}{2e} \frac{1}{\mu_0 H_{c2}} = \xi(T)^2.$$

Ricordando quindi che il livello energetico fondamentale è degenere in  $k_y$ , Abrikosov assunse che la funzione d'onda complessiva del sistema potesse essere espressa come combinazione lineare di tutte le possibili autofunzioni degeneri fondamentali, ovvero:

$$\psi(\mathbf{r}) = \sum_{q=-\infty}^{+\infty} C_q \exp\left(i\frac{2\pi q}{a_y}y\right) \exp\left(-\frac{1}{2\xi^2} \left[x + \frac{\Phi_0}{H a_y}q\right]^2\right).$$

Imponendo dunque la periodicità in  $a_x$  (a meno di un fattore di fase globale) si ottiene che

$$\begin{aligned} \psi(x + a_x, y, z) &= \sum_{q=-\infty}^{+\infty} C_q \exp\left(i\frac{2\pi q}{a_y}y\right) \exp\left(-\frac{1}{2\xi^2} \left[x + a_x + \frac{\Phi_0}{H a_y}q\right]^2\right) \\ &= \sum_{q=-\infty}^{+\infty} C_q \exp\left(i\frac{2\pi q}{a_y}y\right) \exp\left(-\frac{1}{2\xi^2} \left[x + \frac{\Phi_0}{H a_y} \left(q + \frac{H a_x a_y}{\Phi_0}\right)\right]^2\right) \\ &\stackrel{!}{\propto} \psi(x, y, z) \quad \forall x, y, z. \end{aligned}$$

Questo impone la condizione:

$$\frac{H a_x a_y}{\Phi_0} =: \nu \stackrel{!}{\in} \mathbb{Z}.$$

Si noti che  $\nu$  rappresenta il numero di quanti di flusso che attraversano una cella rettangolare di lati  $a_x$  ed  $a_y$ . La funzione d'onda prende allora la forma

$$\begin{aligned} \psi(x + a_x, y, z) &= \sum_{q=-\infty}^{+\infty} C_q \exp\left(i\frac{2\pi q}{a_y}y\right) \exp\left(-\frac{1}{2\xi^2} \left[x + \frac{\Phi_0}{H a_y} (q + \nu)\right]^2\right) \\ &= \exp\left(i\frac{2\pi \nu}{a_y}y\right) \sum_{q=-\infty}^{+\infty} C_{q-\nu} \exp\left(i\frac{2\pi q}{a_y}y\right) \exp\left(-\frac{1}{2\xi^2} \left[x + \frac{\Phi_0}{H a_y} q\right]^2\right), \end{aligned}$$

che quindi risulta equivalente a  $\psi(x, y, z)$  (a meno di una fase globale) solo se  $C_q$  risulta periodica con periodo  $\nu$ :

$$C_{q-\nu} \stackrel{!}{=} C_q \quad \forall q \in \mathbb{Z}.$$

Per trovare quindi l'effettiva espressione per il reticolo (i.e.  $a_x$  ed  $a_y$ ) è necessario trovare la condizione in  $\nu$  e  $C_q$  che minimizza l'energia libera del sistema. Abrikosov propose inizialmente  $\nu = 1$  che porta ad un reticolo quadrato, tuttavia fu successivamente dimostrato [23] che la scelta di parametri che minimizza l'energia è data da  $\nu = 2$  e  $C_1 = iC_0$  che porta ad un reticolo triangolare mostrato in figura 3.2.

