

# Università degli Studi di Padova

---

DIPARTIMENTO DI FISICA E ASTRONOMIA "GALILEO GALILEI"

Corso di Laurea in Fisica

## Oscillazioni dei neutrini nella materia e applicazione ai neutrini solari

*Laureando:*

Beatrice Moser

*Relatore:*

Prof. Ferruccio Feruglio

---

Anno accademico 2015/2016



# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>v</b>
<b>1 Oscillazioni nel vuoto</b>	<b>1</b>
1.1 Probabilità di oscillazione . . . . .	1
1.1.1 Assunzioni . . . . .	3
1.2 Mescolamento di due neutrini . . . . .	3
1.3 Accenno al caso di tre neutrini . . . . .	4
<b>2 Oscillazioni nella materia</b>	<b>5</b>
2.1 Probabilità di oscillazione . . . . .	5
2.2 Mescolamento di due neutrini e effetto MSW . . . . .	6
2.2.1 Materia a densità elettronica costante . . . . .	10
<b>3 Neutrini solari</b>	<b>11</b>
3.1 Esperimenti . . . . .	11
3.2 Probabilità di sopravvivenza per neutrini solari . . . . .	13
3.2.1 Effetto MSW nella materia a densità variabile . . . . .	14
3.2.2 Violazione dell'adiabaticità . . . . .	15
3.3 Regioni ottenute dall'analisi dati dei neutrini solari . . . . .	16
<b>A Richiamo ai sistemi a due livelli</b>	<b>21</b>
<b>Bibliografia</b>	<b>23</b>



# Introduzione

L'esistenza di una particella neutra molto leggera di spin  $\frac{1}{2}$  fu ipotizzata da Pauli nel 1930 per spiegare la continuità dello spettro energetico dell'elettrone nel decadimento beta e fu battezzata neutrino da Fermi negli anni successivi. La particella, dotata di massa molto piccola e dunque dalla velocità prossima a quella della luce, interagisce raramente con la materia ed è dunque difficilmente rivelabile. Per riuscire a osservare il neutrino, o meglio l'antineutrino, fu necessario aspettare il 1956 quando Cowan e Reines portarono a termine il loro esperimento. Si trattava di un rivelatore a layer, formato da recipienti contenenti acqua con cloruro di cadmio alternati a recipienti pieni di liquido scintillatore, posto vicino al reattore nucleare a fissione di Savannah River e circondato da fotomoltiplicatori. I reattori nucleari infatti emettono una gran quantità di antineutrini elettronici che, sfruttando la reazione  $\bar{\nu}_e + p \rightarrow n + e^+$ , venivano rivelati attraverso i due fotoni simultanei emessi quando il positrone si annichila con un elettrone seguiti da un fotone molto più energetico emesso dal cadmio per decadimento  $\gamma$  in seguito all'assorbimento del neutrone.

Nel 1957 Pontecorvo propose un meccanismo di mescolamento tra il neutrino noto e un neutrino detto sterile (dal momento che non prende parte all'interazione debole) simile a quanto osservato per i caoni. La sua proposta rimase sconosciuta ai più fino a che nel 1968 l'esperimento di Davis all'Homestake Gold Mine, che puntava a misurare il flusso di neutrini di alta energia provenienti dal Sole e verrà descritto in seguito, rivelò circa un terzo dei neutrini elettronici previsti dal Modello Solare Standard. Questa discrepanza, nota come "il problema dei neutrini solari", fece inizialmente pensare a un errore nei calcoli teorici oppure nell'esperimento, vista la difficoltà di rivelazione dei neutrini. In seguito al perfezionamento dello SSM da parte di Bahcall e a migliorie all'esperimento di Davis, si prese in considerazione la proposta, ampliata e rivista nel 1969 da Pontecorvo e Gribov dopo la scoperta del neutrino muonico, che i neutrini si comportassero in maniera diversa da quanto previsto dal Modello Standard. La teoria che diede il via alla risoluzione del "problema dei neutrini solari" è nota come oscillazione dei neutrini. Il fenomeno, che consiste nella trasformazione del sapore dei neutrini lungo il loro percorso, fu osservato per i neutrini solari dagli esperimenti Gallex, Sage, Kamiokande (poi Super-Kamiokande), SNO e Borexino. In particolare SNO permise di osservare il flusso di neutrini elettronici, muonici e tauonici e dunque di confermare che i neutrini mancanti avevano cambiato sapore. Nel frattempo la teoria fu perfezionata introducendo gli effetti dovuti alla presenza di materia e furono ricavati i parametri necessari dai dati sperimentali: tale analisi ha portato a individuare, come soluzione definitiva al problema, il meccanismo MSW nella regione LMA (grande angolo di mescolamento). In seguito furono effettuati altri esperimenti (KamLand, T2K, K2K, MINOS e OPERA) per verificare che le oscillazioni fossero presenti anche per neutrini atmosferici, da reattore nucleare e da acceleratore di particelle.

In questa tesi affronterò lo studio del fenomeno di oscillazione dei neutrini. Nel primo capitolo tratterò il caso del vuoto in cui le oscillazioni sono causate dal fatto che i neutrini siano dotati di massa e che gli autostati dell'hamiltoniano non siano gli autostati di sapore, ovvero

quelli dell'interazione debole, ma loro combinazioni lineari, dette autostati di massa. Possiamo pensare a questi, per semplicità, come a onde piane che si propagano a frequenza diversa e danno luogo a un processo di interferenza per il quale il neutrino sarà, quando viene rivelato, una combinazione degli stati di massa diversa rispetto a quella iniziale. Introdurrò poi, nel secondo capitolo, gli effetti dovuti all'interazione con la materia che, attraverso processi di scattering, modifica la transizione tra un sapore e l'altro. In particolare, nel caso di densità elettronica variabile che sarà esposto nel terzo capitolo, ci sarà una regione sul cammino dei neutrini in cui la probabilità di mescolamento è massimale grazie a una situazione di risonanza. Per finire applicherò la teoria sviluppata al caso del Sole, modellizzato come una sfera di materia densa che emette neutrini elettronici nel suo centro, immersa in 150 milioni di km di vuoto fino alla Terra.<sup>1</sup>

---

<sup>1</sup>in tutta la trattazione verranno utilizzate le unità naturali  $c = \hbar = 1$

# Capitolo 1

## Oscillazioni nel vuoto

### 1.1 Probabilità di oscillazione

I neutrini prodotti nelle interazioni deboli hanno sapore definito dal leptone carico con cui si accompagnano e si presentano dunque in uno dei tre autostati  $|\nu_\alpha\rangle$  con  $\alpha = e, \mu, \tau$ . Tuttavia gli autostati dell'hamiltoniana libera sono gli autostati di massa  $|\nu_k\rangle$  con  $k = 1, 2, 3$

$$H|\nu_k\rangle = E_k|\nu_k\rangle \quad E_k = \sqrt{\vec{p}^2 + m_k^2}.$$

Per quanto riguarda le masse, si hanno due autostati più vicini che sono, per convenzione,  $|\nu_1\rangle$  e  $|\nu_2\rangle$  con masse  $m_1 < m_2$ . Non è ancora noto invece se la massa  $m_3$  sia minore o maggiore delle altre due. Le due configurazioni possibili sono dette gerarchie: normale se  $m_3 > m_2 > m_1$ , invertita se  $m_2 > m_1 > m_3$ . E' possibile scrivere gli autostati di sapore come combinazione lineare di quelli di massa

$$|\nu_\alpha\rangle = \sum_k U_{\alpha k}^* |\nu_k\rangle \quad (1.1)$$

e viceversa

$$|\nu_k\rangle = \sum_\alpha U_{\alpha k} |\nu_\alpha\rangle \quad (1.2)$$

con  $U$  matrice di mescolamento unitaria  $UU^* = U^*U = \mathbb{I}$ . L'unitarietà della matrice e l'ortonormalità degli autostati di massa  $\langle \nu_k | \nu_j \rangle = \delta_{kj}$  implica anche per gli autostati di sapore  $\langle \nu_\alpha | \nu_\beta \rangle = \delta_{\alpha\beta}$ .

Per quanto riguarda l'evoluzione temporale degli autostati avremo

$$i \frac{d}{dt} |\nu_k(t)\rangle = H |\nu_k(t)\rangle \quad (1.3)$$

e dunque, posto  $|\nu_k(0)\rangle = |\nu_k\rangle$ ,

$$|\nu_k(t)\rangle = e^{-iHt} |\nu_k(0)\rangle = e^{-iE_k t} |\nu_k\rangle. \quad (1.4)$$

L'evoluzione temporale degli autostati di sapore si ottiene utilizzando l'equazione 1.1 in 1.4

$$|\nu_\alpha(t)\rangle = \sum_k U_{\alpha k}^* e^{-iE_k t} |\nu_k\rangle \quad (1.5)$$

e, sostituendo la 1.2, giungiamo a scrivere

$$|\nu_\alpha(t)\rangle = \sum_\beta \left( \sum_k U_{\alpha k}^* e^{-iE_k t} U_{\beta k} \right) |\nu_\beta\rangle . \quad (1.6)$$

Il risultato 1.6, ovvero la presenza di una sovrapposizione dei diversi autostati di sapore nell'evoluto temporale di uno stato con sapore definito, è il meccanismo alla base dell'oscillazione nel vuoto. Possiamo calcolare le probabilità di transizione come

$$P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta}(t) = |\langle \nu_\beta | \nu_\alpha(t) \rangle|^2 = \sum_{k,j} U_{\alpha k}^* U_{\beta k} U_{\alpha j} U_{\beta j}^* e^{-i(E_k - E_j)t} . \quad (1.7)$$

Dal momento che ci troviamo in regime ultrarelativistico

$$E_k = \sqrt{\vec{p}^2 + m_k^2} = E + \frac{m_k^2}{2E} + \dots$$

Questo implica che

$$P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta}(t) = \sum_{k,j} U_{\alpha k}^* U_{\beta k} U_{\alpha j} U_{\beta j}^* \exp\left(\frac{-i\Delta m_{kj}^2 t}{2E}\right) . \quad (1.8)$$

L'ampiezza di oscillazione è dunque determinata dagli elementi della matrice di mescolamento mentre la fase dipende dalla differenza quadratica tra le masse, dall'energia della particella e da  $t$  ovvero, sempre per il fatto che ci troviamo in regime ultrarelativistico, dalla distanza  $L$  tra sorgente e rivelatore.

