

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Dipartimento di Fisica e Astronomia “Galileo Galilei”

Corso di Laurea in Fisica

Tesi di Laurea

Orizzonti cosmologici e loro conseguenze

Relatore

Prof./Dr. Sabino Matarrese

Laureando

Giovanni Cataldi

Anno Accademico 2017/2018

A mio padre e mia madre.
Ai miei fratelli Francesco, Benedetta, Matteo, e Maria Caterina.
A Paolo.

Sommario

L'intento principale di questo elaborato è quello di descrivere ed approfondire il fenomeno dell'espansione dell'Universo, volgendo particolare interesse ai modelli teorici che esso richiede ed alle conseguenze fisiche che esso comporta, così da puntualizzare quelli che sono gli aspetti meno intuitivi, talvolta sottovalutati o incompresi, dai quali l'osservazione non può prescindere.

Introduzione	vii
1 Dentro il modello cosmologico	1
1.1 Il principio cosmologico	1
1.2 Il modello geometrico: l'universo in espansione	2
1.2.1 Coordinate fisiche e coordinate comoventi	2
1.2.2 La metrica di Friedmann-Robertson-Walker	4
1.2.3 Dinamica: dall'equazione della geodetica all'espansione	5
1.3 Il redshift	6
1.3.1 Redshift cosmologico ed effetto Doppler	7
1.3.2 La legge di Hubble	9
1.4 La composizione dell'Universo	10
1.4.1 Parametro di densità	12
1.4.2 Soluzione dell'equazione di Friedmann	13
2 Il problema dell'orizzonte	15
2.1 Cos'è l'orizzonte	15
2.2 La CMB e il problema dell'equilibrio termico	19
3 L'inflazione	21
3.1 La soluzione al problema dell'orizzonte	21
3.2 Raggio di Hubble e Orizzonte delle particelle	22
3.3 Cosa accade all'universo	24
3.3.1 Espansione accelerata	24
3.3.2 Lenta variazione del parametro di Hubble	25
3.3.3 Pressione negativa?	25

4	Conseguenze dell'espansione	27
4.1	L'interpretazione dei diagrammi spazio-tempo	27
4.2	Velocità di recessione superluminali?	30
4.2.1	Apparente violazione della Relatività Speciale	30
4.2.2	Il test della dilatazione del tempo	31
4.2.3	È possibile vedere oggetti superluminali?	33
4.3	L'Inflazione: un'espansione superluminale?	34
5	Conclusioni	37
A	Le Equazioni di Friedmann	39
A.1	Equazione di Friedmann	39
A.2	Equazione di continuità	40
A.3	Equazione di accelerazione	41
B	L'espansione in relatività generale	43
B.1	Il tensore energia-impulso	43
B.2	Il tensore di curvatura e le equazioni di Friedmann	45
B.3	La costante cosmologica	46
	Bibliografia	47

Introduzione

Il fenomeno dell'espansione dell'Universo è all'interno della cosmologia moderna uno dei pilastri fondamentali, ed in quanto tale ha ricevuto nel corso del secolo precedente e di quello attuale una serie di evidenze sperimentali che ne hanno prima arricchito e poi cementato la descrizione, fornendo via via nuovi dettagli e nuovi possibili scenari, futuri e passati.

Tuttavia, nonostante l'interpretazione dell'espansione dell'universo attraverso la relatività generale sia organica e pienamente accettata, alcune delle conseguenze dell'espansione sono da sempre oggetto di frequenti dubbi e incomprensioni, e tra queste ve ne sono alcune di carattere piuttosto fondamentale. Si può dire che gran parte della questione ruota attorno alla possibilità (verificata sperimentalmente come vedremo) per oggetti cosmici distanti (galassie o clusters di galassie) di muoversi a velocità che superino di gran lunga quella della luce. Questa apparente violazione dei principi della relatività speciale e dello stesso principio di causalità assedia costantemente l'osservatore medio, il quale potrebbe erroneamente ritenere impossibili questi fenomeni, o talvolta ammetterne l'esistenza, negandone tuttavia la possibilità di osservazione.

Capita inoltre che l'oggetto cosmologico in discussione sia addirittura l'universo stesso in espansione. Il fatto che il rate di espansione possa aver conosciuto una fase di repentina accelerazione durante il periodo dell'inflazione ha suscitato in alcuni l'erronea interpretazione di questa stessa fase come l'unica nella quale l'espansione oltrepassa la velocità della luce.

Vedremo come questi apparenti paradossi trovino un rigoroso chiarimento grazie ad una accurata comprensione del concetto di orizzonte cosmologico. Attraverso l'introduzione di un nuovo sistema di coordinate spazio-temporali, la definizione di concetti fisici come l'universo osservabile o la sfera di Hubble, la corretta collocazione degli oggetti all'interno dei diagrammi spazio-tempo mostrerà con una nuova prospettiva i fenomeni in questione.

Naturalmente a sostegno di tutti questi strumenti teorici costruiti *ad hoc* per illuminare la comprensione dell'espansione, puntualizzeremo in modo esatto il ruolo fondamentale del redshift cosmologico, la sua corretta formulazione all'interno della relatività generale, e le differenze con il più noto effetto Dop-

pler di matrice relativistica; questo fornirà di fatto la più importante evidenza sperimentale per gli oggetti con velocità superluminali.

Quello che tuttavia resterà a mio avviso un punto-chiave per una comprensione nitida della “storia” spazio-temporale dell’Universo sarà innanzitutto una corretta prospettiva di analisi da parte dell’osservatore, il quale dovrà necessariamente tenere conto di concetti come quello di distanza, località, ed osservabilità. Tutti questi aspetti nascono fondamentalmente dalla finitezza della velocità della luce.

Al fine di rendere più limpido possibile il contesto nel quale si sviluppa il fenomeno dell’espansione, il lettore verrà brevemente ma gradualmente introdotto a quello che è l’attuale il modello cosmologico nei suoi aspetti fondamentali (Capitolo 1), illustrando anche storicamente quello che è stato il problema dell’orizzonte (Capitolo 2) e il suo successivo superamento attraverso l’ipotesi dell’inflazione (Capitolo 3). Solo a questo punto la discussione si addenterà nel contesto più intrigante di quei fenomeni prima anticipati, verso la loro definitiva comprensione.

CAPITOLO 1

Dentro il modello cosmologico

In questo capitolo presentiamo quelle che sono le principali fondamenta a partire dalle quali si costruisce l'attuale modello Cosmologico. Per prima cosa è necessario uno sguardo d'insieme: come si vede nella sua totalità l'universo? Quali sembrano essere le sue principali caratteristiche su larga scala? Questo primo punto di vista risulta imprescindibile e come vedremo sarà in grado di influenzare la geometria stessa del nostro spazio, a partire dai vincoli sulla metrica dello spazio-tempo che verrà successivamente descritta.

Un'altro aspetto fondamentale sarà quello di uno dei fenomeni sui quali è stata costruita la teoria espansionistica dell'universo: il redshift cosmologico. Interessante sarà fornire anche le somiglianze e le differenze con il più noto e diffuso Effetto Doppler relativistico, dal momento che una chiarificazione di questo legame è a mio parere utile a prevenire fraintendimenti e incomprensioni come quelli che verranno discussi in seguito nel Capitolo 4.

Uno sguardo infine alla composizione stessa dell'universo, la quale influenza direttamente la velocità di espansione e la futura evoluzione del nostro cosmo.

1.1 Il principio cosmologico

Sicuramente il primo concetto in grado di fornire una visione d'insieme sull'universo è quello del principio cosmologico. Una sua formulazione potrebbe essere la seguente:

Proposizione. *A grandi distanze il nostro universo sembra essere uguale in ogni suo punto, senza alcuna posizione preferenziale. Dovunque ci si trovi, l'aspetto di ciò che si vede è pressoché lo stesso.*

Come facilmente si può intuire non si tratta di un vero e proprio principio, quanto piuttosto di un'ottima approssimazione, dal momento che la sua vali-

dità viene meno localmente, dove l'universo presenta numerose disomogeneità. Tuttavia, su larga scala, tipicamente su distanze che congiungono agglomerati distinti di galassie, l'universo appare davvero molto simile. Questa prospettiva si esplica a sua volta in termini di omogeneità ed isotropia dello spazio stesso, le quali impongono a loro volta restrizioni non banali sulle grandezze che verranno introdotte in seguito:

- **Omogeneità:** caratteristica dello spazio che implica l'uguaglianza di tutti i suoi punti; tutte le grandezze fisiche in gioco, dalla temperatura alla densità, dall'energia alla pressione, assumono valori indipendenti dal punto in cui vengono calcolate. Vedremo come, nel caso di un quadrivettore A^μ , le sue componenti saranno tali da avere $\partial_i A^\mu \equiv 0$.
- **Isotropia:** questa proprietà consiste nel fatto che lo spazio sia uguale in qualsiasi direzione lo si guardi. Nel caso di una grandezza fisica descritta da un quadrivettore A^μ si dovrà avere $A^i \equiv A \forall i$. Da notare la differenza con la proprietà di omogeneità: ad esempio il campo elettrico generato da una carica puntiforme è isotropo, dal momento che esso è uguale in tutte le direzioni; non è tuttavia omogeneo per via della sua dipendenza radiale. Al contrario un campo magnetico costante e opportunamente orientato è omogeneo, ma non isotropo, in quanto esiste una direzione preferenziale. In generale richiedere che lo spazio sia isotropo in ogni punto equivale a richiedere contemporaneamente entrambe le proprietà di omogeneità e isotropia. Mettendo insieme le condizioni espresse dall'una e dall'altra si ottiene che, per un dato quadrivettore A^μ si abbia $A^i \equiv A \forall i$ con A indipendente dalle coordinate spaziali e $\partial_i A^0 \equiv 0$.

1.2 Il modello geometrico: l'universo in espansione

Presentiamo ora l'universo in termini puramente geometrici: costruiamo un apposito sistema di coordinate in grado di controllare l'espansione, quindi diamo uno sguardo alla metrica che descrive la dinamica dei corpi in uno spazio che si dilata. A partire da questa saremo in grado di determinare come l'evoluzione dell'universo influenzi i suoi stessi componenti in termini di impulso ed energia.

1.2.1 Coordinate fisiche e coordinate comoventi

Un modo per quantificare l'espansione, è pensare che lo spazio stesso e le distanze fisiche si dilatino e aumentino nel tempo con un certo fattore di scala a . Per questioni di isotropia questi deve dipendere esclusivamente dal tempo $a = a(t)$. In questo modo si crea l'esigenza di costruire un sistema di coordinate fittizio che definisca delle distanze che non risentano dell'espansione, dette pertanto coordinate **comoventi** e rappresentate come $x^i = \{x^1, x^2, x^3\}$. Il legame con le coordinate fisiche x_{ph}^i è quindi il seguente: $x_{ph}^i = a(t)x^i$.

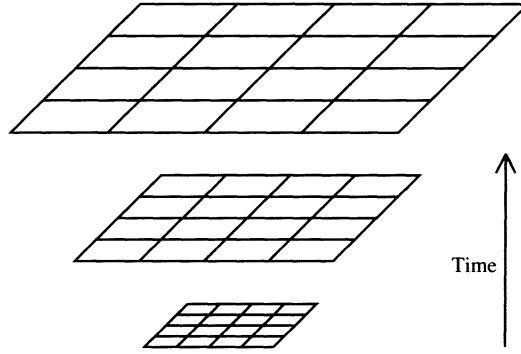


Figura 1.1: Schematica rappresentazione dell'evoluzione del sistema di coordinate comoventi nel corso dell'espansione dell'universo[5]: lo spazio fisico aumenta all'aumentare del tempo, ma con esso anche la griglia delle coordinate comoventi. In questo modo due oggetti fermi localmente rimarranno alla stessa distanza comovente fra loro, nonostante fisicamente si allontaneranno progressivamente.

A questo punto è possibile definire anche le velocità:

$$\begin{aligned} v_{ph}^i &\equiv \frac{dx_{ph}^i}{dt} = \dot{x}^i + a\dot{x}^i = v_{rec}^i + v_{pec}^i \\ &= Hax^i + v_{pec}^i = Hx_{ph}^i + v_{pec}^i \end{aligned} \quad (1.1)$$

dove $v_{pec}^i \equiv a(t)\dot{x}^i$ è detta **velocità peculiare**, mentre $v_{rec}^i = \dot{a}(t)x^i$ è detta **velocità di recessione**. Indichiamo con H la quantità \dot{a}/a che prende il nome di parametro di Hubble¹.

In un modo più figurativo è possibile vedere la velocità di recessione v_{rec} come Hx_{ph} , ed in questa forma essa viene detta *flusso di Hubble*. Questo nome serve proprio a dare un'idea di quello che è la velocità di recessione: essa è causata infatti dall'estensione progressiva dello spazio secondo il fattore di scala. Un oggetto che non ha velocità peculiare può essere quindi visto come un corpo che si lascia trasportare dallo spazio stesso, seguendo appunto, il flusso di Hubble. Un tale oggetto, o detto altrimenti, un osservatore solidale all'espansione, vedrà i corpi intorno a sé muoversi con una velocità detta velocità comovente (la velocità misurata da un osservatore comovente).

Precisiamo un particolare doveroso riguardo l'espansione dell'Universo. Quando ci riferiamo all'espansione intendiamo che lo spazio stesso di cui è costituito l'universo va aumentando con il tempo. Questo però avviene solo a grandi distanze: localmente, dove le forze gravitazionali originate da forti disomogeneità in termini di densità superano di gran lunga la forza repulsiva che caratterizza l'espansione, le distanze rimangono invariate. È questo l'esempio del nostro sistema solare, o delle distanze interne alla nostra galassia.

¹Spesso H viene detta costante di Hubble, nonostante il termine "costante" sia inappropriato dal momento che a dipende dal tempo.

1.2.2 La metrica di Friedmann-Robertson-Walker

La necessità di introdurre una nuova metrica rispetto a quella di Minkowski $ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ nasce dal fatto che nell'universo è necessario tenere in considerazione gli effetti che la forza di gravità induce sullo spazio stesso; capire come la presenza della massa-energia influenzi la geometria è abbastanza complesso, tuttavia, facendo uso del principio cosmologico e delle condizioni di omogeneità ed isotropia dello spazio quello che si osserva è che sono plausibili tre modelli di universo, caratterizzati da un diverso valore della curvatura k ($k = 0$ curvatura nulla, $k > 0$ curvatura positiva, $k < 0$ curvatura negativa). A seconda del valore della curvatura il modello geometrico dell'universo cambia notevolmente; per tenerne conto è necessario aggiungere un termine alla parte spaziale della metrica $d\ell^2$. Considerando anche il fatto che lo spazio si estende a causa dell'espansione abbiamo:

$$d\ell^2 = a^2 \left[dx^2 + k \frac{(\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x})^2}{1 - kx^2} \right] \equiv a^2 \gamma_{ij} dx^i dx^j, \quad (1.2)$$

dove

$$\gamma_{ij} \equiv \delta_{ij} + k \frac{x_i x_j}{1 - k(x_k x^k)}. \quad (1.3)$$

Si ricorda che il fattore di scala è solo funzione del tempo $a = a(t)$.