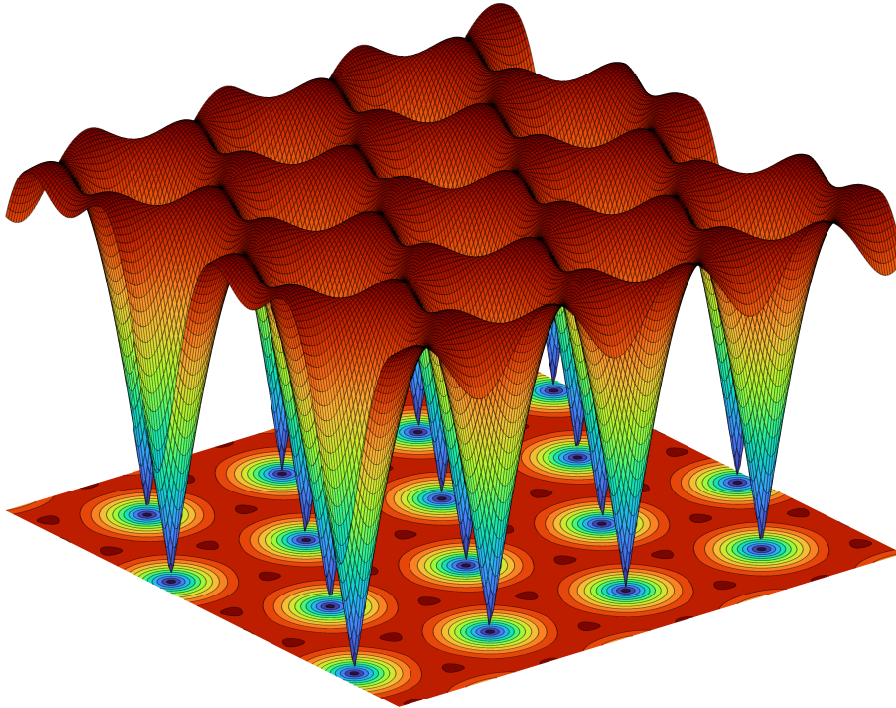


Figura 3.2: Grafico della funzione  $|\psi(x, y)|$  rappresentate la configurazione del reticolo di Abrikosov che minimizza l'energia del sistema. Si osservi che il reticolo ha come unità minima una cella triangolare equilatera i cui vertici poggiano sugli assi dei vortici.





# Conclusioni

In questa tesi si è sviluppato il formalismo di Ginzburg e Landau per la superconduttività a partire dalla teoria delle transizioni di fase di Landau per poi applicarlo allo studio e alla caratterizzazione dei superconduttori di tipo II con particolare interesse alle strutture dei vortici quantizzati di Abrikosov.

Nella prima parte di questo lavoro sono state presentate le caratteristiche fenomenologiche peculiari che definiscono in generale i materiali superconduttori, quali la presenza di una *temperatura critica*  $T_c$  al di sotto della quale il materiale manifesta resistività nulla, e l'espulsione del campo magnetico esterno quando questo è inferiore ad un valore critico  $H_c(T)$  dipendente dalla temperatura  $T < T_c$  (*effetto Meissner*). Si è poi introdotta e discussa qualitativamente la differenza tra superconduttori di tipo I e tipo II evidenziando la presenza in questi ultimi di una fase intermedia (*fase di Shubnikov*) che presenta un parziale attraversamento del campo magnetico in punti localizzati all'interno del materiale (*vortici quantizzati*).

È stata quindi esposta brevemente la teoria della superconduttività formulata dai fratelli F. e H. London mostrando come questa possa dare conto dell'effetto Meissner caratterizzandolo rispetto alla *lunghezza di penetrazione*  $\lambda$ ; sono state tuttavia messe in luce le principali criticità della teoria, che portarono allo sviluppo della teoria di Ginzburg-Landau: prima tra queste la necessità di assumere omogenea la densità di elettroni di superconduzione.