Si definisce lunghezza di oscillazione la distanza tale per cui la fase diventa pari a  $2\pi$  e dunque  $P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\alpha} = 1$

$$L_{kj}^{osc} = \frac{4\pi E}{\Delta m_{kj}^2} .$$

E' spesso utile riscrivere la 1.8 utilizzando la lunghezza di oscillazione

$$P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta}(L, E) = \sum_k |U_{\alpha k}|^2 |U_{\beta k}|^2 + 2\Re \sum_{k>j} U_{\alpha k}^* U_{\beta k} U_{\alpha j} U_{\beta j}^* \exp\left(-2\pi i \frac{L}{L_{kj}^{osc}}\right) \quad (1.9)$$

che separa termine costante e termine oscillante. Quest'ultimo dipende dalla differenza tra le masse al quadrato dei neutrini e non dà dunque informazioni sulle masse assolute, a parte un limite inferiore per il loro valore. Per via dell'unitarietà i termini della matrice di mescolamento sono invarianti sotto trasformazioni di fase  $U_{\alpha k} \rightarrow e^{i\psi_\alpha} U_{\alpha k} e^{i\phi_k}$  con  $\psi_\alpha, \phi_k$  arbitrari, proprietà che ci sarà utile in seguito. Le probabilità di oscillazione devono rispettare le regole di conservazione:

- La somma delle probabilità di transizione da un neutrino  $\nu_\alpha$  a un neutrino  $\nu_\beta$  su tutti i  $\beta$  deve essere uguale a 1

$$\sum_\beta P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta}(L, E) = 1$$

- La somma delle probabilità di transizione da un neutrino  $\nu_\alpha$  a un neutrino  $\nu_\beta$  su tutti gli  $\alpha$  deve essere uguale a 1

$$\sum_\alpha P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta}(L, E) = 1 .$$

Se  $\alpha = \beta$  la probabilità è detta di sopravvivenza mentre se  $\alpha \neq \beta$  è detta di transizione. La probabilità di sopravvivenza, ponendo  $\alpha = \beta$  nella 1.8 e rimaneggiando opportunamente, risulta

$$P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\alpha}(L, E) = 1 - 4 \sum_{k>j} |U_{\alpha k}|^2 |U_{\alpha j}|^2 \sin^2\left(\frac{\Delta m_{kj}^2 L}{4E}\right) . \quad (1.10)$$

### 1.1.1 Assunzioni

Per poter trattare in maniera semplice le oscillazioni dei neutrini è stato necessario fare quattro assunzioni. La prima consiste nel trattare i neutrini come particelle ultrarelativistiche (e quindi ponendo  $t=L$ ) ed è giustificata dal fatto che la loro massa è inferiore a 2.2 eV e la loro energia è molti ordini di grandezza maggiore (per neutrini solari da centinaia di keV a circa 10 MeV). La seconda è contenuta in 1.1 ed è il fatto che i neutrini prodotti dalle interazioni deboli si presentano nei tre autostati di sapore. E' possibile dimostrare questa affermazione nell'ambito della teoria quantistica di campo assumendo l'approssimazione ultrarelativistica. La terza assunzione riguarda il momento dei neutrini  $\vec{p}$ : abbiamo trattato gli autostati di massa come se avessero stesso momento e diverse energie (per via della diversa massa), ipotesi non realistica e senza alcun fondamento. Una trattazione più formale in teoria di campo permette di abbandonare questa ipotesi. Infine abbiamo considerato le particelle come delle onde piane. Tuttavia, per avere localizzazione spaziale e temporale, è necessario adottare una trattazione basata su pacchetti d'onda. Si dimostra, sempre nell'ambito della teoria di campo, che i risultati ottenuti con i pacchetti d'onda sono analoghi, a meno di correzioni, a quanto ricavato in approssimazione di onda piana.

## 1.2 Mescolamento di due neutrini

Consideriamo il caso semplificato di due soli neutrini massivi, ad esempio  $|\nu_e\rangle$  e  $|\nu_\mu\rangle$ . Gli autostati di sapore sono allora combinazione lineare dei due stati  $|\nu_1\rangle$  e  $|\nu_2\rangle$  con coefficienti dati dalla matrice di mescolamento

$$U^* = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\alpha} \end{pmatrix} \quad (1.11)$$

dove  $\theta$  è l'angolo di mescolamento compreso tra 0 e  $\frac{\pi}{2}$ . La prima matrice è reale dal momento che l'invarianza per trasformazioni di fase permette di semplificare  $2N - 1$  fasi della matrice di mescolamento. Una matrice ortogonale ha  $N(N - 1)/2$  parametri che sono  $N(N + 1)/2$  in meno rispetto agli  $N^2$  di una matrice unitaria. Nel caso di mescolamento di due neutrini le fasi eliminabili equivalgono dunque al numero di parametri di differenza e si ha una matrice ortogonale. La matrice di destra contiene invece le fasi di Majorana. Queste scompaiono nel calcolo delle probabilità di oscillazione e verranno pertanto ignorate nel resto della trattazione. Per stabilire se i neutrini siano particelle di Majorana (ovvero coincidano con la loro antiparticella) o di Dirac è necessario studiare fenomeni diversi dalle oscillazioni (ad esempio l'esistenza del doppio decadimento beta senza neutrini). Per convenzione si considera  $|\nu_1\rangle$  il neutrino con massa minore e si pone  $\Delta m^2 = m_2^2 - m_1^2$ .

Se al tempo  $t = 0$  abbiamo  $|\nu(0)\rangle = |\nu_e\rangle$  allora al tempo  $t$  avremo

$$|\nu(t)\rangle = \cos\theta e^{-iE_1 t} |\nu_1\rangle + \sin\theta e^{-iE_2 t} |\nu_2\rangle$$

con

$$E_i = \sqrt{\vec{p}^2 + m_i^2} \simeq E + \frac{m_i^2}{2E}.$$

A questo punto è facile ricavare la probabilità di transizione calcolando  $|\langle \nu_\mu | \nu(t) \rangle|^2$  o introducendo gli elementi di  $U^*$  in 1.8

$$P_{\nu_e \rightarrow \nu_\mu}(L, E) = \frac{1}{2} \sin^2 2\theta \left[ 1 - \cos\left(\frac{\Delta m^2 L}{2E}\right) \right]. \quad (1.12)$$

Tale relazione, utilizzando  $\cos x = 1 - 2 \sin^2 \frac{x}{2}$ , può essere riscritta nella forma

$$P_{\nu_e \rightarrow \nu_\mu}(L, E) = \sin^2 2\theta \sin^2 \left( \frac{\Delta m^2 L}{4E} \right). \quad (1.13)$$

In quest'equazione si legge che la probabilità di transizione oscilla tra zero e  $\sin^2 2\theta$  a seconda del setup sperimentale (range energetico dei neutrini che vengono rivelati e distanza dalla sorgente). La probabilità di sopravvivenza si ricava in maniera banale come

$$P_{\nu_e \rightarrow \nu_e}(L, E) = 1 - P_{\nu_e \rightarrow \nu_\mu}(L, E) = 1 - \sin^2 2\theta \sin^2 \left( \frac{\Delta m^2 L}{4E} \right). \quad (1.14)$$

La lunghezza di oscillazione è definita come

$$L^{osc} = \frac{4\pi E}{\Delta m^2} \quad (1.15)$$

e permette di riscrivere

$$P_{\nu_e \rightarrow \nu_\mu}(L, E) = \sin^2 2\theta \sin^2 \left( \frac{\pi L}{L^{osc}} \right).$$

Utilizzando questa forma si vede immediatamente che la probabilità di transizione è piccola se  $L \ll L^{osc}$ , si annulla per  $L = L^{osc}$  e oscilla molto rapidamente per  $L \gg L^{osc}$ . In quest'ultimo caso è possibile scrivere  $\sin^2 \left( \frac{\pi L}{L^{osc}} \right) \simeq \frac{1}{2}$  ovvero approssimare il  $\sin^2$  con il suo valor medio. Si ha dunque

$$P_{\nu_e \rightarrow \nu_\mu} \simeq \frac{1}{2} \sin^2 2\theta$$

e un esperimento che misuri la probabilità di transizione risulta sensibile al valore di  $\theta$ . In generale un esperimento sulle oscillazioni dei neutrini è sensibile ai valori di  $\Delta m^2$  per i quali  $\frac{\Delta m^2 L}{2E}$  è di ordine uno.

### 1.3 Accenno al caso di tre neutrini

Se andiamo a considerare tre neutrini la trattazione si complica. In questo caso  $N(N+1)/2 > 2N-1$  dunque la matrice di mescolamento ha una fase residua ed è complessa, ciò implica la violazione di CP. La matrice di mescolamento viene parametrizzata come:

$$U^* = \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{-i\delta} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & s_{23}c_{13} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & -c_{12}s_{23} - s_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{23}c_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\alpha} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\beta} \end{pmatrix}$$

dove abbiamo abbreviato  $c_{ij} = \cos \theta_{ij}$  e  $s_{ij} = \sin \theta_{ij}$  e, come nel caso dei due neutrini, la matrice di destra contiene le fasi di Majorana che si semplificano fra loro nel calcolo delle probabilità di oscillazione. Il mescolamento di tre neutrini viene dunque a dipendere dai tre angoli di mescolamento  $\theta_{12}$ ,  $\theta_{23}$ ,  $\theta_{13}$  e dalla fase  $\delta$  che descrive la violazione di CP. La trattazione successiva è del tutto analoga a quanto fatto nel paragrafo generale e nel caso di due neutrini a meno di difficoltà di calcolo.

## Capitolo 2

# Oscillazioni nella materia

### 2.1 Probabilità di oscillazione

Andiamo ad analizzare gli effetti prodotti dalla presenza di materia ordinaria sulle oscillazioni dei neutrini. Essa è costituita da elettroni, protoni e neutroni le cui densità verranno denotate con  $N_e, N_p$  e  $N_n$ . La teoria del campo elettrodebole porta alla scrittura di un hamiltoniano totale nella materia, somma di un hamiltoniano nel vuoto e di una perturbazione causata dai fenomeni di scattering coerente (per basse energie lo scattering incoerente può essere trascurato). Queste interazioni tra neutrini e materia sono dovute a processi di corrente neutra e di corrente carica. Le ampiezze di scattering di corrente neutra sono le stesse ma con segno opposto su elettroni e protoni per ogni sapore di neutrino e dunque hanno un effetto totale nullo, mentre quelle sui neutroni non si annullano ma sono le stesse per i tre neutrini. Per quanto riguarda le interazioni di corrente carica, queste sono assenti per  $\nu_\mu$  e  $\nu_\tau$ , mentre intervengono nel caso di  $\nu_e$  su elettrone. Avremo dunque

$$H = H_0 + H_1$$

$$H_0|\nu_k \rangle = E_k|\nu_k \rangle \quad E_k = \sqrt{\vec{p}^2 + m_k^2} \quad (2.1)$$

$$H_1|\nu_\alpha \rangle = V_\alpha|\nu_\alpha \rangle \quad V_\alpha = V_{CC}\delta_{\alpha e} + V_{NC} = \sqrt{2}G_F \left( N_e\delta_{\alpha e} - \frac{1}{2}N_n \right) \quad (2.2)$$

dove  $G_F$  è la costante di Fermi.