È comodo esprimere il tutto in coordinate polari sferiche (r, θ, ϕ) , dalle quali si palesano le simmetrie scaturite dall'omogeneità e l'isotropia dello spazio:

$$\begin{aligned} d\ell^2 &= a^2 \left[dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) + \frac{kr^2 dr^2}{1 - kr^2} \right] \\ &= a^2 \left[dr^2 \left(1 + \frac{kr^2}{1 - kr^2} \right) + r^2 d\Omega^2 \right] \\ &= a^2 \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right]. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Ridefiniamo ora la coordinata radiale ponendo $d\chi = \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}}$, che a seconda del valore di k corrisponde alla trasformazione:

$$\chi \equiv \begin{cases} \arcsin(r) & k = +1 \\ r & k = 0 \\ \operatorname{arcsinh}(r) & k = -1 \end{cases} \quad S_k(\chi) \equiv \begin{cases} \sin\chi & k = +1 \\ \chi & k = 0 \\ \sinh(\chi) & k = -1 \end{cases} \quad (1.5)$$

In questo modo la metrica spaziale si riscrive semplicemente come:

$$d\ell^2 = a^2 [d\chi^2 + S_k(\chi)^2 d\Omega^2]. \quad (1.6)$$

A questo punto ciò che manca è inserire anche il termine temporale dt^2 , ottenendo quella che viene chiamata *Metrica di Friedmann-Robertson-Walker*:

$$ds^2 = dt^2 - a(t)^2 [d\chi^2 + S_k(\chi)^2 d\Omega^2]. \quad (1.7)$$

Risulta ora conveniente anche la ridefinizione della coordinata temporale: ponendo $d\tau = dt/a(t)$ si sostituisce al tempo fisico t il cosiddetto *tempo conforme*, ottenendo:

$$ds^2 = a(\tau)^2 [d\tau^2 - (d\chi^2 + S_k(\chi)^2 d\Omega^2)]. \quad (1.8)$$

È evidente l'utilità di ridefinire $t \rightarrow \tau$; in questo infatti modo la metrica FRW mostra come in analogia alla metrica di Minkowski, la luce percorra geodetiche nulle ($ds^2 = 0$).

1.2.3 Dinamica: dall'equazione della geodetica all'espansione

Preoccupiamoci ora di comprendere come l'espansione dell'universo influisca sugli oggetti stessi che lo compongono. Sappiamo che in assenza di forze non gravitazionali, per un corpo immerso in uno spazio tempo dotato di curvatura la sua traiettoria è descritta dalle geodetiche. Lungi dal fare una trattazione completa², consideriamo allora l'espressione della geodetica stessa in formalismo relativistico³:

$$\frac{dU^\mu}{ds} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu U^\alpha U^\beta = 0. \quad (1.9)$$

Riscrivendo la $\frac{dU^\mu}{ds}$ si ottiene:

$$\frac{d}{ds} U^\mu(x^\alpha(s)) = \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dU^\mu}{dx^\alpha} = U^\alpha \frac{dU^\mu}{dx^\alpha}, \quad U^\alpha \left(\frac{dU^\mu}{dx^\alpha} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu U^\beta \right) = 0. \quad (1.10)$$

Ricordando ora il *quadrimento* $P^\mu = mU^\mu$ possiamo ancora modificare l'espressione:

$$P^\alpha \frac{dP^\mu}{dx^\alpha} = -\Gamma_{\alpha\beta}^\mu P^\alpha P^\beta = 0. \quad (1.11)$$

Utilizziamo ora quelle che sono le restrizioni dovute all'omogeneità e all'isotropia dello spazio. Dall'omogeneità si ha $\partial_i P^\mu \equiv 0$ e si ha:

$$\begin{aligned} P^0 \frac{dP^\mu}{dt} &= -\Gamma_{\alpha\beta}^\mu P^\alpha P^\beta \\ &= -(2\Gamma_{0j}^\mu P^0 + \Gamma_{ij}^\mu P^i) P^j. \end{aligned} \quad (1.12)$$

²I passaggi completi si trovano nelle *Baumann Lectures on Cosmology*[3].

³Nell'espressione compaiono alcuni simboli qui non definiti e appartenenti al formalismo della geometria differenziale[6]. Fra questi è importante menzionare i simboli di Christoffel $\Gamma_{\alpha\beta}^\mu$ di cui riportiamo l'espressione in coordinate locali (valida per la connessione di Levi Civita): $\Gamma_{\alpha\beta}^\mu = \frac{1}{2} g^{\mu\lambda} (\partial_\alpha g_{\beta\lambda} + \partial_\beta g_{\alpha\lambda} - \partial_\lambda g_{\alpha\beta})$; una cosa utile alla comprensione dei passaggi omissi in questa sezione è il fatto che questi simboli si annullano quando due dei tre indici sono nulli. Le restanti espressioni non banali si ricavano a partire dalla metrica in uso, che nel nostro caso è quella FRW, sostituendola appositamente in $g_{\mu\nu}$. Parte di queste espressioni sono state ricavate nell'Appendice B (B.9). Un'altra espressione interessante è quella che si definisce come *derivata covariante*: $\nabla_X U^\mu = \frac{dU^\mu}{dX^\alpha} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu U^\beta$. Oltre alla semplice derivazione essa tiene conto anche della curvatura dello spazio.

Ponendo $\mu = 0$ nella (1.12) si ottiene:

$$E \frac{dE}{dt} = -\Gamma_{ij}^0 P^i P^j = -\frac{\dot{a}}{a} p^2 \quad (1.13)$$

dove si è definito $p^2 \equiv -g_{ij} P^i P^j = a^2 \gamma_{ij} P^i P^j$. Ricordando che $g_{\mu\nu} P^\mu P^\nu = m^2 = E^2 - p^2$ si ha $E dE = p dp$ e quindi la (1.12) diventa:

$$\frac{\dot{p}}{p} = -\frac{\dot{a}}{a} \quad \longrightarrow \quad p \propto \frac{1}{a}. \quad (1.14)$$

Questo è un risultato fondamentale, in quanto mostra che sia particelle massive, che particelle senza massa diminuiscono il loro impulso all'aumentare dell'espansione dell'universo. In particolare, per le particelle non massive in cui $p = E$ questa relazione sarà alla base del fenomeno del redshift.

1.3 Il redshift

Abbiamo appena visto che a causa dell'espansione dell'universo le particelle relativistiche perdono energia in modo direttamente proporzionale al fattore di scala $a(t)$. Questo si può alternativamente esprimere dicendo che nel corso dell'espansione la lunghezza d'onda della luce subisce un allungamento proporzionale al fattore di scala:

$$E = hf = \frac{hc}{\lambda} \quad E \sim \frac{1}{a} \quad \longrightarrow \quad \lambda \sim a(t) \quad (1.15)$$

Consideriamo quindi un fascio di luce di lunghezza d'onda λ_e emesso al tempo t_e . Questo viene osservato al tempo t_o con una lunghezza d'onda:

$$\lambda_o = \frac{a(t_o)}{a(t_e)} \lambda_e \quad (1.16)$$

e dal momento che $a(t_o) > a(t_e)$ segue che $\lambda_o > \lambda_e$.

Esiste tuttavia una modalità più rigorosa per ricavare questo risultato: consideriamo un fascio di luce che si propaga nello spazio, $ds = 0$. Facendo riferimento alla metrica (1.7) e imponendo la condizione di isotropia ($d\Omega = 0$) si ottiene:

$$\frac{dt}{a(t)} = -\frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}} \quad (1.17)$$

dove il segno $-$ è dovuto al fatto che stiamo considerando un'onda elettromagnetica che si sta avvicinando a noi. Per ricavare il tempo impiegato dal fascio di luce a percorrere la distanza tra il punto di emissione $r = 0$ al tempo t_e e quello di osservazione $r = r_o$ al tempo t_o basta integrare l'espressione precedente:

$$\int_{t_e}^{t_o} \frac{dt}{a(t)} = -\int_0^{r_o} \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}}. \quad (1.18)$$

Consideriamo ora un altro fascio di luce (alternativamente si possono considerare due creste successive della stessa onda elettromagnetica) che questa volta viene emesso al tempo $t_e + \delta t_e$ e ricevuto al tempo $t_o + \delta t_o$. Ricordando che r è rappresentata la coordinata comovente, e che quindi la distanza percorsa dai due fasci (o dalle due creste) resta costante, anche in questo caso il tempo impiegato dall'onda luminosa è dato da:

$$\int_{t_e + \delta t_e}^{t_o + \delta t_o} \frac{dt}{a(t)} = - \int_0^{r_o} \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}} \quad (1.19)$$

e dal momento che il secondo membro è comune alle due espressioni, si deve avere:

$$\int_{t_e}^{t_o} \frac{dt}{a(t)} = \int_{t_e + \delta t_e}^{t_o + \delta t_o} \frac{dt}{a(t)} \quad (1.20)$$

$$\int_{t_e}^{t_o} \frac{dt}{a(t)} = \int_{t_e}^{t_o} \frac{dt}{a(t)} + \int_{t_o}^{t_o + \delta t_o} \frac{dt}{a(t)} - \int_{t_e}^{t_e + \delta t_e} \frac{dt}{a(t)} \quad (1.21)$$

$$\int_{t_e}^{t_e + \delta t_e} \frac{dt}{a(t)} = \int_{t_o}^{t_o + \delta t_o} \frac{dt}{a(t)}. \quad (1.22)$$

Usiamo ora il fatto che la variazione del fattore di scala è molto lenta $\dot{a}/a \ll 1$; questo rende lecito considerare costante il fattore di scala, sia nell'intervallo di emissione che in quello di ricezione. Si ha quindi:

$$\frac{\delta t_o}{a(t_o)} = \frac{\delta t_e}{a(t_e)} \quad \longrightarrow \quad \frac{\delta t_o}{\delta t_e} = \frac{a(t_o)}{a(t_e)}. \quad (1.23)$$

Ora dal momento che $a(t_e) < a(t_o)$ si ha necessariamente $\delta t_e < \delta t_o$. Sfruttando poi il fatto che $\lambda \propto \delta t \propto a(t)$ segue che

$$\lambda_o = \frac{a(t_o)}{a(t_e)} \lambda_e. \quad (1.24)$$

come ricavato in precedenza.

Ha senso ora passare a definire propriamente il redshift cosmologico. Detto t_0 il tempo presente (i.e. il tempo di osservazione, che quindi consideriamo come costante), si definisce redshift z la quantità:

$$z \equiv \frac{\lambda_o - \lambda_e}{\lambda_e} \quad \longrightarrow \quad 1 + z = \frac{a(t_0)}{a(t_e)}. \quad (1.25)$$

1.3.1 Redshift cosmologico ed effetto Doppler

Al fine di avere chiara in futuro quale debba essere l'interpretazione del redshift all'interno del modello cosmologico è utile sottolineare che il suo significato fisico all'interno della relatività generale è diverso da quello che gli si attribuisce

solitamente nell'ambito della relatività speciale, nella quale il comportamento di z viene associato all'effetto Doppler.

Consideriamo allora la (1.25) e differenziamola rispetto al tempo, ottenendo:

$$\frac{dz}{dt} = -\frac{a_0 \dot{a}(t)}{a(t)^2} \quad \longrightarrow \quad \frac{dt}{a(t)} = -\frac{a(z)dz}{a_0 \dot{a}(z)} = -\frac{dz}{a_0 H(z)} \quad (1.26)$$

dove abbiamo espresso il parametro di Hubble (e in generale il fattore di scala $a(t)$) in termini del redshift z . In questo caso $H(z)$ rappresenta il parametro di Hubble al tempo in cui un oggetto con redshift pari a z ha emesso un fascio di luce che ora vediamo. A questo punto consideriamo l'espressione della metrica (1.7) e ricaviamo l'espressione della distanza comovente χ percorsa da un fascio di luce⁴ dall'emissione all'osservazione ed esprimiamola in dipendenza dal redshift.

$$d\chi = -\frac{dt}{a(t)} \quad \chi(t) = -\int_{t_e}^{t_o} \frac{dt}{a(t)} = \chi(z) = \int_0^z \frac{dz'}{a_0 H(z')} \quad (1.27)$$

dove come in precedenza il segno - iniziale è stato posto considerando fasci di luce che si avvicinano a noi. Per ricavare la velocità di recessione, quella che nella (1.1) avevamo anche chiamato flusso di Hubble: $\dot{a}\vec{x} = H\vec{x}_{phys}$, è sufficiente sostituire la (1.27) al posto di \vec{x} ⁵. Otteniamo quindi

$$v_{rec}(t, z) = \frac{\dot{a}(t)}{a_0} \int_0^z \frac{dz'}{H(z')}. \quad (1.28)$$

Questa è l'espressione della dipendenza della velocità dal redshift ricavata nel contesto della relatività generale. Precisiamo che in questo contesto z non comunica la velocità a cui sta viaggiando l'oggetto che ha emesso la luce, bensì in che posizione (comovente) dell'universo si trova in questo momento.

Ricordiamo ora brevemente il contesto nel quale viene introdotto il redshift in relatività speciale. Consideriamo una sorgente S_e che emette radiazione elettromagnetica e supponiamo che, solidale al suo sistema di riferimento essa si allontani (ad esempio lungo x)⁶ con velocità v dal sistema di riferimento dell'osservatore S_o . In unità di c i quadrivettori d'onda associati al fascio di luce, rispettivamente K_e^μ e K_o^μ sono legati dalla trasformazione di Lorentz

⁴Per ottenere la distanza comovente del fascio di luce occorre ricordare che la luce percorre una geodetica nulla (i.e $ds = 0$). Essendo poi interessati alla distanza radiale dobbiamo inoltre porre $d\Omega = 0$. Questi accorgimenti verranno presi anche successivamente quando verranno definiti gli orizzonti nel Capitolo 2.

⁵Fare attenzione alla notazione. Quando avevamo definito le coordinate comoventi le avevamo indicate semplicemente come x^i , mentre ora stiamo usando la coordinata comovente radiale indicata con χ .

⁶La direzione di allontanamento non è importante, dal momento che per il confronto con l'espressione ottenuta in relatività generale è sufficiente considerare la componente radiale; qui utilizziamo un fascio lungo x solo per praticità di calcolo.

$K_e^\mu = \Lambda_\nu^\mu K_o^\mu$, dove Λ_ν^μ è la matrice di Lorentz e il generico $K^\mu = (\omega, \vec{k})$, con $|\vec{k}| = \omega$. Considerando la prima componente K^0 si ha:

$$\begin{aligned} K_e^0 &= \omega_e = \Lambda_\nu^0 K_o^\nu = \Lambda_0^0 K_o^0 + \Lambda_1^0 K_o^1 \\ &= \gamma(\omega_o + \beta k_o) = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} (\omega_o + v\omega_o) \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} [\omega_o(1+v)] = \omega_o \frac{\sqrt{1+v}}{\sqrt{1-v}}. \end{aligned} \quad (1.29)$$

Ricordando che $\omega = 2\pi/\lambda$ la definizione di z data in (1.25) diventa:

$$z \equiv \frac{\omega_e - \omega_o}{\omega_o} \quad 1 + z = \frac{\omega_e}{\omega_o} = \frac{\sqrt{1+v}}{\sqrt{1-v}}. \quad (1.30)$$

Ricavando infine $v(z)$ si ottiene:

$$v(z) = v_{pec}(z) = \frac{(1+z)^2 - 1}{(1+z)^2 + 1}. \quad (1.31)$$

Teniamo per ora a mente i risultati dati dalla (1.28) e dalla (1.31). Come vedremo nel Capitolo 4, la differenza sostanziale fra le due formule renderà chiari gli errori metodologici che spesso si compiono nell'interpretazione del redshift.