Si è poi proseguito nel secondo capitolo presentando la teoria delle transizioni di fase formulata da L. Landau nel contesto della superconduttività. Si è dunque introdotto il *parametro d'ordine*  $\psi$  che regola la transizione dallo stato normalmente conduttivo a quello superconduttivo e si è definita l'energia libera  $\mathcal{F}$  in termini dei parametri fenomenologici  $\alpha$  e  $\beta$  per il caso di densità elettronica omogenea. Si è quindi analizzato il comportamento di  $\mathcal{F}$  in funzione di  $\psi$  e si è data una prima stima del valore del parametro d'ordine in condizioni di omogeneità (soluzione di campo medio). Si è inoltre evidenziata brevemente la connessione tra l'interpretazione macroscopica del parametro d'ordine introdotto con quella microscopica offerta dalla teoria BCS, alla luce della quale è possibile intendere  $\psi$  come la funzione d'onda del sistema che descrive il comportamento delle coppie di Cooper.

Successivamente, è stata generalizzata la teoria di Landau al caso non omogeneo definendo il *funzionale di Ginzburg-Landau* per il caso di superconduttori in assenza di campo magnetico esterno. Si è quindi minimizzato tale funzionale ottenendo la *prima equazione di Ginzburg-Landau*, che descrive l'andamento del parametro d'ordine dall'interno del materiale dati i parametri  $\alpha$  e  $\beta$ , ed è stata ricavata la soluzione analitica per il parametro d'ordine nel caso unidimensionale introducendo la *lunghezza di coerenza*  $\xi$ .

Si è quindi generalizzato il formalismo considerando l'influenza del campo magnetico esterno e si è dunque modificato il funzionale di Ginzburg-Landau in modo opportuno. Minimizzando allora l'energia libera rispetto al parametro d'ordine e al potenziale vettore si sono ottenute le due equazioni di Ginzburg-Landau per i superconduttori immersi in un campo magnetico. Infine si è mostrata la relazione tra la teoria di London e quella di Ginzburg-Landau, la quale si riduce alla prima nel limite di parametro d'ordine uniforme; tale connessione ci ha dunque permesso di esprimere anche la lunghezza di penetrazione in termini dei parametri fenomenologici e di definire il *parametro di Ginzburg-Landau*  $\kappa = \lambda/\xi$  che sarà poi utile a caratterizzare i due tipi di superconduttori.

Nel terzo ed ultimo capitolo sono stati studiati nel dettaglio i due tipi di superconduttori, con particolare riguardo all'analisi delle strutture dei vortici quantizzati nei superconduttori di tipo II. È

---

stata perciò ottenuta un'espressione analitica per il campo critico  $H_c$  per i superconduttori di tipo I, esprimendola in termini dei parametri  $\alpha$  e  $\beta$ .

Si è allora proseguito analizzando i superconduttori di tipo II e dimostrando che il flusso del campo magnetico debba essere quantizzato. Da questo si è quindi studiata la struttura dei vortici quantizzati di Abrikosov risolvendo, con delle opportune approssimazioni, le equazioni di Ginzburg-Landau per un vortice isolato ed ottenendo l'andamento analitico del parametro d'ordine, del campo magnetico e della densità di corrente in un intorno del vortice. Successivamente si è sfruttato il risultato ottenuto per ricavare un'espressione dell'energia per unità di lunghezza associata al vortice (*tensione lineare* del vortice) e da questa esprimere il valore del campo critico inferiore  $H_{c1}$  in termini dei parametri  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\kappa$ . È stato infine studiato lo stato di equilibrio del sistema nella fase mista ottenendo un'espressione per il campo critico superiore  $H_{c2}$  e ricavando la configurazione reticolare con la quale si dispongono i vortici per minimizzare l'energia del sistema (*reticolo di Abrikosov*). Si è inoltre trovato il valore critico del parametro di Ginzburg-Landau che caratterizza completamente i due tipi di superconduttori e per cui per  $\kappa < 1/\sqrt{2}$  si ha un superconduttore di tipo I, mentre per  $\kappa > 1/\sqrt{2}$  si ha un superconduttore di tipo II.