Applichiamo ora l'equazione di Schrödinger al nuovo hamiltoniano

$$i \frac{d}{dt} |\nu_\alpha(t) \rangle = H |\nu_\alpha(t) \rangle \quad \text{con } |\nu_\alpha(0) \rangle = |\nu_\alpha \rangle . \quad (2.3)$$

Definiamo  $\psi_{\alpha\beta}(t) = \langle \nu_\beta | \nu_\alpha(t) \rangle$  e andiamo a riscrivere la 2.3 per  $\psi_{\alpha\beta}(t)$  sostituendo la 1.1 e l'hamiltoniano completo al suo interno. Otteniamo dunque

$$i \frac{d}{dt} \psi_{\alpha\beta}(t) = \sum_k U_{\beta k} \langle \nu_k | H_0 | \nu_\alpha(t) \rangle + \langle \nu_\beta | H_1 | \nu_\alpha(t) \rangle =$$

$$\sum_k U_{\beta k} E_k \langle \nu_k | \nu_\alpha(t) \rangle + V_\beta \psi_{\alpha\beta}(t) = \sum_k U_{\beta k} E_k \sum_\eta U_{\eta k}^* \psi_{\alpha\eta}(t) + V_\beta \psi_{\alpha\beta}(t)$$

ovvero

$$i \frac{d}{dt} \psi_{\alpha\beta}(t) = \sum_\eta \left( \sum_k U_{\beta k} E_k U_{\eta k}^* + \delta_{\beta\eta} V_\beta \right) \psi_{\alpha\eta}(t) . \quad (2.4)$$

Il fatto che i neutrini si comportino in maniera ultrarelativistica, ipotesi giustificata in 1.1.1, permette di considerare

$$E_k \simeq E + \frac{m_k^2}{2E} \quad p \simeq E \quad t \simeq x$$

e quindi di giungere all'equazione

$$i \frac{d}{dx} \psi_{\alpha\beta}(x) = \left( p + \frac{m_1^2}{2E} + V_{NC} \right) \psi_{\alpha\beta}(x) + \sum_{\eta} \left( \sum_k U_{\beta k} \frac{\Delta m_{k1}^2}{2E} U_{\eta k}^* + \delta_{\beta e} \delta_{\eta e} V_{CC} \right) \psi_{\alpha\eta}(x). \quad (2.5)$$

Il primo termine è costante e può essere rimosso con il cambiamento di fase

$$\psi_{\alpha\beta}(x) \rightarrow \psi_{\alpha\beta}(x) e^{-i \left( p + \frac{m_1^2}{2E} \right) x - i \int_0^x V_{NC}(x') dx'}$$

che non modifica la probabilità di transizione. Il termine fisico risulta dunque

$$i \frac{d}{dx} \psi_{\alpha\beta}(x) = \sum_{\eta} \left( \sum_k U_{\beta k} \frac{\Delta m_{k1}^2}{2E} U_{\eta k}^* + \delta_{\beta e} \delta_{\eta e} V_{CC} \right) \psi_{\alpha\eta}(x). \quad (2.6)$$

Come abbiamo già visto per le oscillazioni dei neutrini nel vuoto la probabilità di transizione dipende dalla differenza tra le masse al quadrato dei neutrini e non dalle masse assolute.

L'equazione 2.6 può essere scritta in forma matriciale come

$$i \frac{d}{dx} \Psi_{\alpha} = \mathcal{H}_F \Psi_{\alpha} \quad (2.7)$$

dove  $\mathcal{H}_F$  è l'hamiltoniana efficace nella base di sapore

$$\mathcal{H}_F = \frac{1}{2E} (U \mathbb{M}^2 U^* + \mathbb{A}) \quad (2.8)$$

che si verifica essere hermitiana. Nel caso di tre neutrini si avrà

$$\Psi_{\alpha} = \begin{pmatrix} \psi_{\alpha e} \\ \psi_{\alpha \mu} \\ \psi_{\alpha \tau} \end{pmatrix}, \quad \mathbb{M}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Delta m_{21}^2 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta m_{31}^2 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{A} = \begin{pmatrix} A_{CC} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

dove  $A_{CC} \equiv 2E V_{CC} = 2\sqrt{2} E G_F N_e$ . Per avere un'idea dell'entità di  $A_{CC}$  notiamo che

$$A_{CC} \simeq \begin{cases} 1.5 \times 10^{-5} eV^2 \left( \frac{E}{1MeV} \right) & \text{nucleo del Sole} \\ 2.3 \times 10^{-7} eV^2 \left( \frac{\rho}{3gcm^{-3}} \right) \left( \frac{E}{1MeV} \right) & \text{materiale terrestre} \end{cases}$$

## 2.2 Mescolamento di due neutrini e effetto MSW

Andiamo a trattare in maniera più completa il caso di due neutrini nella materia. Prendiamo in considerazione, in particolare,  $|\nu_e\rangle$  e  $|\nu_{\mu}\rangle$ . Il caso di  $|\nu_e\rangle$  e  $|\nu_{\tau}\rangle$  è analogo mentre la situazione si modifica per il neutrino sterile, dal momento che interviene anche la corrente debole neutra. Tuttavia l'esistenza del neutrino sterile non ha prove sperimentali e non è oggetto di questa tesi.

Supponiamo di avere un neutrino elettronico a  $t = 0$  ovvero

$$\Psi_e(0) = \begin{pmatrix} \psi_{ee}(0) \\ \psi_{e\mu}(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

e di voler calcolare la probabilità di trovare un neutrino muonico a distanza  $L$  dalla sorgente. Tale problema può essere risolto numericamente con buona approssimazione. Tuttavia può essere utile cercare una soluzione analitica e poi verificarne l'accordo con i dati sperimentali assumendo una semplice distribuzione della densità elettronica.

Scriviamo, per prima cosa, l'hamiltoniano efficace nel caso di due neutrini. L'evoluzione temporale in forma matriciale è la 2.7 dove

$$\Psi_\alpha = \Psi_e = \begin{pmatrix} \psi_{ee} \\ \psi_{e\mu} \end{pmatrix}, \quad \mathbb{M}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \Delta m^2 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{A} = \begin{pmatrix} A_{CC} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le due matrici si possono riscrivere come

$$\begin{aligned} \mathbb{M}^2 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \Delta m^2 & 0 \\ 0 & \Delta m^2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\Delta m^2 & 0 \\ 0 & \Delta m^2 \end{pmatrix} \\ \mathbb{A} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} A_{CC} & 0 \\ 0 & A_{CC} \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} A_{CC} & 0 \\ 0 & -A_{CC} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Semplificando le prime componenti di  $\mathbb{A}$  e  $\mathbb{M}^2$  tramite un cambio di fase, in quanto multiple dell'identità, e calcolando l'hamiltoniano efficace tramite la 2.8 otteniamo:

$$i \frac{d}{dx} \begin{pmatrix} \psi_{ee} \\ \psi_{e\mu} \end{pmatrix} = \frac{1}{4E} \begin{pmatrix} -\Delta m^2 \cos 2\theta + A_{CC} & \Delta m^2 \sin 2\theta \\ \Delta m^2 \sin 2\theta & \Delta m^2 \cos 2\theta - A_{CC} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_{ee} \\ \psi_{e\mu} \end{pmatrix} \quad (2.10)$$

dove  $\theta$  è l'angolo di mescolamento nel vuoto. Applichiamo poi la teoria dei sistemi a due livelli dell'Appendice A a  $H_F$ . Per ottenere le espressioni degli autovalori  $\pm \Delta m_M^2/4E$  e del cambio di base<sup>1</sup>  $U_M$  che diagonalizzerà l'hamiltoniano è sufficiente calcolare le espressioni A.1, A.2 e A.3 per la matrice

$$H = H_0 + W = \frac{1}{4E} \left[ \begin{pmatrix} \Delta m^2 & 0 \\ 0 & -\Delta m^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\Delta m^2 - \Delta m^2 \cos 2\theta + A_{CC} & \Delta m^2 \sin 2\theta \\ \Delta m^2 \sin 2\theta & \Delta m^2 + \Delta m^2 \cos 2\theta - A_{CC} \end{pmatrix} \right].$$

Avremo quindi

$$\Delta m_M^2 = \sqrt{(\Delta m^2 \cos 2\theta - A_{CC})^2 + (\Delta m^2 \sin 2\theta)^2} \quad (2.11)$$

$$U_M = \begin{pmatrix} \cos \theta_M & \sin \theta_M \\ -\sin \theta_M & \cos \theta_M \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

$$\tan 2\theta_M = \frac{\Delta m^2 \sin 2\theta}{\Delta m^2 \cos 2\theta - A_{CC}} = \frac{\tan 2\theta}{1 - \frac{A_{CC}}{\Delta m^2 \cos 2\theta}} \quad (2.13)$$

tale che

$$U_M^T \mathcal{H}_F U_M = \mathcal{H}_M \quad (2.14)$$

dove

$$\mathcal{H}_M = \frac{1}{4E} \begin{pmatrix} -\Delta m_M^2 & 0 \\ 0 & \Delta m_M^2 \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

---

<sup>1</sup>La matrice  $U_M$  esprime gli autostati di sapore in funzione di quelli dell'energia, diversamente da quanto accade nelle sezioni precedenti in cui questo ruolo è ricoperto da  $U^*$ . Questa scelta è stata fatta per non appesantire la notazione. Laddove venissero richiamate equazioni presenti nelle sezioni 1.1-2 e 2.1 è necessario usare  $U_M$  al posto di  $U^*$  e la sua trasposta (dal momento che si tratta di una matrice reale) al posto di  $U$ .

detta hamiltoniano efficace nella base di massa i cui autovettori sono  $|\nu_1^M\rangle$  e  $|\nu_2^M\rangle$ . Per i neutrini nella materia la 1.1 si scrive quindi

$$|\nu_e\rangle = \cos\theta_M |\nu_1^M\rangle + \sin\theta_M |\nu_2^M\rangle \quad |\nu_\mu\rangle = -\sin\theta_M |\nu_1^M\rangle + \cos\theta_M |\nu_2^M\rangle .$$

E' importante notare che l'angolo di mescolamento nella materia e i nuovi autostati dipendono dalla densità elettronica della materia e dall'energia dei neutrini: non sono, in generale, costanti lungo il percorso.

