

A mio padre...

Indice

Introduzione

5

Sezione 1

1 Definizioni dei livelli di stress e dell'esperimento

7

1.1 Definizione dei livelli di stress

7

1.2 Descrizione dell'esperimento

8

2 Il modello

11

2.1 Modello generatore dei dati

11

2.2 Alcune possibili estensioni al dominio

usuale

13

3 Stima della vita attesa

15

4 Disegno ottimo; scelta del criterio

19

4.1 Disegno ottimale nel caso non distorto

19

4.2 Disegno ottimale nel caso distorto

30

Sezione 2

5 Ottimalità e distorsione di alcuni disegni d'interpolazione

e di estrapolazione

33

5.1 Alcuni richiami bibliografici

33

5.2 Lo scopo di questo lavoro

38

5.3 Descrizione del modello

40

| | | |
|----------|--|-----------|
| 6 | Limite degli errori nell'interpolazione e nella continuità delle funzioni in $C^{(m)}(a, b)$ | 43 |
| 7 | Stima della vita attesa e del limite superiore della sua distorsione | 49 |
| | 7.1 Stima della vita attesa | 49 |
| | 7.2 Stima del limite della distorsione | 51 |
| 8 | Disegni ottimali | 53 |
| | 8.1 Ottimalità del disegno d'interpolazione | 53 |
| | 8.2 Ottimalità del disegno di estrapolazione | 55 |
| | 8.3 Una osservazione sulla ottimizzazione di l e m | 56 |
| | Esempio | 61 |
| | Riferimenti bibliografici | 65 |

Introduzione

La pianificazione accelerata è in alcuni studi di controllo della qualità, etc. un campo attivo; si vedano a tal proposito i libri di Nelson (1990), Bagdonavicius e Nikulin (2001). Si può sottolineare che molta della letteratura esistente, riguardante la pianificazione accelerata, si occupa di modelli lineari (in una o due variabili) e raramente di modelli polinomiali nel caso di una variabile. All'interno di questi modelli si possono considerare varie assunzioni sulle variabili (le quali possono essere censurate o meno) e circa la loro distribuzione (Weibull, log-normale, logistica, ecc.).

Anche i parametri d'interesse possono differire; si può fare riferimento infatti alla vita attesa, alla

funzione di sopravvivenza, o ad alcuni quantili della distribuzione di sopravvivenza.

Il presente lavoro è essenzialmente diviso in 2 sezioni principali (la prima comprende i capitoli che vanno dal primo al quarto e la seconda i rimanenti) nelle quali sono usati due metodi diversi di estrapolazione rivolti, entrambi, all'ottenimento di disegni ottimali nell'ambito della pianificazione accelerata. Le 2 sezioni sono sviluppate allo stesso modo con i capitoli che si susseguono quasi in parallelo; naturalmente la descrizione del modello di localizzazione e scala è stata trattata in maniera più esaustiva nella prima sezione, evidenziando nella seconda, per lo più, la nuova situazione che si è venuta a creare considerando una sola dimensione. Oltre a ciò, nella seconda (più corposa) sezione, è stato dato ampio spazio ad alcuni interessanti richiami bibliografici che saranno, senz'altro, più esaustivi su alcuni argomenti che non era possibile approfondire in questa tesi.

Sarà utilizzata, nella seconda parte, una notazione leggermente diversa da quella adottata nella prima, solo perché in un contesto di questo tipo risulta più conveniente avere una tale semplificazione evitando così di appesantire oltremodo la scrittura.

Alla fine della seconda sezione è stato inserito un esempio allo scopo di poter rendere più semplice la spiegazione di quanto era stato precedentemente trattato in maniera teorica. Come si potrà vedere, sono stati simulati dei dati con l'ausilio del programma *R*, e la stampa dei dati è stata aggiunta in coda.

Nella presente tesi saranno considerati disegni ottimali rispetto alla varianza o, più generalmente,

rispetto a una funzione dell'MSE. Il parametro d'interesse, per quanto concerne gli scopi di questo lavoro, è la vita media del sistema oggetto di studio, considerate le seguenti assunzioni:

1. Il modello generatore dei dati è di tipo localizzazione-scala

2. La distribuzione dei dati è arbitraria, benché conosciuta, e ha una densità (ovvero è assolutamente continua rispetto alla misura di *Lebesgue*)

3. La vita media, è una funzione di k variabili, $k \geq 1$, e questa funzione può non essere polinomiale; più precisamente sarà di seguito considerata *quasi-analitica* in un primo momento, e successivamente *analitica*.

Si noti anche, che in un modello di localizzazione-scala (sotto l'ipotesi 2) la conoscenza della sua vita media e del suo parametro di scala è equivalente a conoscere la distribuzione che genera i dati ed è ciò che giustifica l'interesse nello stimare la vita media.

Sezione 1

Capitolo 1

Definizione dei livelli di stress e dell'esperimento

Si supponga che S sia il sistema oggetto di studio, e T la variabile aleatoria che descrive la vita di S . Si assume che la durata di vita media di S dipenda da un vettore $\underline{v} \in D \subset R^k$, $k \geq 1$, dove \underline{v} descrive i vincoli operanti su S ; questi vincoli possono essere di vario tipo: chimici, fisici, ecc.. Sarà posto $Y = \ln T$. Si denoti con $E_v(Y)$ la vita attesa di Y rispetto a \underline{v} . Il dominio dei vettori rappresentanti i vincoli, D , può essere parzialmente ordinato ponendo:

$\underline{v} = (v_1, \dots, v_k) \leq \underline{w} = (w_1, \dots, w_k)$, $(\underline{v}, \underline{w}) \in D^2$, se e solo se $v_i \leq w_i$ per $1 \leq i \leq k$

1.1 Definizione dei livelli di stress.

Sarà posto $s_0 \in D$ come valore soglia, in modo tale che si possa dire che $\underline{v} \in D$ è un livello di stress per S se $\underline{v} > s_0$. Sarà assunto inoltre, che la funzione di sopravvivenza $(L_v(t) = Pr_v(T \geq t))$ soddisfi la disuguaglianza $L_v(t) \geq L_w(t)$ quando $\underline{v} \leq \underline{w}$; questa definizione di stress è ampiamente giustificata sul libro di *Levine*.

È consuetudine dire che \underline{w} è un livello accelerato rispetto a \underline{v} se $\underline{w} > \underline{v}$. Anche il valore "soglia" è definito a priori dalla stessa natura del problema, infatti l'ordinamento parziale " \leq " definito sopra, divide D nei sottodomini U e S_0 dati da:

$$U = \{\underline{v} \in D : \underline{v} \leq s_0\} \quad \text{e} \quad S_0 = \{\underline{v} \in D : \underline{v} > s_0\}.$$

U è chiamato "insieme dei livelli usuali", e S_0 "insieme dei livelli di stress"; per chiarezza, un punto in U sarà denotato da \underline{u} e un punto in S_0 da \underline{s} ; quando non si ha nessuna necessità di distinguere un punto, lo si chiamerà generalmente \underline{v} sia che esso appartenga a uno piuttosto che all'altro insieme.

1.2 Descrizione dell'esperimento

Si considerino n sistemi identici a S . Per stimare la vita media in un tempo ragionevole, si fissa, come punto di partenza, un *multi indice* $\underline{i} := (i_1, \dots, i_k)$; si testeranno $n(\underline{i})$ degli n sistemi oggetto dell'esperimento al livello di stress $\underline{s}(\underline{i})$. L'operazione sarà eseguita per tutti gli \underline{i} , con:

$$\underline{i} \in L := \prod_{j=1}^k \{0, \dots, l_j\} \quad \text{cosicché}$$

$$n = \sum_{\underline{i}} n(\underline{i}),$$

$$\text{con } \sum_{\underline{i}} := \sum_{i_1=0}^{l_1} \Lambda \sum_{i_k=0}^{l_k}$$

L'insieme verrà detto *configurazione di stress*. Ovviamente si potranno testare (per ogni rispettivo livello di stress) tutti i sistemi oggetto dell'esperimento simultaneamente, oppure ognuno di questi può essere fatto eseguire singolarmente (rispetto ai diversi livelli di stress).

Nel primo caso i campioni osservati

$$\underline{Y}(\underline{i}) := (Y_{(1)}(\underline{i}), K, Y_{(n(\underline{i}))}(\underline{i}))'$$

sono a coordinate dipendenti, mentre, per quanto riguarda il secondo caso, le coordinate stesse sono indipendenti. Ad ogni modo, al variare di i sono tutti i.i.d..

Ovviamente nel presente contesto, un sistema è sottoposto a stress per poter osservare la sua durata di vita in un periodo di tempo ragionevole. Si assume, solitamente, che esista una relazione tra il comportamento sottoposto a stress e lo stesso sistema operante in condizioni normali; tale relazione può essere descritta tramite una cosiddetta *funzione di riparametrizzazione* (si vedano i lavori di *Nelson*), che si può trovare in vari modelli come quelli di *Cox*, *Eyring*, *Arrhenius*, *Tatar* e anche altri.

Quando non possono essere usati modelli fisici per definire precisamente questa funzione (o una qualche teoria), allora, lo schema di estrapolazione rappresenta una soluzione naturale per, indurre le proprietà di affidabilità del sistema, rispetto al suo comportamento nel dominio sottoposto a stress.

Capitolo 2

Il modello

2.1 Modello generatore dei dati

Si assume che,

$$Z = \frac{Y - f(\underline{s})}{\sigma}$$

(1)

dove $\sigma > 0$, e f è una funzione quasi-analitica in tutto D e a valori reali, osservabile solo su S_0 (dominio "accelerato"); sia σ che f sono sconosciuti, e si assume inoltre che σ non dipenda da \underline{v} . Si ipotizza che la variabile casuale Z abbia una densità conosciuta, perciò la sua formula descrive il modello localizzazione/scala.

Ponendo $\varepsilon = \sigma Z - \sigma E[Z]$, si può scrivere $Y = f(\underline{s}) + \sigma E[Z] + \varepsilon$, e ciò comporta che $E[\varepsilon] = 0$ (si conosce anche $E[Z]$). Nel modello soprastante, f è definita solo su S_0 , il dominio dei valori di stress, e non sull'intero spazio D ; infatti f non è osservabile su U e si cercherà di definire la precisa estensione della f oggetto di stima. Se f è polinomiale su tutto D , l'oggetto di stima può essere definito univocamente sull'intero insieme D come di seguito:

$$P_{\underline{h}}(\underline{u}) = \sum_{\underline{i}} L_{\underline{u}}(\underline{s}(\underline{i})) P_{\underline{h}}(\underline{s}(\underline{i})),$$

(2)

dove

$$L_{\underline{v}}(\underline{s}(\underline{i})) = \prod_{j=1}^k \prod_{\substack{i'_j=0 \\ i'_j \neq i_j}} \frac{v_j - s_j(i'_j)}{s_j(i_j) - s_j(i'_j)}$$

è il polinomio di Lagrange. La formula 2 indica che $P_{\underline{h}}$ è conosciuto quando osservato ai nodi $\underline{s}(\underline{i})$. Tuttavia è noto che la classe "più ampia" di funzioni nelle quali l'estensione attraverso l'estrapolazione è possibile con una soluzione compatibile con la pianificazione degli esperimenti di è quella delle funzioni quasi-analitiche. L'estensione è pertanto,

$$f(\underline{u}) = \sum_{\underline{i}} L_{\underline{u}}(\underline{s}(\underline{i})) f(\underline{s}(\underline{i})).$$

(3)

Si ricorda che, posto $\underline{h} = (h_1, \dots, h_k)$ il grado del migliore polinomio approssimante, ovvero se per ogni \underline{h} appartenente ad un sottoinsieme di N^k si può scrivere

$$\sup_{\underline{v}} |f(\underline{v}) - P_{\underline{h}}(\underline{v})| \leq M \prod_{i=1}^k \rho_i^{h_i}$$

(4)

per una qualche costante M (dipendente dalla funzione f) e ρ_i , ($1 \leq i \leq k$), con $0 < \rho_i < 1$, allora la f è detta quasi-analitica.

In questo caso, i polinomi di Lagrange convergono a f quando $h_i \rightarrow \infty$, per ogni $i=1, \dots, k$, e f è definita univocamente dallo schema di approssimazione su tutto

D. Le funzioni f che soddisfano la disequazione appena vista, mettono in evidenza le seguenti proprietà:

1. Quando f è *quasi-analitica*, può essere estesa in un solo modo.

2. La convergenza del polinomio approssimante di Lagrange a f non dipende dalla posizione dei nodi, ma solo dal fatto che, quando $l_j \rightarrow \infty, \forall j=1, \dots, k$, i suddetti nodi "coprono bene" S_0 (sottoinsieme denso in S_0).

