UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI PADOVA

DIPARTIMENTO DI SCIENZE ECONOMICHE ED AZIENDALI "M. FANNO"

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA "TULLIO LEVI-CIVITA"

CORSO DI LAUREA IN ECONOMIA

PROVA FINALE

"DALLE CONDIZIONI DI KARUSH - KUHN - TUCKER AI MOLTIPLICATORI DI LAGRANGE"

RELATORE:

CH.MA PROF.SSA ALESSANDRA BURATTO

LAUREANDA: MARTINA TREVISAN

MATRICOLA N. 1137824

ANNO ACCADEMICO 2021 – 2022

Dichiaro di aver preso visione del “Regolamento antiplagio” approvato dal Consiglio del Dipartimento di Scienze Economiche e Aziendali e, consapevole delle conseguenze derivanti da dichiarazioni mendaci, dichiaro che il presente lavoro non è già stato sottoposto, in tutto o in parte, per il conseguimento di un titolo accademico in altre Università italiane o straniere. Dichiaro inoltre che tutte le fonti utilizzate per la realizzazione del presente lavoro, inclusi i materiali digitali, sono state correttamente citate nel corpo del testo e nella sezione ‘Riferimenti bibliografici’.

I hereby declare that I have read and understood the “Anti-plagiarism rules and regulations” approved by the Council of the Department of Economics and Management and I am aware of the consequences of making false statements. I declare that this piece of work has not been previously submitted – either fully or partially – for fulfilling the requirements of an academic degree, whether in Italy or abroad. Furthermore, I declare that the references used for this work – including the digital materials – have been appropriately cited and acknowledged in the text and in the section ‘References’.

Firma (signature) …….………………………

INDICE:

Sommario

I modelli matematici sono spesso utilizzati in economia per rappresentare dei problemi decisionali, in cui è richiesto di scegliere un oggetto, che può essere a titolo di esempio una strategia pubblicitaria, un piano di produzione, un portafoglio di investimento, con lo scopo di perseguire un obiettivo ben definito.
Il problema decisionale si incentra tipicamente sulla ricerca di un punto di massimo o di minimo globale di una funzione (a più variabili) in un dominio opportuno.
Questo studio si propone, in prima analisi, di approfondire i problemi di ottimizzazione sia libera che vincolata, introducendo, inizialmente, i concetti chiave funzionali alle considerazioni successive.
In un secondo tempo, posata l'attenzione sulla sola ottimizzazione vincolata, si affronteranno le condizioni necessarie e sufficienti per la massimizzazione in presenza di vincoli nella forma più generale, formulate da Karush, Kuhn e Tucker.
Le condizioni soprammenzionate saranno ricondotte al metodo dei moltiplicatori di Lagrange che rappresenta un caso particolare in cui sono presenti esclusivamente vincoli di uguaglianza.
Al fine di dimostrare che la suddetta disciplina non è meramente teorica, nella parte finale dell'elaborato verrà illustrato il significato che possono assumere i moltiplicatori di Lagrange e un caso applicativo in cui si evidenzierà la correlazione fra l'approccio matematico precedentemente esposto e la teoria economica che ne deriva.

Capitolo I:

Cenni storici e introduzione all'ottimizzazione

1.1: Cenni storici

Le ricerche matematiche in merito all'ottimizzazione hanno origini antiche e si sono susseguite nel tempo. La Matematica rappresenta uno strumento utile al fine di guidare razionalmente il comportamento umano, in vista di determinati obiettivi ivi compresa la ricerca di situazioni ottimali.

Storicamente, il primo a elaborare un problema di ottimizzazione è stato *Zenodoro* nella sua opera più importante dal titolo "*Sulle figure isoperimetriche*"[1], il quale arriva a chiedersi e, successivamente dimostrare, come fosse possibile circondare un'area predeterminata con la minor quantità possibile di contorno[2]. Precedente a tale opera vi è solo la tradizione leggendaria legata alla *regina Didone* che *Virgilio* descrive nell'*Eneide*. Secondo tale narrazione, il problema di ottimizzazione avrebbe ad oggetto un tratto di terreno che la stessa Didone, giunta con i Tirii in Africa, avrebbe chiesto a Iarba re dei Getuli[3].