1.3.2 La legge di Hubble

Presentiamo ora brevemente quella che storicamente è stata la prima formulazione matematica del fatto che l'universo fosse in espansione. Questa legge deve il suo nome all'astrofisico Edwin Hubble, nonostante più o meno in contemporanea, sul finire degli anni 20' anche George Lemaître arrivò alle stesse conclusioni. I due fisici furono i primi ad ipotizzare che lo spazio stesso si stesse man mano dilatando: dalle misurazioni del redshift fatte dallo stesso Hubble, essi giunsero, separatamente, a concludere che esistesse una legge di proporzionalità diretta⁷ fra la dilatazione delle distanze \vec{r} e la velocità di recessione v_{rec} delle galassie. Nel regime di velocità non relativistiche⁸ $\vec{v} \ll c$ la relazione (1.31) che lega la velocità al redshift si può approssimare a $z = v/c$. In questo modo la legge di Hubble si può esprimere indifferentemente in queste due forme:

$$\vec{v} = H_0 \vec{r} \quad \longleftrightarrow \quad z = \frac{H_0}{c} \vec{r}, \quad (1.32)$$

⁷All'epoca di Hubble le osservazioni astronomiche non erano potenti come quelle moderne e si limitavano ad oggetti con piccoli valori di redshift, tipicamente compresi fra 0 e 1. In questa regione i dati acquisiti davano ragione alla dipendenza ipotizzata dai due fisici. Osservazioni future hanno mostrato un andamento più complesso della velocità di recessione, che tuttavia discuteremo in seguito, nel Capitolo 4.

⁸È appunto il caso di quelle considerate dai due fisici.

dove con H_0 indichiamo il valore attuale del parametro di Hubble.

L'importanza di questa legge è stata per certi versi enorme. Come vedremo in seguito, le osservazioni successive a quelle di Hubble e Lemaître hanno aperto un dibattito ancora attuale sulla reale proporzionalità fra la velocità delle galassie e la loro distanza. Senza addentrarci in questi dettagli è sufficiente dire che la relazione che le lega è vincolata al modello cosmologico (i.e ai componenti dell'universo) che si sta considerando. Ciò che invece teniamo a sottolineare, è che da questa legge discende il fatto che, galassie molto molto distanti (o con un redshift molto alto), possono viaggiare con velocità di recessione v_{rec} ben maggiori di quelle della luce. Vedremo poi nel Capitolo 4, come questa possibilità, ben contestualizzata nella relatività generale, non debba creare alcuno stupore.

1.4 La composizione dell'Universo

Al fine di comprendere l'andamento dell'espansione e il comportamento del fattore di scala $a(t)$ nelle varie fasi della storia dell'universo, è utile tenere conto che questi è costituito da diversi componenti, dotati di caratteristiche diverse specie in merito a pressione e densità. Una rapidissima classificazione ci permette di isolare tre costituenti fondamentali⁹:

- **Materia:** comprende tutte le forme di materia che si muovono a velocità non relativistiche; ne fanno parte tutta la materia barionica e quella che si definisce materia oscura. La caratteristica principale di questo componente (la cui energia è dominata dalla massa) è che tipicamente esso esercita una pressione $P \ll \rho$.
- **Radiazione:** questo componente include tutta la materia relativistica con masse $m \sim 0$ ed energia in gran parte puramente cinetica; ne fanno parte i fotoni e i neutrini¹⁰. Aspetto fondamentale della radiazione è che a differenza della materia essa esercita una pressione $P = \rho/3$.
- **Energia oscura:** questo è forse il componente più misterioso. La sua introduzione si deve ad Einstein mediante la costante cosmologica Λ ¹¹. Quel che serve sapere ai fini di questa trattazione è che l'energia oscura è dotata di una pressione negativa, precisamente $P = -\rho$.

Consideriamo allora l'equazione di continuità (A.7) e risolviamola considerando separatamente ciascuno dei componenti dell'universo.

⁹Questa suddivisione non è troppo accurata; volendo essere più rigorosi sarebbe necessario presentare il tema del vuoto quantistico, l'attuale dibattito sul ruolo dell'energia oscura, nonché menzionare particelle cui ancora non si è effettuata la scoperta. Questo è in effetti lontano dagli scopi di questa trattazione.

¹⁰In realtà ora con il passare del tempo la massa non nulla dei neutrini si sta rivelando sempre più importante, al punto che non sarebbe lecito inserire queste particelle in questa categoria.

¹¹Sarà poi con la Λ stessa che faremo riferimento a questo componente.

Cominciamo dalla **materia**. Come già detto questa esercita una pressione trascurabile; è lecito quindi assumere che nel caso in cui l'universo sia dominato dalla materia la pressione P sia nulla. Si tratta in effetti di una buona approssimazione: le particelle, una volta raffreddate e sufficientemente lontane da non subire l'attrazione gravitazionale non interagiscono, proprio come succede alle galassie.

Risolviamo allora la (A.7) ponendo $P = 0$:

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}\rho = 0 \longrightarrow \frac{1}{a^3} \frac{d}{dt}(\rho a^3) = 0 \longrightarrow \rho_{mat} \propto \frac{1}{a^3} \quad (1.33)$$

Abbiamo quindi trovato che la densità di materia (trattandosi di materia non relativistica questo è equivalente a dire densità di energia) diminuisce all'aumentare del volume dell'universo (in unità comoventi a^3). Questo è del resto sensato se si considera la conservazione della materia/energia.

Passiamo ora alla **radiazione**. In questo caso la pressione non è trascurabile ma si ha che $P = \rho/3$. Sostituendola nella (A.7) si ottiene:

$$\dot{\rho} + 4\frac{\dot{a}}{a}\rho = 0 \longrightarrow \frac{1}{a^4} \frac{d}{dt}(\rho a^4) = 0 \longrightarrow \rho_{rad} \propto \frac{1}{a^4} \quad (1.34)$$

In questo caso la densità di energia risente sia dell'aumento di volume a^3 , che del redshift: il termine a^{-1} rappresenta il contributo dovuto all'allungamento della lunghezza d'onda λ , che come visto in precedenza (1.15) è direttamente proporzionale al fattore di scala dell'espansione.

La diminuzione della ρ_{rad} è legata all'espansione anche dal punto di vista termodinamico. In piena analogia ad un gas in espansione rinchiuso in un recipiente con un pistone, da $dU = -PdV$ si vede come il fatto che l'universo abbia una pressione non nulla contribuisca a diminuire l'energia durante l'aumento di volume.

Da ultimo consideriamo l'**energia oscura**. Dal momento che la sua pressione è negativa, e per la precisione $P = -\rho$ si ha dalla (A.7):

$$\dot{\rho}_\Lambda = 0 \qquad \rho_\Lambda \propto a^0 \quad (1.35)$$

da cui si ha che la densità è indipendente dal fattore di scala.

Questi risultati si possono generalizzare dando alla densità di energia ρ la forma seguente:

$$\rho \propto a^{-3(1+w)} \qquad w \equiv \begin{cases} 0 & \text{materia} \\ 1/3 & \text{radiazione} \\ -1 & \Lambda \end{cases} \quad (1.36)$$

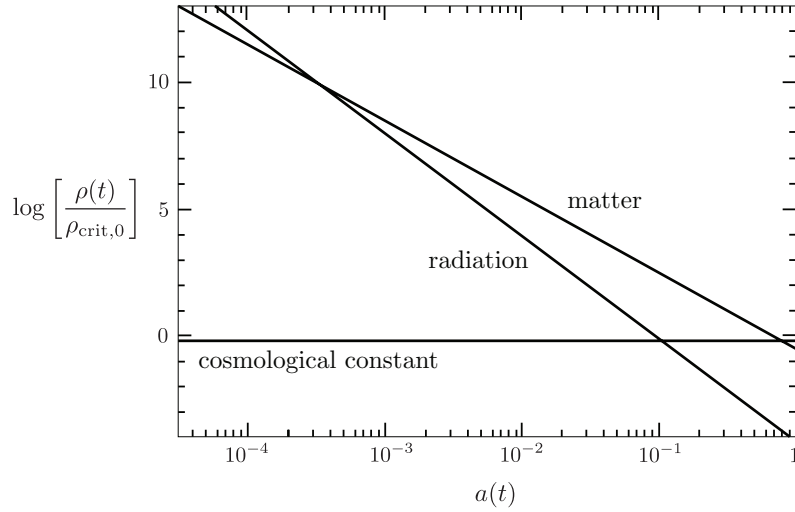


Figura 1.2: Evoluzione della densità di energia dei vari componenti: all'inizio l'universo era dominato dalla radiazione. Questa tuttavia diminuisce molto più velocemente degli altri componenti, e ben presto la materia è diventata più importante. Già ora, e in un prossimo futuro tuttavia, il ruolo centrale nell'universo sarà assorbito dalla costante cosmologica.

1.4.1 Parametro di densità

Dal momento che la maggior parte delle osservazioni riguardanti il modello cosmologico imporranno tipicamente l'uso di una geometria piatta, è utile esprimere questa condizione dal punto di vista della densità.

Consideriamo l'equazione di Friedmann (A.3):

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2}. \quad (1.37)$$

Se in questo momento¹² avessimo una geometria piatta, $k \rightarrow 0$, questo vuol dire che la densità attuale varrebbe:

$$\rho_{crit,0} = \frac{3H_0^2}{8\pi G}, \quad (1.38)$$

detta per questo *densità critica*. Risulta allora pratico definire una densità adimensionale chiamata **parametro di densità** ottenuta riscaldando la densità con il suo valore attuale $\rho_{crit,0}$:

$$\Omega_{i,0} \equiv \frac{\rho_{i,0}}{\rho_{crit,0}} \quad (1.39)$$

dove l'indice i varia a seconda del componente dell'universo considerato. Tenendo conto delle densità dei singoli componenti ricavate nella (1.36) e multi-

¹²Da qui in poi chiameremo sempre il tempo presente $t = t_0$. Tutte le grandezze espresse al tempo t_0 verranno indicate con il pedice 0.

plicando il tutto per $\frac{\rho_{i,0}}{\rho_{i,0}}$, l'equazione di Friedmann diventa:

$$\begin{aligned} H^2 &= \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}(\rho_r + \rho_m + \rho_\Lambda) - \frac{k}{a^2} \\ &= H_0^2 \left[\frac{\rho_r}{\rho_{crit,0}} + \frac{\rho_m}{\rho_{crit,0}} + \frac{\rho_\Lambda}{\rho_{crit,0}} \right] - \frac{k}{a^2} \\ &= H_0^2 \left[\Omega_{r,0} \left(\frac{a_0}{a} \right)^4 + \Omega_{m,0} \left(\frac{a_0}{a} \right)^3 + \Omega_{k,0} \left(\frac{a_0}{a} \right)^2 + \Omega_{\Lambda,0} \right] \end{aligned} \quad (1.40)$$

dove abbiamo definito il *parametro di densità di curvatura* $\Omega_{k,0} \equiv -\frac{k}{(a_0 H_0)^2}$. Applicando la convenzione sul fattore di scala al tempo presente $a(t_0) \equiv 1$ e omettendo il pedice 0 dai parametri di densità si ottiene:

$$\frac{H^2}{H_0^2} = [\Omega_r a^{-4} + \Omega_m a^{-3} + \Omega_k a^{-2} + \Omega_\Lambda]. \quad (1.41)$$

Allo stato attuale le osservazioni mostrano una spiccata dominanza della costante cosmologica, mentre confermano il fatto che la curvatura del nostro universo è molto vicina ad essere nulla:

$$|\Omega_k| \leq 0,1 \quad \Omega_r = 9,4 \cdot 10^{-5} \quad \Omega_m = 0,32 \quad \Omega_\Lambda = 0,68. \quad (1.42)$$

Tenendo conto delle dipendenze delle densità questo implica che inizialmente la densità di curvatura fosse ancora più trascurabile di ora. Di particolare interesse è la dominanza della costante cosmologica. Come vedremo nel Capitolo 3, questo componente sarà fondamentale dal momento che è l'unico per cui si ha $(1 + 3w) < 0$.

1.4.2 Soluzione dell'equazione di Friedmann

A questo punto diventa interessante considerare le soluzioni possibili dell'equazione di Friedmann (A.3). Risolviamola immaginando inizialmente la dominanza di ogni singolo componente. Questo fatto è sensato: dal momento che le densità rispettivamente per la radiazione ($\sim a^{-4}$), per la materia ($\sim a^{-3}$) e per il vuoto ($\sim a^0$) hanno dipendenze diverse dal fattore di scala, è verosimile che l'universo abbia subito nel corso del tempo fasi distinte, dove hanno dominato nell'ordine prima la radiazione, quindi la materia e infine il vuoto (i.e costante cosmologica Λ). Ipotizzando, non senza ragione, che la curvatura dell'universo sia nulla ($k = 0$, i.e geometria piatta) e utilizzando il parametro di densità Ω sopra definito l'equazione di Friedmann si riscrive:

$$H = \frac{\dot{a}}{a} = H_0 \sqrt{\Omega_i} a^{-\frac{3}{2}(1+w_i)}. \quad (1.43)$$

Integrando l'equazione si ha:

$$\begin{aligned} H_0 \sqrt{\Omega_i} t &= \int \frac{da}{a^{-\frac{3}{2}(1+w)+1}} = \int \frac{da}{a^{-\frac{1}{2}(1+3w)}} \\ &= \int a^{\frac{1}{2}(1+3w)} da = \frac{2}{1+3w} a^{\frac{3}{2}(1+w)}. \end{aligned} \quad (1.44)$$

La dipendenza temporale del fattore di scala è quindi della forma¹³ $a(t) \propto t^{\frac{2}{3(1+w)}}$, altrimenti, usando il tempo conforme: $a(\tau) \propto \tau^{\frac{2}{(1+3w)}}$. Nelle fasi di dominanza dei singoli contributi (MD, RD, Λ D) questi risultati si riscrivono come:

$$a(t) \propto \begin{cases} t^{2/3} & w = 0 & MD \\ t^{1/2} & w = 1/3 & RD \\ e^{Ht} & w = -1 & \Lambda D \end{cases} \quad a(\tau) \propto \begin{cases} \tau^2 & w = 0 & MD \\ \tau & w = 1/3 & RD \\ -1/\tau & w = -1 & \Lambda D \end{cases} \quad (1.45)$$

Un fatto interessante da notare è che sia nella fase di dominanza della radiazione $H(t) = (1/2t)$ che in quella della materia $H(t) = (2/3t)$ l'espansione dell'universo rallenta progressivamente, mentre se a dominare è la costante cosmologica H è costante.

¹³Questo vale solamente nei casi in cui $w \neq -1$, perchè in tal caso l'equazione si semplifica e banalmente si ha $a(t) = e^{Ht}$.

Il problema dell'orizzonte

La descrizione iniziale dalla quale siamo partiti è quella di un Universo complessivamente omogeneo e isotropo a grandi distanze. Una delle evidenze di queste proprietà è ad esempio il fatto che regioni apparentemente disgiunte fra loro siano caratterizzate dalla stessa densità e dalla stessa temperatura. Storicamente questa evidenza sperimentale è dovuta alla presenza della Radiazione Cosmica di fondo (CMB), un residuo di radiazione superstite alla fase di nucleosintesi post Big Bang, e giunta a noi termicamente uniforme da tutte le direzioni.

Senza una connessione causale fra le regioni emettenti tuttavia, questa omogeneità sarebbe del tutto inspiegabile, ed è quello che viene appunto definito come il *problema dell'orizzonte*. L'unica ipotesi possibile è che queste due proprietà dello spazio siano state raggiunte in un momento in cui queste zone dello spazio, attualmente troppo lontane fra loro, fossero precedentemente in contatto dal punto di vista causale; detto altrimenti, questa omogeneità non violerebbe il principio di causalità qualora queste regioni avessero una porzione di cono luce passato in comune. Come vedremo nel prossimo capitolo, il modello dell'inflazione farà proprio in modo che ciò avvenga.

Presentiamo allora preliminarmente l'orizzonte, un concetto fondamentale per avere chiare quelle che dovevano essere nel passato le connessioni causali tra queste regioni oggi disgiunte. Come vedremo questo oggetto mostrerà parte della sua utilità anche in futuro.