La proprietà 1 avvalora lo stimatore qui proposto, dato che l'estensione al dominio usuale è ben definita. Si può inoltre dedurre, dalla stessa proprietà 1, che lo schema di estrapolazione definisce in modo naturale una funzione di riparametrizzazione.

La proprietà 2 invece, mostra come si abbia una qualche libertà nella scelta dei nodi; essi possono pertanto essere definiti tramite l'adozione di alcuni criteri di ottimalità. Ciò avvalora le tecniche di pianificazione.

2.2 Alcune possibili estensioni al dominio usuale

Si propongono ora alcuni casi d'interesse per quanto riguarda l'estensione della funzione f sul dominio usuale U :

Si ponga $f: S_0 \rightarrow R$; l'estensione di f su U è f_U^0 definita da:

1 $f_U^0(\underline{u}) = f(\underline{u})$ se f è un polinomio.

2 $f_U^0(\underline{u}) = \tilde{f}_U(\underline{u}) = \lim_{i \rightarrow (\infty, \dots, \infty)} \sum_i L_{\underline{u}}(\underline{s}(i)) f(\underline{s}(i))$ quando $\underline{s}(i) \in S_0, i$

$\in N^k$ è una sequenza densa in S_0 , ovvero, ogni volta che f è una funzione quasi-analitica e non polinomiale.

$$3 \quad f_U^0(\underline{u}) = \tilde{f}_U^0(\underline{u}) = \sum_{\underline{i}} L_{\underline{u}}(\underline{s}(\underline{i})) f(\underline{s}(\underline{i})) \quad \text{se } f \quad \text{non è quasi}$$

analitica; in questo caso \underline{i} è una k -upla finita ($\underline{i} \in X_{j=1}^k \{0, \dots, l_j\}$).

Il caso 1 è quello classico; il caso 2 è uno schema di approssimazione, e nel caso 3, si fissa arbitrariamente il numero di nodi e si definisce, a questo punto, l'approssimazione di f tramite un qualche polinomio di Lagrange finito; in questi ultimi due casi, si eredita un certo errore di estrapolazione, che nel secondo caso converge a zero al divergere di $n(\underline{i})$; inoltre nel caso 3 non si ha unicità nell'estensione, ma si decide in favore della più semplice, cioè la polinomiale. Infatti, quando $k=1$ e quando f ha $n+1$ derivate, l'errore si può scrivere come

$$\sup_u \left| f(u) - \tilde{f}_U^0(u) \right| \leq \varphi \left(\frac{\max_v |f^{(n+1)}(v)|}{(n+1)!} \prod_{i=0}^n |v - s_i| \right),$$

quando f è di classe $C^{n+1}(S_0)$. Ciò indica che in questo caso, l'errore tende a zero quando f diventa "liscia" (ovvero di classe C^∞). Il modello può ora essere definito tramite la seguente formulazione:

$$y = f(\underline{v}) + \sigma E(Z) + \varepsilon,$$

con $f(\underline{v})$ che vale rispettivamente f_U^0 quando $\underline{v} = \underline{u}$, e $f(\underline{s})$ nel caso in cui $\underline{v} = \underline{s}$.

Capitolo 3

Stima della vita attesa

In questa sezione sarà stimato f_U^0 nel dominio usuale (non sottoposto a stress); tuttavia è necessario, in primo luogo, stimare f su S_0 . Si supponga, pertanto, di avere a disposizione vari campioni $\underline{Y}(i)$, dove $\underline{Y}(k)$ e $\underline{Y}(j)$ sono vettori indipendenti per $k \neq j$, e:

$$\underline{Y}(i) = X(\underline{i}) \begin{pmatrix} f(\underline{s}(i)) \\ \sigma \end{pmatrix} + \varepsilon(i) \quad \text{per qualche } \underline{i}$$

con

$$X(\underline{i}) = \begin{bmatrix} 1 & E(Z_1(n(\underline{i}))) \\ \mathbf{M} & \mathbf{M} \\ 1 & E(Z_{n(\underline{i})}(n(\underline{i}))) \end{bmatrix}, \quad \underline{\varepsilon}(\underline{i}) = \begin{bmatrix} \varepsilon_1(\underline{i}) \\ \mathbf{M} \\ \varepsilon_{n(\underline{i})}(\underline{i}) \end{bmatrix}$$

A questo punto si denoti $\Omega^{-1}(\underline{i}) = (\text{cov}(y_i(\underline{i}), y_j(\underline{i})))_{i,j}^{-1}$ che si assume esistere per qualsiasi \underline{i} . La stima ottenuta per mezzo del metodo dei minimi quadrati generalizzati, sotto le ipotesi classiche, produce:

$$\hat{T}_n = \hat{T}(n(\underline{i}), \underline{s}(\underline{i})) = [1 \quad E(Z)] [X'(\underline{i}) \Omega^{-1}(\underline{i}) X(\underline{i})]^{-1} X'(\underline{i}) \Omega^{-1}(\underline{i}) \underline{y}(\underline{i}).$$

\hat{T}_n è una stima ottimale consistente di $f(\underline{s}(\underline{i}) + \sigma E(Z))$, dato che lo stimatore sopra esposto rappresenta la stima non distorta dei minimi quadrati generalizzati per $f(\underline{s}(\underline{i}) + \sigma E(Z))$.

Una stima naturale per l'estensione della funzione nel dominio (non sottoposto a stress) U è:

$$\hat{T}(\underline{u}, n) = \sum_{\underline{i}} L_{\underline{u}}(\underline{s}(\underline{i})) \hat{T}(\underline{s}(\underline{i}), n(\underline{i})).$$

Questa stima gode delle seguenti proprietà:

- Ha varianza minima (rispetto alla scelta possibile dell'insieme degli stimatori) tra le non distorte dell'estensione $f_U^0(\underline{u}) + \sigma E(Z)$ quando f_U^0 è del tipo $f(\underline{u})$ o $\tilde{f}_U(\underline{u})$, ovvero quando tale stimatore è preso in considerazione per stimare un polinomio con grado fissato.

- Ogni volta che f è una funzione quasi-analitica, la distorsione non è nulla ma tende a zero quando $n \rightarrow \infty$, pertanto $\hat{T}(\underline{u}, n)$ è una stima consistente di $\tilde{f}_v(\underline{u})$.

La stima $\hat{T}(\underline{u}, n)$ gode, pertanto, di alcune proprietà di ottimalità, diverse, in conformità al tipo di estensione nel dominio usuale.

Si considerano ora le proprietà del disegno di esperimento sotto le quali l'esperimento è stato eseguito; questo disegno è dato da:

$$\Pi = \{(n(\underline{i}), \underline{s}(\underline{i})); \underline{i} \in L\}$$

dove $n(\underline{i})$ è il numero di osservazioni al nodo $\underline{s}(\underline{i})$. L'insieme Π è un disegno fattoriale completo rispetto alla struttura degli stress definita dalla configurazione \underline{i} . Si vuole ora caratterizzare un disegno ottimo in Π , per un qualche ragionevole criterio. Si considera ciò nella prossima capitolo.

Capitolo 4

Disegno ottimo, scelta del criterio

Nel caso in cui si prenda in considerazione una funzione f che non sia di tipo polinomiale ma, invece, una quasi-analitica, e considerata f_U^0 la sua approssimazione di Lagrange con grado \underline{h} , si potrà scrivere l'errore di approssimazione nella seguente forma

$$e_{\underline{h}} = \sup_{\underline{u}} \left| f(\underline{u}) - f_U^0(\underline{u}) \right|$$

che non è nullo. Anche nel caso in cui f sia un polinomio con grado non noto, tale errore non è nullo se il grado dell'approssimazione di Lagrange è differente dal grado di f fissato.

Per \underline{h} fissato è abbastanza naturale considerare un criterio per la scelta del disegno ottimale che sia in funzione dell'MSE. Per esempio, quando f è un polinomio con grado noto, la distorsione è nulla e il criterio sarà la varianza.

In un primo momento si cercherà Π^* , il disegno ottimo quando la distorsione è nulla. Alla fine della sezione si tratterà anche il caso distorto.

4.1 Disegno ottimale nel caso non distorto

Si supponga che f_U^0 sia $f(\underline{u})$ o \tilde{f}_U . In questo caso il criterio adottato è quello della varianza. Si calcola pertanto la varianza di $\hat{T}(\underline{u}, n)$. Dato che $\underline{Y}(\underline{i})$ è indipendente da $\underline{Y}(\underline{j})$, per ogni $\underline{i} \neq \underline{j}$, si ottiene:

$$Var(\hat{T}(\underline{u}, n)) = \sum_i (L_{\underline{u}}(\underline{y}(\underline{i})))^2 Var(\hat{T}(n(\underline{i}), \underline{s}(\underline{i}))) = \sum_i (L_{\underline{u}}(\underline{s}(\underline{i})))^2 g(\sigma^2, \Omega^{-1}(\underline{i}), X'(\underline{i}))$$

dove $g = g(\sigma^2, \Omega^{-1}(\underline{i}), X'(\underline{i})) =$

(5)

$$= \sigma^2 \frac{\sum_{m=1}^{n(\underline{i})} \sum_{u=1}^{n(\underline{i})} E(Z_m(n(\underline{i}))) E(Z_u(n(\underline{i}))) \omega_{m,u} - 2E(Z) \sum_{m,u}^{n(\underline{i})} E(Z_m(n(\underline{i}))) \omega_{m,u} + E^2(Z) \Gamma}{\left(\sum_{m,u} \omega_{m,u} \sum_{m,u} \omega_{m,u} E(Z_m(n(\underline{i}))) E(Z_u(n(\underline{i}))) - \left(\sum_{m,u} E(Z_u(n(\underline{i}))) \omega_{m,u} \right)^2 \right)^2}$$

nella quale $\Gamma = \sum_{m,u}^{n(\underline{i})} \omega_{m,u}$ e $\Omega^{-1}(\underline{i}) = \begin{pmatrix} \omega_{1,1} & \Lambda & \omega_{1,n(\underline{i})} \\ M & O & M \\ \omega_{n(\underline{i}),1} & \Lambda & \omega_{n(\underline{i}),n(\underline{i})} \end{pmatrix}$

Si noti che $Var(T_n(\underline{u}, \underline{s}(i))) \rightarrow 0$ per $n(\underline{i}) \rightarrow \infty$, dovuto al fatto che lo stimatore dei minimi quadrati generalizzati è consistente (Lai, Robbins e Wei, 1979) sotto condizioni appropriate.

Il disegno ottimale risulta dalla risoluzione del seguente problema di ottimizzazione:

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \min_{\{n(i) \in X_{j=1}^k \{0, \dots, l_j\}, \underline{s}(i) \in S_0\}} \sum_i (L_{\underline{u}}(\underline{s}(i)))^2 g(\sigma^2, \Omega^{-1}(i), X'(i)) \\ \underline{u} \in U \\ \sum_i n(i) = n \end{array} \right.$$

Benché il problema abbia generalmente una soluzione numerica, in alcuni casi pratici è possibile ottenere una soluzione esplicita e analitica.

Di seguito si propongono cinque casi differenti.