Questa formulazione del problema permise a Mikheev e Smirnov nel 1985 di scoprire un fenomeno interessante, il cosiddetto effetto MSW. Si tratta della presenza di una risonanza per  $A_{CC}(x_R) = \Delta m^2 \cos 2\theta$ . Riprendendo la 2.13 e utilizzando le relazioni trigonometriche si arriva a scrivere

$$\cos 2\theta_M = \frac{\Delta m^2 \cos 2\theta - A_{CC}}{\Delta m_M^2}, \quad \sin 2\theta_M = \frac{\Delta m^2 \sin 2\theta}{\Delta m_M^2} . \quad (2.16)$$

Se introduciamo la lunghezza di rifrazione  $L_e = \frac{2\pi}{\sqrt{2}G_F N_e}$  e ricordiamo la definizione di  $L^{osc}$  in 1.15 possiamo vedere il comportamento risonante facendo un grafico di  $R = \sin^2 2\theta_M$  in funzione di  $r = \frac{L^{osc}}{L_e} = \frac{A_{CC}}{\Delta m^2}$ . Dalla relazione per il seno in 2.16 otteniamo la funzione

$$R = \frac{\sin^2 2\theta}{1 + r^2 - 2r \cos 2\theta} .$$

Notiamo che in risonanza  $\sin^2 2\theta_M = 1$  e la zona di risonanza è tanto più larga quanto maggiore

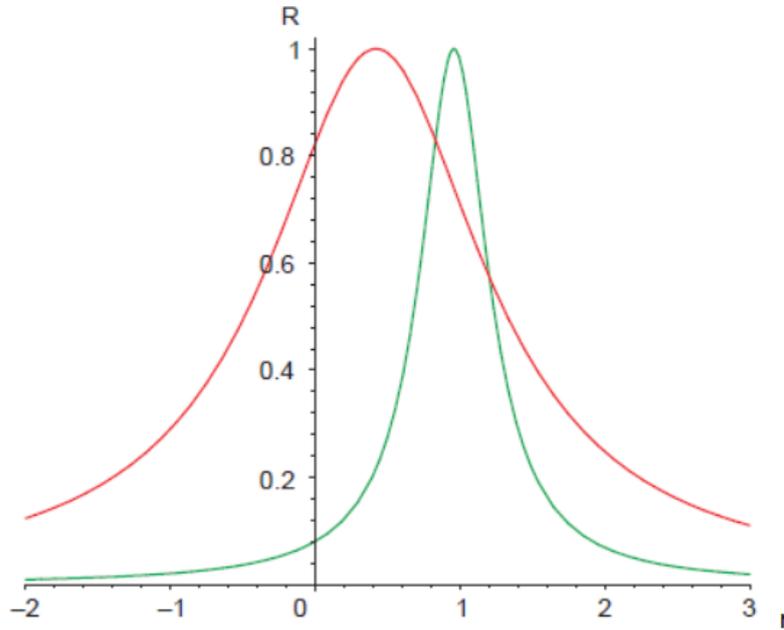


Figura 2.1: Andamento risonante di R in funzione di  $r = L^{osc}/L_e$  per gli angoli di mescolamento  $\sin^2 2\theta = 0.825$  (in rosso) e  $\tan^2\theta = 0.08$  (in verde), tratto da [13] pagina 3.

è l'angolo di mescolamento (infatti la larghezza a metà altezza della curva di risonanza è pari a  $2\sin 2\theta$ ). Per  $\theta \rightarrow 0$  invece si ha  $L^{osc} \simeq L_e$  dal momento che la condizione di risonanza è

$$L^{osc} = L_e \cos 2\theta.$$

Nel punto di risonanza, che si ottiene quando la densità elettronica è pari a

$$N_e(x_R) = \frac{\Delta m^2 \cos 2\theta}{2\sqrt{2}EG_F},$$

si annulla il denominatore della 2.13 e l'angolo di mescolamento efficace risulta pari a  $\frac{\pi}{4}$ . Questo significa che, anche in presenza di piccoli angoli di mescolamento nel vuoto, lo stato nella materia risulta con uguale probabilità  $|\nu_e\rangle$  e  $|\nu_\mu\rangle$ : è possibile una transizione totale. Il  $\Delta m_M^2$  assume nella situazione di risonanza il suo valore minimo

$$\Delta m_M^2|_R = \Delta m^2 \sin 2\theta.$$

Nella materia ordinaria  $A_{CC} > 0$  dunque, per avere risonanza, si dovrà avere  $\theta < \frac{\pi}{4}$  (altrimenti  $\cos 2\theta < 0$ ). Per questo motivo il comportamento delle oscillazioni nella materia è diverso dal comportamento nel vuoto in cui la probabilità di transizione è invariante sotto la trasformazione  $\theta \rightarrow \frac{\pi}{2} - \theta$ .

Torniamo ora al problema che ci eravamo posti all'inizio di questa sezione: il calcolo della probabilità di transizione per un neutrino elettronico. Le espressioni in 2.16 permettono di riscrivere la 2.10 nella forma

$$i \frac{d}{dx} \begin{pmatrix} \psi_{ee} \\ \psi_{e\mu} \end{pmatrix} = \frac{1}{4E} \begin{pmatrix} -\Delta m_M^2 \cos 2\theta_M & \Delta m_M^2 \sin 2\theta_M \\ \Delta m_M^2 \sin 2\theta_M & \Delta m_M^2 \cos 2\theta_M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_{ee} \\ \psi_{e\mu} \end{pmatrix}. \quad (2.17)$$

Applicando ora la trasformazione  $\Psi_e = U_M \Phi_e$ , con  $\Psi_e = \begin{pmatrix} \psi_{ee} \\ \psi_{e\mu} \end{pmatrix}$ ,  $\Phi_e = \begin{pmatrix} \phi_{e1} \\ \phi_{e2} \end{pmatrix}$  a  $i \frac{d}{dx} \Psi_e = H_F \Psi_e$  si ottiene

$$\begin{aligned} i \frac{d}{dx} (U_M \Phi_e) &= U_M U_M^T H_F U_M \Phi_e \\ i \left( \frac{d}{dx} U_M \right) \Phi_e + i U_M \frac{d}{dx} \Phi_e &= U_M H_M \Phi_e \end{aligned}$$

e, portando il primo termine a destra dell'uguale e moltiplicando il tutto per  $U_M^T$ ,

$$i \frac{d}{dx} \Phi_e = H_M \Phi_e - i U_M^T \left( \frac{d}{dx} U_M \right) \Phi_e$$

ovvero

$$i \frac{d}{dx} \begin{pmatrix} \phi_{e1} \\ \phi_{e2} \end{pmatrix} = \frac{1}{4E} \begin{pmatrix} -\Delta m_M^2 & -4Ei \frac{d\theta_M}{dx} \\ 4Ei \frac{d\theta_M}{dx} & \Delta m_M^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_{e1} \\ \phi_{e2} \end{pmatrix}. \quad (2.18)$$

Riscriviamo le condizioni iniziali 2.9 per  $\Phi_e$

$$\begin{pmatrix} \phi_{e1}(0) \\ \phi_{e2}(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_M^{(i)} & -\sin \theta_M^{(i)} \\ \sin \theta_M^{(i)} & \cos \theta_M^{(i)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_M^{(i)} \\ \sin \theta_M^{(i)} \end{pmatrix}$$

dove  $\theta_M^{(i)}$  è l'angolo di mescolamento efficace nel punto in cui il neutrino elettronico viene prodotto.

Per proseguire è necessario fare un'ipotesi sull'andamento di  $\theta_M$ : tratteremo in questo capitolo il caso in cui la densità elettronica del mezzo sia costante mentre vedremo nel prossimo la densità variabile.

### 2.2.1 Materia a densità elettronica costante

Se  $\frac{d\theta_M}{dx} = 0$  è possibile risolvere la 2.18 che dà come risultato

$$\begin{pmatrix} \phi_{e1} \\ \phi_{e2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i\frac{\Delta m_M^2 x}{4E}} \cos \theta_M^{(i)} \\ e^{-i\frac{\Delta m_M^2 x}{4E}} \sin \theta_M^{(i)} \end{pmatrix}$$

e quindi

$$\begin{pmatrix} \psi_{ee} \\ \psi_{e\mu} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_M & \sin \theta_M \\ -\sin \theta_M & \cos \theta_M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\frac{\Delta m_M^2 x}{4E}} \cos \theta_M^{(i)} \\ e^{-i\frac{\Delta m_M^2 x}{4E}} \sin \theta_M^{(i)} \end{pmatrix} \quad (2.19)$$

e, dal momento che  $\theta_M^{(i)} \equiv \theta_M$ , si ottiene la probabilità di transizione

$$P_{\nu_e \rightarrow \nu_\mu}(x) = |\psi_{e\mu}|^2 = \sin^2 2\theta_M \sin^2 \left( \frac{\Delta m_M^2 x}{4E} \right). \quad (2.20)$$

L'evoluzione dei neutrini ottenuta nel caso di angolo di mescolamento costante è del tutto simile a quella nel vuoto, a meno del fatto che i parametri di oscillazione sono modificati dalla presenza di materia. Perchè il contributo di questi effetti sia importante è necessario che la densità elettronica sia alta oppure un  $L$  grande. Mostriamo nel grafico 2.2 l'andamento della probabilità di sopravvivenza  $P_{\nu_e \rightarrow \nu_e}$  in funzione di  $r = L^{osc}/L_e$ . Questa ha un comportamento oscillatorio determinato dalla fase  $\Delta m_M^2 x/4E$  inscritto in una curva di risonanza. In risonanza si ha la massima ampiezza delle oscillazioni (è dunque possibile un mescolamento massimale) mentre per  $L^{osc} \gg L_e \cos 2\theta$  ( $E \gg E_R$ ) le oscillazioni sono soppresse. Se andiamo a studiare

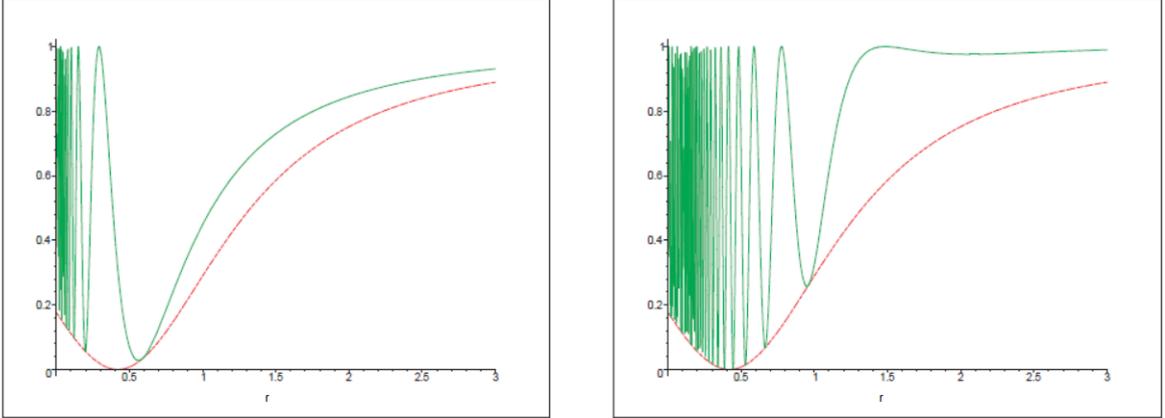


Figura 2.2: Il grafico mostra l'andamento di  $P_{\nu_e \rightarrow \nu_e}$  in funzione di  $r = \frac{L^{osc}}{L_e}$ . A sinistra per un fascio di neutrini che attraversano uno strato di materia pari a  $\frac{L_e}{\pi}$ , a destra per uno strato 10 volte maggiore. Da [12] pagina 11.

l'andamento delle oscillazioni in funzione del valore di  $N_e$  vedremo che, per  $N_e \ll N_e^R$   $\theta_M \simeq \theta$  e  $L^{osc} \simeq L_e$  mentre per  $N_e \gg N_e^R$   $\theta_M \simeq \frac{\pi}{2}$  e dunque la probabilità di transizione è fortemente soppressa. Le oscillazioni in un mezzo a densità praticamente costante sono applicabili ai neutrini che attraversano il mantello terrestre.