2.1 Cos'è l'orizzonte

Per studiare la propagazione della luce è utile esprimere la metrica FRW sostituendo al tempo fisico il *tempo conforme*: $\tau = \int_0^{t_0} \frac{dt}{a(t)}$; in questo modo nel diagramma $\chi - \tau$ il fotone descriverebbe esattamente la bisettrice dei due assi,

in analogia a quanto già avviene nello spaziotempo di Minkowski. Sostituendolo nella (1.7) e imponendo la condizione di isotropia dello spazio ($d\Omega^2 = 0$) otteniamo:

$$ds^2 = a(\tau)^2 [d\tau^2 - d\chi^2]. \quad (2.1)$$

Come già anticipato la luce percorre una geodetica nulla ($ds^2 = 0$) per cui si avrà: $\Delta\chi(\tau) = \pm\Delta\tau$, dove due segni distinguono rispettivamente fotoni che si allontanano e fotoni che si avvicinano a noi. Definiamo a questo punto due **orizzonti cosmologici**:

- **Orizzonte (comovente) delle particelle**: massima distanza comovente alla quale gli eventi passati, accaduti nel tempo t_i possono essere osservati al momento presente. Dalla (2.1) si ottiene in coordinate comoventi:

$$\chi_{ph} = \tau - \tau_i = \int_{t_i}^t \frac{dt}{a(t)}. \quad (2.2)$$

Ponendo $t_i \equiv 0$ l'istante della singolarità che ha originato il Big Bang, e t il tempo nel quale l'osservatore riceve il segnale, si ottiene la massima distanza entro la quale abbiamo connessione causale.

Visivamente la lunghezza dell'orizzonte delle particelle si ottiene intersecando il cono luce del passato dell'osservatore con la superficie spaziale orizzontale $\tau = \tau_i$ (Figura 2.1). L'unico modo per cui un evento, accaduto al tempo t_i , possa aver influenzato l'osservatore è che esso si sia verificato entro questa distanza. Pertanto l'orizzonte delle particelle per l'osservatore al tempo τ racchiude tutti quegli oggetti la cui linea di universo ha attraversato il cono luce del passato ad una distanza non superiore a $\tau = \tau_i$. Al tempo τ_i , oggetti che si trovavano ad una distanza superiore a quella dell'orizzonte non sono stati in grado di comunicare nulla all'osservatore.

- **Orizzonte (comovente) degli eventi**: massima distanza alla quale sarà possibile osservare eventi futuri. Espressa in coordinate comoventi, la massima distanza alla quale un osservatore nel tempo t_f riceverà un segnale emesso all'istante t è definito come:

$$\chi_{eh}(\tau) = \tau_f - \tau = \int_t^{\tau_f} \frac{dt}{a(t)}. \quad (2.3)$$

Tipicamente τ_f rappresenta "l'ultimo istante" del tempo comovente. Dal momento che quest'ultimo è ottenuto a partire dal tempo fisico attraverso il fattore di scala, non deve sembrare strano che τ_f possa essere un valore finito quand'anche t_f sia infinito (dal momento che vi è il riscaldamento di $a(t)$). Appare chiaro che l'orizzonte delle particelle può essere molto più grande dell'orizzonte degli eventi; mentre infatti è per noi impossibile influenzare eventi che accadono oltre l'orizzonte degli eventi, possiamo comunque ancora percepire oggetti che hanno ormai superato

l'orizzonte degli eventi e che però avevano emesso radiazione luminosa molto tempo prima.

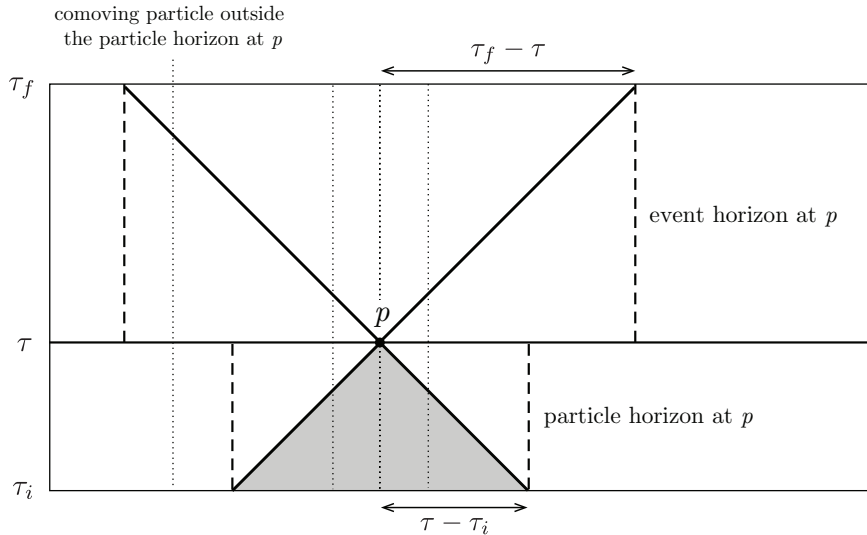


Figura 2.1: Il diagramma mostra (in coordinate comoventi) i due orizzonti appena definiti. Le linee verticali a puntini rappresentano le linee di universo di oggetti comoventi. L'oggetto più distante dal quale possiamo ricevere informazione dal passato o che possiamo influenzare nel futuro, è quello la cui linea di universo intersecava/intersecherà il cono luce nel tempo τ_i/τ_f . Proiettando il punto di intersezione della linea di universo con il cono luce lungo l'asse orizzontale che segna il tempo presente τ (percorrendo la linea tratteggiata), siamo in grado di conoscere quali sono le distanze comoventi oltre le quali il presente perde il contatto causale con il passato o con il futuro.

Esiste tuttavia un altro modo, altrettanto intuitivo per descrivere gli orizzonti nei diagrammi spazio-tempo. Esso consiste nel vedere l'orizzonte come una funzione del tempo, e rappresentarne la sua evoluzione istante per istante individuando per ogni momento l'orizzonte con il punto che lo delimita (vedi Figura 2.2).

A prima vista questo nuovo modo di rappresentare i due oggetti può sembrare fuorviante e creare confusione. Ad esempio, se prima in Figura 2.1 vedevamo l'orizzonte degli eventi aumentare con il tempo (i.e. spostando τ_f), in questa nuova rappresentazione sembra che esso vada diminuendo nel futuro. Il punto è che nella prima rappresentazione l'orizzonte disegnato si otteneva fissando il tempo presente τ , e al variare di τ_f si otteneva la porzione di spazio che nel futuro, al tempo τ_f , sarebbe risultata causalmente connessa con noi; in questa seconda rappresentazione quello che si mantiene fissato è τ_f (nello specifico della Figura 2.2 $\tau_f = +\infty$) e si osserva cosa accade al variare di τ , ossia al variare del momento presente. È logico quindi che, più ci avviciniamo a τ_f più il nostro orizzonte degli eventi diminuisce; questo è in perfetta analogia con il fatto che l'orizzonte delle particelle è molto più piccolo per eventi di un passato recente, piuttosto che per eventi accaduti molto tempo fa.

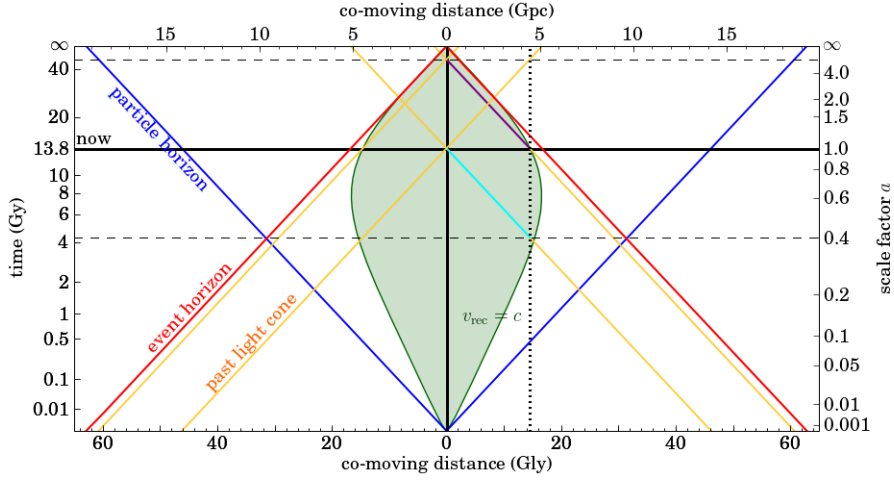


Figura 2.2: Il diagramma mostra (in coordinate comoventi) l'evoluzione dei due orizzonti in funzione del tempo: in blu l'orizzonte delle particelle e in rosso l'orizzonte degli eventi. In verde il raggio di Hubble.

Analogamente quanto detto per l'orizzonte degli eventi avviene anche per l'orizzonte delle particelle, che in questa nuova rappresentazione ha la forma di un cono luce del futuro, e sembra aumentare con lo scorrere del tempo, quando invece nella rappresentazione precedente sembrava avvenisse il contrario. Anche qui la differenza sta nel punto di vista con il quale si osserva l'orizzonte: in Figura 2.1 si teneva fissato τ del tempo presente in modo da capire, a seconda di quanto indietro nel passato stessimo andando (variando quindi τ_i) quale fosse la porzione di spazio a cui eravamo legati causalmente. In Figura 2.2 avviene il contrario: si fissa $\tau_i \equiv 0$, ossia all'inizio dell'universo¹⁴ e si vede cosa accade al variare di τ . Logicamente quanto più siamo vicini al Big Bang, quanto più il nostro orizzonte di particelle è piccolo.

Ovviamente, se si considerano gli orizzonti in coordinate fisiche, bisogna fare attenzione al fatto che l'universo si sta espandendo: noto ad esempio l'orizzonte (comovente) χ al tempo presente t_0 , per conoscerne il valore al generico tempo t non è sufficiente moltiplicare χ per $a(t)$, dal momento che lo stesso χ varia con il tempo.

Fra i due orizzonti, quello necessario a comprendere il problema dell'orizzonte è sicuramente il primo, quello delle particelle. Con un po' di manipolazioni è possibile riscriverlo in modo utile come:

$$\chi_{ph} = \int_{t_i}^t \frac{dt}{a(t)} = \int_{t_i}^t \frac{da}{a\dot{a}} = \int_{\ln(a_i)}^{\ln(a)} \frac{d \ln a}{aH}. \quad (2.4)$$

¹⁴Come vedremo, il diagramma presentato in Figura 2.2 non tiene conto della fase dell'inflazione, che presenteremo nel prossimo capitolo. Ma questo non cambia concettualmente il significato dell'orizzonte delle particelle in dipendenza dal tempo.

Questa riscrittura è interessante perché mostra che i collegamenti causali nello spazio-tempo possono essere studiati a partire dal termine $(aH)^{-1}$ che definisce, in coordinate comoventi, il **raggio di Hubble**. Ricordando l'equazione di stato $w = P/\rho$ e la (1.43) esprimiamo il raggio di Hubble come

$$(aH)^{-1} = H_0^{-1} a^{\frac{1}{2}(1+3w)}. \quad (2.5)$$

L'importanza di questo oggetto è notevole e verrà ripresa in seguito. Dal momento che sia per la radiazione che per la materia non relativistica l'esponente al secondo membro risulta positivo, si assume che il raggio di Hubble aumenti durante l'espansione. Sviluppando l'espressione (2.4) si ottiene:

$$\begin{aligned} \chi_{ph}(a) &\equiv \tau - \tau_i = \int_{\ln(a_i)}^{\ln(a)} \frac{d \ln a}{aH} = H_0^{-1} \int_{a_1}^a \frac{da}{a} a^{\frac{1}{2}(1+3w)} \\ &= H_0^{-1} \int_{a_1}^a a^{\frac{1}{2}(3w-1)} da = \frac{2H_0^{-1}}{(3w-1)} \left(a^{\frac{1}{2}(1+3w)} - a_i^{\frac{1}{2}(1+3w)} \right) \\ &= \frac{2H_0^{-1}}{(3w-1)} \left(a^{\frac{1}{2}(1+3w)} \right) = \frac{2}{(3w-1)} (aH)^{-1} \end{aligned} \quad (2.6)$$

dove nel penultimo passaggio si è tenuto conto del fatto che il contributo τ_i è trascurabile:

$$\tau_i = \frac{2H_0^{-1}}{(1+3w)} a_i^{\frac{1}{2}(1+3w)} \xrightarrow{a_i \rightarrow 0, -(1+3w) < 0} 0. \quad (2.7)$$

Come vedremo nel Capitolo 3 questo non sarà più vero qualora $(1+3w) < 0$. Teniamo intanto a mente questo risultato, che mostra come l'orizzonte e il raggio di Hubble siano apparentemente legati da una semplice relazione di proporzionalità diretta.

2.2 La CMB e il problema dell'equilibrio termico

Veniamo ora al vero e proprio problema dell'orizzonte. Come già anticipato esso è legato alla quasi totale isotropia della radiazione cosmica di fondo. Dopo circa 380000 anni dal Big Bang, il nostro universo ha conosciuto un periodo caratterizzato dall'abbassamento progressivo della temperatura, che ha quindi favorito la formazione della materia (nucleosintesi e decoupling). Questa informazione è a noi nota proprio grazie alla radiazione di fondo CMB¹⁵, sopravvissuta al raffreddamento.

Ora noi percepiamo questa radiazione sulla terra da tutte le direzioni, ed essa risulta essere incredibilmente all'equilibrio termico (circa 2.725°K)¹⁶. In altri

¹⁵CMB: Cosmic microwave background.

¹⁶In realtà è presente una leggera anisotropia nella radiazione, tuttavia questa oscillazione, che sembra diventare progressivamente sempre più importante, non è importante ai fini del problema dell'orizzonte qui trattato. Ad ogni modo, per la stessa ragione per cui le regioni non potevano aver interagito, non trova spiegazione nemmeno l'origine di questa irregolarità.

termini questo vuol dire che le regioni più distanti dell'Universo sembrano avere tutte la stessa temperatura.

Il problema tuttavia, è che il tempo conforme trascorso tra l'emissione della radiazione τ_{em} e la ricezione da parte nostra τ_{ric} non è infinito; l'universo ha un'età finita, e dal momento che la luce viaggia a una velocità fissata, nel tempo che intercorre tra l'esplosione del Big Bang e l'emissione della radiazione da parte di queste regioni distinte, essa non può aver percorso che una distanza finita.

Questo implica che alcune delle regioni emettenti CMB e dotate della stessa temperatura non sono mai state in connessione causale fra loro dal momento che i loro coni luce del passato (ossia il tempo prima dell'emissione della radiazione, quello intercorso a partire dal Big Bang) non si sono mai intersecati (vedi Figura 2.3). In che modo allora si spiega questa omogeneità di temperatura?

L'omogeneità della radiazione che noi percepiamo si estende su scale ben più grandi di quelle del nostro orizzonte di particella al tempo della formazione della radiazione stessa. Se queste regioni non sono legate fra loro da una connessione causale, come hanno fatto a comunicarsi mutuamente l'informazione? La soluzione di questo apparente paradosso sarà proprio la teoria dell'inflazione.

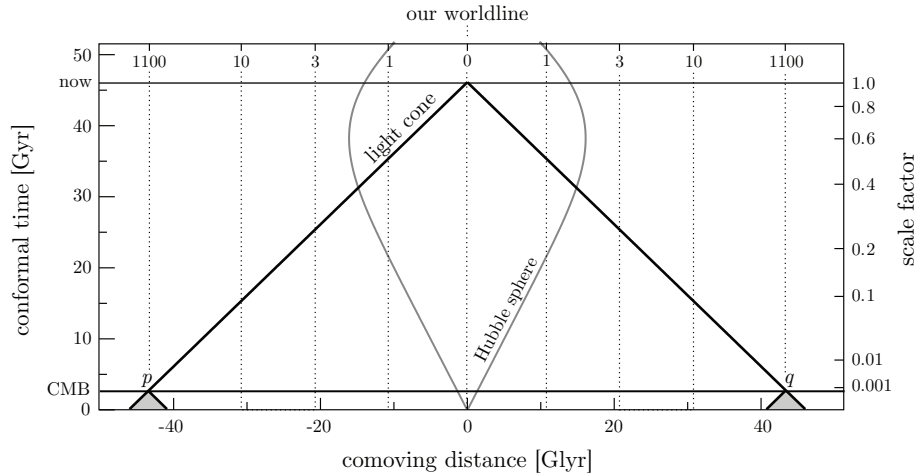


Figura 2.3: Nella figura i due punti p e q rappresentano due regioni distinte dell'universo che hanno emesso radiazione di fondo all'equilibrio termico. Tuttavia in questo modello cosmologico che ancora non ha introdotto l'inflazione, a causa della finitezza della luce e del fatto che l'universo ha un'età finita, i coni luce del passato dei due punti non hanno sovrapposizione; questo significa che non può esserci stato alcun contatto fra i due e pertanto l'omogeneità e l'isotropia della CMB risultano inspiegate.