1. Si consideri $E(Z)=0$ e la distribuzione di Y simmetrica attorno a $E_y(Y)$. In questo caso la formula (5) diventa:

$$(7) \quad g_1 = \frac{\sigma^2}{\sum_{k=1}^{n(i)} \sum_{l=1}^{n(i)} \omega_{kl}}$$

La dimostrazione di questa formula è data da Lloyd (1952). La formula (7) può essere semplificata come di seguito:

$$g_2 = \frac{\sigma^2}{n(\underline{i})}$$

(8)

Una condizione necessaria e sufficiente affinché g_1 si possa semplificare come mostrato nella formula (8) è che valga:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ M \\ 1 \end{pmatrix}' \times \Omega(\underline{i}) = \begin{pmatrix} 1 \\ M \\ 1 \end{pmatrix}' \quad (\text{si veda anche Downton,}$$

1953)

2. Si consideri $E(Z)=0$ e la distribuzione di Y asimmetrica attorno a $E_v(Y)$. Downton (1953) dimostra che una condizione necessaria e sufficiente per la (8) è:

$$\Omega(\underline{i}) \begin{pmatrix} 1 \\ M \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ M \\ 1 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} E(Z_1(n(\underline{i}))) \\ M \\ E(Z_{n(\underline{i})}(n(\underline{i}))) \end{pmatrix}$$

Si presti attenzione al fatto che, il modello che sostiene i dati ha, di nuovo, la seguente forma:

$$Y_l(n(\underline{i})) = f(\underline{s}(\underline{i})) + \sigma E(Z_l(n(\underline{i}))) + \varepsilon_l(n(\underline{i}))$$

dato che $E(Z)=0$ non implica che $E(Z_l(n(\underline{i})))=0$

3. Si consideri il modello:

$$Y = X\theta + \varepsilon$$

Si ponga che h_i sia l' i -esimo elemento della diagonale di $H=X(X'X)^{-1}X'$ e p il numero di coordinate di θ . Si denoti $\hat{\theta}_n$ la stima di θ . Si assuma ora che le variabili casuali ε_i siano i.i.d., con media nulla e varianza finita e che, inoltre, $\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{1 \leq i \leq n} h_i = 0$. Questa condizione è necessaria e sufficiente per $\hat{\theta}_n \rightarrow \theta$ in media, quando $n \rightarrow \infty$. Sotto le medesime condizioni, si ha anche che:

$$(9) \quad (X'X)^{1/2}(\hat{\theta}_n - \theta) \xrightarrow{d} N(0, \sigma^2 I_p)$$

quando $n \rightarrow \infty$, fornisce i mezzi per l'analisi asintotica. Questi risultati possono ora essere applicati al presente contesto definendo il modello:

$$\Omega^{-1/2}(\underline{i})Y(\underline{i}) = \Omega^{-1/2}(\underline{i}) \begin{pmatrix} 1 & E(Z_1(n(\underline{i}))) \\ \mathbf{M} & \mathbf{M} \\ 1 & E(Z_{n(\underline{i})}(n(\underline{i}))) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(\underline{s}(\underline{i})) \\ \sigma \end{pmatrix} + \Omega^{-1/2}(\underline{i}) \begin{pmatrix} \varepsilon_1(n(\underline{i})) \\ \mathbf{M} \\ \varepsilon_{n(\underline{i})}(n(\underline{i})) \end{pmatrix}$$

Il numero di osservazioni al nodo \underline{i} (denotato $n(\underline{i})$) va a infinito per qualsiasi configurazione \underline{i} .

È conveniente assumere, a questo punto, che gli $\varepsilon_j(n(\underline{i}))$ sono indipendenti, e ciò permette di usare la formula (9) per i nostri propositi.

Si ha pertanto:

$$H(\underline{i}) = \left[\Omega^{-1/2}(\underline{i}) \begin{pmatrix} 1 & E(Z_1(n(\underline{i}))) \\ \mathbf{M} & \mathbf{M} \\ 1 & E(Z_{n(\underline{i})}(n(\underline{i}))) \end{pmatrix} \right]$$

$$\cdot \left[\begin{pmatrix} 1 & \Lambda & 1 \\ E(Z_1(n(\underline{i}))) & \Lambda & E(Z_{n(\underline{i})}(n(\underline{i}))) \end{pmatrix} \cdot \Omega^{-1}(\underline{i}) \begin{pmatrix} 1 & E(Z_1(n(\underline{i}))) \\ \mathbf{M} & \mathbf{M} \\ 1 & E(Z_{n(\underline{i})}(n(\underline{i}))) \end{pmatrix} \right]^{-1} \cdot$$

$$\left[\Omega^{-1/2}(\underline{i}) \begin{pmatrix} 1 & E(Z_1(n(\underline{i}))) \\ \mathbf{M} & \mathbf{M} \\ 1 & E(Z_{n(\underline{i})}(n(\underline{i}))) \end{pmatrix} \right]'$$

Ne segue che la (5) diventa:

$$g_3 = \frac{1 + E^2(Z)}{n(\underline{i})} \sigma^2$$

(10)

Questa condizione è verificata ogni volta che lo stimatore dei minimi quadrati ordinari soddisfa le condizioni minimali per l'ottenimento di buone proprietà asintotiche; questo è, pertanto, un caso importante nella pratica, dato che generalmente si assume la convergenza dello stimatore dei minimi quadrati ordinari.

4. In un suo lavoro *Gupta* propone di ignorare la correlazione e l'eteroschedasticità presente nei campioni ordinati, imponendo $\Omega(\underline{i}) = I(\underline{i})$. La motivazione per l'adozione di tale assunto è dovuta al fatto che (a parte la sua semplicità), se la distribuzione è gaussiana, lo stimatore è asintoticamente efficiente; ad esempio, se $n=10$ e $\Omega(\underline{i}) = I_{n(\underline{i})}$, si ottiene uno

stimatore con una efficienza relativa del 91,9% nel caso gaussiano.

5. Se si assume che:

$$\frac{\sum_{h=1}^{n(i)} \sum_{l=1}^{n(i)} \omega_{h,l} Z_l(n(i))}{\sum_{h=1}^{n(i)} \sum_{l=1}^{n(i)} \omega_{h,l}} \rightarrow E(Z) \quad \text{quando } n(\underline{i}) \rightarrow \infty,$$

allora da

$$\bar{Y}(\underline{i}) = f(\underline{s}(\underline{i})) + \hat{\sigma} \frac{\sum_{h=1}^{n(i)} \sum_{l=1}^{n(i)} \omega_{h,l} Z_l(n(i))}{\sum_{h=1}^{n(i)} \sum_{l=1}^{n(i)} \omega_{h,l}}$$

(11)

si ottiene

$$\lim_{n(i) \rightarrow \infty} \frac{Var(\hat{T}(\underline{u}, n))}{Var(\bar{Y}(\underline{i}))} = 1 \quad \text{dove}$$

$$\bar{Y}(\underline{i}) = \frac{\sum_{h=1}^{n(i)} \sum_{l=1}^{n(i)} \omega_{h,l} Y_l(\underline{i})}{\sum_{h=1}^{n(i)} \sum_{l=1}^{n(i)} \omega_{h,l}}$$

e

$$Var(\bar{Y}(\underline{i})) = \frac{\sigma^2}{\sum_{h=1}^{n(i)} \sum_{l=1}^{n(i)} \omega_{h,l}}$$

Nelle cinque precedenti situazioni, la formula (5) può essere sostituita dalla formula più generale:

$$g_4 = \frac{\sigma^2}{an(\underline{i}) + b} (1 + o(1))$$

(12)

dove a e b sono costanti dipendenti dalla (nota) distribuzione della variabile casuale Z . Naturalmente, per gli ultimi tre casi, si ottiene $a=1$, $b=0$. L'equazione (12) può essere usata dato che, in ogni caso precedente, la varianza è una funzione decrescente di $n(\underline{i})$. Nel caso (1) e (2), $o(1)$ è identicamente pari a zero per ogni $n(\underline{i})$.

Nella (5) si cerca una soluzione che ottimizzi il problema (6) quando:

$$g = \frac{\sigma^2}{an(\underline{i})+b}$$

(13)

L'assunzione appena scritta vale in un ampio numero di casi, inclusi i più comuni usati nell'ambito del controllo della qualità (*Normale*, *Gumbel* e *Logistico*), si veda *Stephens* per i calcoli di $1/(\sum_{h=1,l=1}^{n(i)} \omega_{h,l})$. L'idea è la seguente:

Per una qualche scelta di $\underline{s}(\underline{i})$, si calcola $n^*(\underline{i})$, il numero di repliche che minimizza la varianza di $T_n(\underline{u}, \underline{s}(\underline{i}))$. Il valore di $n^*(\underline{i})$ dipende da $\underline{s}(\underline{i})$. La procedura di minimizzazione finisce con la scelta ottimale di $\underline{s}(\underline{i})$ attraverso un successivo passo di minimizzazione.

Questa procedura di ottimizzazione a due stadi è una conseguenza del principio generale, di seguito spiegato, di ottimizzazione.

Si può infatti osservare che se $\underline{x} \in X$, $\underline{y} \in Y = \prod_{\alpha} Y_{\alpha}$ e $f(\underline{x}, \underline{y})$ è una funzione definita su $X \times Y$, allora

$$\begin{aligned} \inf \{f(\underline{x}, \underline{y}): \underline{x} \in X, \underline{y} \in Y\} &= \inf_{\alpha} \{ \inf \{f(\underline{x}, \underline{y}): \underline{x} \in X, \underline{y} \in Y_{\alpha}\} \} = \\ &= \inf_{\alpha} \{f(\underline{x}_{\alpha}, \underline{y}_{\alpha})\} \end{aligned}$$

Nella formula precedente l'*inf* è in effetti un minimo quando f è una funzione continua.

Come primo passo del procedimento si calcola $n^*(\underline{i})$ in funzione di $\underline{s}(\underline{i})$, adottando le usuali tecniche di ottimizzazione, e assumendo che $n(\underline{i})$ sia un vettore a componenti reali.

Si deve risolvere, a tal proposito, il seguente sistema:

$$(14) \left\{ \begin{array}{l} \min_{\{n(\underline{i}) \in \mathbb{R}^k, n_i \in \{0, \dots, l_j\}\}} \sum_{i=0}^l (L_u(\underline{s}(\underline{i})))^2 g(\sigma^2, \Omega^{-1}(\underline{i}), X(\underline{i})) \\ \sum_{i=0}^l n(\underline{i}) = n \end{array} \right.$$

considerando $g(\sigma^2, \Omega^{-1}(\underline{i}), X(\underline{i})) = \sigma^2 / [an(\underline{i}) + b]$ e applicando le condizioni di *Karush-Kuhn-Tucker* o quelle di *Bazaraa-Sherali-Shetty*, si ottiene

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial n(\underline{i}^*)} \left[\sum_{i=0}^l \frac{(L_u(\underline{s}(\underline{i})))^2}{an(\underline{i}) + b} + \lambda \left(\sum_{i=0}^l n(\underline{i}) - n \right) \right] = 0 \\ \lambda \left(\sum_{i=0}^l n(\underline{i}) - n \right) = 0 \\ \lambda \geq 0 \end{array} \right.$$

A questo punto si isolano le configurazioni \underline{i}^* per quelli che saranno gli scopi successivi:

$$\frac{\partial}{\partial n(\underline{i}^*)} \left\{ \sum_{i=0, i \neq i^*}^l \frac{(L_u(\underline{s}(i)))^2}{an(i)+b} + \frac{(L_u(\underline{s}(i^*)))^2}{an(i^*)+b} + \lambda \left(\sum_{i=0, i \neq i^*}^l n(i) + n(i^*) - n \right) \right\} = 0$$

Svolgendo l'operazione di derivata si ottiene, di conseguenza:

$$\lambda = \left(\frac{L_u(\underline{s}(i^*))}{an(i^*)+b} \right)^2 a \quad \text{e} \quad n(i^*) = \frac{1}{a} \left[\frac{|L_u(\underline{s}(i^*))| \sqrt{a}}{\sqrt{\lambda}} - b \right]$$

Adesso si può sommare rispetto a \underline{i}^* per ottenere la numerosità totale come di seguito

$$n = \sum_{i^*=0}^l n(i^*) = \frac{1}{a} \left[\frac{\sqrt{a} \sum_{i^*} |L_u(\underline{s}(i^*))|}{\sqrt{\lambda}} - \sum_{i^*} b \right] = \frac{1}{a} \left[\frac{\sum_{i^*} |L_u(\underline{s}(i^*))|}{\sqrt{\lambda}} \sqrt{a} - b \prod_{j=1}^k (l_j + 1) \right]$$

A questo punto si esplicita il valore di λ tramite dei semplici passaggi algebrici, ottenendo:

$$\sqrt{\lambda} = \frac{1}{na + b \prod_{j=1}^k (l_j + 1)} \sum_{i=0}^l |L_u(\underline{s}(i))| \sqrt{a} ;$$

si osservi però, come in precedenza si fosse trovato per λ un valore diverso, pertanto uguagliando le due quantità si ottiene:

$$n^*(i) = \frac{1}{a} \left[\frac{|L_u(\underline{s}(i^*))| an + b \prod_{j=1}^k (l_j + 1)}{\sum_{i=0}^l |L_u(\underline{s}(i))|} - b \right]$$

Chiaramente $n^*(\underline{i})$ dipende da $\underline{s}(\underline{i})$; si sostituisce $n^*(\underline{i})$ nella formula della varianza

$$\sum_{i=0}^l (L_{\underline{u}}(\underline{s}(i)))^2 \frac{\sigma^2}{an(i)+b} \quad \text{per}$$

ottenere:

$$Var(\hat{T}_n(\underline{u}, \underline{s}(i))) = \frac{\sigma^2}{an+b \left(\prod_{j=1}^k (l_j + 1) \right)} \left(\sum_{i=0}^l |L_{\underline{u}}(\underline{s}(i))|^2 \right)$$

Ottimizzando rispetto a $\underline{s}(\underline{i})$ sotto il vincolo che $\underline{u} \in U$, si produce:

$$\min_{\underline{u} < \underline{s}(i)} \sum_{i=0}^l |L_{\underline{u}}(\underline{s}(i))|$$