Questi aneddoti rappresentano alcuni degli esempi della ricerca di situazioni ottimali nel campo della geometria elementare che successivamente hanno portato alla ricerca dei massimi e dei minimi di funzioni reali di una o più variabili.

In un periodo relativamente recente, inoltre, è stato possibile osservare come l'ottimizzazione di carattere operativo si sia perfezionata in ambienti militari, durante una fase critica come il secondo conflitto mondiale, e abbia conosciuto un fortissimo sviluppo, in gran parte nei medesimi ambienti, al tempo della Guerra Fredda[4]. Fu proprio a cavallo di questo periodo che *William Karush* (nella sua tesi di master)[5] e qualche anno dopo *Harold William Kuhn* e *Albert Tucker* (in un articolo nato dalla loro collaborazione)[6] approfondirono i problemi di programmazione non lineare portando come esempio una variante classica del problema dell'imprenditore che intende massimizzare i profitti utilizzando risorse scarse.

---

[1] M. INVERSI. 12-2019. Introduzione al problema di ottimizzazione. Disponibile su: https://poisson.phc.dm.unipi.it/~inversi/Seminario_Liceo.pdf

[2] C. F. MANARA, G. LUCCHINI. L'ottimizzazione: dimensioni storico- culturali e matematiche. Disponibile su https://www.carlofelicemanara.it/public/file/File/Biografia/Ottimizzazione%20dimensioni%20storico-culturali%20e%20matematiche%202013.pdf

[3] Ibidem

[4] Ottimizzazione, approfondimento Treccani. Disponibile su: https://www.treccani.it/enciclopedia/ottimizzazione_%28XXI-Secolo%29/

[5] KUHN, H. W., 2000. Al posto giusto nel momento giusto. Trascrizione della Lectio Magistralis tenuta presso Princeton University Princeton, Department of Mathematics. Disponibile su <https://www.unibg.it/sites/default/files/documenti/26-05-2015/lhkuhn.pdf

[6] Ibidem

L’ottimizzazione assume dunque un ruolo importante in situazioni del tutto generali, simili a quelle che si verificano in un ecosistema oppure in un mercato libero.
Entrambi i casi vedono competere, collaborare e/o sfruttarsi reciprocamente individui con obiettivi più o meno determinati. Una modellazione in termini di ottimizzazione può aiutare quindi a descrivere i rapporti tra questi individui, a coglierne l’evoluzione in forme più o meno organizzate, a tracciare scenari e, per certi aspetti, a prevederne gli sviluppi.

1.2: Introduzione all’ottimizzazione

La ricerca di un massimo o di un minimo, ovvero più in generale di una *“situazione ottimale”*, può essere frutto di diverse esigenze e dipendere dalla scelta dell’obiettivo. I problemi che si preoccupano di andare alla ricerca dell’alternativa migliore tra quelle disponibili vengono definiti problemi di ottimizzazione[7].
Di conseguenza, un problema di ottimizzazione viene definito come un processo, rappresentato grazie all’ausilio di una funzione che prende il nome di *“funzione obiettivo”*, che richiede di individuare le soluzioni ottimali, denominate *punti di ottimo*, che possono variare a seconda dei vincoli scelti inizialmente.
Ad esempio, in economia può essere d’interesse determinare quale combinazione di prezzi e beni massimizza l’utilità dell’individuo o, ancora, nell’ambito del risk management, può essere utile minimizzare il rischio derivante dall’investimento in un’attività rischiosa.
Da un punto di vista pratico, un agente economico cercherà di massimizzare una qualche funzione (il profitto, l’utilità, il benessere sociale, ecc.) o di minimizzarne altre (i.e i costi necessari per produrre un certo ammontare di output) dati certi vincoli[8].
Fra le ipotesi ritenute essenziali, al fine di una corretta formulazione dei problemi di ottimo, vi è la *razionalità implicita del decisore* che deve essere in grado di individuare la migliore fra tutte le alternative a sua disposizione.
I problemi di ottimizzazione si caratterizzano per la presenza di tre elementi[9]:

- Le *variabili decisionali* di cui si deve determinare il valore ottimo. È l’agente incaricato di prendere decisioni a stabilirne il valore.
- La *funzione obiettivo* indica la relazione funzionale tra le variabili decisionali. Il valore di tale funzione deve essere massimizzato o minimizzato.

---

[7] MANARA, C.F., LUCCHINI G., 2013. L'ottimizzazione: dimensioni storico-culturali e matematiche. Disponibile su: <http://www.carlofelicemanara.it/public/file/File/Biografia/Ottimizzazione%20dimensioni%20storico-culturali%20e%20matematiche%202013.pdf >
[8] SESTINI V., 2017. La struttura dei problemi di ottimizzazione. Roma: Università La Sapienza di Roma. Disponibile su <http://www.diag.uniroma1.it//~sestini/ottimizzazione-scan17-18.pdf>
[9] Ibidem

Matematicamente, se la funzione obiettivo è $y = f(\bar{x})$ con $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ dovremo trovare per quali valori delle variabili del vettore $\bar{x}$ diventa massimo o minimo il valore di *y*.

- L'*insieme ammissibile* (o *insieme delle possibilità*) rappresenta l'insieme di alternative disponibili per il decisore. La presenza di vincoli restringe l'insieme ammissibile a un sottoinsieme dell'intero spazio. Qualora il problema non abbia vincoli, l'insieme ammissibile coincide con l'intero spazio n-dimensionale dei vettori reali.

1.3: Definizioni utili

Al fine di analizzare accuratamente l'argomento, è necessario fare un breve *excursus* delle nozioni che torneranno utili in sede di argomentazione. Nel presente paragrafo verranno elencate le definizioni per problemi a più variabili con qualche accenno al caso degenere ad una variabile. Operativamente, i concetti rimangono invariati, ad essere sostituito sarà il differenziale primo, rappresentato dal *gradiente*, con la derivata prima della funzione, e il differenziale secondo, rappresentato dalla *matrice Hessiana,* sarà intercambiato con la derivata seconda della funzione.

Si assuma, quindi per ipotesi, di posare l'attenzione su una variabile x appartenente ad uno spazio n-dimensionale (con $n \in \mathbb{N},\ n \geq 2$) che viene descritta dal vettore $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$.

1.3.1: Definizioni per problemi in $\mathbb{R}^n$

1. Soluzione ottima[10]: è il vettore di valori delle variabili decisionali x, appartenente all'insieme ammissibile, che dà luogo al valore massimo o minimo della funzione obiettivo:

$$f(\bar{x}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$\bar{x}$ è il vettore degli n elementi delle variabili decisionali.

S è l'insieme ammissibile dei vettori *x*.

2. Punto di minimo globale[11]: sia $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$, $\emptyset \neq S \subset \mathbb{R}^n$, x^* è punto di *minimo globale* per *f* su S se:

$$f(x^*) \leq f(x), \qquad \forall x \in S$$

3. Punto di massimo globale[12]: sia $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$, $\emptyset \neq S \subset \mathbb{R}^n$, x^* è punto di *massimo globale* di *f* in S se:

$$f(x^*) \geq f(x), \qquad \forall x \in S$$

---

[10] SESTINI V., 2017. La struttura dei problemi di ottimizzazione. Roma: Università La Sapienza di Roma. Disponibile su http://www.diag.uniroma1.it//~sestini/ottimizzazione-scan17-18.pdf
[11] A. BURATTO, L. GROSSET, B. VISCOLANI. 12/2018. Ottimizzazione dinamica. Libreria Progetto. Pg.321
[12] Ibidem