CAPITOLO 3

L'inflazione

Nel capitolo precedente abbiamo supposto che il raggio di Hubble si espandesse, e questo effettivamente accade dall'emissione della CMB. Tuttavia se prima di essa l'universo avesse conosciuto una fase diversa, nella quale il raggio di Hubble fosse diminuito progressivamente, sufficientemente a lungo, il problema dell'orizzonte sarebbe evitato. In questo capitolo quantificheremo dapprima questa nuova fase dell'universo detta **inflazione**, dando poi uno sguardo alle principali conseguenze che essa comporta. Non da ultimo vista la sua importanza nella descrizione dell'inflazione ma anche nell'interpretazione dei diagrammi spazio-tempo, uno sguardo più approfondito al concetto di raggio di Hubble, specie in relazione all'orizzonte delle particelle.

3.1 La soluzione al problema dell'orizzonte

Come già detto nel capitolo precedente, il problema dell'orizzonte è legato alla mancata connessione causale fra le regioni diametralmente opposte del nostro universo, le quali sembrano caratterizzate da un'omogeneità e un isotropia in termini di densità e temperatura apparentemente inspiegabili. Giunti davanti a questo paradosso, storicamente ci si è mossi in questo modo: sappiamo che l'unico modo in cui queste regioni potessero esser state legate causalmente prima dell'emissione della CMB, è che i loro coni luce del passato abbiano tutti un'intersezione non nulla gli uni con gli altri.

Deve quindi esistere un'ulteriore fase dell'universo, fra il Big Bang e l'emissione di radiazione da parte di queste regioni, nella quale sia stato possibile per queste ultime aver comunicato. All'inizio degli anni 80' viene diffusa quindi una nuova teoria fra i cosmologi, secondo la quale appunto l'universo avesse conosciuto una fase di decrescita del raggio di Hubble $(aH)^{-1}$, culminata pochi

istanti prima dell'emissione di CMB:

$$\frac{d}{dt}(aH)^{-1} < 0. \quad (3.1)$$

Ricordando l'espressione in coordinate comoventi del raggio di Hubble stesso (2.5), vediamo che imporre una simile condizione richiederebbe che i costituenti dell'universo fossero tali da avere $(1 + 3w) < 0$. Tuttavia se così fosse, quello che prima nella (2.6) era un contributo trascurabile, diventa di fondamentale rilevanza e si ha:

$$\tau_i = \frac{2H_0^{-1}}{(1 + 3w)} a_i^{\frac{1}{2}(1+3w)} \xrightarrow{a_i \rightarrow 0, w < -1/3} -\infty. \quad (3.2)$$

A questo punto è chiaro come il tempo conforme tra la singolarità iniziale del Big Bang e l'emissione della radiazione cosmica di fondo sia infinito! In questo modo anche quelle regioni emettenti CMB e ad oggi più distanti fra loro hanno un cono luce del passato sufficientemente grande da garantire contatto causale con le altre. Questo risolve pienamente il problema dell'orizzonte e contemporaneamente ridefinisce completamente il significato del tempo $\tau = 0$ che prima rappresentava la singolarità iniziale mentre ora segna la fine della fase dell'inflazione e l'inizio dell'espansione della sfera di Hubble (Figura 3.2).

3.2 Raggio di Hubble e Orizzonte delle particelle

In vista delle considerazioni future circa i paradossi riguardanti gli oggetti con velocità superluminali e il periodo dell'inflazione stessa, potrebbe essere utile sottolineare le differenze fra il raggio di Hubble e l'orizzonte di particella, evidenziando in modo particolare *come* questi due oggetti vanno utilizzati nell'ambito della connessione causale fra oggetti distanti nell'universo in espansione.

Cominciamo preliminarmente dando al raggio di Hubble un significato più immediato rispetto a quanto detto nel capitolo precedente, dove ne avevamo fornito l'espressione in coordinate comoventi: una scelta utile al fine di comprendere il meccanismo dell'inflazione, ma non altrettanto immediata quanto quella che si avrebbe in coordinate fisiche. Per passare dalle prime alle seconde è sufficiente moltiplicare $(aH)^{-1}$ per il fattore di scala ottenendo in unità di c , $1/H$. Prendendo allora spunto dalla legge di Hubble ($v_{rec} = Hx_{phys}$), possiamo ridefinire il raggio di Hubble come quella distanza (fisica) alla quale la velocità di recessione coincide con quella della luce ($x_{HS} = c/H$). Tutto ciò che viaggia al suo interno lo fa con velocità subluminali, mentre ciò che è fuori con velocità superiori.

È lecito quindi utilizzare il raggio di Hubble come un ulteriore parametro in grado di stabilire la possibilità per due oggetti di essere connessi causalmente in

un *fissato istante*, facendo comunque attenzione alle differenze con l'orizzonte delle particelle, che come vedremo è sempre più grande del raggio di Hubble. Apparentemente, dalla (2.6) sembrerebbe che raggio di Hubble e Orizzonte delle particelle differiscano solamente a meno di un fattore di proporzionalità, tuttavia è necessario ricordare che la validità della (2.6) è limitata alla fase di evoluzione “standard”, nella quale i componenti dell'universo soddisfano $(1 + 3w) > 0$, cosa che invece non avviene nel periodo dell'inflazione dove $(1 + 3w) < 0$. È proprio in questa fase che emerge la differenza sostanziale tra i due. Ricordiamo l'espressione del raggio di Hubble data dalla (2.5) in coordinate comoventi:

$$(aH)^{-1} = H_0^{-1} a^{\frac{1}{2}(1+3w)}. \quad (3.3)$$

Detta λ la distanza comovente fra due oggetti nello spazio si hanno due possibilità:

- $\lambda > \chi_{ph}$: in tal caso, coerentemente con la definizione dell'orizzonte di particella (2.2) i due oggetti non possono *mai* aver comunicato fra loro, dal momento che ognuno di essi si troverebbe sempre al di fuori del cono luce passato dell'altro.
- $\lambda > (aH)^{-1}$: in questo caso i due oggetti non possono comunicare *ora*, dal momento che uno dei due sta viaggiando ad una velocità maggiore della luce rispetto all'altro e “vedersi” significherebbe violare la causalità.

In sostanza due oggetti la cui distanza (comovente) λ in un certo istante t (tipicamente durante l'inflazione) sia maggiore del raggio di Hubble $(aH)^{-1}$ non possono “vedersi”, ma questo non esclude che in un momento antecedente a t (o successivo), nel quale il raggio di Hubble fosse stato (o sarà) maggiore di λ il contatto sia stato (possa essere) possibile. Una distanza che ad un dato momento risulta maggiore del raggio di Hubble ma comunque inferiore all'orizzonte di particella rende potenzialmente connessi causalmente due oggetti, anche se non in quel preciso istante. È sufficiente che ad un certo punto il raggio di Hubble sia superiore a quella distanza: a quel punto essi saranno visibili l'un l'altro. Quello che avviene durante l'inflazione è proprio il fatto che con il tempo l'orizzonte di particella χ_{ph} diventa sempre più grande del raggio di Hubble $(aH)^{-1}$, che sappiamo invece andar diminuendo (vedi Figura 3.2). Ad ogni modo tutti quelle regioni di spazio le cui distanze comoventi all'inizio dell'inflazione si trovavano all'interno del raggio di Hubble erano causalmente connesse, o meglio potevano “comunicare”; questo è più che sufficiente ad aver consentito l'equilibrio termico prima dell'emissione di CMB. In questi termini allora, qualora il raggio di Hubble attuale $(a_0 H_0)^{-1}$ fosse contenuto all'interno del raggio di Hubble che si aveva all'inizio dell'inflazione $(a_I H_I)^{-1}$ non si avrebbe alcun problema dell'orizzonte. Questo spiega per quale ragione risulta comodo l'utilizzo del raggio di Hubble per trattare il problema dell'orizzonte:

se dovessimo utilizzare l'orizzonte delle particelle, dovremmo costruire quest'ultimo a partire da $t_i \equiv 0$, ossia nel preciso istante della singolarità del Big Bang; tuttavia la carenza di informazioni su quanto accaduto fra questa singolarità e l'inizio della fase dell'inflazione non ci permetterebbe di poter trascurare questo intervallo di tempo (magari in quel lasso di tempo le regioni non erano in comunicazione). Al contrario, sapere che le regioni emettenti radiazione CMB si trovassero all'inizio dell'inflazione t_I ad una distanza minore di quella del raggio di Hubble dell'epoca (e di conseguenza certamente anche all'interno dell'orizzonte di particella), fornisce la certezza dell'avvenuto contatto causale fra di esse, permettendoci di ignorare quanto avvenuto fra $t_i = 0$ e t_I .

3.3 Cosa accade all'universo

Diamo a questo punto uno sguardo più ampio a questa nuova fase del modello cosmologico, nata sì per risolvere il problema dell'orizzonte, ma ricca di nuovi aspetti interessanti. Certamente uno dei modi più chiari per descrivere cosa accade durante l'inflazione è quello di dire che in questa fase il raggio di Hubble si contrae; ne esistono tuttavia altri equivalenti, come quelli che riportiamo di seguito.

3.3.1 Espansione accelerata

Dalla condizione di contrazione del raggio di Hubble discende immediatamente che

$$\frac{d}{dt}(aH)^{-1} = \frac{d}{dt}(\dot{a})^{-1} = -\frac{\ddot{a}}{\dot{a}^2} < 0 \implies \ddot{a} > 0 \quad (3.4)$$

da cui vede che l'inflazione può essere anche definita come una fase di espansione accelerata dell'universo.

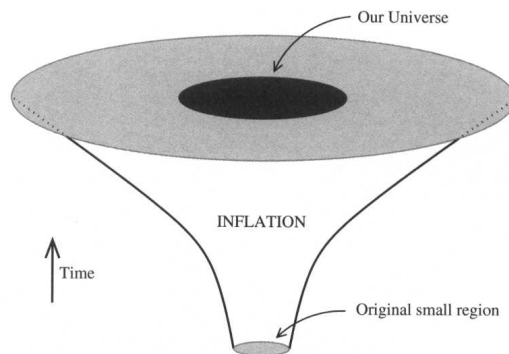


Figura 3.1: Idea figurativa di quanto sia accaduto nell'universo all'epoca dell'inflazione. Presa una piccola porzione iniziale di spazio, nel corso dell'espansione accelerata questa si ingigantisce in modo repentino, finendo per superare di gran lunga l'intero universo osservabile. In un certo senso si può spiegare l'inflazione affermando che in questa fase l'universo si espande in modo così veloce che la sfera di Hubble non riesce a tenerne il passo.

3.3.2 Lenta variazione del parametro di Hubble

Sempre dalla contrazione del raggio di Hubble si può alternativamente ricavare

$$\frac{d}{dt}(aH)^{-1} = -\frac{\dot{a}H + a\dot{H}}{(aH)^2} = -\frac{(1-\epsilon)}{a}, \quad \text{dove} \quad \epsilon \equiv -\frac{\dot{H}}{H^2}. \quad (3.5)$$

Si deve avere dunque:

$$\epsilon = -\frac{\dot{H}}{H^2} < 1. \quad (3.6)$$

Questo mostra come durante l'inflazione la crescita del parametro di Hubble sia meno veloce di quanto invece è nel corso dell'evoluzione dell'universo post-inflazione.

3.3.3 Pressione negativa?

Riconsideriamo l'equazione di Friedmann (A.3) e l'equazione di continuità (A.7); derivando la prima si ottiene:

$$\begin{aligned} \dot{H} + H^2 &= \frac{\dot{\rho}}{6M_{pl}^2 H} + \frac{\rho}{3M_{pl}^2} = \frac{-3(\rho + P)}{6M_{pl}^2} + \frac{2\rho}{6M_{pl}^2} \\ &= -\frac{(\rho + 3P)}{6M_{pl}^2} = -\frac{H^2}{2} \left(1 + \frac{3P}{\rho}\right) \end{aligned} \quad (3.7)$$

Ricordando la definizione di ϵ , questo ci mostra che

$$\epsilon = -\frac{\dot{H}}{H^2} = -\frac{3}{2} \left(1 + \frac{P}{\rho}\right) < 1 \quad \longleftrightarrow \quad w \equiv \frac{P}{\rho} < -\frac{1}{3} \quad (3.8)$$

Da questo risultato emerge che affinché sia possibile una fase di accelerazione per l'espansione, è necessario che l'universo sia provvisto di un componente in grado di esercitare una pressione negativa, soddisfacendo di fatto la condizione appena trovata. Senza addentrarci troppo nel dettaglio, quel che possiamo dire è che ad oggi si ritiene che questo ruolo sia stato giocato nell'universo dal cosiddetto *vuoto quantistico*, dotato di una forza repulsiva in grado di vincere quella gravitazionale. Fisicamente, parte di questo operato sarebbe svolto dalla sua energia (detta energia oscura), che nel Capitolo 1 avevamo espresso in termini della costante cosmologica Λ .

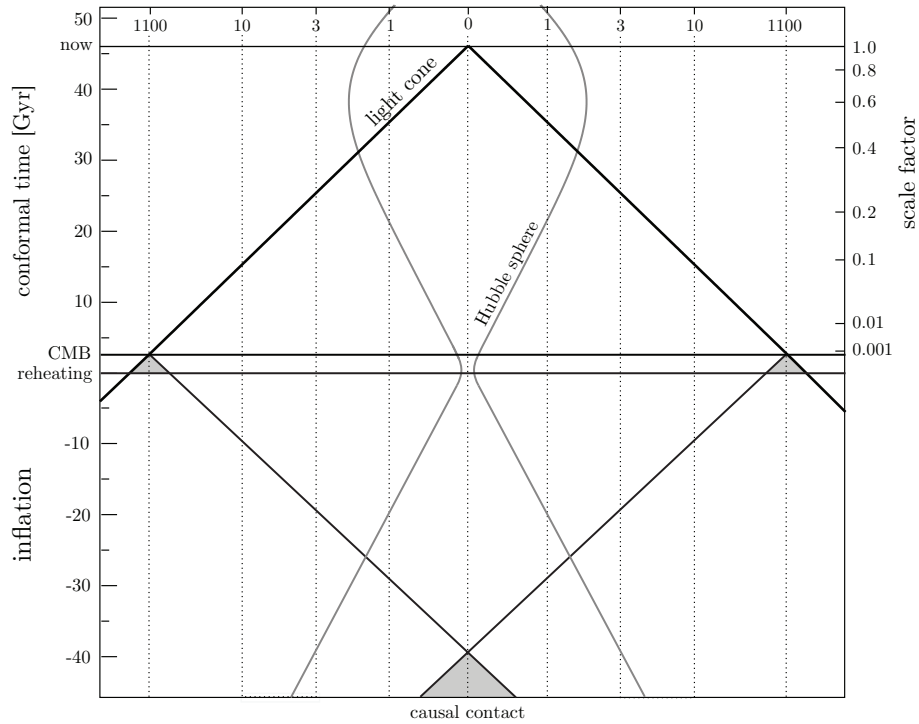


Figura 3.2: Il diagramma mostra (in coordinate comoventi) come la soluzione del problema dell'orizzonte preveda che il raggio di Hubble abbia subito una fase di contrazione prima della fase di emissione della radiazione di fondo. In questo modo le due regioni (nella figura i due vertici lungo la retta CMB) che prima non avevano intersezione fra i loro coni luce, ora ne hanno (porzione scura centrale in basso), ed è quindi giustificata la loro omogeneità e isotropia. Notare che l'asse del tempo (conformazionale) ammette anche tempi negativi, dando un nuovo significato al tempo $\tau = 0$. Come verrà spiegato nella sezione successiva, non è necessario mostrare cosa sia avvenuto tra l'istante della singolarità $\tau = -\infty$ e l'inizio dell'inflazione $\tau = I$, in quanto ai fini del problema dell'orizzonte è sufficiente osservare che il nostro universo osservabile (in figura *now*) sia interamente contenuto nella sfera di Hubble almeno in un certo momento durante l'inflazione.