Il problema soprastante è equivalente ai k problemi in una variabile scritti di seguito,

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{s_j} \left(i_j \sum_{i_j=0}^{p_j} |L_{u_j}(s_j(i_j))| \right), \quad j=1, \\ u_j < v_j(0) < \dots < v_j(l_j) \end{array} \right. , \quad 2, \dots, k$$

dato

che

$$\begin{aligned} \sum_i |L_{\underline{u}}(\underline{s}(i))| &= \sum_{i_1}^{p_1} \Lambda \sum_{i_k}^{p_k} \prod_{j=1}^k \prod_{i_j=0, i_j \neq i_j}^{l_j} \left| \frac{u_j - s_j(i_j)}{s_j(i_j) - s_j(i_j')} \right| = \\ &= \sum_{i_1}^{p_1} |L_{u_1}(s(i_1))| \sum_{i_2}^{p_2} |L_{u_2}(s(i_2))| \Lambda \sum_{i_k}^{p_k} |L_{u_k}(s(i_k))| \end{aligned}$$

nella quale

$$L_{u_j}(s(i_j)) = \prod_{i_j=0, i_j \neq i_j'} \frac{u_j - s_j(i_j')}{s_j(i_j) - s_j(i_j')}.$$

Prendendo in considerazione uno solo dei fattori del prodotto precedente,

$$(15) \quad P(s_j) = \sum_{i_j=0}^{p_j} |L_{u_j}(s(i_j))| = \sum_{i_j=0}^{p_j} (-1)^{i_j} L_{u_j}(s(i_j))$$

si ha che la soluzione è abbastanza semplice, infatti, ricordando che $s_j \in [\underline{s}_j, \bar{s}_j]$ con $\underline{s}_j = \min_{l=0, \dots, l_j} v_j(l)$ e $\bar{s}_j = \max_{l=0, \dots, l_j} v_j(l)$, si riscalda s_j su $[-1, 1]$ tramite:

$$s_j = \frac{\bar{s}_j + \underline{s}_j}{2} + \frac{\bar{s}_j - \underline{s}_j}{2} t_j;$$

in questo modo sono appena stati definiti i livelli di stress riscaldati (t_j) su $[-1, 1]$. Si può, pertanto, riscrivere l'equazione (15) in termini di t_j nel seguente modo:

$$P(t_j) = \sum_{i_j=0}^{p_j} \prod_{i_j \neq i_j', i_j'=0}^{p_j} \left| \frac{u_j - s_j(i_j')}{s_j(i_j) - s_j(i_j')} \right| = \sum_{i_j=0}^{p_j} (-1)^{i_j} \prod_{i_j \neq i_j', i_j'=0}^{p_j} \frac{t_j - t_j(i_j')}{t_j(i_j) - t_j(i_j')}$$

Questo polinomio passa attraverso i punti $(t_j(i_j), (-1)^{i_j})$, con $t_j(i_j)$ definito come l'immagine di $v_j(i_j)$ dalla precedente trasformazione. Il grado di $P(t_j)$ non è più elevato di p_j e soddisfa l'equazione $P(t_j(i_j)) = (-1)^{i_j}$, con $i_j=0, \dots, p_j$. $dP(t_j)/dt_j$ calcolata in

$t_j(i_j)$ è pari a zero per $i_j=1, \dots, p_j-1$. Ciò detto si può, pertanto, scrivere la seguente equazione differenziale,

$$1 - P^2(t_j) = \left(\frac{1}{p_j} (1 - t_j) \frac{dP(t_j)}{dt_j} \right)^2$$

che ha la seguente soluzione generale: $P(t_j) = \cos(p_j \arccos(t_j + h\pi))$, con $h \in \mathbb{N}$.

Inoltre da $-1 = t_j(0) < t_j(1) < \dots < t_j(l_j) = 1$ si deduce che $h=0$. Questo significa che il problema originale (14) ha la seguente soluzione:

$$s_j^*(i_j) = \frac{\bar{v}_j + \underline{v}_j}{2} + \frac{\bar{v}_j - \underline{v}_j}{2} \cos\left(\frac{p_j - i_j}{p_j} \pi\right), \quad i_j = 0, \dots, p_j, \quad j = 1, \dots, k$$

In questo modo si sono determinati i livelli di stress ottimizzando la varianza della durata di vita nelle esecuzioni accelerate. Il disegno ottimo è perciò:

$$\left\{ \left([n^*(i)]_j, s^*(i) \right) : i \in \prod_{j=1}^k \{0, \dots, l_j\} \right\}$$

dove $[\cdot]$ è la parte intera dell'argomento. Una tecnica di ottimizzazione simile può essere trovata in Hoel e Levine (1964).

4.2 Disegno ottimale nel caso distorto

Si consideri ora il caso in cui $f_U^0(\underline{u}) = \tilde{f}_U(\underline{u})$ (ovvero il caso non polinomiale). Il disegno ottimale è:

$$\Pi^* = \arg \min \{ \text{Var} [\hat{T}(\underline{u}, \underline{s}(i))] \}$$

Questo disegno non è ottimale nel senso dell'MSE, dato che \hat{T} è una stima distorta di $f_U^0(\underline{u})$. Ad ogni modo, si noti che Π^* minimizza l'errore massimale dovuto all'estrapolazione. Se si considera infatti:

$$e_{\underline{h}}(\underline{s}(i)) = f(\underline{s}(i)) - P_{\underline{h}}(\underline{s}(i)), \text{ con } \{P_{\underline{h}} : \underline{h} \in N^k\}$$

La famiglia $(P_{\underline{h}})$ converge uniformemente a f con grado di convergenza $\prod_{i=1}^k M_i / \rho_i^{h_i}$. In questo modo si ottiene:

$$\sup_{\underline{u}} \left| f(\underline{u}) - \sum_i L_{\underline{u}}(\underline{s}(i)) f(\underline{s}(i)) \right| \leq \left(\sup_{\underline{u}} \sum_i |L_{\underline{u}}(\underline{s}(i))| + 1 \right) \prod_{i=1}^k \frac{M_i}{\rho_i^{h_i}}$$

Da ciò si può notare che il termine tra parentesi, è minimizzato dalla precedente scelta di Π^* .

Si è dimostrato in questa prima sezione come sia stato possibile ricavare dei disegni ottimali partendo sia da stimatori distorti (nel caso in cui f fosse una funzione *quasi-analitica*), che da stimatori corretti (funzioni polinomiali).

Nella prossima sezione sarà presentata un'evoluzione dell'approccio appena visto, che sviluppa un'altra tecnica di estrapolazione e, pertanto, uno stimatore diverso considerando l'importante caso delle *funzioni analitiche*.

Sezione 2

Capitolo 5

Ottimalità e distorsione di alcuni disegni di interpolazione e di estrapolazione

Nella presente sezione si presenteranno, in una dimensione, disegni di estrapolazione, via interpolazione, tramite i quali sarà possibile controllare la distorsione, per mezzo della stima di un limite superiore per la distorsione stessa. La stima di un qualsiasi valore estrapolato è ottenuta attraverso una procedura a due stadi:

1. Al primo stadio si fornisce una stima dei valori interpolati;
2. Al secondo stadio si usa uno sviluppo di Taylor "attorno" ad un punto di S_0 ..

1.1 Alcuni richiami bibliografici

La letteratura sul disegno di estrapolazione è strettamente collegata a una classe di approssimazioni, e a problemi di stima nel campo della regressione, dell'interpolazione e della procedura di estrapolazione, il cui studio è iniziato alla fine degli anni cinquanta. Il classico ambiente in cui si lavora è il seguente:

Si consideri in primo luogo, una classe di funzioni $F = \{f_0, \dots, f_l\}$ a valori reali definita su tutto R ; tutte le funzioni in F sono continue e linearmente indipendenti. Si assume, inoltre, che l'equazione $c_0 f_0(x) + \dots + c_l f_l(x) = 0$ abbia al massimo l soluzioni in un fissato intervallo limitato e chiuso S , per una data scelta di c_i , supponendo che questi non siano tutti nulli. Una tale famiglia F è detta "Sistema di Tchebycheff".

Il classico esempio più comunemente usato nelle procedure di approssimazione e di stima è il seguente:

F è la classe di funzioni $f_i(x) = x^i$, $0 \leq i \leq l$, definita su un qualche intervallo $[a, b]$; si rimanda a [KS66], per uno studio dettagliato di questi sistemi di funzioni e loro applicazioni. Il comune paradigma di interpolazione/estrapolazione e metodi collegati può essere ora enunciato.

Per una serie di punti s_0, \dots, s_l in S_0 sono date le osservazioni di una qualche variabile casuale Y , la cui distribuzione dipende dai valori di s_j tramite le funzioni in F . Più esplicitamente, per $j = 0, \dots, l$ si osservano n_j realizzazioni di una variabile casuale $Y(s_j)$ (ovvero il campione $Y_1(s_j), \dots, Y_{n_j}(s_j)$), identicamente distribuite, e

$$Y(s_j) = \sum \theta_i f_i(s_j) + \varepsilon(s_j)$$

(1)

dove $\varepsilon(s_j)$ è una variabile casuale centrata con varianza σ^2 (conosciuta o meno) indipendentemente da s_j e i vettori casuali $(Y_1(s_j), \dots, Y_{n_j}(s_j))'$, $j = 0, \dots, l$, sono anch'essi indipendenti. Nell'equazione (1), il parametro $\theta = (\theta_0, \dots, \theta_l)'$ è sconosciuto. Ovviamente la variabile casuale $Y(s)$ può essere definita per qualsiasi valore di $s \in R$. Questo schema di osservazione definisce quello a cui frequentemente ci si riferisce come al disegno, ovvero $\Pi = (s_0, \dots, s_l, n_0, \dots, n_l)$. La classica stima, ottenuta con il metodo dei minimi quadrati, $\hat{\theta}$ del parametro θ è non distorta con varianza minima:

$$\text{var } \hat{\theta} = \sigma^2 (M(\Pi))^{-1}$$

$$\text{con } M(\Pi) = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^l f_0^2(s_i) n_i & \Lambda & \sum_{i=0}^l f_0(s_i) f_l(s_i) n_i \\ & M & O \\ \sum_{i=0}^l f_i(s_i) f_0(s_i) n_i & \Lambda & \sum_{i=0}^l f_l^2(s_i) n_i \end{pmatrix}$$

Tramite la formula della varianza soprastante si può notare come la precisione della stima sia chiaramente relazionata alle scelte del disegno. Si può essere interessati anche alla stima di una qualche combinazione lineare dei θ_i , ovvero $a'\theta$, dove a è un vettore in R^{l+1} e vale:

$$\text{var}(a'\theta) = a(M(D))^{-1}a'$$

Nella letteratura corrente, e anche nel presente lavoro, si è interessati alla definizione di un disegno Π su S_0 ottenuto rispetto a una qualche funzione della $\text{var}(a'\hat{\theta})$. In corrispondenza a diverse scelte del vettore a , si ottengono vari problemi trattati da altrettanti autori. [Elf52], [Che53] e [KW59].

Il punto di partenza per la definizione del disegno ottimale si trova qui di seguito: Quando $F = \{1, x, x^2, \dots, x^l\}$ (con l noto), e quando si è interessati al disegno ottimo pertinente allo stimatore di valori estrapolati di f fuori da S_0 sotto il modello (1), allora l'ottimalità va ricercata quando i nodi (s_0, \dots, s_k) formano un cosiddetto *insieme dei punti di Tchebycheff* in S_0 . Questi sono definiti su un qualche intervallo $[\underline{s}, \bar{s}]$ da:

$$\tilde{S} = \left\{ s_i = \frac{\underline{s} + \bar{s}}{2} - \frac{\bar{s} - \underline{s}}{2} \cos \frac{l-i}{l} \pi; i = 0, \dots, l \right\}$$

Il numero di osservazioni della variabile casuale $Y(i)$ è n_i , il quale può essere determinato, sotto il vincolo $n_0 + \dots + n_l = n$, tramite una procedura di ottimizzazione. Questo risultato essenziale è dovuto a Hoel e Levine. La loro stima è ottenuta attraverso uno schema di ottimizzazione di Lagrange. Il polinomio di Lagrange su R si definisce come

$$L_{s_k}(u) = \prod_{i=0, i \neq k}^l \frac{u - s_i}{s_k - s_i}$$

(2)

e si denota con $\hat{f}(s_k)$ la stima dei minimi quadrati di $f(s_k)$. Il polinomio di estrapolazione di *Lagrange* al punto u (ossia l'estensione al dominio usuale U) è definito da:

$$L_l(f(u)) = \sum_{k=0}^l f(s_k) L_{s_k}(u)$$

(3)

E la stima di $f(u)$ da:

$$L_l(\hat{f}(u)) = \sum_{k=0}^l \hat{f}(s_k) L_{s_k}(u)$$

(4)

Quando f è polinomiale e le osservazioni $Y_1(s_j), \dots, Y_{nj}(s_j)$ sono i.i.d. per ogni possibile j , allora $\hat{f}(s_k) = \bar{Y}(s_k)$, è la media empirica delle $Y(s_k)$ osservate.