4. Punto di minimo locale[13]: sia $f : S \longrightarrow \mathbb{R}, \emptyset \neq S \subset \mathbb{R}^n$, x^* è punto di *minimo locale (o relativo)* di *f* se esiste un intorno $I_r(x^*)$ di x^* tale che:

$$f(x^*) \leq f(x), \qquad \forall x \in I_r(x^*) \cap S$$

5. Punto di massimo locale[14]: sia $f : S \longrightarrow \mathbb{R}, \emptyset \neq S \subset \mathbb{R}^n$, x^* è punto di *massimo locale (o relativo)* di *f* se esiste un intorno $I_r(x^*)$ di x^* tale che:

$$f(x^*) \geq f(x), \qquad \forall x \in I_r(x^*) \cap S$$

In altri termini, il punto x^* è di massimo locale (v. minimo locale) se non esistono punti vicini a x^* in cui la funzione assuma valori maggiori (v. valori minori).

6. Punto di minimo locale in senso stretto[15]: sia $f : S \longrightarrow \mathbb{R}, \emptyset \neq S \subset \mathbb{R}^n$, x^* è punto di minimo locale in senso stretto se esiste un intorno $I_r(x^*)$ di x^* tale che:

$$f(x^*) < f(x), \qquad \forall x \neq x^* \in I_r(x^*) \cap S$$

7. Punto di massimo locale in senso stretto[8]: sia $f : S \longrightarrow \mathbb{R}, \emptyset \neq S \subset \mathbb{R}^n$, x^* è punto di massimo locale in senso stretto se esiste un intorno $I_r(x^*)$ di x^* tale che:

$$f(x^*) > f(x), \qquad \forall x \neq x^* \in I_r(x^*) \cap S$$

8. Gradiente[16]: sia f: $S \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione differenziabile in S e $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ il vettore di variabili. Si definisce gradiente di y= $f_x\,(x_1, \dots, x_n)$ nel punto x^*, indicato con $\nabla f(x^*)$ o Df_{x^*}

$$Df_{x^*} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x^*), \qquad \dots, \qquad \frac{\partial f}{\partial x_n}(x^*) \right)$$

il vettore riga le cui componenti sono le *n* derivate parziali della funzione fatte rispetto alle singole variabili.

[13] A. BURATTO, L. GROSSET, B. VISCOLANI. 12/2018. Ottimizzazione dinamica. Libreria Progetto. Pg.322
[14] Ibidem
[15] Ibidem
[16] M. BERTSCH, R. DAL PASSO, L. GIACOMELLI. Analisi matematica. 2 ª edizione. Milano. McGraw-Hill. Pg330

9. Punto critico o stazionario[17]: data una funzione $f: A \to \mathbb{R}$, con A sottoinsieme non vuoto e aperto di $\mathbb{R}^n$, un punto $x \in A$ si dice stazionario per la funzione f se in esso si annulla il gradiente di f, $\nabla f(x) = 0$ in cui 0=$(0, \dots, 0)^T$ rappresenta il vettore nullo.

Nel caso degenere $\mathbb{R}^n$, con $n = 1$

Punto stazionario[18]: sia $f(x)$ una funzione differenziabile in x_0. Allora $x_0 \in S$ è detto punto stazionario se:

$$f'(x)|_{x=x_0} = \frac{d}{dx} f(x)\Big|_{x=x_0} = 0$$

Ogni punto che soddisfa la presente definizione è un possibile "candidato" ad essere punto di massimo (o minimo) relativo (o assoluto).
È necessario quindi determinare dove la derivata prima risulta positiva (oppure negativa). Se essa è negativa prima di x_0 e positiva dopo, si può affermare che tale punto è di minimo; viceversa, se risulta positiva prima di x_0 e negativa dopo esso è di massimo.