## Capitolo 3

# Neutrini solari

Il Sole produce neutrini elettronici attraverso due processi principali: la catena protone-protone e il ciclo CNO. Questi hanno un range energetico che va da zero a poco più di 10 MeV a seconda della reazione coinvolta. Un neutrino prodotto al centro del Sole attraversa per prima cosa il plasma solare, poi viaggia nello spazio approssimativamente vuoto per 150 milioni di chilometri per essere infine rivelato sulla Terra.

### 3.1 Esperimenti

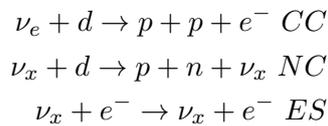
Prima di procedere con la teoria andiamo ad esaminare gli esperimenti che hanno rivelato i neutrini solari e ne hanno studiato il comportamento. Questi sono sostanzialmente di due tipi: esperimenti radiochimici ed esperimenti in tempo reale. I primi si basano su reazioni innescate dal neutrino e vanno a misurare il flusso integrato di queste particelle attraverso l'analisi dei prodotti di reazione. Sono caratterizzati, inoltre, da basse energie di soglia che permettono di misurare anche il flusso di neutrini con energia minore di 1 MeV. Gli esperimenti in tempo reale sono grandi vasche di acqua o materiale scintillatore che rivelano le tracce di leptoni carichi che hanno interagito con neutrini con energia di almeno qualche MeV e dunque permettono di studiare anche direzione ed energia delle particelle. Entrambi necessitano di metodi di schermatura per evitare il rumore causato dai raggi cosmici.

Descriviamo i principali esperimenti:

1. Homestake experiment (1968-1990): fu il primo esperimento a rivelare i neutrini solari. Si trattava di un serbatoio contenente 615 tonnellate di tetracloroetilene ( $C_2Cl_4$ ) posto a 1500 metri di profondità nella miniera di Homestake nel South Dakota. Al suo interno i neutrini innescavano la reazione  $\nu_e + {}^{37}Cl \rightarrow e^- + {}^{37}Ar$  e una volta al mese l'argon veniva raccolto con procedimenti chimici. Infine si utilizzava la reazione  ${}^{37}Ar \rightarrow {}^{37}Cl + e^- + \bar{\nu}_e$ , il cui tempo di dimezzamento è di 35 giorni, per contare gli atomi di argon attraverso il numero di elettroni prodotti dal decadimento. La soglia energetica della reazione è di 813 keV (che non permette la rivelazione dei neutrini provenienti dalla catena pp) e il flusso calcolato risultò pari a  $\frac{1}{3}$  di quanto previsto;
2. Gallex/GNO (1991-2003): era anch'esso un esperimento di tipo radiochimico situato nei laboratori sotterranei del Gran Sasso. Era costituito da una tanica riempita con 101 tonnellate di cloruro di gallio in soluzione di acido cloridrico ( $GaCl_3-HCl$ ) contenente 30.3 tonnellate di gallio. I neutrini reagiscono con il gallio attraverso la reazione  $\nu_e + {}^{71}Ga \rightarrow {}^{71}Ge + e^-$  che ha una soglia energetica di 233 keV. Veniva dunque raccolto il germanio presente nella soluzione e se ne contavano gli atomi attraverso i raggi x e gli elettroni

emessi durante il decadimento. Questo esperimento permise di rivelare anche parte dei neutrini provenienti dalla catena pp: si trovò circa metà del flusso previsto;

3. Sage(1990-2004): era molto simile a Gallex per quanto riguarda le reazioni utilizzate per rivelare i neutrini. Si trattava di un rivelatore contenente 50 tonnellate di gallio metallico liquido posto nel laboratorio sotterraneo vicino a Baksan in Russia. Come in Gallex il flusso ottenuto risultò circa metà di quanto previsto;
4. Kamiokande (1988-1995) e Super-Kamiokande (1996-2001): furono i primi esperimenti in tempo reale. Kamiokande era inizialmente destinato a rivelare il decadimento del protone e fu convertito nel 1988 alla rivelazione di neutrini. Era costituito da una vasca cilindrica riempita con 2000 tonnellate di acqua e ricoperta da 1000 tubi fotomoltiplicatori. Super-Kamiokande, che ne fu l'ampliamento, conteneva 50000 tonnellate di acqua ed era rivestito da 11000 tubi fotomoltiplicatori. Il metodo di rivelazione era lo stesso nei due esperimenti: si sfruttava la luce Cherenkov emessa dagli elettroni che subiscono Electron Scattering  $\nu_x + e^- \rightarrow \nu_x + e^-$  con  $x = e, \mu, \tau$  (le sezioni d'urto sono diverse per i tre tipi di neutrini). Era inoltre possibile misurare la traiettoria e l'energia dell'elettrone che sono correlate a quelle del neutrino. La soglia, per ridurre il fondo, era di circa 7.5 MeV per Kamiokande e 5 MeV per Super-Kamiokande: ciò rendeva possibile rivelare solamente i neutrini dal ciclo del  ${}^8B$ . Il flusso misurato risultò circa metà di quello previsto e si verificò, per la prima volta, che la direzione da cui provenivano i neutrini era effettivamente quella del Sole. Si misurò anche una differenza tra il flusso di neutrini rivelati di giorno e di notte e una variazione del flusso nei vari mesi dell'anno per via della diversa distanza Terra-Sole;
5. SNO (1999-2003): fu un esperimento in tempo reale situato nella miniera di Creighton in Canada a più di 2000 m di profondità. Era costituito da un serbatoio contenente 1000 tonnellate di acqua pesante ( $D_2O$ ) circondato da 10000 tubi fotomoltiplicatori. Permetteva di osservare le tre reazioni



attraverso la rivelazione della luce Cherenkov dell'elettrone per CC e ES e attraverso la rivelazione del neutrone nel caso di NC. Il neutrone veniva inizialmente rivelato utilizzando la reazione  $n + d \rightarrow {}^3H + \gamma$  e raccogliendo il fotone nei fototubi. In seguito vennero aggiunte 2 tonnellate di cloruro di sodio ( $NaCl$ ) e si contarono i neutroni attraverso la reazione  $n + {}^{35}Cl \rightarrow {}^{36}Cl + \gamma$ . Infine si rimosse il cloruro di sodio e vennero aggiunti contatori all'elio che contavano i neutroni che partecipavano alla reazione  ${}^3He + n \rightarrow {}^3H + p$ . Queste variazioni permisero di migliorare sempre più l'efficienza dello strumento. SNO rivelò  $\frac{1}{3}$  dei neutrini elettronici previsti e permise di verificare che le particelle restanti si erano convertite al sapore muonico e tauonico: il flusso totale di neutrini risultava in accordo con lo SSM. Anch'esso rivelò inoltre l'asimmetria tra neutrini rivelati di giorno e di notte e la stagionalità del flusso;

6. Borexino (2007-oggi): è un esperimento in tempo reale situato ai laboratori del Gran Sasso che ha come obiettivo l'osservazione della linea monocromatica a 863 keV dei neutrini prodotti dal ciclo del  ${}^7Be$ . Inoltre si occupa di neutrini atmosferici, raggi cosmici ed è in grado di rivelare neutrini provenienti da supernove. E' costituito da una sfera di nylon riempita con 300 tonnellate di scintillatore liquido, a sua volta rivestita da un altro strato di scintillatore e 2400 tonnellate di acqua inserite in un recipiente di acciaio. Lo

schermo che separa l'acqua di schermatura dal rivelatore interno è rivestito con 2200 tubi fotomoltiplicatori che guardano verso l'interno (per rivelare i neutrini) e 200 che guardano verso l'esterno (per rivelare i muoni). Borexino è stato il primo rivelatore a misurare in tempo reale neutrini a bassa energia e ha permesso di confermare la soluzione al problema dei neutrini solari di cui parleremo nell'ultima sezione della tesi.

Riportiamo in figura 3.1 il flusso di neutrini solari in funzione dell'energia. Sono indicate anche le regioni energetiche coperte dagli esperimenti precedenti il 2004 (dove Gallium indica sia Gallex che Sage e Chlorine indica l'esperimento di Homestake). Come già detto Borexino si occupa invece prevalentemente della linea di più alta energia della catena del  ${}^7\text{Be}$ .

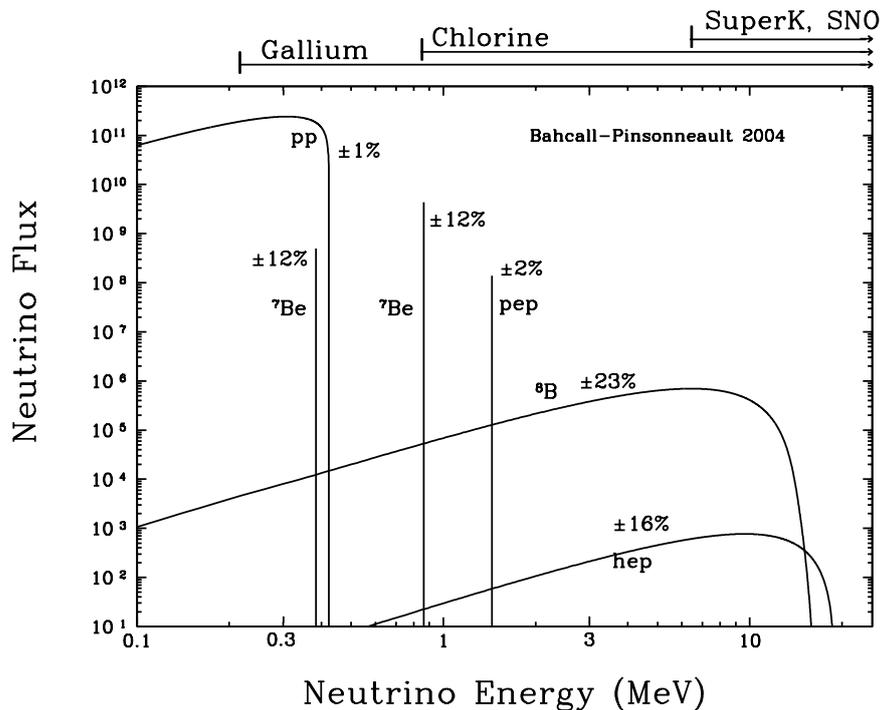


Figura 3.1: Flusso dei neutrini solari (in  $cm^{-2}s^{-1}MeV^{-1}$ ) in funzione della loro energia (MeV). I neutrini provenienti dal ciclo CNO (più difficili da rivelare) sono stati omessi per non complicare il grafico. Tratto dal sito di J.Bahcall all'indirizzo web <http://www.sns.ias.edu/jnb/> (immagine scaricata il 30/08/2016)