Conseguenze dell'espansione

Giunti a questo punto, e muniti delle conoscenze necessarie a comprendere l'espansione dell'universo, addentriamoci in quelli che sono gli aspetti più interessanti legati a questo fenomeno, e per questa ragione quelli più sensibili a fraintendimenti o a conclusioni errate. Gran parte di queste considerazioni traggono spunto dal lavoro dei fisici T.M.Davis e M.H.Lineweaver[4].

4.1 L'interpretazione dei diagrammi spazio-tempo

Tutti gli oggetti fisici che abbiamo costruito formalmente, dalle coordinate comoventi ai concetti di orizzonte e di universo osservabile, dalla sfera di Hubble all'idea di connessione causale, necessitano ora di un ambiente in cui essere correttamente contestualizzati visivamente, di modo che, qualora il lettore dovesse riflettere sulla relazione fra due oggetti cosmologici in movimento nello spazio (o nello spazio in movimento), possa farlo verificando l'esattezza delle sue asserzioni. Questo ambiente altri non è se non il diagramma spazio-tempo. A prima vista sembrerebbe strano discuterne dopo averne già fatto uso nei capitoli precedenti; tuttavia prima di rispondere ai quesiti successivi, è importantissimo avere chiaro il completo funzionamento di questo ambiente, interpretando correttamente le regioni dello spazio che esso va a delineare.

Per prima cosa presentiamo in Figura 4.1 tre diagrammi spazio-tempo, rappresentanti in sistemi di coordinate diversi il fenomeno dell'universo in espansione nel modello cosmologico con $(\Omega_m, \Omega_\Lambda) = (0.3, 0.7)$. Le linee a puntini rappresentano le linee di universo degli oggetti comoventi; nel diagramma dove si usano le distanze comoventi queste linee sono delle rette verticali (le distanze comoventi non si alterano con il passare del tempo), mentre nei diagrammi dove si usano le coordinate fisiche, queste linee aumentano la loro pendenza

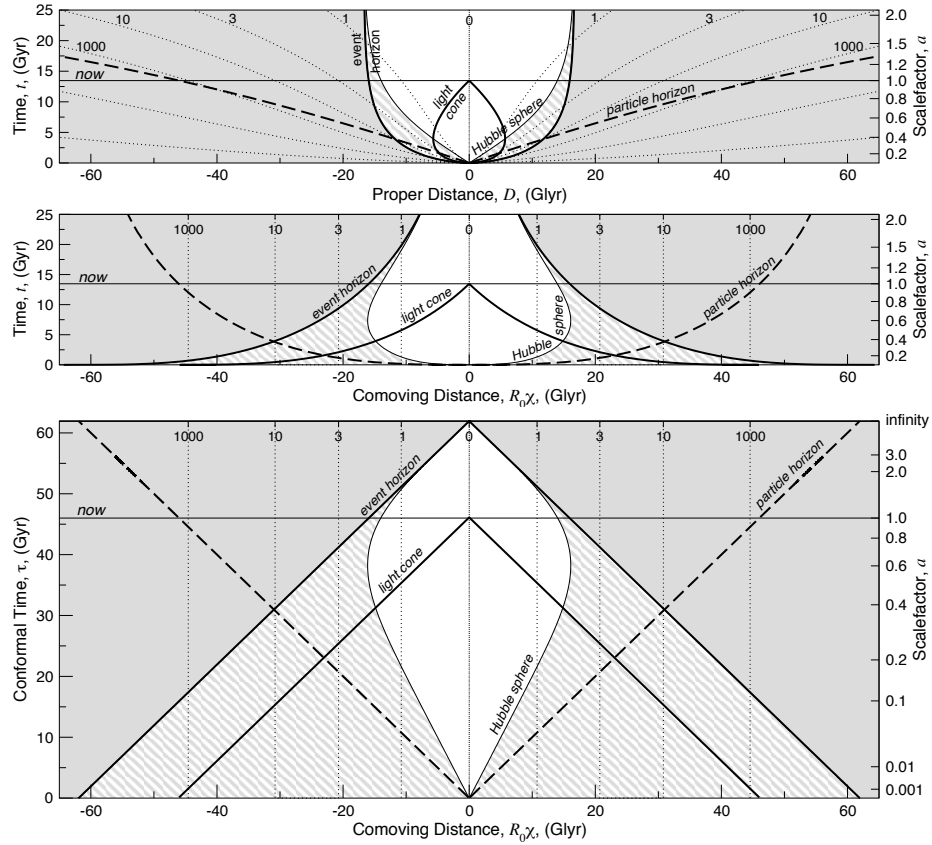


Figura 4.1: Diagrammi spazio-tempo dell'universo in espansione. Nel primo diagramma vengono usate le coordinate fisiche sia per le distanze che per i tempi; nel secondo le distanze fisiche vengono sostituite da quelle comoventi, mentre nel terzo il riscaldamento dovuto all'espansione viene applicato sia alle distanze che ai tempi. In ogni caso a tutti i diagrammi viene affiancato un ulteriore asse dove compare il fattore di scala normalizzato a/a_0 . Nei diagrammi non è compresa la fase di inflazione, tuttavia lo scopo di questi grafici non è quello di raccontare la storia evolutiva dell'universo, bensì quello di comprendere le dinamiche degli oggetti in movimento. Da questo punto di vista, come vedremo meglio nell'ultima sezione di questo capitolo, la fase dell'inflazione è una fase di espansione accelerata in cui il fattore di scala cresce esponenzialmente, perciò il suo comportamento è del tutto analogo a quello del nostro futuro in cui i componenti classici quali radiazione e materia perdono via via di importanza cedendo il posto al contributo dell'energia del vuoto.

con il passare del tempo (i.e. percorrono più spazio in minor tempo) a causa della dilatazione dello spazio. Noi, in quanto osservatori, ci troviamo sulla linea centrale e ciò che effettivamente vediamo attorno a noi è mostrato nel primo diagramma: con il passare del tempo gli oggetti si allontanano (e le loro linee di universo aumentano la pendenza). La scelta del sistema di coordinate inoltre modifica anche la rappresentazione del cono luce: nel primo e nel secondo diagramma infatti i fotoni viaggiano con velocità $v_{rec} - c$ e questo spiega la strana pendenza del cono. In particolare, guardando il pannello centrale sembrerebbe che cono luce passato tenda a raggiungere asintoticamente l'asse orizzontale a $t = 0$, definendo di conseguenza un orizzonte infinito; tutto si chiarisce osservando il terzo pannello nel quale si vede come il cono luce raggiunga una distanza finita, compatibilmente con il fatto che l'universo ha un'età finita.

Gli orizzonti degli eventi e delle particelle sono presentati in funzione del tempo¹⁷ e quindi, come già anticipato, per la conoscenza del valore dell'orizzonte ad un certo istante fissato è determinata unicamente dal punto della curva (tratteggiata per l'orizzonte delle particelle e continua per l'orizzonte degli eventi) corrispondente a quell'istante. Sempre a tal proposito notiamo in tutti e tre i pannelli che il raggio di Hubble inteso anch'esso come funzione del tempo, tenda progressivamente a coincidere con orizzonte degli eventi. Spiegheremo questa caratteristica nell'ultima sezione parlando dell'inflazione.

Quel che è bene ricordare in ogni caso è la differenza fra il concetto di orizzonte e quello di sfera di Hubble, laddove è il primo a sancire l'entità dell'*Universo osservabile*, dal momento che è per noi impossibile ricevere o inviare segnali verso oggetti che si trovino al di là del nostro orizzonte. Tutta la luce che possiamo osservare proviene infatti da oggetti la cui linea di universo ha intersecato il cono luce passato (e quindi dentro l'orizzonte delle particelle), ma che non necessariamente al tempo dell'emissione si trovavano anche dentro la sfera di Hubble. Il pannello più chiaro in cui si può vedere questa cosa è il terzo, quello espresso in coordinate comoventi; consideriamo un oggetto in recessione ad una distanza comovente fissata; al momento dell'emissione questi poteva tranquillamente trovarsi all'interno dell'orizzonte di particelle in modo tale da garantire la connessione causale con noi, ma allo stesso tempo al di fuori della sfera di Hubble (porzione a righe grigie-bianche). La sfera aumenta però progressivamente con il tempo fino a superare le dimensioni della distanza (comovente!) che separa l'oggetto da noi, permettendoci di osservarlo a velocità subluminali.

¹⁷L'orizzonte delle particelle appare come il cono luce futuro dell'origine dei tempi, mentre l'orizzonte degli eventi come il cono luce passato relativo al momento della fine dell'universo $t = \infty$, dove χ tende asintoticamente a 0.

4.2 Velocità di recessione superluminali?

Uno dei primi errori che si commette nell'osservazione dell'universo è pensare che in esso non siano presenti velocità di recessione v_{rec} che superino quella della luce, nonostante queste siano previste dalla legge di Hubble ($\vec{v}_{rec} = H\vec{r}$). Dal momento che quest'ultima ha ricevuto nel tempo largo supporto da evidenze sperimentali, verrebbe allora naturale chiedersi *come* sia possibile per galassie o oggetti che si trovano a distanze sufficientemente elevate possedere velocità di recessione superluminali.

4.2.1 Apparente violazione della Relatività Speciale

La chiave di comprensione di questo apparente paradosso, risiede nell'errato tentativo di interpretare le osservazioni cosmologiche con la relatività speciale. È bene notare che la validità delle sue predizioni è di natura *locale*: in altri termini l'impossibilità di superare la velocità della luce è ristretta a quei soli eventi che si osservino in un Sistema di Riferimento *inerziale*. Nel momento in cui non sia possibile utilizzare un Sistema di Riferimento inerziale *globale*, appare evidente come le previsioni della relatività speciale non siano più valide. È proprio in questo caso che si rende necessario l'ausilio della relatività generale.

Qualora tuttavia si osservassero galassie con velocità di recessione $\vec{v}_{rec} > c$ in un sistema di riferimento inerziale locale, queste mostrerebbero in ogni caso velocità (peculiari) sempre al di sotto di quella della luce ($\vec{v}_{pec} < c$), rientrando pienamente nella trattazione della relatività speciale. Ciononostante, questo non impedisce a tali oggetti e alla luce emessa di avere velocità di recessione superiori a quella di c ; quel che conta è che l'osservatore che percepisca tali velocità sia solidale ad un sistema di riferimento *non inerziale*.

Una volta distinte le regioni di validità delle due teorie vale la pena sottolineare un altro errore molto comune che coinvolge le velocità superluminali: l'interpretazione del redshift cosmologico. Come abbiamo visto nel Capitolo 1, il redshift può essere impiegato sia nell'ambito della relatività speciale, che in quello della relatività generale. Nel primo caso questo permette di calcolare la velocità alla quale una sorgente di luce si allontana dall'osservatore (1.31); si tratta dell'*Effetto Doppler*:

$$v(z) = v_{pec}(z) = \frac{(1+z)^2 - 1}{(1+z)^2 + 1}. \quad (4.1)$$

Come è specificato nell'equazione, la velocità calcolata è una velocità peculiare, in cui non compare alcuna dipendenza dal tempo. Al contrario, nell'ambito della relatività generale, il ruolo giocato dal redshift è ben diverso, come si vede dalla (1.28), che qui riproponiamo:

$$v_{rec}(t, z) = \frac{\dot{a}(t)}{a_0} \int_0^z \frac{dz'}{H(z')}. \quad (4.2)$$

Ora, mentre in relatività speciale il redshift viene usato per esprimere una velocità, la velocità peculiare, in relatività generale il redshift determina sì una velocità, ma il vero significato di z è quello di una distanza¹⁸ e quindi il suo valore è soggetto all'espansione dell'universo.

Questo fa in modo che nella (4.2) esista per le velocità una dipendenza temporale, dove questa presenza è dovuta al fatto che l'allontanamento dell'oggetto emittente avviene nella misura in cui si assiste alla dilatazione dello spazio stesso che lo separa dall'osservatore. Nel caso precedente (4.1), la velocità calcolata è la velocità di un oggetto che si muove *attraverso* lo spazio; in questo caso invece la velocità è dovuta all'espansione *dello* spazio. Questa differenza non è affatto banale, in quanto l'osservatore comovente che vede un oggetto dotato di redshift z , assocerà a quell'oggetto velocità diverse a seconda dell'istante di tempo considerato. Ciò vuol dire che uno stesso oggetto comovente assumerà nel corso del suo moto velocità di recessione diverse. Un aspetto questo, che l'interpretazione del redshift nell'ambito della relatività speciale risulta completamente ignorato.

Quello che a questo punto risulta abbastanza chiaro, e cioè che gli oggetti cosmologici in recessione vanno interpretati con la relatività generale, non è stato sempre altrettanto evidente storicamente. Ciò che induce al problema interpretativo è il fatto che le due espressioni, la (4.1) e la (4.2) hanno un andamento simile per valori di z compresi fra 0 e 1, in quella che viene detta regione di approssimazione lineare¹⁹ (vedi Figura 4.2). In questa regione, dove $v \sim cz$, le due predizioni sono in buon accordo con le predizioni della Legge di Hubble, e questo ha permesso che l'interpretazione del redshift data dalla relatività speciale mantenesse nel corso degli anni una certa autorità.

Storicamente il problema si è posto nel momento in cui sono stati osservati oggetti con un valore del redshift $z \gg 1$ e posti a una distanza sufficientemente elevata da implicare una velocità superluminale. Ad oggi sappiamo che per valori di $z \sim 1.5$ la velocità di recessione oltrepassa quella di c ; tuttavia non furono casi solitari quelli nei quali si tentò di apportare delle correzioni alla legge di Hubble usando la (4.1) in modo che il limite di c non venisse mai superato²⁰, portando di fatto ad errori sempre meno trascurabili.

4.2.2 Il test della dilatazione del tempo

Oltre alle differenze esposte finora, esiste tuttavia un aspetto nel quale le due teorie relativistiche, generale e speciale, forniscono le stesse predizioni in merito al redshift cosmologico; questo ha a che fare con la dilatazione del tempo.

¹⁸Nell'universo, come già visto nella legge di Hubble distanza e velocità di recessione sono direttamente proporzionali fra loro, tuttavia va ricordato che il redshift calcolato in due istanti di tempo diversi fornirà velocità di recessione diverse.

¹⁹A piccoli valori della velocità, l'espressione dell'effetto doppler relativistico si può semplificare fino ad ottenere l'espressione data da Hubble.

²⁰Se infatti si usasse l'espressione dell'effetto doppler relativistico si avrebbe che $\lim_{z \rightarrow \infty} v_{pec} = 1$, contraddicendo quanto si evince dalle osservazioni.