10. Derivata parziale[19]: data una funzione $f: A \to \mathbb{R}$, con A sottoinsieme non vuoto e aperto di $\mathbb{R}^n$, se il limite

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + h, x_{i+1}, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_n)}{h}$$

esiste ed è finito, allora si dice che la funzione è derivabile parzialmente nel punto $(x_1, \dots, x_n)$ rispetto alla variabile x_i e si afferma che il valore ottenuto dal limite precedente è proprio la derivata parziale di f rispetto a x_i nel punto $(x_1, \dots, x_n)$. Indicheremo questa grandezza con il simbolo

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_n).$$

11. Derivata direzionale[20]: si consideri una funzione $f : R^n \to R$, e un vettore $d \in \mathrm{R}^n$. Sia $x \in \mathrm{R}^n$ un punto in cui f è definita.

[17] A. BURATTO, M. GRASSELLI, L. GROSSET, B. VISCOLANI. 09/2014. Matematica generale. Padova. Libreria Progetto pg.301
[18] M. D. INTRILIGATOR. 2002. Mathematical Optimization and Economic Theory. Philadelphia. Siam. Pg.26
[19] A. BURATTO, L. GROSSET, B. VISCOLANI. 12/2018. Ottimizzazione dinamica. Libreria Progetto. Pg.330
[20] ANON., 2011. Differenziazione per funzioni di più variabili. Università del Piemonte Orientale. Disponibile su: <https://www.dir.uniupo.it/pluginfile.php/158603/mod_resource/content/1/differenziale.pdf>

Se esiste il limite

$$\lim_{\lambda \to 0^+} \frac{f(x+\lambda d) - f(x)}{\lambda}$$

allora tale limite prende il nome di *derivata direzionale* di *f* nel punto *x* lungo la direzione *d*. Si noti che nel caso in cui $d = (0,0,\dots,1,\dots,0)^T$, ossia se *d* è il vettore costituito da tutti zeri tranne un 1 in i-esima posizione, la derivata direzionale coincide con la nota derivata parziale di *f* rispetto alla variabile x_i, indicata con $\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{x_i}}$.

12. Matrice hessiana[21]: sia f: S $\subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione differenziabile due volte in S. Si indichi con $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ il vettore di variabili. Si definisce matrice hessiana di f la matrice.

$$H_f(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(x)}{\partial {x^2}_1} & \frac{\partial f(x)}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f(x)}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial f(x)}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial f(x)}{\partial {x^2}_2} & \cdots & \frac{\partial f(x)}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f(x)}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial f(x)}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f(x)}{\partial {x^2}_n} \end{bmatrix}$$

Tale matrice calcola *n*× *n* derivate parziali.

13. Punto di sella[22]: un punto x_0 è detto *punto di sella* se è un punto stazionario per f e non esiste nessun intorno di x_0 in cui tale punto è di massimo o minimo.
Per determinare se un punto stazionario è un punto di massimo, minimo o sella nel caso in cui n ≥ 2 è necessario studiare la matrice hessiana nel punto candidato.
In particolare, se *n = 2* ed M una matrice quadrata del tipo:

$$M = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix}$$

con determinante det(M) = $m_{11}\, m_{22} - m_{12}m_{21}$ allora:
- se det(M) > 0 e m_{11} > 0, M è definita positiva;
- se det(M) > 0 e m_{11} < 0, M è definita negativa;
- se det(M) = 0, M è semidefinita;
- se det(M) < 0, M è indefinita.

[21] - M. BERTSCH, R. DAL PASSO, L. GIACOMELLI. Analisi matematica. 2 ª edizione. Milano. McGraw-Hill. Pg342-343
[22] C. SIMON, L. BLUME, 08-2015. Matematica per le scienze economiche. Milano. Egea.Pg.244

Posto, quindi M=$H_f(x_0)$ con $x_0 \in \mathbb{R}^2$ punto stazionario per f se:

- $H_f(x_0)$ è definita positiva il punto x_0 è di minimo locale;
- $H_f(x_0)$ è definita negativa il punto x_0 è di massimo locale;
- $H_f(x_0)$ è semidefinita non si aggiunge a nessuna conclusione immediata;
- $H_f(x_0)$ è indefinita positiva il punto x_0 è di sella;

Nel caso in cui sia *n > 2,* si studia il segno degli autovalori della matrice hessiana valutata nei punti stazionari. Detti δ_i con $i = (1, ..., p)$, gli autovalori di $H_f(x_0)$.