In un lavoro successivo, *Hoel* estende questi risultati per l'*estrapolazione interna*, stimando $f(u)$ quando u viene da un qualche sottoinsieme non osservabile di estrapolazioni di S_0 ; in questo viene considerato anche il caso bidimensionale.

In un articolo fondamentale *Kiefer* e *Wolfowitz* considerano il caso in cui la classe F è un *sistema generale di funzioni di Tchebycheff*. Questi due studiosi generalizzano il risultato precedente e caratterizzano tutte le combinazioni lineari di parametri $\theta_0, \dots, \theta_l$ in (1) per cui la scelta di nodi ottimale coincide con l'*insieme dei punti di Tchebycheff* su S . Il problema di estrapolazione sembra essere in questo modo un caso particolare. Il lavoro

successivo mira a caratterizzare e a semplificare le loro tecniche e i loro risultati in vari casi particolari. Ci si riferirà a [Hoe66] e [Hoe81] per gli schemi di estrapolazione, e a [Stu68] per contesti più ampi.

Un problema collegato che sarà preso in considerazione in questa parte della presente tesi è quello dell'interpolazione di f in un qualche punto $s \in S_0$. Il disegno ottimale Π minimizza un qualche criterio. Alcuni lavori rilevanti, a questo proposito, sono [KW64], [Her71], [GK79], [Spr87a] e [Spr90].

In una serie di lavori *Spruill* considera il caso in cui f non è polinomiale, ma semplicemente una funzione nello spazio di Sobolev $W^{2,m}(S)$; in questo modo, le derivate $f^{(j)}$ di f sono in $L^2(S, dx)$ con $j = 0, \dots, m$ (posto che $f^{(0)} = f$). Questo giustifica la seguente affermazione: *Il disegno ottimo, nel caso in cui f sia un polinomio, è quasi ottimale nell'intera classe $W^{2,m}(S)$ in termini dell'MSE.* *Spruill* considera anche il problema dell'interpolazione nel caso in cui S_0 sia multidimensionale. *Celant* invece, applica lo schema di estrapolazione di *Lagrange* per determinare i disegni ottimi quando f è una funzione quasi-analitica multivariata. Come già specificato nella sezione precedente, quella delle quasi-analitiche è la classe più ampia di funzioni per cui lo schema di estrapolazione di *Lagrange* si sa convergere e avere una qualche proprietà di stabilità rispetto alla distribuzione dei nodi; proprietà conosciuta come *stabilità di Bernstein*. In questo caso, si assume un modello di localizzazione e scala e si considera il caso in cui le osservazioni $Y(s_j)$ non siano necessariamente i.i.d.; una situazione di questo tipo

si manifesta, negli *esperimenti accelerati*. Inoltre Broniatowski e Celant esaminano il controllo della distorsione nel caso in cui f sia una funzione *analitica*.

L'aspetto della robustezza delle procedure di interpolazione ed estrapolazione è stato considerato, per esempio, da [Hub75], [HS88], [DW96] e [Fan00].

1.2 Lo scopo di questa sezione

Nel seguito, il modello (1) sarà rimpiazzato dal modello più generale

$$Y(s) = f(s) + \varepsilon(s)$$

Dove f è una funzione analitica. Nuove assunzioni su questo modello saranno fissate più avanti, cosicché il modello considerato sarà di tipo localizzazione e scala; ciò è una caratteristica comune negli esperimenti accelerati.

Si considererà, inoltre, il problema di stimare f , o le sue derivate, "in modo soddisfacente" in un qualche punto dell'intervallo $S_0 = [\underline{s}, \bar{s}] \subset (a, b)$ (interpolazione) o in un qualche punto u interno all'intervallo $U = (a, \underline{s}]$ (estrapolazione esterna).

Il simbolo S_0 si riferisce, come già evidenziato nella precedente sezione, al dominio sottoposto a stress, mentre U , viceversa, al dominio non sottoposto a stress.

Sarà considerato per primo, il problema relativo all'interpolazione di f . Per fare ciò, si ha assoluto bisogno di stimare $f^{(j)}(s)$, le derivate di f di ordine j

in un determinato punto s . Il valore di $f^{(j)}(s)$ sarà approssimato da uno schema di *Lagrange* che, a sua volta, sarà stimato tramite il metodo dei minimi quadrati. Questo è il significato di quanto è stato precedentemente etichettato come "in modo soddisfacente"; naturalmente la precisione della stima aumenta con il grado dello schema di approssimazione. La stima è distorta quando f non è una funzione polinomiale con grado noto, come si è già constatato nella parte precedente, pertanto in questa sezione si cercherà di fornire un limite superiore per questa distorsione, così come una stima di tale limite superiore. Sarà discusso, inoltre, il disegno ottimo riguardante questo problema di stima, del quale la procedura qui presentata proporrà un cosiddetto *disegno "quasi-ottimale"*, nel senso dell'MSE; ciò è una conseguenza di alcuni argomenti sviluppati in [Spr87b], dato che le funzioni analitiche formano una sottoclasse propria di $W^{2,m}(a, b)$, così come le loro derivate.

Riferendosi allo schema d'interpolazione ottimale, è interessante notare che i suoi nodi, i quali sono dei punti di Tchebycheff, non dipendono dall'ordine delle derivate stimate, come dimostrato in [Spr87b]; per contro, invece, il numero di osservazioni da campionare dipende proprio dall'ordine di tali derivate oggetto di stima. Questo porta ad una discussione della procedura qui presentata per la stima dell'estrapolazione di $f^{(j)}$ in U ; tale stima si definisce attraverso un procedimento a due stadi:

1. Al primo stadio si determinano le stime di $f^{(j+k)}(s^*)$ in un determinato punto $s^* \in S_0$ in accordo con la precedente discussione;

2. Al secondo stadio il valore di $f^{(j)}(u)$ sarà per prima cosa approssimato tramite uno sviluppo di *Taylor* di ordine m attorno a s^* e successivamente stimato considerando le stime delle $f^{(j+k)}(s^*)$ in questo sviluppo.

La stima così trovata è distorta ma nel caso in cui f sia un polinomio con grado noto e fissato. Si giustificherà ora questa procedura e il corrispondente disegno ottimale.

Si richiami alla mente che, dato che f è analitica, è completamente specificata dal suo valore in s^* , così come i valori di tutte le sue derivate in quello stesso punto, che può essere scelto del tutto arbitrariamente in S_0 . Per di più gli schemi di interpolazione sono molto più facili da controllare, rispetto a quelli di tipo estrapolativo. Ciò porta a definire l'estrapolazione tramite un primo passo di interpolazione. Se i valori della $f^{(j+k)}(s^*)$ sono accuratamente stimati, allora lo sviluppo di Taylor porta anche a una buona stima di $f^{(j)}(u)$; oltretutto, più alto è il valore di m , migliore sarà anche la precisione della stima di $f^{(j)}(u)$, dato che il termine di resto dello sviluppo di Taylor diminuisce all'aumentare di m .

Considerando tutto quanto è stato detto finora, si può ora definire il disegno ottimale per l'estrapolazione. Il numero di osservazioni per ogni nodo è definito come quello che minimizza la varianza della stima di $f^{(j)}(u)$. Essendo i nodi in S_0 dei punti di Tchebycheff, si ha la certezza che il passo d'interpolazione sia valido per tutte le funzioni analitiche f (si veda a proposito [BdlVP50]). Si

fornisce anche un limite superiore per l'approssimazione della distorsione (vedere [Coa66]).

Dato che per ogni derivata $f^{(j+k)}(s^*)$ i nodi ottimali, rispetto al criterio della varianza, sono gli stessi, i punti di Tchebycheff forniscono una precisione ottimale uniforme delle stime. La numerosità di tali nodi è ottenuta tramite il controllo del limite superiore della distorsione, nel passo d'interpolazione. Il valore di m è definito, nel caso in cui f sia analitica e non un polinomio di grado noto, attraverso un limite superiore uniforme sulla distorsione della stima di $f^{(j)}(v)$ per $v \in (a, b)$.

Questi risultati coincidono anche con quelli di [HL64], [Spr84] e [Spr87b] nel caso in cui f sia una funzione polinomiale di grado noto e le osservazioni seguano un modello di regressione e siano i.i.d..

1.3 Descrizione del modello

In un contesto di affidabilità le osservazioni sono le durate di vita T_i e si assume che $Y_i = \log T_i$ soddisfi

$$Z_i = \frac{Y_i - f(v)}{\sigma}$$

(5)

dove Z_i è una variabile casuale assolutamente continua con distribuzione nota.

Questo modello è chiamato di localizzazione e scala e la funzione f sarà chiamata *funzione di affidabilità*. Il parametro di scala (positivo) σ non è noto. La funzione $f : (a, b) \rightarrow R$ è una funzione analitica. Si fissi

$$S = \{s \in (a, b) : a < \underline{s} \leq s \leq \bar{s} < b\}$$

dove \underline{s} è il livello di soglia che dipende solo dal sistema oggetto di studio. L'insieme

$$U = \{u \in (a, b) : u < \underline{s}\}$$

definisce i valori usuali dell'ambiente, cioè, i valori in cui opera normalmente il sistema. Le variabili Y_i sono osservate sotto le condizioni di stress dell'ambiente ($s \in S_0$). Si considerano $l+1$ livelli di stress di s , che saranno denotati con $\tilde{S} = [s_0, \dots, s_l]$. Per ognuno degli s_i si osserveranno n_i valori di Y , $0 \leq i \leq l$; queste osservazioni saranno poi denotate $Y(i) = (Y_{(1)}(i), \dots, Y_{(n_i)}(i))'$. Di solito si suppone che le componenti di $Y(i)$ siano in ordine crescente; ciò si verifica quando gli n_i sistemi oggetto dell'esperimento sono fatti eseguire simultaneamente. I risultati trovati si possono applicare anche quando le componenti di $Y(i)$ sono mutuamente indipendenti. Nel presente lavoro, si assume che tutti i sistemi oggetto di studio siano mutuamente indipendenti.

Capitolo 6

Limite degli errori nell'interpolazione e nella continuità delle funzioni in $C^{(m)}(a, b)$

In questo capitolo si considerano le proprietà dello schema di Lagrange per l'interpolazione di una qualche funzione arbitraria $f \in C^{(m)}(a, b)$ così come quelle dello sviluppo di Taylor per l'estrapolazione. Questi due metodi saranno usati successivamente su f , sia che questa si presenti come nella formula (5), sia come una sua derivata.

Si consideri $s^* \in S_0$. Le derivate $f^{(j)}(s^*)$ saranno approssimate tramite una procedura di Lagrange. Si sceglie che i punti in \tilde{S} assumano la forma dell'insieme dei punti di Tchebycheff (nodi), cioè:

$$\tilde{S} = \left\{ s_i = \frac{\bar{s} + s}{2} - \frac{\bar{s} - s}{2} \cos \frac{l-i}{l} \pi \right\} \quad \text{con } i=0, \dots, l.$$

L'interpolazione della funzione f , o delle sue derivate $f^{(j)}$, al punto $s^* \in S_0$ è ottenuta attraverso lo schema di Lagrange calcolato sui nodi. Il risultato del polinomio interpolante al punto s^* è perciò (considerando le derivate)

$$L_l(f^{(j)}(s^*)) = \sum_{k=0}^l f^{(j)}(s_k) L_{s_k}(s^*).$$

(6)

Il seguente risultato indica il grado di convergenza della suddetta approssimazione. Si denota $f^{(0)} = f$.

Per ogni $(r, j) \in N$ vale che

$$(7) \quad \lim_{l \rightarrow \infty} l^r \sup_{s \in S} |f^{(j)}(s) - L_l(f^{(j)}(s))| = 0.$$

Si veda [Coa66]. Si consideri $u \in U$ un valore per il quale si intende fornire una previsione $f(u)$. In [Cel02] $f(u)$ è approssimata tramite $L_l(f^{(0)}(u))$. Con questa scelta il seguente *limite uniforme* vale sull'intero intervallo (a, b) , seguendo [BdlVP50]

$$\sup_{v \in (a,b)} |f(v) - L_l(f^{(0)}(v))| \leq M \rho^l \left(1 + \sup_{v \in (a,b)} \sum_{k=0}^l |L_{s_k}(v)| \right)$$

dove $M \geq 0$ e $0 < \rho < 1$ dipendono rispettivamente dalla (sconosciuta) funzione f e da (a, b) . La formula (6), con $j = 0$ e s^* sostituito da u non può essere usata per calcolare un limite superiore per la distorsione del fattore estrapolazione, dato che M e ρ sono sconosciuti e non possono essere esplicitamente espressi in termini della funzione f .