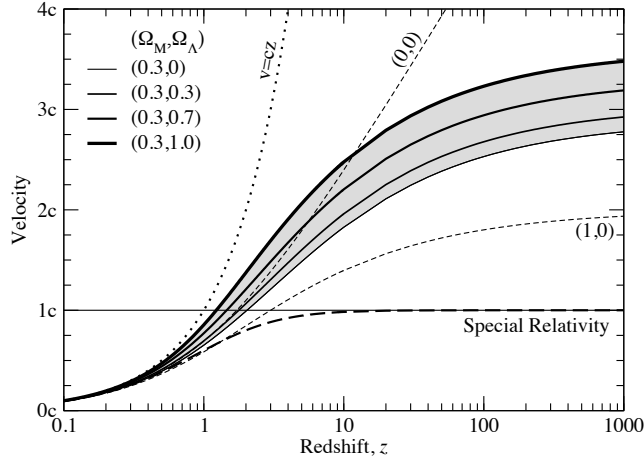


Figura 4.2: Andamento della velocità di recessione delle galassie in funzione del redshift facendo uso della relatività speciale e della relatività generale. Per piccoli valori di z le due predizioni sono simili. Tuttavia nel momento in cui z aumenta, la predizione della R.S. mostra un andamento asintotico dove $v \rightarrow c$, correggendo di fatto l'andamento lineare $v = cz$. Al contrario la velocità di recessione predetta dai modelli R.G. (inclusi nella regione di colore grigio e differenziati in base al modello cosmologico scelto dai parametri di densità Ω) e calcolata al tempo $t = t_0$, mostra valori che superano di gran lunga il limite di c ; valori che effettivamente vengono osservati.

In relatività generale due eventi separati temporalmente Δt_0 nel sistema di riferimento di una sorgente emettente che si allontana da noi con una certa velocità di recessione v_{rec} verranno percepiti nel sistema di riferimento dell'osservatore con un intervallo di tempo Δt dilatato rispetto a Δt_0 . Il fattore di dilatazione è dato da $\gamma_{GR} = 1 + z$, il quale tiene conto del fatto che tra l'emissione della luce dei due eventi e la loro ricezione, la luce ha percorso un certo spazio in un certo tempo, e che nel frattempo lo spazio stesso nel quale si stava propagando risentiva dell'espansione. Storicamente questo ha spinto alcuni fisici ad utilizzare la misurazione della dilatazione del tempo cosmologico come una possibile conferma del fatto che il fenomeno del redshift cosmologico fosse intrinsecamente legato all'espansione dell'universo. I dati sperimentali hanno confermato con un livello di confidenza altissimo il fattore di dilatazione predetto dalla relatività generale, confutando nello stesso tempo tutti quei modelli che non prevedevano alcuna dilatazione.

Ciò che però questi risultati non potevano predire era l'esattezza dell'interpretazione relativistica generale rispetto a quella fornita dalla relatività speciale. Anche secondo quest'ultima è previsto un fattore di dilatazione; come si può mostrare tuttavia, questo è della stessa forma di quello ottenuto in precedenza. Riconsideriamo allora i due eventi separati temporalmente Δt_0 nel sistema di riferimento della sorgente emettente. In questo caso essendo in relatività speciale dovremmo supporre che sia la sorgente sia l'osservatore si trovino in sistemi di riferimento *inerziali*. La relazione che lega allora il tempo proprio t_0 del sistema di riferimento della sorgente emettente in allontanamento (questa

volta a velocità $v = v_{pec}$) e il tempo proprio della sorgente emettente del sistema di riferimento dell'osservatore t_1 è dato dal fattore di dilatazione:

$$\begin{aligned}
\gamma_{SR} &= (1 - (v_{pec}/c)^2)^{-\frac{1}{2}} = \left(1 - \left(\frac{(1+z)^2 - 1}{(1+z)^2 + 1}\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}} \\
&= \left(\frac{((1+z)^2 + 1)^2 - ((1+z)^2 - 1)^2}{((1+z)^2 + 1)^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \\
&= \left(\frac{2(1+z)}{(1+z)^2 + 1}\right)^{-1} = \left(\frac{(1+z)^2 + 1}{2(1+z)}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(1 + z + \frac{1}{1+z}\right) \approx 1 + z^2/2.
\end{aligned} \tag{4.3}$$

Quello che l'osservatore misura non è tuttavia il tempo proprio t_1 , dal momento che è necessario considerare il contributo dovuto al fatto che la distanza tra la sorgente e l'osservatore stesso sta progressivamente aumentando a causa dell'espansione. Nell'intervallo di tempo Δt_1 che intercorre fra i due eventi, la sorgente ha percorso una distanza pari a $v\Delta t_1$ e bisogna considerare un ulteriore intervallo di tempo necessario alla luce che veicola l'informazione per colmare questa nuova distanza. Questo tempo extra è pari a $v\Delta t_1/c$. Si ha allora che l'intervallo di tempo proprio che effettivamente l'osservatore percepisce fra i due eventi è della forma:

$$\begin{aligned}
\Delta t &= \Delta t_1(1 + v/c) = \Delta t_0\gamma_{SR}(1 + v/c) \\
&= \Delta t_0\left(\frac{(1+z)^2 + 1}{2(1+z)}\right)\left(\frac{2(1+z)^2}{(1+z)^2 + 1}\right) \\
&= \Delta t_0(1 + z),
\end{aligned} \tag{4.4}$$

esattamente come predetto nell'interpretazione della relatività generale. Questo mostra che le misurazioni della dilatazione del tempo cosmologico possono da un lato provare che il redshift sia legato all'espansione dell'universo, ma non possono in alcun modo mostrare che la corretta interpretazione di quest'ultimo è garantita dalla sola relatività generale. Esistono ad ogni modo altre evidenze sperimentali in grado di garantire quanto ricavato nella sezione precedente²¹. Ciononostante, quelle che potrebbero essere prove ancor più forti della bontà dell'interpretazione relativistica generale, richiedono valori di redshift così alti per dei risultati tangibili, e verosimilmente saranno realizzati negli anni a venire.

4.2.3 È possibile vedere oggetti superluminali?

Sorge a questo punto un'altra tipica domanda: è per noi possibile vedere galassie che si allontanano a velocità maggiori di quelle della luce? Ed in caso affermativo come può tutto questo non violare il principio di causalità?

²¹Un esempio è lo studio della relazione fra la misura della grandezza degli oggetti in recessione con il loro valore del redshift.

Ricordiamo l'espressione della velocità totale ricavata nella (1.1):

$$v_{phys} = v_{rec} + v_{pec}. \quad (4.5)$$

Consideriamo a questo punto un fascio di luce emesso da una galassia che si allontana da noi con velocità di recessione v_{rec} ; i fotoni che osserveremo avranno quindi $v_{tot} = v_{rec} - c$. Nel caso di galassie sufficientemente lontane questo può ovviamente voler dire che $v_{tot} > c$. Dal momento che abbiamo definito la sfera di Hubble come quella regione oltre la quale si hanno velocità superluminali, è chiaro che queste galassie (e i relativi fotoni) si trovino fuori dalla sfera di Hubble.

Quello di cui bisogna tuttavia tener conto, è che mentre la sorgente luminosa emettente si allontana a causa dell'espansione, sempre a causa dell'espansione cresce anche la sfera di Hubble stessa²² (di raggio comovente $(aH)^{-1}$). Detta quindi v_H la velocità di espansione della sfera di Hubble, accade allora che, se $v_H > v_{rec} - c$ i fotoni che si trovano inizialmente in una regione “superluminale” vengano prima o poi inglobati nella sfera (regione “subluminale”), e questo ne rende possibile l'osservazione da parte nostra.

Come si vede nel primo (e meglio nel secondo) pannello della Figura 4.1, alcuni oggetti di cui oggi osserviamo la luce, al momento dell'emissione si trovavano in regioni con $\vec{v}_{rec} > c$, e quindi all'esterno della sfera di Hubble. Questo tuttavia non può aver loro impedito in quel momento di intersecare con la loro linea di universo il nostro cono luce passato²³. Ad ogni modo, dal momento che la loro linea di universo è sempre stata al di là della sfera di Hubble, questi oggetti avevano, hanno ed avranno sempre velocità di recessione maggiori di quella della luce.

4.3 L'Inflazione: un'espansione superluminale?

Sebbene largamente diffuso, un ulteriore concetto improprio è quello secondo il quale si ritiene l'inflazione come la fase nella quale l'Universo ha avuto una velocità di espansione maggiore di quella della luce. Quest'affermazione non è del tutto errata, ma è se non altro imprecisa. Occorre puntualizzare che l'intera espansione dell'Universo, sia in fase di Inflazione sia in seguito, è avvenuta, e avviene tutt'ora, a grandi distanze ($\vec{r} > c/H$), con velocità superluminali.

Come abbiamo visto nel Capitolo 3, ciò che contraddistingue la fase dell'inflazione dal resto dell'espansione, è il fatto che in essa il raggio di Hubble $(aH)^{-1}$ decresca, contraendo la sfera di Hubble. Abbiamo visto che questa condizione si verifica qualora $(1 + 3w) < 0$, e quindi nel caso in cui venga esercitata una

²²Qui facciamo riferimento alla fase “standard” dell'universo, presa a partire dal momento dell'emissione di CMB; ovviamente se consideriamo il periodo dell'inflazione sappiamo che questo non è vero.

²³Va ricordato che la sfera di Hubble non è un orizzonte e quindi non è un discriminante per il contatto causale.

pressione P negativa. In precedenza avevamo attribuito questa proprietà al vuoto quantistico, o comunque ad un componente dell'universo dotato di una forza repulsiva in grado di contrastare l'attrazione gravitazionale. Nello specifico avevamo identificato questo componente con la costante cosmologica Λ . Consideriamo allora l'andamento del fattore di scala $a(t)$ previsto in caso di dominanza del fattore Λ ; dalla (1.45) si vede che $a(t) \sim e^{Ht}$, con H costante. Introducendo allora questa funzione nell'espressione dell'orizzonte degli eventi (2.3) si verifica che:

$$\begin{aligned} \chi_{eh}(\tau) = \tau_f - \tau &= \int_t^{\tau_f} \frac{dt}{a(t)} = \int_t^{\tau_f} e^{-Ht} dt \\ &= -\frac{1}{H} e^{-Ht} \Big|_t^{\tau_f} \sim \frac{1}{H} e^{-Ht} = \frac{1}{aH} \end{aligned} \quad (4.6)$$

dove si è tenuto conto del fatto che il contributo dominante è quello dato dall'estremo inferiore. Il risultato mostra una particolarità della fase dell'inflazione. Come tutte le fasi in cui l'espansione è accelerata, nel regime esponenziale del fattore di scala, il raggio di Hubble tende asintoticamente a coincidere con l'orizzonte degli eventi. Anche se non specificamente nella fase dell'inflazione bensì nella regione futura dell'universo, questo fatto è ben visibile nella Figura 4.1, sia nei primi due pannelli dove orizzonte e raggio di Hubble sono presentati in coordinate fisiche, sia in coordinate comoventi nel terzo pannello. Questo atteggiamento asintotico tuttavia non deve nuovamente indurre a pensare che i due oggetti siano la stessa cosa²⁴.

Tipicamente infatti durante l'inflazione, dal momento che il raggio di Hubble diminuisce, può accadere che oggetti che ad un certo istante t si trovassero all'interno della sfera di Hubble ($\vec{r} < c/H$), finiscano dopo un certo transiente al di fuori della sfera stessa. Questo fenomeno viene solitamente descritto affermando che questi oggetti stanno "oltrepassando l'orizzonte" (i.e. orizzonte degli eventi). Questa connessione fra orizzonte degli eventi e raggio di Hubble è tuttavia lecita solo all'interno della fase dell'inflazione e cessa con la fine di quest'ultima. È infatti possibile che oggetti che durante l'inflazione sono usciti dall'orizzonte vi possano "rientrare" una volta conclusa la fase di inflazione. Ovviamente il nuovo orizzonte (i.e. raggio di Hubble) all'interno del quale rientreranno non sarà lo stesso che hanno precedentemente oltrepassato, ma sarà determinato dalla velocità della luce nella nuova fase dell'universo.

²⁴Questo caso ideale viene comunemente detto *Espansione di de Sitter*.

Conclusioni

Sicuramente quanto abbiamo visto del fenomeno dell'espansione è una piccolissima parte della complessa e articolata storia dell'universo. Quanto basta tuttavia per rendersi conto di un aspetto fondamentale, per certi versi anche banale, ma non sempre così chiaro del nostro cosmo, ossia il fatto che esiste una profonda distinzione (anche in termini dimensionali) tra ciò che noi *vediamo*, ciò che è a noi *causalmente connesso*, e l'universo stesso nella sua totalità. La corretta separazione fra queste aree richiede necessariamente il concetto di orizzonte; è solo quest'ultimo che sancisce l'entità di tutto quello da cui possiamo essere influenzati e tutto ciò che siamo in grado a nostra volta di influenzare. Indubbiamente il contesto nel quale gli orizzonti vengono definiti, ossia uno spazio in continua espansione, rende necessario discriminare gli oggetti in base alla loro velocità, distinguendo grazie alla sfera di Hubble, quanto si muove con velocità subluminari, ed è quindi possibile per noi "osservare", da quanto si muove invece a velocità maggiori di quelle della luce, e può essere osservato solo nel momento in cui si trovasse inglobato nella sfera.

Abbiamo altresì visto che l'evoluzione della sfera di Hubble è soggetta alla particolare fase che vive l'universo, e in particolare dalla dominanza specifica di uno dei componenti; in particolare alla materia ordinaria (materia adronica e radiazione) è associato un raggio di Hubble che aumenta progressivamente, mentre se a dominare è una componente con una pressione negativa (vuoto quantistico, energia oscura, spesso indicati in termini della costante cosmologica Λ), il raggio di Hubble diminuisce progressivamente originando un'espansione accelerata dove il fattore di scala cresce esponenzialmente. Questo è quanto sembra stia accadendo ora ed è quanto accaduto in fase di inflazione, ed ha permesso che l'omogeneità e l'isotropia della radiazione cosmica di fondo CMB trovassero spiegazione nella connessione causale fra le regioni ad oggi più lontane del nostro universo, risolvendo il problema dell'orizzonte.

Ad ogni modo, il fatto di poter oltrepassare in velocità c è stata e resta probabilmente una delle conseguenze tipicamente più difficili da accettare; abbiamo mostrato tuttavia che non vi è nulla di assurdo nella possibilità per gli oggetti di possedere velocità così elevate, e che questo discende appunto dal fatto che oltre a muoversi *attraverso* lo spazio, essi si muovono in uno spazio che *si muove* esso stesso.

Il più grande supporto a sostegno dell'espansione e delle velocità superluminali proviene dal fenomeno del redshift cosmologico. Sappiamo che la sua corretta interpretazione non è all'interno della relatività speciale (che non prevederebbe velocità $v > c$), in quanto la validità di questa teoria richiede sistemi di riferimento inerziali, che nell'universo sono solamente di natura locale. Il giusto contesto del redshift, e in generale dell'espansione, è invece quello della relatività generale, dove si tiene conto della dipendenza temporale di z e le predizioni sulle velocità delle galassie in recessione sono verificate sperimentalmente.

Le Equazioni di Friedmann

Ricaviamo ora le tre leggi dell'espansione dell'universo senza fare uso della relatività generale.