- se $\delta_i > 0\ \forall i$, allora $H_f(x_0)$ è definita positiva e x_0 è di minimo locale;
- se $\delta_i < 0\ \forall i$, allora $H_f(x_0)$ è definita negativa e x_0 è di massimo locale;
- se $\delta_i \leq 0\ \forall i$ (o $\delta_i \geq 0$) non si giunge a nessuna conclusione circa la natura di x_0 in quanto $H_f(x_0)$ è semidefinita negativa (o positiva).
- se $\exists \delta_i > 0\ e\ \delta_i < 0$, allora $H_f(x_0)$ è indefinita e x_0 è di sella;

14. Cono[23]: un insieme $C \subset \mathbb{R}^n$ è un cono se vale

$$\alpha x \in C, per\ ogni\ x \in C\ e\ ogni\ \alpha > 0.$$

L'insieme:

$$\left\{x \in \mathbb{R}^n |\ x = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j v^{(j)}, \quad a_j \geq 0\right\}$$

è un cono che è chiamato il cono convesso generato dalla famiglia di vettori $\{v^1, v^2, \dots, v^n\}$.

15. Rango di una matrice[24]: Chiamiamo rango di una matrice $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, e lo indichiamo con rkA, la dimensione del sottospazio vettoriale generato dalle colonne:

$$rkA = rk\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix} = dim\left\langle \begin{pmatrix} a_{1,1} \\ a_{2,1} \\ \dots \\ a_{m,1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{1,2} \\ a_{2,2} \\ \dots \\ a_{m,2} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} a_{1,n} \\ a_{2,n} \\ \dots \\ a_{m,n} \end{pmatrix} \right\rangle$$

[23] A. BURATTO, L. GROSSET, B. VISCOLANI. 12/2018. Ottimizzazione dinamica. Padova. Libreria Progetto. Pg.337

[24] A. BURATTO, M. GRASSELLI, L. GROSSET, B. VISCOLANI. 09/2014. Matematica generale. Padova. Libreria Progetto pg.204

1.3.2 Proprietà:

Trattiamo ora alcune proprietà della funzione obiettivo e dell'insieme ammissibile, che ci saranno utili per esaminare l'esistenza e l'unicità del punto di ottimo. In particolare, verranno distinte le proprietà della funzione obiettivo dalle proprietà della regione ammissibile.

Fra le *proprietà della funzione obiettivo* troviamo:

16. Continuità[25]: siano $A \subset \mathbb{R}^n$, $f: A \to \mathbb{R}^m$ e x_0 un punto di A.

Diciamo che f è continua in x_0 se vale una delle seguenti condizioni:

(i) Se x_0 non è di accumulazione per A, allora f è *sempre* continua

(ii) Se x_0 è un punto di accumulazione per A,

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Diremo che f è continua in A se f è continua in tutti i punti di A. Inoltre, se esiste ovunque il limite, esso coincide con il valore della funzione.

17. Funzione concava e funzione convessa[26]: sia f una funzione di classe C^2 su un insieme aperto e convesso S in $\mathbb{R}^n$. Allora f è concava su S se e solo se la matrice hessiana $D^2 f(x)$ è semidefinita negativa per ogni $\bar{x}$ di S. La funzione f è convessa su S se e solo se $D^2 f(x)$ è semidefinita positiva per ogni $\bar{x}$ di S

Le proprietà appena enunciate comportano i seguenti risultati:

Sia $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione convessa dove S rappresenta la regione ammissibile all'interno di $\mathbb{R}^n$; allora valgono le seguenti implicazioni:

- se x^* è un punto di minimo locale, allora x^* è un punto di minimo globale;
- se f è differenziabile e x^* è un punto critico, allora x^* è un punto di minimo.