Si introduce, invece, uno schema di estrapolazione basato su uno sviluppo di Taylor di f al punto u ; infatti il termine di resto può essere calcolato, dato che dipende esplicitamente da una qualche derivata di f . Si definisce pertanto:

$$T_{m,l}(u) = \sum_{i=0}^{m-1} \frac{L_l(f^{(i)}(s^*))}{i!} (u - s^*)$$

I seguenti risultati forniscono una giustificazione a questa procedura.

Proposizione 1

Ogni volta che $\min(l, m) \rightarrow \infty$, allora

$$f(u) - T_{m,l}(u) \rightarrow 0$$

uniformemente su (a, b) .

Si consideri ora l'errore causato dalla sostituzione della derivata $f^{(j)}$ con $L_l(f^{(j)})$ nell'approssimazione $T_{m,l}(u)$. Si supponga, che f appartenga alla classe $C^{(m)}(a, b)$. Nel caso in cui f sia analitica si fissa $m \geq 0$ arbitrariamente prestando attenzione alla proposizione sottostante dovuta a Coatsmélec.

Proposizione 2

Se $f^{(j)} \in C^{(m)}(S_0)$ e $l \geq 2m-3$, allora

$$\sup_{s \in S_0} \left| f^{(i)}(s) - \sum_{k=0}^l f^{(i)}(s_k) L_{s_k}(s) \right| \leq M_1$$

(8)

dove

$$M_1 = \frac{\pi^m}{2^m (1+l)^m} (\bar{s} - \underline{s})^m \left(9 + \frac{4}{\pi} \log(1+l) \right) \sup_{s \in S_0} |f^{(m)}(s)|.$$

Nel caso in cui f sia una funzione analitica, la scelta del valore di m dipende perciò dall'ammontare della quantità di errore tollerato nel passo di approssimazione. Usando la (8), si assume che f appartenga a $C^{(m)}$. Per considerare anche funzioni non analitiche f in $C^{(m)}$, dato che l'errore nello sviluppo di Taylor è dovuto alla derivata di ordine m di f , si deve necessariamente considerare $m-1$ come grado del polinomio approssimante di Taylor. Questa scelta sarà adottata anche quando si tratterà una f analitica o polinomiale con grado non noto, conducendo, pertanto a una procedura unificata per tutti questi casi. Nel caso in cui f non sia una funzione analitica ma appartenente a $C^{(d)}$, per un qualche valore di d diverso da m , lo sviluppo di Taylor comprende un termine d'errore che non può essere trascurato. Infatti contrariamente al caso analitico, possiamo calcolare il termine d'errore tramite le formule presentate in questo lavoro per m fissato, ma lo schema di estrapolazione non converge; la convergenza è ottenuta solamente nel caso in cui m tenda a infinito.

Dalla formula (8) si ottiene un limite superiore per l'errore prodotto approssimando le derivate dello sviluppo di Taylor nel modo già descritto in precedenza. Usando la *proposizione 2* si può scrivere:

Proposizione 3

$$\sup_{u \in U} |f(u) - T_{m,l}(u)| \leq M(m,l)$$

dove

$$M(m, l) = \frac{\pi^m}{2^m (1+l)^m} (\bar{s} - s_1)^m \left(9 + \frac{4}{\pi} \log(1+l) \right) \sum_{i=0}^{m-1} \left(\sup_{s \in S} |f^{(m+i)}(s)| \frac{1}{i!} \sup_{u \in U} |u - s^*|^i \right) +$$

$$+ \sup_{v \in (a, \bar{s})} \left(\frac{|u - s^*|^m |f^{(m)}(v)|}{m!} \right) = A(m, l) + B(m)$$

Si presenta ora una tecnica che si dimostrerà utile per il passo di stima. Questa permette di approssimare le derivate di una funzione $f \in C^{(m)}$ tramite le derivate del polinomio di Lagrange che approssima f . Si denoti:

$$\mathfrak{L}_l(f^{(j)}(s)) = \sum_{k=0}^l f(s_k) L_{s_k}^{(j)}(s)$$

(9)

In modo simile a ciò che è stato fatto per la formula (7), e seguendo [Spr87b] si ottiene:

Proposizione 4

Sotto le suddette ipotesi, per ogni $p \in \mathbb{N}$, si ottiene:

$$\lim_{l \rightarrow \infty} l^p \sup_{s \in S} |f^{(j)}(s) - L_l(f^{(j)}(s))| = 0$$

$$\lim_{l \rightarrow \infty} l^p \sup_{s \in S} |f^{(j)}(s) - \mathfrak{L}_l(f^{(j)}(s))| = 0$$

Osservazione 5

L'insieme di nodi \tilde{S} è stato usato in tre diverse situazioni. La prima riguarda la definizione dello

schema di interpolazione di Lagrange sul dominio dei livelli di stress S_0 ; in secondo luogo è stato usato attraverso la formula (9) per calcolare le derivate di f e infine sarà usata nell'espressione di $\hat{B}(m,l)$ (nell'ultimo capitolo) per dare un limite superiore alla distorsione nella procedura di approssimazione di Taylor (estrapolazione di f sul dominio dei valori normali U).

Capitolo 7

Stima della vita attesa e stima del limite superiore della sua distorsione

7.1 Stima della vita attesa

Si riconsideri ora il modello (5). Per prima cosa si richiameranno le stime da usare in questa sezione.

Il modello (5) può essere scritto sotto la seguente forma:

$$Y = f(s) + \sigma E[Z] +$$

ε

dove $E[\varepsilon]=0$

Per un qualche $s_i \in \tilde{S}$ si osserva un campione (che può essere ordinato o meno) $Y(i)$ con dimensione n_i , e

$$Y(i) = X(i) \begin{pmatrix} f(s_i) \\ \sigma \end{pmatrix} + \varepsilon(i) \quad \text{dove}$$

$$X(i) = \begin{pmatrix} 1 & E(Z_{(1)}(n_i)) \\ \mathbf{M} & \mathbf{M} \\ 1 & E(Z_{(n_i)}(n_i)) \end{pmatrix} \quad \text{e}$$

$$\varepsilon(i) = (\varepsilon_{(1)}(i), \dots, \varepsilon_{(n_i)}(i))$$

La stima ottenuta con il metodo dei minimi quadrati di $f(s_i)$ è:

$$f(s_i) = (1 \ 0) (X'(i)\Omega^{-1}(i)X(i))^{-1} X'(i)\Omega^{-1}(i)Y(i)$$

Dove $\Omega(i)$ è la matrice di varianza e covarianza del vettore $Y(i)$. Si assume che $\Omega(i)$ abbia rango pieno.

Sotto le usuali condizioni di convergenza vale:

$$\lim_{n_i \rightarrow \infty} \hat{f}(s_i) = f(s_i) \quad \text{in probabilità} \\ \text{per ogni } i. \quad (10)$$

Tali stime sono, inoltre, non distorte con varianza minima. Si definisce, per qualsiasi s dell'universo degli stress possibili:

$$\hat{f}(s) = L_i(\hat{f}(s))$$

la stima appena considerata è ottima quando $s = s_i$ (ovvero è ottima quando gli s sono proprio i punti di *Tchebycheff*). Per di più

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \lim_{\min(n_i) \rightarrow \infty} \hat{f}(s) = f(s) \quad \text{in}$$

probabilità

qualsiasi sia l' s considerato, facente parte di S_0 ; ciò risulta dalla convergenza di $\hat{f}(s_i)$. Si usa ora la proporzione 4 considerando

$$\hat{f}^{(i)}(s) = \hat{\mathcal{E}}_l(f^{(i)}(s))$$

(11)

e osservando che

$$\lim_{\min(n_i) \rightarrow \infty} \hat{\mathcal{E}}_l(f^{(i)}(s)) = \mathcal{E}_l(f^{(i)}(s))$$

Ad ogni modo $\mathcal{E}_l(f^{(i)}(s))$ differisce da $f^{(i)}(s)$ in ogni punto s ; ne segue che la stima $\hat{f}^{(i)}(s)$ è consistente benché distorta.

La stima di $f(u)$ è definita come in precedenza, usando la formula (11), pertanto

$$\hat{f}_m(u) = \sum_{i=0}^m \frac{\hat{\mathcal{E}}_l(f^{(i)}(s))}{i!} (u - s^*)^i$$

Dove m è il numero di termini nello sviluppo di Taylor che si scelgono per il passo di estrapolazione.

Proposizione 6

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{l \rightarrow \infty} \lim_{\min(n_i) \rightarrow \infty} \hat{f}_m(u) = f(u)$$

in probabilità qualsiasi sia u appartenente a U .

7.2 Stima del limite della distorsione

Si considera ora uno stimatore del limite superiore per la distorsione. Si denoti n il vettore (n_1, \dots, n_l) e si consideri il fatto che tale vettore tende a infinito se lo fanno tutte le sue coordinate.

Si definisce a questo punto:

$$\hat{M}_n(m, l) = \frac{\pi^m}{2^m (1+l)^m} (\bar{s} - s_1)^m \left(9 + \frac{4}{\pi} \log(1+l) \right) \sum_{i=0}^{m-1} \left(\sup_{s \in S} |\hat{f}^{(m+i)}(s)| \frac{1}{i!} \sup_{u \in U} |u - s^*|^i \right) +$$

$$+ \sup_{v \in (a, s)} \left(\frac{|u - s^*|^m |\hat{f}^{(m)}(v)|}{m!} \right) = \hat{A}(m, l) + \hat{B}(m, l)$$

In modo analogo si definisce $M^*(m, l)$ che è definito come $M(m, l)$, con tutte le derivate calcolate come nella proposizione 4, ovvero:

$$M^*(m, l) = \frac{\pi^m}{2^m (1+l)^m} (\bar{s} - s_1)^m \left(9 + \frac{4}{\pi} \log(1+l) \right) \sum_{i=0}^{m-1} \left(\sup_{s \in S} |\mathfrak{F}_i(f^{(m+i)}(s))| \frac{1}{i!} \sup_{u \in U} |u - s^*|^i \right) +$$

$$+ \sup_{v \in (a, s)} \left(\frac{|u - s^*|^m |\mathfrak{F}_i(f^{(m)}(v))|}{m!} \right) = A^*(m, l) + B^*(m)$$

Proposizione 7

Sotto le precedenti ipotesi:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{M}_n(m, l) = M^*(m, l)$$

Dimostrazione

L'enunciato vale perché:

$\lim_{l \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \hat{B}(m, l) = B^*(m)$ e $\lim_{l \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \hat{A}(m, l) = \lim_{l \rightarrow \infty} A^*(m, l) = 0$ per ogni valore di m .

Capitolo 8

Disegni ottimali

8.1 Ottimalità del disegno d'interpolazione

In questo paragrafo si considerano le proprietà di ottimalità dello schema d'interpolazione, indipendentemente rispetto al suo ruolo nella procedura di estrapolazione. Si è, pertanto, interessati alle proprietà della stima di $f(s^*)$.

La stima della funzione derivata $f^{(j)}$ è $\hat{f}_l(f^{(j)})$, e il criterio di ottimalità prende in considerazione sia la varianza di stima della funzione stessa che quella

della sua distorsione. Si presti attenzione ora, al caso in cui (si veda [Cel03] e i riferimenti che contiene)

$$\text{var}(\hat{f}(s_k)) = \frac{\sigma^2}{c + dn_k} (1 + o(1))$$

che risulta il caso i.i.d. quando $c = 0$, $d = 1$, $o(1) = 0$.

Per esempio, questo risultato vale quando Z è una *Weibull*, una *Logistica* o una *Normale*. Si ha, allora, trascurando il termine del secondo ordine:

$$\text{var}(\hat{\mathbf{f}}_l(f^{(j)}(s^*))) = \sum_{k=0}^l \frac{\sigma^2}{c + dn_k} (L_{s_k}^{(j)}(s^*))^2$$

La suddetta espressione mostra che la varianza della stima è una funzione di (s, n) nello spazio $R^{l+1} \times N^{l+1}$, che dipende dalla scelta del numero di nodi l .