### 3.2 Probabilità di sopravvivenza per neutrini solari

Andiamo ora ad occuparci da un punto di vista teorico del mescolamento di due neutrini provenienti dal Sole che saranno denotati con  $|\nu_e\rangle$  e  $|\nu_x\rangle$ . Quest'ultimo può essere  $|\nu_\mu\rangle$ ,  $|\nu_\tau\rangle$  o una loro opportuna sovrapposizione. Denotiamo con  $P_{e1,2}^S$  la probabilità di transizione  $|\nu_e\rangle \rightarrow |\nu_{1,2}^M\rangle$  all'interno del materiale solare, con  $P_{1,2e}^T$  la probabilità di transizione  $|\nu_{1,2}^M\rangle \rightarrow |\nu_e\rangle$  nel materiale terrestre e con  $A_{ei}^S$  e  $A_{ie}^T$  le relative ampiezze di oscillazione. Scriviamo allora l'ampiezza di

sopravvivenza come

$$A_{ee} = \sum_{i=1}^2 A_{ei}^S A_{ie}^T \exp \left[ \frac{-im_i^2 L}{2E} \right] \quad (3.1)$$

che è prodotto di una prima parte dovuta alla propagazione dal centro alla superficie del Sole, di una seconda parte dovuta al percorso dalla superficie terrestre al punto di rilevazione e una fase che contiene l'effetto del cammino nel vuoto dalla superficie solare a quella terrestre. La probabilità di sopravvivenza risulta dunque

$$P_{\nu_e \rightarrow \nu_e} = |A_{ee}|^2 = P_{e1}^S P_{1e}^T + P_{e2}^S P_{2e}^T + 2\sqrt{P_{e1}^S P_{1e}^T P_{e2}^S P_{2e}^T} \cos \left( \frac{\Delta m^2 L}{2E} + \delta_m \right) \quad (3.2)$$

in cui  $\delta_m$  è la fase acquisita nella materia solare e terrestre. Dal momento che valgono le proprietà della probabilità  $P_{e1}^S + P_{e2}^S = 1$  e  $P_{1e}^T + P_{2e}^T = 1$  è sufficiente conoscere due delle quattro probabilità per determinare completamente la soluzione. Per poter trascurare gli effetti dovuti al materiale terrestre prenderemo in considerazione i neutrini rivelati durante il giorno per i quali  $P_{1e}^T = \cos^2 \theta$  e  $P_{2e}^T = \sin^2 \theta$ .

### 3.2.1 Effetto MSW nella materia a densità variabile

I neutrini solari vengono prodotti nel nucleo del Sole, dove la densità elettronica è dell'ordine di  $100N_A cm^{-3}$ , e percorrono il plasma della stella fino alla superficie. La densità elettronica viene modellizzata come un esponenziale decrescente

$$N_e(r) = N_e(0) \exp \left( -\frac{r}{r_0} \right), \text{ con } N_e(0) = 245N_A cm^{-3} \text{ e } r_0 = \frac{R_S}{10.54}$$

dove  $R_S$  è il raggio solare pari a  $6.96 \times 10^5$  km. Questa approssimazione è buona per  $0.1R_S < r < 0.9R_S$ .

In questo caso  $\frac{d\theta_M}{dx} \neq 0$ , ovvero la densità elettronica cambia lungo il percorso dei neutrini e quindi l'hamiltoniano del sistema dipende dal tempo. Questo significa che gli autostati istantanei dell'hamiltoniano efficace nella base di massa  $|\nu_1^M\rangle$  e  $|\nu_2^M\rangle$  non sono più autostati della propagazione ma si hanno transizioni  $|\nu_1^M\rangle \leftrightarrow |\nu_2^M\rangle$ . Il peso di queste transizioni, come si vede nella 2.18, è dato da  $|\frac{d\theta_M}{dx}|$  mentre il gap energetico tra i due livelli è  $|E_1^M - E_2^M| = \Delta m_M^2 / 2E$ . Per questo si introduce il parametro di adiabaticità

$$\gamma = \frac{\Delta E}{2|\frac{d\theta_M}{dx}|}$$

che quantifica l'adattarsi del sistema alle nuove condizioni esterne (densità elettronica).

Riprendendo l'espressione del coseno nella 2.16 e facendone la derivata si può scrivere

$$\frac{d\theta_M}{dx} = \frac{1}{2} \frac{\sin 2\theta_M}{\Delta m_M^2} \frac{dA_{CC}}{dx} \quad (3.3)$$

e dunque

$$\gamma = \frac{\Delta m_M^2}{4E|\frac{d\theta_M}{dx}|} = \frac{(\Delta m_M^2)^2}{2E \sin 2\theta_M |\frac{dA_{CC}}{dx}|}.$$

Se  $\gamma \gg 1$  su tutta la traiettoria dei neutrini, cioè quando la densità elettronica varia lentamente, l'evoluzione si dice adiabatica e le transizioni tra  $|\nu_1^M\rangle$  e  $|\nu_2^M\rangle$  sono trascurabili. Gli evolutori temporali risultano in tal caso

$$\phi_{e1}(x) = \exp \left( i \int_0^x \frac{\Delta m_M^2(x')}{4E} dx' \right) \phi_{e1}(0)$$

$$\phi_{e2}(x) = \exp\left(-i \int_0^x \frac{\Delta m_M^2(x')}{4E} dx'\right) \phi_{e2}(0)$$

e la probabilità di sopravvivenza è

$$P_{\nu_e \rightarrow \nu_e}^{adiabatica}(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\theta_M^{(i)} \cos 2\theta_M^{(f)} + \frac{1}{2} \sin 2\theta_M^{(i)} \sin 2\theta_M^{(f)} \cos\left(\int_0^x \frac{\Delta m_M^2(x')}{2E} dx'\right) \quad (3.4)$$

che è espressione della 3.2 nel caso adiabatico dove l'indice  $(i)$  indica i valori iniziali dell'angolo e  $(f)$  quelli finali. Questa probabilità è composta da due termini che dipendono solo dall'angolo di mescolamento efficace e un ultimo termine oscillante che dipende dalla differenza tra le masse efficaci al quadrato lungo il percorso delle particelle, dalla lunghezza di tale percorso e dall'energia. I neutrini solari vengono rivelati sulla Terra molto lontano dalla loro sorgente, questo fa in modo che l'ultimo termine oscilli in maniera abbastanza veloce da rendere pressoché impossibile osservarlo per via della risoluzione energetica del rivelatore. La probabilità di sopravvivenza misurabile sarà, se i neutrini vengono rivelati di giorno ( $\theta_M^{(f)} \simeq \theta$ ),

$$\bar{P}_{\nu_e \rightarrow \nu_e} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\theta_M^{(i)} \cos 2\theta \quad (3.5)$$

che non dipende dalla distanza tra sorgente e rivelatore. Quest'ultima formulazione è verificata se la differenza tra le masse al quadrato è sufficientemente grande.

L'angolo di mescolamento dei neutrini nella materia a densità lentamente variabile risulta pressoché uguale a quello del vuoto se  $N_e \ll N_e^R$  mentre tende rapidamente a  $\frac{\pi}{4}$  quando la densità elettronica passa il punto di risonanza per poi raggiungere  $\frac{\pi}{2}$  per  $N_e \gg N_e^R$ . Si deve avere, inoltre,

$$m_{M1}^2 + m_{M2}^2 = m_1^2 + m_2^2 + A_{CC}$$

e dunque

$$m_{M1,2}^2 = \frac{1}{2} (m_1^2 + m_2^2 + A_{CC} \pm \Delta m_M^2) \quad (3.6)$$

che, come già sottolineato nel caso di densità costante, implica un minimo  $\Delta m_M^2$  nel punto di risonanza. L'andamento della probabilità 3.5 dipende dal valore della densità elettronica nel punto in cui il neutrino viene prodotto e dall'angolo di mescolamento nel vuoto.

### 3.2.2 Violazione dell'adiabaticità

Gli effetti di non adiabaticità presenti, dovuti al fatto che  $\gamma < \infty$  nella materia, si possono introdurre sotto forma di probabilità  $P_C$  di passare da un autostato di massa  $|\nu_1^M\rangle$  a un autostato  $|\nu_2^M\rangle$ . Tale probabilità modifica la 3.5 in

$$\bar{P}_{\nu_e \rightarrow \nu_e}^{nonad} = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} - P_C\right) \cos 2\theta_M^{(i)} \cos 2\theta \quad (3.7)$$

dove  $P_C$  è data dalla formula standard di Landau-Zener di cui non ci occupiamo ma che riportiamo per completezza

$$P_C = \frac{\exp\left(-\frac{\pi}{2}\gamma_R F\right) - \exp\left(-\frac{\pi}{2}\gamma_R \frac{F}{\sin^2\theta}\right)}{1 - \exp\left(-\frac{\pi}{2}\gamma_R \frac{F}{\sin^2\theta}\right)}$$

con  $\gamma_R$  parametro di adiabaticità nel punto di risonanza e  $F$  coefficiente che dipende dal profilo della densità elettronica. E' possibile spiegare in maniera semplice la formula 3.7: il neutrino evolve in maniera adiabatica fino al punto di risonanza in cui gli autovalori sono abbastanza vicini da permettere un "salto" tra un autostato e l'altro con probabilità  $P_C$ .