Se f è una funzione concava valgono le analoghe implicazioni per i punti di massimo.

18. Funzioni esplicite e funzioni implicite[27]: assume la forma *esplicita* una funzione del tipo $y = f(x_1, \dots, x_n)$, di modo che la variabile endogena *y* sia una funzione esplicita delle variabili esogene $x_1, \dots, x_n$. Assume la forma *implicita* $g(x_1, x_2, \dots, x_n, y) = 0$ se per ogni $(x_1, \dots, x_n)$, l'equazione determina la corrispondente variabile y, come una funzione implicita delle variabili esogene $x_1, \dots, x_n$.

---

[25] MANUCCI, P., SOMMARIVA, A., 2014. Limiti e continuità in $\mathbb{R}^n$. Padova: Università degli Studi di Padova. Disponibile su: https://www.math.unipd.it/~alvise/IA_2014/TOPOLOGIA/topologia.pdf

[26] C. SIMON, L. BLUME, 08-2015. Matematica per le scienze economiche. Milano. Egea. Pg.363

[27] SESTINI V., 2017. La struttura dei problemi di ottimizzazione. Roma: Università La Sapienza di Roma. Disponibile su http://www.diag.uniroma1.it//~sestini/ottimizzazione-scan17-18.pdf

19. Teorema della funzione implicita[28]: sia $g(x_1, \dots, x_k, y)$ una funzione di classe C^1, in un intorno del punto $(x_1^*, \dots, x_k^*, y^*)$. Supponiamo inoltre che in tale punto valga

$$g(x_1^*, \dots, x_k^*, y^*) = b \text{ e } \frac{\partial g}{\partial y}((x_1^*, \dots, x_k^*, y^*) \neq 0$$

Allora esiste una funzione di classe C^1: $y = y(x_1, \dots, x_n)$ definita su un intorno sferico I del punto $(x_1^*, \dots, x_k^*)$ e a valori in un intorno J di y^* tale che:

(a) $g(x_1, \dots, x_k, y(x_1, \dots, x_n)) = \text{b}$ per ogni $(x_1, \dots, x_k) \epsilon \text{ I}$

(b) $y^* = y(x_1^*, \dots, x_k^*)$

(c) per ogni i vale

$$\frac{\partial y}{\partial x_i}((x_1^*, \dots, x_k^*) = -\frac{\frac{\partial g}{\partial x_i}(x_1^*, \dots, x_k^*, y^*)}{\frac{\partial g}{\partial y}(x_1^*, \dots, x_k^*, y^*)}$$

Trattiamo di seguito le *proprietà dell'insieme ammissibile*:

20. Punto di frontiera di un insieme[29]: un punto *x* appartiene alla frontiera dell'insieme S se ogni intorno sferico di *x* contiene sia punti di S sia punti del suo complementare F.

21. Insieme aperto e insieme chiuso[30]: sia $\bar{x}$ un vettore appartenente all'insieme $\mathbb{R}^n$ e sia ε un numero positivo reale. Sia $I_\varepsilon(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : |y - x| < \varepsilon\}$ un intorno sferico di raggio ε in x. Un insieme di punti A è aperto se per ogni $\bar{x}$ in A esiste un qualche intorno sferico che è contenuto nell'insieme A. Denotando il complemento di A con $\frac{\mathbb{R}^n}{A}$, allora un insieme si definisce chiuso se il suo complementare è aperto.

22. Teorema di Weierstrass o Teorema dell'Esistenza[31]: un problema di ottimizzazione possiede sempre una soluzione di ottimo se la funzione obiettivo è *continua* (1.) e l'insieme ammissibile è compatto.