Usando un argomento simile a [Cel02] e [Spr87b], la varianza minima di $(\tilde{s}_0, \dots, \tilde{s}_l, \tilde{n}_0, \dots, \tilde{n}_l)$ è raggiunta per

$$s_i = \tilde{s}_i = \frac{s + \bar{s}}{2} - \frac{\bar{s} - \underline{s}}{2} \cos\left(\frac{l-i}{l} \pi\right) \quad \text{e} \quad n_i = \tilde{n}_i = \left[\frac{(c(l+1) + n) |L_{s_i}^{(j)}(s^*)|}{\sum_{k=0}^l |L_{s_k}^{(j)}(s^*)|} - \frac{c}{d} \right]$$

dove $i = 0, \dots, l$ e $[x]$ denota la parte intera di x . La varianza minima del disegno ottimale nel passo d'interpolazione è ottenuta, pertanto, quando i nodi sono dei punti di *Tchebycheff*.

Il numero di nodi fornisce un controllo sulla distorsione dello schema

d'interpolazione; infatti se si considera che

$$\hat{M}_1 = \frac{\pi^m}{2^m(1+l)^m} (d-c)^m \left(9 + \frac{4}{\pi} \log(1+l) \right) \sup_{s \in S_0} |\hat{f}^{(m)}(s)|$$

è una stima consistente di un limite superiore della distorsione, può essere presentata, come ultimo obiettivo riguardante l'ottimalità dell'interpolazione, una stima di l , che ha una proprietà ottima, nel senso che per un qualunque valore $\varepsilon > 0$, ci garantisce che il limite stimato della distorsione è più piccolo di tale ε , ovvero:

$$\hat{l} = \inf \{ l \in N : \hat{M}_1 \leq \varepsilon \}.$$

Il disegno d'interpolazione è, perciò, completamente determinato attraverso il vettore $(\tilde{s}_0, \dots, \tilde{s}_l, \tilde{n}_0, \dots, \tilde{n}_l)$. Si ricordi, come osservazione finale, che, quando f è un polinomio di grado noto p , allora la distorsione nell'interpolazione è nulla, e il valore ottimo di l è p .

8.2 Ottimalità del disegno di estrapolazione

Si consideri la seguente stima di $f^{(j)}(u)$, nel caso in cui j sia un intero non negativo e u sia un punto interno all'insieme dei valori usuali U :

$$\hat{f}^{(j)}(u) = \sum_{h=0}^m \frac{\hat{\mathfrak{F}}(f^{(j+h)}(s^*))}{h!} (u - s^*)^h$$

Se si è nella situazione in cui i sistemi oggetto di studio sono i.i.d., quando f è una funzione polinomiale con grado (noto) p , questa stima coincide con quella di *Hoel e Levine* (si veda [HL64]) nel caso in cui $j = 0$ e con la stima di *Spruill* (si veda [Spr87b]) nel caso $j \neq 0$.

Come nel paragrafo precedente, si noti che, sotto ipotesi del tutto generali, può essere mostrato che la varianza dell'estrapolazione ha una forma ben precisa; ovvero da

$$\text{var}(\hat{f}(s_k)) = \frac{\sigma^2}{c + dn_k} (1 + o(1))$$

si produce:

$$\text{var}(\hat{f}^{(j)}(u)) = \sum_{k=0}^l \sum_{\beta=0}^m \sum_{\alpha=0}^m \frac{(u - s^*)^{\alpha+\beta}}{\alpha! \beta!} L_{s_k}^{(\alpha+j)}(s^*) L_{s_k}^{(\beta+j)}(s^*) \frac{\sigma^2}{c + dn_k} (1 + o(1))$$

Per sfruttare il limite superiore della distorsione dell'interpolazione si è portati a considerare i nodi di *Tchebycheff* su S_0 . Perciò la minimizzazione della parte principale della varianza di $\hat{f}^{(j)}(u)$ è data dal numero di replicazioni delle osservazioni su ognuno dei suddetti nodi, sotto il vincolo che $n_1 + \dots + n_k = n$. Dato che la sola parte casuale dell'errore nell'estrapolazione, viene dalla stima delle $f^{(j+r)}(s_k)$, è del tutto naturale ottimizzare il disegno tramite una ottimizzazione su S_0 . Ciò può anche essere affermato in accordo con il *teorema di Denoy e Carleman*, il quale asserisce che una funzione *analitica* è completamente determinata dai valori che assume, assieme a quelli delle sue derivate, in un punto qualsiasi del dominio

(si veda [BdlVP50]). A questo proposito, il punto s^* può essere pertanto scelto arbitrariamente in S_0 .

La minimizzazione della varianza di $\hat{f}^{(j)}(u)$ è facilmente ottenibile attraverso una procedura di *Kuhn-Tucker*, la quale produce:

$$\tilde{n}_k = \left[\frac{\sqrt{\sum_{\alpha=0}^m \sum_{\beta=0}^m \frac{(u-s^*)^{(\alpha+\beta)}}{\alpha! \beta!} L_{s_k}^{(\alpha+j)}(s^*) L_{s_k}^{(\beta+j)}(s^*)}}{\sum_{k=0}^l \sqrt{\sum_{\alpha=0}^m \sum_{\beta=0}^m \frac{(u-s^*)^{(\alpha+\beta)}}{\alpha! \beta!} L_{s_k}^{(\alpha+j)}(s^*) L_{s_k}^{(\beta+j)}(s^*)}} (n + c(l+1)) - \frac{c}{d} \right];$$

$[\cdot]$ rappresenta la parte intera della quantità all'interno delle parentesi stesse.

Resta da trattare la minimizzazione del limite superiore della distorsione, condotto su l e m .

Se è noto che $f \in C^m$ allora m è noto e $\hat{l}(m)$ è scelto in modo tale che $\hat{l}(m) \geq 2m-3$ e

$$\hat{l}(m) = \inf \{ l \in N : \hat{A}(m, l) \leq \varepsilon \}$$

per un qualche $\varepsilon > 0$.

Nel caso in cui f sia analitica, si fissa un $\varepsilon > 0$ e

$$\hat{m} = \inf \{ m \in N : \hat{A}(m, 2m-3) \leq \varepsilon \} \quad \text{mentre}$$

$$\hat{l} = 2\hat{m} - 3.$$

8.3 Una osservazione sulla ottimizzazione di l e m

Si affronterà ora la seguente questione; sul dominio dei livelli in cui il sistema opera normalmente (ovvero quando tale sistema non è sottoposto a stress)

U , il valore di $f(u)$ è approssimato tramite un polinomio di Taylor con grado fissato $m-1$. I coefficienti di questo polinomio sono approssimati attraverso lo schema d'interpolazione di Lagrange definito sulla base di l nodi in S_0 . Ovviamente una scelta ottimale di l dovrebbe minimizzare la quantità $\sup_{u \in U} |f(u) - T_{m,l}(u)|$, ovvero la distorsione uniforme dovuta a $f(u)$, la quantità da stimare.

Lo stima di questo criterio richiede la stima delle approssimazioni delle derivate come scritto in $\hat{B}(m,l)$.

I valori di $f^{(m)}$ sono ottenuti tramite una procedura a due stadi:

1. I valori di $f(s_i)$ si ottengono per campionamento, il quale produce un errore statistico;
2. $f^{(m)}$ è approssimata per mezzo della formula (9) con f ottenuta come appena visto spiegato.

Un'osservazione dovuta a *Bernstein* asserisce che l'errore uniformemente minimo nei valori risultanti di $f^{(m)}$ su U si ottiene usando precisamente il polinomio di Lagrange $L_l(f^{(j)})$ calcolato sui nodi di Tchebycheff, se i valori di $f^{(m)}(s_i)$ erano stati ottenuti sperimentalmente come nel punto (1.). Benché questo non sia il caso in questione (dato che i valori sono ottenuti indirettamente tramite il punto (2.) e ricorrendo alla proposizione (4)), per grandi valori di l , la procedura qui utilizzata fornisce una stima statisticamente ragionevole di $f^{(m)}(s_i)$ per $1 \leq i \leq l$. Una conseguenza naturale di questo fatto è l'uso di uno schema di interpolazione, sviluppato precedentemente, per stimare $f^{(m)}(v)$ su tutto il dominio $S_0 \cup U$.

Si ricordi che la stima esplicita, per mezzo del polinomio di Taylor, è adottata solo per dare una

valutazione, a sua volta esplicita, della distorsione, la quale non può essere ottenuta tramite un'applicazione diretta della continuità di f come definito dallo schema di Lagrange, anche se può sembrare più naturale. Si può osservare come Spruill [Spr87b] sviluppi l'osservazione di Bernstein nel caso in cui f sia una funzione polinomiale.

Si è portati a considerare, a questo punto, la seguente questione: Qual è il numero minimo di tali nodi, detto l_0 , che rende l'errore commesso nello schema d'interpolazione di Lagrange più piccolo rispetto a un qualsiasi $\varepsilon > 0$? Ovvero, posto:

$$\sup_{s \in S} |f(s) - L_l(f(s))| \leq A(m, l) \leq \varepsilon$$

si definisca $l_0(m) = \inf \{l \in N : A(m, l) \leq \varepsilon\}$

Il calcolo di $l_0(m)$ non può essere completato, dato che $A(m, l)$ dipende dalle derivate (non note) $f^{(m+i)}(s)$ con $1 \leq i \leq l+1$ e $f^{(m+1)}(u)$. Si sostituisce, a questo proposito, $\hat{A}(m, l)$ a $A(m, l)$; questa sostituzione porta ad ottenere la stima ben definita:

$$\hat{l}(m) = \inf \{l \in N : \hat{A}(m, l) \leq \varepsilon\}$$

Si consideri, a questo punto, la relazione tra $l_0(m)$ e $\hat{l}(m)$. Dalla proposizione 7 si ottiene:

$$\lim_{\min(n_i) \rightarrow \infty} \hat{A}(m, l) = A^*(m, l)$$

La stima $\hat{M}_{(n_i)}(m, l)$ non converge a $M(m, l)$ dato che le derivate sono calcolate per mezzo della formula (9),

nella quale $f(s_k)$ è stimata attraverso la $\hat{f}(s_k)$. Si noti anche che:

$$\lim_{\min(n_i) \rightarrow \infty} \hat{\varepsilon}_l(f^{(j)}(s)) = \varepsilon_l(f^{(j)}(s))$$

Ma $\varepsilon_l(f^{(j)}(s))$ converge a $f^{(j)}(s)$ quando l tende a infinito. Si può a questo punto concludere:

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \frac{A^*(m, l)}{\hat{A}(m, l)} = 1 \quad (12)$$

Il limite (12) appena presentato, può essere usato per ottenere la seguente proposizione:

Proposizione 8

Sotto le suddette ipotesi

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \lim_{\min(n_i) \rightarrow \infty} \frac{\hat{l}_{(n_i)}(m)}{l_0(m)} = 1$$

Pertanto $\hat{l}_{(n_i)}(m)$ sarà usata per definire il disegno sperimentale per m fissato.

Dimostrazione

Si considerino le funzioni $F_{(m)}(l) = 1/A(m, l)$ e $\hat{F}_{(m)}(l) = 1/\hat{A}(m, l)$; la funzione $F_{(m)}(l)$ è un infinito di ordine m , e ciò vale a dire che

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \frac{F_{(m)}(\lambda l)}{F_{(m)}(\lambda)} = \lambda^m \quad (13)$$

uniformemente su λ per un qualche insieme compatto di R^{+*} . Si denoti a questo punto:

$$F_{(m)}^{\leftarrow}(\varepsilon) = \inf \left\{ l > 0 : F_{(m)}(l) \geq \frac{1}{\varepsilon} \right\}$$

la inversa generalizzata di $F_{(m)}$ e con $\hat{F}_{(m)}^{\leftarrow}$ la inversa generalizzata di $\hat{F}_{(m)}$. Si denoti, inoltre $h_m(l) = F_{(m)} - \hat{F}_{(m)}$. Si ha dunque

$$\frac{l_0}{\hat{l}} = \frac{F_{(m)}^{\leftarrow} \left(F_{(m)}(l) \left(1 + \frac{h_{(m)}(l)}{F_{(m)}(l)} \right) \right)}{\hat{F}_{(m)}^{\leftarrow}(\hat{F}_{(m)}(l))} = \frac{F_{(m)}^{\leftarrow} \left(F_{(m)}(l) \left(1 + \frac{h_{(m)}(l)}{F_{(m)}(l)} \right) \right)}{F_{(m)}^{\leftarrow}(F_{(m)}(l)(1+o(1))(1+o(1)))}$$

nella quale si usa la formula (12). Dato che:

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \frac{h_{(m)}(l)}{F_{(m)}(l)} = 0 \quad \text{si deduce dalla (13) che}$$

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \frac{l_0}{\hat{l}} = 1$$

Esempio

Si considera a, questo punto, un esperimento di *Nelson* (1974) ripreso, a distanza di qualche anno, anche da *Klein-Basu* (1981) e più recentemente da *Celant*.