A.1 Equazione di Friedmann

Consideriamo la forza gravitazionale: $F = \frac{GMm}{r^2} = \frac{GM4\pi\rho r}{3}$. A partire da questa è possibile definire un potenziale $V = -\frac{GM4\pi\rho r^2}{3}$, dove ρ è la densità di massa/energia di uno dei due corpi soggetto al legame gravitazionale²⁵. Utilizzando la conservazione dell'energia ed esprimendo quest'ultima come la somma di un termine potenziale ed un termine cinetico ($T = \frac{1}{2}m\dot{r}^2$) si ha:

$$U = T + V = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 - \frac{GM4\pi\rho r^2}{3} \quad (\text{A.1})$$

Ora dal momento che l'Universo si sta espandendo è utile esprimere la coordinata spaziale \vec{r} in termini del fattore di scala dell'universo a il quale definisce il rate di espansione. Utilizzando un nuovo sistema di coordinate abbiamo $\vec{r} = a\vec{x}$ dove \vec{x} è detta coordinata comovente. Appare chiaro ora che mentre \vec{r} la coordinata fisica aumenta nel tempo assieme all'espansione (la separazione fra i due corpi effettivamente aumenta), la coordinata comovente \vec{x} rimane fissata durante l'espansione. Dovendo valere il principio cosmologico, e quindi l'omogeneità dello spazio, necessariamente il fattore di scala potrà dipendere solamente dal tempo $a = a(t)$.

Sostituendo il tutto nella (A.1) si ottiene:

$$U = \frac{1}{2}m(\dot{a}x)^2 - \frac{GM4\pi\rho(ax)^2}{3} \quad (\text{A.2})$$

²⁵Qui si sta supponendo che la distribuzione della materia di tale oggetto sia uniforme.

Moltiplicando tutto per $\frac{2}{ma^2x^2}$ si ricava finalmente:

$$H^2 = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho + \frac{2U}{ma^2x^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{kc^2}{a^2} \quad (\text{A.3})$$

dove abbiamo definito $k = -\frac{2U}{mx^2c^2}$. Questo parametro prende il nome di **parametro di curvatura** dell'universo, ed è responsabile della geometria spaziale. Ogni universo ha il suo k fissato e costante (indipendente da x). Dovendo preservare l'omogeneità segue che $U \propto x^2$.

L'equazione (A.3) prende il nome di **equazione di Friedmann** e descrive l'evoluzione delle distanze nel nostro universo in espansione. Notiamo che questo risultato, ricavato banalmente da principi di fisica newtoniana coincide perfettamente con quello ricavato a partire dalla relatività generale (B).

Definendo $M_{pl} = \sqrt{\frac{\hbar c}{8\pi G}}$ si può semplificare la (A.3):

$$H^2 = \frac{\rho}{3M_{pl}^2} - \frac{kc^2}{a^2}. \quad (\text{A.4})$$

A.2 Equazione di continuità

Esprimiamo il fenomeno dell'espansione dell'universo immaginando quest'ultimo alla stregua di un fluido contenuto in un pistone per il quale vale la relazione termodinamica:

$$dU = TdS - PdV \quad (\text{A.5})$$

Esprimiamo ora il volume in unità comoventi ed ipotizzando che l'espansione sia reversibile ($dS = 0$). Quanto all'energia, utilizziamo la relazione di Einstein $E = mc^2 = \frac{4}{3}\pi a^3 \rho c^2$ esprimendo la massa in termini della densità e del volume. Derivando la (A.5) rispetto al tempo si ottiene:

$$\begin{aligned} \frac{dU}{dt} + P\frac{dV}{dt} &= 4\pi\rho a^2 \dot{a}c^2 + \frac{4}{3}\pi a^3 \frac{d\rho}{dt}c^2 + P(4\pi a^2 \dot{a}) = 0 \\ \dot{\rho}\left(\frac{ac^2}{3}\right) + \dot{a}(\rho c^2 + P) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

da cui poi, in unità di c si ottiene quella che viene definita **Equazione di Continuità**:

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}\left(\rho + P/c^2\right) = 0 \quad \longrightarrow \quad \dot{\rho} = -3H(\rho + P). \quad (\text{A.7})$$

A.3 Equazione di accelerazione

Consideriamo ora insieme le due equazioni precedenti. Differenziando la (A.3) e sostituendo a $\dot{\rho}$ nella (A.7) si ottiene:

$$\begin{aligned}
 2\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)\left(\frac{\ddot{a}a - \dot{a}^2}{a^2}\right) &= \frac{8\pi G}{3}\dot{\rho} + \frac{2k\dot{a}}{a^3} = \frac{8\pi G}{3}\left(-3\frac{\dot{a}}{a}\left(\rho + P/c^2\right)\right) + \frac{2k\dot{a}}{a^3} \\
 \left(\frac{\ddot{a}a - \dot{a}^2}{a^2}\right) &= \left(\frac{\ddot{a}}{a}\right) - \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = (-4\pi G)(\rho + P/c^2) + \frac{2k}{a^2} \\
 \left(\frac{\ddot{a}}{a}\right) &= \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2} - 4\pi G(\rho + P/c^2) + \frac{2k}{a^2} \\
 &= \frac{4\pi G}{3}(2\rho - 3(\rho + P/c^2)) = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3P/c^2)
 \end{aligned} \tag{A.8}$$

detta **Equazione di Accelerazione**. Come si può notare la presenza di una pressione positiva contribuisce a far decelerare l'espansione, mentre una pressione negativa la accelera.

APPENDICE B

L'espansione in relatività generale

Lungi dall'essere una trattazione completa e dall'appesantire questo lavoro, presentiamo in questa appendice un modo alternativo per ricavare le equazioni dell'espansione, facendo uso questa volta della relatività generale. Questo breve excursus non vuole essere sostitutivo a quanto esposto nell'appendice precedente, dove l'approccio all'espansione è stato di tipo Newtoniano. Tuttavia, è interessante comprendere quale sia il ragionamento a partire dal quale si ricavano le equazioni di Friedmann.

Cominciamo appunto introducendo le equazioni di Einstein:

$$G_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu} \quad (\text{B.1})$$

Queste equazioni regolano la dinamica degli oggetti cosmologici, evidenziando la connessione fra quella che è la geometria dell'universo (espressa dalla curvatura in $G_{\mu\nu}$) e quanto esso contiene (attraverso il tensore Energia-Impulso $T_{\mu\nu}$).

B.1 Il tensore energia-impulso

Consideriamo il tensore Energia-Impulso. Il modo che qui utilizzeremo per determinarne le componenti è quello di considerare l'universo come un *fluido perfetto* relativistico[1]. Con questa approssimazione si intende dire che complessivamente l'universo somiglia ad un fluido senza viscosità in cui non ci sia conduzione di calore, il che su larga scala non è così lontano dal reale. Si dimostra allora che per questo tipo di fluido l'espressione di $T_{\mu\nu}$ in un generico sistema di riferimento è della forma seguente:

$$T_{\mu\nu} = (\rho + P)U_\mu U_\nu - g_{\mu\nu}P, \quad (\text{B.2})$$

dove P e ρ sono rispettivamente la pressione e la densità di energia del fluido e U^μ la quadrivelocità associata al moto relativo fra l'osservatore e il fluido. Supponendo di trovarci in un sistema di riferimento comovente, solidale ad un punto del fluido, l'espressione di U^μ si riduce semplicemente a $(1, \mathbf{0})$, ottenendo il tensore seguente:

$$T_\nu^\mu = g^{\mu\lambda} T_{\lambda\nu} = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -P & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -P \end{pmatrix}. \quad (\text{B.3})$$

Questo fatto lo si può vedere anche utilizzando la definizione stessa di fluido perfetto: dal momento che non c'è flusso di calore il flusso di energia è necessariamente associato ad un flusso di particelle, che tuttavia in un riferimento solidale al fluido è ovviamente nullo; si ha quindi che $T_{i0} = T_{0j} = 0$. L'assenza di viscosità, ossia di forze parallele alle varie interfacce del fluido implica che T_{ij} sia diagonale. Ma dovendo questo valere per ogni riferimento comovente nel fluido $T_{ij} = P\delta_{ij}$, con P appunto la pressione del fluido. Infine T_{00} è la densità di energia totale del fluido ρ .

Resta ora da chiedersi come la densità e la pressione evolvano nel tempo. Sappiamo che nello spazio di Minkowskii il tensore energia-impulso è conservato (dall'invarianza per traslazioni spazio-temporali), e questo si esprime come:

$$\partial_\mu T_\nu^\mu = 0. \quad (\text{B.4})$$

In relatività generale non è lecito affermare che $T_{\mu\nu}$ soddisfi un'equazione di conservazione. Quello che però avviene è che $T_{\mu\nu}$ soddisfa l'equazione di continuità (stiamo considerando l'universo come un fluido perfetto); utilizzando la derivata covariante questo si può scrivere come:

$$\nabla_\mu T_\nu^\mu = \partial_\mu T_\nu^\mu + \Gamma_{\mu\lambda}^\mu T_\nu^\lambda - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda T_\lambda^\mu = 0, \quad (\text{B.5})$$

che in un sistema di coordinate comoventi solidale al fluido si riduce alla (B.4). Questa condizione dà luogo a 4 equazioni con $\nu = 0, 1, 2, 3$. Ponendo $\nu = 0$ e ricordando l'espressione di $T_{\mu\nu}$ si ha:

$$\begin{aligned} \nabla_\mu T_0^\mu &= \partial_\mu T_0^\mu + \Gamma_{\mu\lambda}^\mu T_0^\lambda - \Gamma_{\mu 0}^\lambda T_\lambda^\mu = 0 \\ &= \frac{d\rho}{dt} + \Gamma_{\mu 0}^\mu T_0^0 + \cancel{\Gamma_{\mu i}^\mu T_0^i} - \Gamma_{\mu 0}^\lambda T_\lambda^\mu \\ &= \frac{d\rho}{dt} + \Gamma_{\mu 0}^\mu \rho - \Gamma_{\mu 0}^\lambda T_\lambda^\mu. \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

Ricordando allora che la metrica (FRW) si scrive come

$$ds^2 = dt^2 - a(t)^2 \gamma_{ij} dx^i dx^j \quad \text{dove} \quad \gamma_{ij} \equiv \delta_{ij} + k \frac{x_i x_j}{1 - k(x_k x^k)} \quad (\text{B.7})$$

le singole componenti dei simboli di Christoffel sono le seguenti:

$$\Gamma_{00}^\mu = \Gamma_{0\beta}^0 = 0 \quad \Gamma_{ij}^0 = a\dot{a}\gamma_{ij} \quad (\text{B.8})$$

$$\Gamma_{0j}^i = \frac{\dot{a}}{a}\delta_j^i \quad \Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2}\gamma^{il}(\partial_j\gamma_{kl} + \partial_k\gamma_{jl} - \partial_l\gamma_{jk}). \quad (\text{B.9})$$

A questo punto la (B.6) diventa:

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + P) = 0, \quad (\text{B.10})$$

analogamente a quanto trovato in (A.7).

B.2 Il tensore di curvatura e le equazioni di Friedmann

Consideriamo ora l'altro tensore delle equazioni di Einstein, il tensore di curvatura $G_{\mu\nu}$. Questi è definito come:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}, \quad (\text{B.11})$$

dove $R_{\mu\nu}$ è il tensore di Ricci che in coordinate locali è

$$R_{\mu\nu} = \partial_\lambda\Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \partial_\nu\Gamma_{\mu\lambda}^\lambda + \Gamma_{\lambda\rho}^\lambda\Gamma_{\mu\nu}^\rho + \Gamma_{\mu\lambda}^\rho\Gamma_{\nu\rho}^\lambda, \quad (\text{B.12})$$

mentre R è lo scalare ottenuto dal relativo tensore contraendo l'indice basso con quello in alto:

$$R = R_\mu^\mu = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}. \quad (\text{B.13})$$

Il calcolo di queste espressioni risulta lungo e privo di alcuna considerazione interessante; la sua derivazione completa è riportata nel *Weimberg*[8]. Il modo di procedere è sostanzialmente il seguente: per prima cosa bisogna determinare l'espressione in coordinate locali dei simboli di Christoffel $\Gamma_{\alpha\beta}^\mu$ della connessione ∇ . Questi a loro volta si ricavano a partire dalla conoscenza della metrica $g^{\mu\nu}$, che nel nostro caso è quella di Friedmann-Robertson-Walker (1.7). Si ha infatti:

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\mu = \frac{1}{2}g^{\mu\lambda}(\partial_\alpha g_{\beta\lambda} + \partial_\beta g_{\alpha\lambda} - \partial_\lambda g_{\alpha\beta}). \quad (\text{B.14})$$

Ricordando le espressioni in (B.9), si determinano le componenti del tensore di Ricci. Dai calcoli nota che le componenti $R_{i0} = R_{0j} \equiv 0$. Le componenti di $R_{\mu\nu}$ non banali sono quindi rispettivamente R_{00} e R_{ij} :

$$R_{00} = -3\frac{\ddot{a}}{a} \quad (\text{B.15})$$

$$R_{ij} = -\left[\frac{\ddot{a}}{a} + 2\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + 2\frac{k}{a^2}\right]g_{ij}, \quad (\text{B.16})$$

mentre lo scalare R vale:

$$R = -6 \left[\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{k}{a^2} \right]. \quad (\text{B.17})$$

A questo punto, dalla (B.11) si ottengono le componenti del tensore di curvatura G_{ν}^{μ} ,

$$G_0^0 = 3 \left[\left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{k}{a^2} \right] \quad G_j^i = \left[2 \frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{k}{a^2} \right] \delta_j^i, \quad (\text{B.18})$$

le quali, inserite assieme alle componenti del tensore energia impulso prima ricavate completano le equazioni di Einstein e danno origine alle equazioni dell'espansione (A.3) e (A.8):

$$\left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho - \frac{k}{a^2} \quad \frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} (\rho + 3P). \quad (\text{B.19})$$

B.3 La costante cosmologica

In realtà le equazioni di Einstein scritte come nella (B.1) non sono del tutto precise, in quanto mancano del contributo legato alla costante cosmologica che nel formalismo covariante è dato da $-\Lambda g_{\mu\nu}$ con Λ costante. L'aggiunta di questo termine non altera la conservazione del tensore energia impulso $\nabla^{\mu} T_{\mu\nu} = 0$, dal momento che $\nabla^{\mu} g_{\mu\nu} = 0$. Tenendo conto di questo termine si ottiene:

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} \quad (\text{B.20})$$

Sulla scia di quanto detto nella discussione sui componenti dell'universo nel Capitolo 1, è possibile attribuire alla costante cosmologica un contributo al tensore energia-impulso semplicemente definendo

$$T_{\mu\nu}^{(\Lambda)} = \frac{\Lambda}{8\pi G} g_{\mu\nu} \equiv \rho_{\Lambda} g_{\mu\nu}. \quad (\text{B.21})$$

Bibliografia

- [1] Vincenzo Barone. *Relativita. Principi e applicazioni*. Bollati Boringhieri.
- [2] Daniel Baumann. «Inflation». In: *Physics of the large and the small, TASI 09, proceedings of the Theoretical Advanced Study Institute in Elementary Particle Physics, Boulder, Colorado, USA, 1-26 June 2009*. 2011, pp. 15–40. arXiv: 0907.5424.
- [3] Daniell Baumann. «Cosmology». In: vol. Part III Mathematical Tripos, pp. 1–45.
- [4] Tamara M. Davis e Charles H. Lineweaver. «Expanding confusion: common misconceptions of cosmological horizons and the superluminal expansion of the universe». In: *Proc. Astron. Soc. Austral.* (2003). [Publ. Astron. Soc. Austral.21,97(2004)]. arXiv: astro-ph/0310808.
- [5] Andrew Liddle. *An Introduction to Modern Cosmology*. 2nd ed. Wiley, 2003.
- [6] Francesca Tovena (auth.) Marco Abate. *Geometria Differenziale*. 1st Edition. UNITEXT-La Matematica per il 3+2. Springer Milan, 2011.
- [7] G. F. R. Ellis Stephen W. Hawking. *The large scale structure of space-time*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, 1975.
- [8] Steven Weinberg. *Gravitation and cosmology: principles and applications of GR*. First Edition. 1972.