### 3.3 Regioni ottenute dall'analisi dati dei neutrini solari

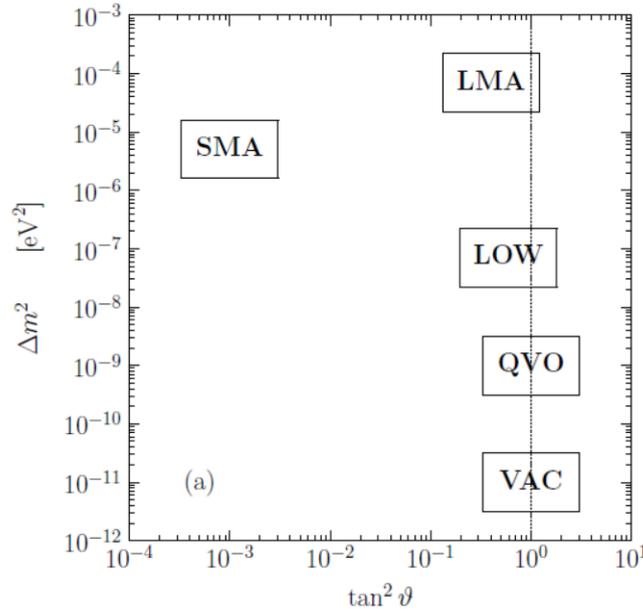


Figura 3.2: Regioni nel piano  $\tan^2\theta - \Delta m^2$  ottenute dall'analisi dei dati relativi ai neutrini solari. La linea tratteggiata verticale corrisponde al massimo mescolamento. Immagine riportata da [6] a pagina 384.

Facendo un grafico di  $\Delta m^2$  in funzione di  $\tan^2\theta$  (Figura 3.2) è possibile dividere il piano in cinque regioni che danno possibili soluzioni per le oscillazioni dei neutrini solari. Queste sono:

1. VAC (vacuum) in cui gli effetti dovuti alla presenza di materia sono trascurabili e le oscillazioni nel vuoto sono dominanti;
2. QVO (quasi-vacuum oscillations) in cui è necessario tenere in considerazione sia gli effetti dovuti al vuoto che quelli dovuti alla materia e l'adiabaticità viene violata;
3. LOW (low  $\Delta m^2$ ) in cui il  $\Delta m^2$  diventa sufficientemente grande da permettere di mediare a zero il termine di interferenza nella 3.4;
4. SMA (small mixing angle) in cui si può trascurare il termine di interferenza nella 3.4 e l'angolo di mescolamento nel vuoto è piccolo;
5. LMA (large mixing angle) in cui si può trascurare il termine di interferenza nella 3.4 e l'angolo di mescolamento nel vuoto è grande.

Le regioni che risultano più interessanti, in quanto i parametri determinati sperimentalmente (prima di SNO e Borexino) si collocavano in tali aree, sono LOW, SMA e LMA. In queste regioni l'andamento dell'angolo di mescolamento nella materia in funzione della densità elettronica del mezzo è quello mostrato in figura 3.3. Vale quanto detto in 3.2.1: per basse densità  $\theta_M \simeq \theta$ , in risonanza  $\theta_M = \frac{\pi}{4}$  e per alte densità  $\theta_M \simeq \frac{\pi}{2}$ . Inoltre, dal momento che, come sottolineato nella sezione 2.2, la regione di risonanza ha larghezza a metà altezza pari a  $2 \sin 2\theta$  anche questa caratteristica dipende dalla regione in cui si trovano i parametri. Nel caso SMA la regione di risonanza è molto stretta mentre si allarga su più ordini di grandezza nel caso di LMA o LOW.

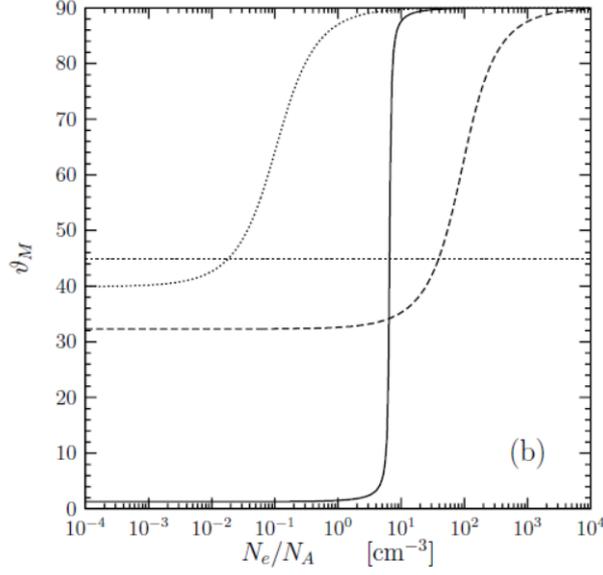


Figura 3.3: Angolo di mescolamento nella materia in funzione della densità elettronica  $N_e/N_A$  per tre diversi parametri. La riga continua è relativa alla soluzione SMA con  $\Delta m^2 = 5 \times 10^{-6} eV^2$  e  $\tan^2 \theta = 5 \times 10^{-4}$ , la riga tratteggiata è relativa alla soluzione LMA con  $\Delta m^2 = 7 \times 10^{-5} eV^2$  e  $\tan^2 \theta = 0.4$  e la riga a puntini è relativa alla soluzione LOW con  $\Delta m^2 = 8 \times 10^{-8} eV^2$  e  $\tan^2 \theta = 0.7$ . La figura è stata presa da [6] pagina 384.

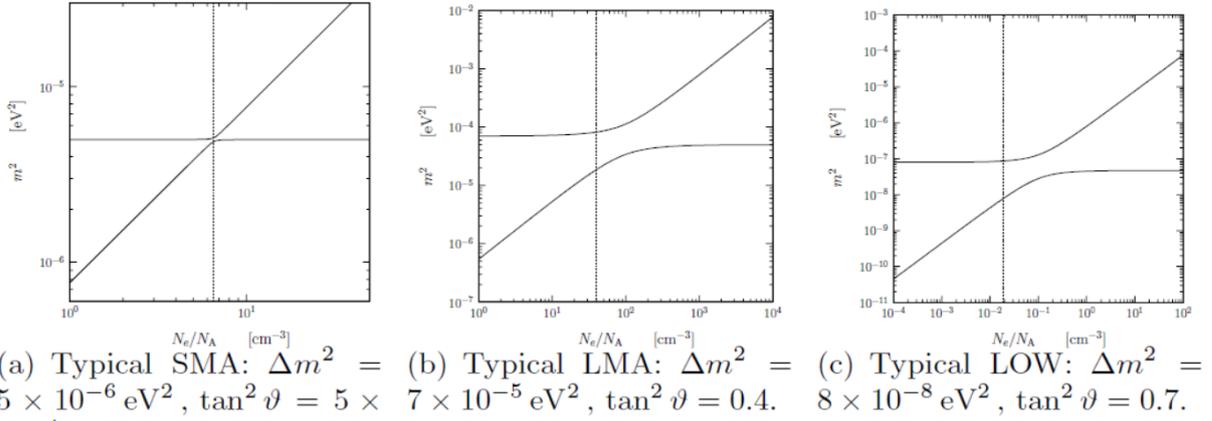


Figura 3.4: Grafico di  $m_{1M}^2$  e  $m_{2M}^2$  in funzione di  $N_e/N_A$  per  $E = 5 MeV$  in scala bilogarithmica. Il fatto che la retta tratteggiata verticale che indica la densità di risonanza non sia in corrispondenza del minimo  $\Delta m_M^2$  è dovuto alla scala logaritmica. Tratto da [6] pagina 385.

Anche la distanza tra le masse efficaci nel punto di risonanza dipende dalla regione considerata come mostrato nel grafico 3.4. In SMA le masse efficaci nel punto di risonanza sono così vicine da rendere importanti gli effetti di non adiabaticità: quando si arriva in tale punto è molto probabile una transizione  $|\nu_1^M \rangle \leftrightarrow |\nu_2^M \rangle$ . Nel caso di LMA o LOW, invece, le masse efficaci rimangono piuttosto distanti in risonanza e la soluzione ha un comportamento sempre adiabatico per LMA e adiabatico per  $E \lesssim 10 \text{ MeV}$  per LOW.

Studiamo l'andamento delle soluzioni in funzione dell'energia dei neutrini:

- Nella soluzione SMA i neutrini di bassa energia sono prodotti sotto la soglia di risonanza ( $\theta_M^{(i)} \simeq \theta$ ) e la loro probabilità di sopravvivenza risulta

$$\bar{P}_{\nu_e \rightarrow \nu_e} \simeq 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2\theta$$

che, per  $\theta \rightarrow 0$ , è circa 1. I neutrini con energia compresa tra 0.3 e 1 MeV sono invece prodotti sopra la soglia di risonanza e si comportano in maniera adiabatica. Nel punto iniziale avremo  $\theta_M \rightarrow \frac{\pi}{2}$  e quindi  $|\nu_e \rangle \simeq |\nu_2^M \rangle$ . Quando si attraversa il punto di risonanza il mescolamento diventa massimale, entrambi i sapori compaiono in egual misura, e si ha il minimo  $\Delta m_M^2$ . Se l'evoluzione procede adiabaticamente la particella rimane sull'autostato  $|\nu_2^M \rangle$ , dal momento che viene poi rivelata nel vuoto, si avrà

$$\bar{P}_{\nu_e \rightarrow \nu_e} = |\langle \nu_e | \nu(t) \rangle|^2 = |\langle \nu_e | \nu_2^M \rangle|^2 = |\langle \nu_e | \nu_2 \rangle|^2 \simeq \sin^2 \theta$$

che si ottiene anche ponendo  $\cos \theta_M \simeq -1$  nella 3.5. Questo significa che, per piccoli angoli di mescolamento nel vuoto, la transizione sarà totale e verranno rivelati neutrini di tipo  $x$ . Questa è la situazione in cui l'effetto MSW incide maggiormente sulla probabilità di sopravvivenza. Neutrini con energia maggiore di 1 MeV si comportano in maniera non adiabatica. Quando giungono al punto di risonanza compiono il "salto" dall'autostato  $|\nu_2^M \rangle$  all'autostato  $|\nu_1^M \rangle$  con probabilità  $P_C$  e la loro probabilità di sopravvivenza aumenta con l'energia.

- In caso di regime LMA non c'è risonanza se l'energia dei neutrini è al di sotto di 2 MeV, dunque  $\theta_M \simeq \theta$  e il comportamento è assimilabile a quello nel vuoto

$$\bar{P}_{\nu_e \rightarrow \nu_e} \simeq 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2\theta .$$

Per  $E \gg 2 \text{ MeV}$   $A_{CC}$  risulta molto maggiore del valore di risonanza, quindi  $\theta_M \simeq \frac{\pi}{2}$  e la probabilità di sopravvivenza risulta

$$\bar{P}_{\nu_e \rightarrow \nu_e} \simeq \sin^2 \theta .$$

Tuttavia, poichè l'angolo di mescolamento è grande, questa probabilità avrà un valore minore di 0.5 (valore di risonanza) ma non nullo.

- Nella soluzione LOW la risonanza viene attraversata sempre in maniera adiabatica, pertanto la probabilità di sopravvivenza risulta  $\bar{P}_{\nu_e \rightarrow \nu_e} \simeq \sin^2 \theta$  per qualsiasi energia, e dunque praticamente piatta.