Si vuole stimare la vita media di un motore elettrico che, normalmente, funziona a 180 °C. Si ipotizzano tre tipi di guasti al sistema di isolamento termico del motore (che saranno indicati con: *Turn*, *phases* e *ground*). Per poter stabilire la sua durata di vita (o il tempo che impiega per guastarsi), alla temperatura in cui funziona normalmente, sarebbero necessarie 20000 ore; si ricorre, per poter accelerare l'operazione di guasto, ad un aumento dall'esterno della temperatura di funzionamento del sistema. Si produce, pertanto, quello che finora è stato chiamato

come "esperimento sottoposto a stress". Come fecero gli autori citati in precedenza, anche in questo caso si ipotizza che la distribuzione dei guasti sia data:

$$F(t) = 1 - \exp \left[- \frac{t}{\exp \left(8,2607 - \frac{8010,6}{s} \right)} \right]$$

dove s rappresenta la temperatura nel caso di *turn* (che è l'unico caso che si considera in questa tesi).

$S_0 = [463,16; 533,16]$ e il modello, supponendo di eseguire un esperimento non simultaneo, è dato da $Y(s) = f(s) - 0,577 + \varepsilon$, dove $-0,577 := E(\text{Gumbell})$.

$Y(s)$ è ovviamente distribuito come una *Weibull* e $y(s)$ sono *i.i.d.* al variare di s , come si era già visto nella parte teorica della presente tesi al momento della definizione dei livelli di stress (paragrafo 1.2). Si consideri, infine, che

$$\sup_{s \in S_0} |\hat{f}^{(\beta)}(s)| = 6.$$

Il calcolo dei *polinomi di Lagrange* e delle sue derivate successive (fino all'ordine 3) sono ottenuti nel seguente modo:

$$L_{s_i}(u) = \frac{(u-s_0)\Lambda(u-s_{i-1})(u-s_{i+1})\Lambda(u-s_l)}{(s_i-s_0)\Lambda(s_i-s_{i-1})(s_i-s_{i+1})\Lambda(s_i-s_l)}$$

Per quanto riguarda il calcolo delle derivate si considera $A_j = (u-s_j)^{-1}$ per non appesantire eccessivamente la scrittura. Di seguito sono mostrate le formule delle derivate fino all'ordine 3 del polinomio di Lagrange:

$$L'_{s_i}(u) = L_{s_i}(u) \cdot \left(\sum_j A_j \right)$$

$$L''_{s_i}(u) = L'_{s_i}(u) \cdot \left(\sum_j A_j \right) - L_{s_i}(u) \cdot \left(\sum_j A_j^2 \right)$$

$$L'''_{s_i}(u) = L''_{s_i}(u) \cdot \left(\sum_j A_j \right) - 2L'_{s_i}(u) \cdot \left(\sum_j A_j^2 \right) + 2L_{s_i}(u) \cdot \left(\sum_j A_j^3 \right)$$

Ora saranno mostrati i dati di partenza dell'esperimento e tutti i risultati che si sono ottenuti. Per prima cosa, si presti attenzione al fatto che $l=m=3$. I quattro livelli di stress ai quali il motore oggetto dell'esperimento è stato sottoposto sono, $s_0=463,16$; $s_1=480,66$; $s_2=515,66$; $s_3=533,16$. In condizioni normali, invece, il motore lavora ad una temperatura $u=453,16$. Il livello scelto per l'interpolazione è $s^*=490,16$.

A questo punto si mostrano tutti i risultati ottenuti tramite l'applicazione del polinomio di Lagrange calcolato nel punto s^* e anche delle sue derivate. Per semplicità di scrittura il polinomio di Lagrange calcolato in s^* per il livello di stress s_i , sarà denotato con L_i ; ovvero $L_i := L_{s_i}(s^*)$.

I risultati (che sono stati presi con almeno due cifre significative) sono:

| Livelli di stress | | | | |
|------------------------------|--------|---------|--------|----------|
| | s_0 | s_1 | s_2 | s_3 |
| Polinomio (L_i) | -0,162 | 0,920 | 0,343 | -0,171 |
| Derivata prima L'_i | -0,014 | 0,021 | 0,060 | -0,020 |
| Derivata seconda (L''_i) | 0,174 | -0,0034 | 0,0056 | -0,00022 |
| Derivata terza | 0,015 | - | 0,0023 | 0,0036 |

| | | | | |
|--|--|----------|--|--|
| | | 0,000056 | | |
|--|--|----------|--|--|

A questo punto si considera la varianza; si denoterà con V_i^2 la varianza del generico livello i -esimo. Posto quindi

$$V_i^2 = \sum_{\alpha=0}^3 \sum_{\beta=0}^3 \frac{(u-s^*)^{(\alpha+\beta)}}{\alpha!\beta!} L_i^{(\alpha)}(s^*) L_i^{(\beta)}(s^*)$$

si sono ottenuti i seguenti risultati

$$V_0^2 = 34,205; \quad V_1^2 = 17,560;$$

$$V_2^2 = 725,825; \quad V_3^2 = 1124,450;$$

e, perciò

$$n_0 \cong 18; \quad n_1 \cong 9; \quad n_2 \cong 382;$$

$$n_3 \cong 591.$$

Le durate di vita del sistema provengono da distribuzioni di *Weibull*. Le simulazioni di tali durate di vita sono state fatte con il programma *R*. Di seguito è aggiunta anche la stampa di tutti i dati simulati dalle quattro distribuzioni di *Weibull* considerate, e, inoltre, anche delle medie di tali dati per ogni rispettiva distribuzione.

Si può osservare che i risultati, seppur buoni, possono essere migliorati, senza per questo dover aumentare le dimensioni campionarie, notando che gli errori di interpolazione e/o estrapolazione dipendono fortemente da $\bar{s}-\underline{s}$ (il dominio dei livelli di stress). Basterà, pertanto, ridurre questo intervallo per ottenere precisioni ancora più elevate.

Riferimenti bibliografici

[BdlVP50] S. Bernstein e C. de la Vallée Poussin,
L'approximation,
Chelsea Publishing Company, New
York, 1950

- [BN01] P. Bagdonovicius e M. Nikulin, *Accelerated life models: Modelling and statistical analysis*, Chapman and Hall, 2001
- [BnCel] M. Broniatowski, G. Celant, *Optimality and bias of some interpolation and extrapolation designs*, 2004 (accettato per la pubblicazione su JSPI).
- [Cel02] G. Celant, *Plans accélérés optimaux: Estimation de la vie moyenne d'un système*, C.R. Acad. Sci. Paris 335 (2002), 69-72.
- [Cel03] G. Celant, *Extrapolation and optimal designs for accelerated runs*, Pub. Inst. Stat. Univ. Paris XXXVII (2003), no. 3, 51-84
- [Che53] H. Chernoff, *Locally optimum designs for estimation of a parameter*, Ann. Math. Statist. 24 (1953), 586-602.
- [Coa66] C. Coatmelec, *Approximation et interpolation des fonction différentiables de plusieurs variables*, Annales scientifiques de l'E.N.S. 83 (1966), no. 4, 271-341
- [DH73] N. R. Draper e A. M. Herzberg, *Some designs for extrapolation outside a sphere*,

Journal Roy. Statist. Soc. 35 (1973), 268-276.

[DW96] H. Dette e W. K. Wong, *Robust optimal extrapolation designs*, *Biometrika* 83 (1996), no.3, 667-680.

[Elf52] G. Elfving, *Optimum allocation in linear regression theory*, *Ann. Math. Statist.* 23 (1952), 255-262.

[Fan00] Z. Fang, *Robust extrapolation designs for biased polynomial models*, *Journal Statist. Plann. Infer.* 87 (2000), no. 1, 135-147

[GK79] Z. Galil e J. C. Kiefer, *Extrapolation designs and ϕ_p -optimum designs for cubic regression on the q -ball*, *Journal Statist. Plann. Infer.* 3 (1979), no. 1, 27-38.

[HaNel] Hahn e Nelson, *A review and comparison of methods of regression analysis of censored data*. *I.E.E.E. transaction on reliability* R23, 2-11

[HC72] A. M. Herzberg e D. R. Cox, *Some optimal designs for interpolation and extrapolation*, *Biometrika* 59 (1972), 551-561.

[Her71] A. M. Herzberg, *Interpolation and extrapolation designs*, *Bull. Int. Stat.* 2 (1971), 207-211.

- [HL64] P. G. Hoel e A. Levine, *Optimal spacing and weighting in polynomial prediction*, Ann. Math. Statist. 35 (1964), 1553-1560.
- [Hoe65] P. G. Hoel, *Optimal designs for polynomial extrapolation*, Ann. Math. Statist. 36 (1965), 1483-1493.
- [Hoe66] P. G. Hoel, *A simple solution for optimal Tchebycheff regression extrapolation*, Ann. Math. Statist. 37 (1966), 720-725.
- [Hoe81] P. G. Hoel, *Regression system for which optimal extrapolation designs require exactly $k+1$ points*, Ann. Statist. 9 (1981), no. 4, 909-912.
- [Hs88] Mong Na Lo Huang e W. J. Studden, *Model robust extrapolation designs*, Journal Statist. Plann. Infer. 18 (1988), no. 1, 1-24.
- [Hub75] P. J. Huber, *Robustness and designs. Survey of statistical designs and linear models*, North-Holland, Amsterdam, 1975.
- [KS66] S. Karlin e W Studden, *Tchebycheff system: With applications in analysis and statistics*, John Wiley, New-York, 1966.
- [KW59] J. Kiefer e J. Wolfowitz, *Optimum designs in regression problems*, Ann. Math. Statist. 30 (1959), 271-294.

- [KW64] J. Kiefer e J. Wolfowitz, *Optimum extrapolation and interpolation designs, II*, Ann. Inst. Stat. Math. 79-108 (1964), no. 62, 79-108, *ibid*, 295-303.
- [KW65] J. Kiefer e J. Wolfowitz, *On a theorem of Hoel and Levine on extrapolation designs*, Ann. Math. Statist. 36 (1965), no. 6, 1627-1655.
- [Nel90] W. B. Nelson, *Accelerated testing: Statistical models, test plans and data analysis*, Wiley, New York, (1990).
- [Spr84] M. C. Spruill, *Optimal designs for minimax extrapolation*, Journal multiv. Anal. 14 (1984), 52-62.
- [Spr85] M. C. Spruill, *Model robustness of Hoel-Levine optimal designs*, Journal Statist. Plann. Infer. 11 (1985), no. 2, 217-225.
- [Spr87a] M. C. Spruill, *Optimal designs for interpolation*, Journal Statist. Plann. Infer. 16 (1987), no. 2, 219-229.
- [Spr87b] M. C. Spruill, *Optimal extrapolation for derivates*, Metrika 34 (1987), no. 1, 45-60.
- [Spr90] M. C. Spruill, *Optimal designs for multivariate interpolation*, Journal Multiv. Anal. 34 (1990), 141-155.

[Stu68] W. J. Studden, *Optimal designs on Tchebycheff points*, Ann. Math. Statist. 39 (1968), 1435-1447.

Lewin W. (84). *4° colloque international sur la fiabilité et la maintenance*, (Paris).

Si ringraziano

LA MAMMA...per tutto, tutta la mia famiglia, i parenti, Valentina, Volto, Mauro, Castagna, Mirko, Adela y familia, Cristian, Chiara, Sissi, Nadia, Lavra, Piciu, Scalcucci, Ceci, Bertolini, Betto Fabio, Danielona, Samu, Veronica, Irene, Julissa, Il Graticolo, Gino, Jorge, Marco, Marina, Mattia, Michelino, Yoya, La quaglia, Samanta, Francesca, Mery, Martina, Marziana e tutte quelle della casa delle auto...mio primo "rifugio universitario" e tutti gli amici dei quali non mi sono ricordato, Il professor Celant, John W. Coltrane, Larry Young, Mal Waldron, Karl Berger, Ornette Coleman, Charles Mingus, Odean Pope, Ed Blackwell, Woody Shaw, Jackie Mclean, Benny Carter, Pee Wee Russel, Chico Hamilton, James Emery, Al Di Meola, Riccardo Misto, Jaco Pastorius, Jimi Hendrix, Arnold Schönberg, Bach e tutte le persone che in un modo o nell'altro hanno fatto musica! E poi ancora M. K. Gandhi, M. L. King, Amin Maalouf, Arrigo Polillo,

William Faulkner, Manuel Vazquez Montalban, Toni Morrison, Simone Weil, Albert Camus, Mama Africa e il grande Gibirile Mehamed Eumer. Mi avete aiutato tantissimo a diventare quello che sono...adesso dovrete aiutarmi a migliorare. Grazie

...sempre...