# Bibliografia

- [1] H. Kamerlingh Onnes. “The Condensation of Helium”. en. In: *Nature* 77.2008 (apr. 1908), pp. 581–581.
- [2] H. K. Onnes. “The Superconductivity of Mercury”. In: (1911), pp. 122–124.
- [3] P. Drude. “Zur Elektronentheorie der Metalle”. In: *Annalen der Physik* 306.3 (gen. 1900), pp. 566–613.
- [4] J. File e R. G. Mills. “Observation of Persistent Current in a Superconducting Solenoid”. In: *Phys. Rev. Lett.* 10 (3 1963), pp. 93–96.
- [5] W. Meissner e R. Ochsenfeld. “Ein neuer Effekt bei Eintritt der Supraleitfähigkeit”. de. In: *Naturwissenschaften* 21.44 (nov. 1933), pp. 787–788.
- [6] F. London e H. London. “The electromagnetic equations of the supraconductor”. en. In: *Proceedings of the Royal Society of London. Series A - Mathematical and Physical Sciences* 149.866 (mar. 1935), pp. 71–88.
- [7] V.L. Ginzburg e L.D. Landau. “On the Theory of Superconductivity”. In: *Sov. Phys. JETP* 20 (1950), p. 1064.
- [8] Lev Petrovich Gor’kov. “Microscopic derivation of the Ginzburg-Landau equations in the theory of superconductivity”. In: *Sov. Phys. JETP* 9.6 (1959), pp. 1364–1367.
- [9] J. Bardeen, L. N. Cooper e J. R. Schrieffer. “Theory of Superconductivity”. In: *Physical Review* 108.5 (dic. 1957), pp. 1175–1204.
- [10] Pierre Gilles De Gennes. *Superconductivity of Metals and Alloys*. Advanced book classics. Cambridge, MA: Perseus, 1999.
- [11] Onuttom Narayan e A. P. Young. “Free energies in the presence of electric and magnetic fields”. In: *American Journal of Physics* 73.4 (apr. 2005), pp. 293–298.
- [12] James F Annett. *Superconductivity, superfluids and condensates*. Vol. 5. Oxford University Press, 2004.
- [13] Carsten Timm. *Theory of superconductivity*. Institute of theoretical Physics Dresden, 2020.
- [14] Charles Kittel e Paul McEuen. *Introduction to solid state physics*. John Wiley & Sons, 2018.
- [15] L.V. Shubnikov et al. “Magnetic properties of superconducting metals and alloys”. In: *Zh. Eksp. Teor. Fiz* 7 (1937), p. 221.
- [16] Alexei Alexeyevich Abrikosov. “The magnetic properties of superconducting alloys”. In: *Journal of Physics and Chemistry of Solids* 2.3 (1957), pp. 199–208.
- [17] L. Onsager. “Statistical hydrodynamics”. In: *Il Nuovo Cimento* 6.2 (mar. 1949), pp. 279–287.
- [18] R.P. Feynman. “Chapter II Application of Quantum Mechanics to Liquid Helium”. In: a cura di C.J. Gorter. Vol. 1. Progress in Low Temperature Physics. Elsevier, 1955, pp. 17–53.
- [19] Mary L Boas. *Mathematical methods in the physical sciences*. John Wiley & Sons, 2006.
- [20] John R Clem. “Simple model for the vortex core in a type II superconductor”. In: *Journal of Low Temperature Physics* 18 (1975), pp. 427–434.
- [21] Ernst Helmut Brandt. “Precision Ginzburg-Landau solution of ideal vortex lattices for any induction and symmetry”. In: *Physical review letters* 78.11 (1997), p. 2208.
- [22] Chia-Ren Hu. “Numerical constants for isolated vortices in superconductors”. In: *Physical Review B* 6.5 (1972), p. 1756.
- [23] WH Kleiner, LM Roth e SH Autler. “Bulk solution of Ginzburg-Landau equations for type II superconductors: upper critical field region”. In: *Physical Review* 133.5A (1964), A1226.