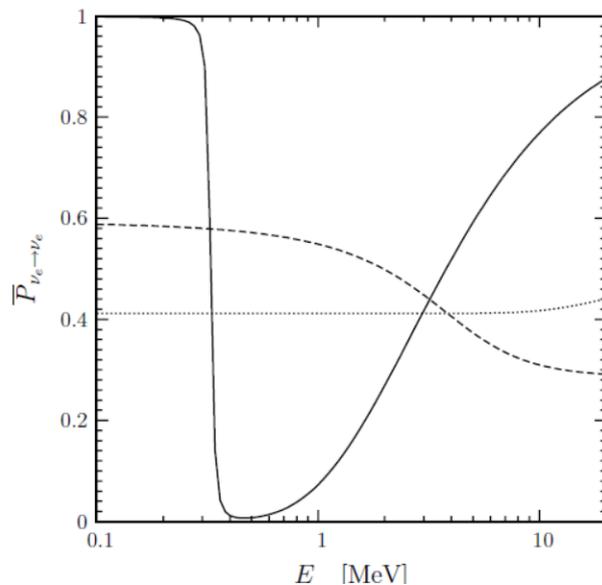


Figura 3.5: Il grafico rappresenta l'andamento della probabilità di sopravvivenza in funzione di  $E$ : la riga continua è relativa alla soluzione SMA con  $\Delta m^2 = 5 \times 10^{-6} eV^2$  e  $\tan^2 \theta = 5 \times 10^{-4}$ , la riga tratteggiata è relativa alla soluzione LMA con  $\Delta m^2 = 7 \times 10^{-5} eV^2$  e  $\tan^2 \theta = 0.4$  e la riga a puntini è relativa alla soluzione LOW con  $\Delta m^2 = 8 \times 10^{-8} eV^2$  e  $\tan^2 \theta = 0.7$ . Si trova in [6] a pagina 386.

Le tre probabilità di cui si è parlato sono rappresentate nel grafico 3.5 in funzione dell'energia. I dati raccolti da SNO, Borexino e in KamLAND, analizzati insieme a quelli relativi agli esperimenti precedenti, supportano l'andamento LMA come soluzione del problema dei neutrini solari con un CL di  $5\sigma$  ed escludono tutti gli altri regimi. I dati di best fit ottenuti da un'analisi di tipo numerico dei dati sperimentali, tratti da [3] e pertanto aggiornati al 28 gennaio 2016, sono  $\Delta m^2 = 7.37 \times 10^{-5} eV^2$  e  $\sin^2 \theta = 0.297$ . Mostriamo in figura 3.6 nella pagina seguente l'andamento di  $P_{\nu_e \rightarrow \nu_e}$  in funzione di  $E$  secondo la soluzione LMA con i dati di best fit<sup>1</sup> e i punti sperimentali ottenuti a varie energie. L'accordo tra soluzione analitica e dati raccolti è buono, nonostante la mancanza di riscontri a basse energie e nella regione di risonanza.

<sup>1</sup>In questo caso i dati di best fit sono tratti da [1] e sono aggiornati al 7 novembre 2012.

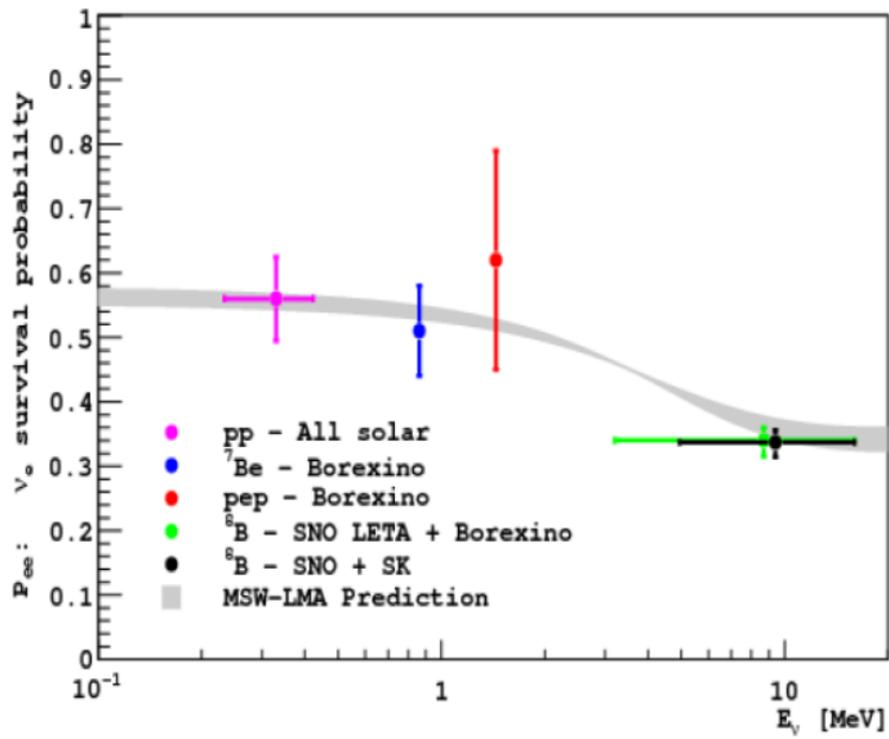


Figura 3.6:  $P_{\nu_e \rightarrow \nu_e}$  in funzione di  $E$  per LMA MSW con  $\Delta m^2 = 7.4 \times 10^{-5} eV^2$  e  $\tan^2 \theta = 0.45$  e punti ottenuti sperimentalmente. Tratto da [1] pagina 35.

# Appendice A

## Richiamo ai sistemi a due livelli

Supponiamo di trattare un sistema fisico a due stati in cui l'hamiltoniano  $H_0$  è tale che

$$\begin{aligned}H_0|\phi_1\rangle &= E_1|\phi_1\rangle \\H_0|\phi_2\rangle &= E_2|\phi_2\rangle \\ \langle\phi_i|\phi_j\rangle &= \delta_{ij} \quad i, j = 1, 2.\end{aligned}$$

Supponiamo inoltre che il sistema sia perturbato e si possa scrivere l'hamiltoniano totale  $H = H_0 + W$  dove

$$W = \begin{pmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{pmatrix}$$

è indipendente dal tempo ed è una matrice hermitiana nella base  $\{|\phi_1\rangle, |\phi_2\rangle\}$  con  $W_{11}$  e  $W_{22}$  reali e  $W_{12} = W_{21}^*$ . Denotiamo i nuovi autovettori con i simboli  $|\psi_{\pm}\rangle$  e i nuovi autovalori con  $E_{\pm}$ :

$$\begin{aligned}H|\psi_+\rangle &= E_+|\psi_+\rangle \\H|\psi_-\rangle &= E_-|\psi_-\rangle.\end{aligned}$$

Andiamo a calcolare gli effetti dell'accoppiamento. Per farlo scriviamo  $H$  nella base  $\{|\phi_1\rangle, |\phi_2\rangle\}$  come

$$H = \begin{pmatrix} E_1 + W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & E_2 + W_{22} \end{pmatrix}.$$

Autovalori e autovettori di questa matrice risultano:

$$E_{\pm} = \frac{1}{2}(E_1 + W_{11} + E_2 + W_{22}) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(E_1 + W_{11} - E_2 - W_{22})^2 + 4|W_{12}|^2} \quad (\text{A.1})$$

$$|\psi_+\rangle = \cos\frac{\theta}{2}e^{-i\frac{\phi}{2}}|\phi_1\rangle + \sin\frac{\theta}{2}e^{i\frac{\phi}{2}}|\phi_2\rangle \quad (\text{A.2})$$

$$|\psi_-\rangle = -\sin\frac{\theta}{2}e^{-i\frac{\phi}{2}}|\phi_1\rangle + \cos\frac{\theta}{2}e^{i\frac{\phi}{2}}|\phi_2\rangle \quad (\text{A.3})$$

dove

$$\begin{aligned}\tan\theta &= \frac{2|W_{12}|}{E_1 + W_{11} - E_2 - W_{22}} \\ W_{21} &= |W_{21}|e^{i\phi}.\end{aligned}$$



# Bibliografia

- [1] V. Antonelli, L. Miramonti, C. Peña-Garay and A. Serenelli, *Solar Neutrinos*, 7 August 2012, [arXiv:1208.1356v1]
- [2] J.N.Bahcall, C.Peña-Garay, *Solar models and solar neutrino oscillations*, New J.Phys.6:63,2004 , Princeton, 6 April 2004, [arXiv:0404061v1]
- [3] F.Capozzi, E.Lisi, A.Marrone, D.Montanino, A.Palazzo, *Neutrino masses and mixings: Status of known and unknown  $\nu$  parameters*, in Nuclear Physics B00(2016) p.1-14, 28 January 2016, [arXiv:1601.07777v1]
- [4] A.E.Chavarria, *Solar Neutrinos in 2011*, Proceedings of XXXI Physics in Collision 2011, Vancouver, 30 January 2012, [arXiv:1201.6311v1]
- [5] C.Cohen-Tannoudji, B.Diu, F.Laloe, *Quantum Mechanics, Volume 1*, Wiley, 1977
- [6] C.Giunti and C.W. Kim, *Fundamentals of Neutrino Physics and Astrophysics*, chaps 7-10, Oxford, Oxford University press, 2007
- [7] M.C. Gonzales-Garcia and C.Peña-Garay, in Proc. of *XIXth International Conference on Neutrino Physics and Astrophysics*, Sudbury, Canada, 16-21 June 2000, in Nucl.Phys. B(Proc.Suppl) **91**, 80(2001), [arXiv:hep-ph/0009041]
- [8] W.Grimus, *Neutrino Physics - Theory*, Lectures given at the 41. Internationale Universitätswochen für Theoretische Physik, Flavour Physics, Schladming, Styria, Austria, February 22 – 28, 2003, in Lectures on Flavor Physics, eds. U.-G. Meißner and W. Plessas (Springer, Berlin, Heidelberg, 2004), p. 169-214
- [9] B.Kayser, *Neutrino mass, mixing and flavour change*, Fermilab (Chicago), September 2005, [arXiv:hep-ph/0211134]
- [10] D.Montanino, *Le oscillazioni di neutrino*, in "Ithaca: Viaggio nella Scienza", VI Anno 2015, p.19-36
- [11] K.Nakamura and S.T.Petcov, *Neutrino mass, mixing and oscillations*, May 2014, at <http://pdg.lbl.gov/2015/reviews/rpp2015-rev-neutrino-mixing.pdf> (22/08/2016)
- [12] A.Yu.Smirnov *The MSW effect and Solar Neutrinos*, Invited talk given at the 11th workshop on Neutrino Telescopes, Venice, 11- 14 March 2003, reviewed 9 May 2003, [arXiv:hep-ph/0305106v1]
- [13] A.Yu.Smirnov, *The MSW effect and Matter Effects in Neutrino Oscillations*, Phys.Scripta T121 (2005) 57-64, Russia, 27 December 2004, [arXiv:hep-ph/0412391v1]