Per definire l'insieme ammissibile *compatto* deve possedere, simultaneamente, le seguenti proprietà:

2. *non vuoto:* non deve essere privo di elementi.
3. *chiuso:* contiene i suoi punti di frontiera.

---

[28] C. SIMON, L. BLUME, 08-2015. Matematica per le scienze economiche. Milano. Egea. Pg.187-188

[29] SESTINI V., 2017. La struttura dei problemi di ottimizzazione. Roma: Università La Sapienza di Roma. Disponibile su http://www.diag.uniroma1.it//~sestini/ottimizzazione-scan17-18.pdf

[30] C. SIMON, L. BLUME, 08-2015. Matematica per le scienze economiche. Milano. Egea. Pg.89

[31] SESTINI V., 2017. La struttura dei problemi di ottimizzazione. Roma: Università La Sapienza di Roma. Disponibile su http://www.diag.uniroma1.it//~sestini/ottimizzazione-scan17-18.pdf

4. *limitato:* esiste almeno un intorno finito in $\mathbb{R}^n$ che contenga l'insieme.

È importante sottolineare come le condizioni di continuità, chiusura e limitatezza siano condizioni sufficienti ma non necessarie. In altri termini se tali condizioni non sono soddisfatte possono esistere dei punti di massimo e/o minimo così come non esistere.

Se queste proprietà sono soddisfatte, vi sarà dunque una soluzione al problema di ottimizzazione.

23. Insieme di livello[32]: data una funzione in due variabili (x, y), è il luogo geometrico dei punti che soddisfano l'equazione $f(x, y) = z_0$, dove z_0 è una costante.

Un insieme di livello, quindi, unisce tutti i punti del grafico di una funzione che hanno la stessa quota $z = z_0$. Trattandosi in genere di una curva prende notoriamente il nome di *curva di livello.*

[32] SESTINI V., 2017. La struttura dei problemi di ottimizzazione. Roma: Università La Sapienza di Roma. Disponibile su http://www.diag.uniroma1.it//~sestini/ottimizzazione-scan17-18.pdf

Capitolo II:
Accenni di ottimizzazione libera

2.1: Formulazione generale dei problemi di ottimizzazione

Un problema di ottimizzazione (definito all'interno della regione ammissibile S), come detto precedentemente, è caratterizzato dalla funzione obiettivo *f* e da vincoli di uguaglianza e/o disuguaglianza; può presentarsi attraverso due approcci matematici tra loro alternativi, a seconda che lo scopo sia minimizzare o massimizzare la funzione obiettivo. Con la scrittura

$$\begin{array}{ll} minimizza & f(x) \\ soggetto\ a & x \in S \end{array}$$

indichiamo il problema con cui si ricercano i punti di minimo globale di f su S. Analogamente, con la scrittura

$$\begin{array}{ll} massimizza & f(x) \\ soggetto\ a & x \in S \end{array}$$

indichiamo l'analogo problema per punti di massimo globale di f su S. L'insieme S rappresenta la regione ammissibile dei problemi sopra enunciati. Ciascun punto $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in S$ è detto soluzione ammissibile del problema stesso[33]. Se esiste un punto x^* di minimo (o di massimo) globale su S allora è detto *soluzione ottima del problema*.

Inoltre, nel caso in cui la funzione obiettivo sia *strettamente crescente*, minimizzare (o massimizzare) *f(x)* sarà del tutto equivalente a minimizzare (o massimizzare) *g(f(x)).* Al contrario, nel caso sia *strettamente decrescente*, minimizzare la funzione obiettivo sarà equiparato a massimizzare la funzione composta *h(f(x)).*

Tipicamente i problemi a carattere economico possono riguardare la valutazione dei progetti, la selezione del prodotto ottimale sulla base dei profitti generati attesi, la decisione di investire nella ricerca piuttosto che nella produzione, la realizzazione di nuovi impianti, o ancora, le decisioni ottimali sulla filiera produttiva.

Una prima categorizzazione dei problemi di ottimo è data dalla presenza o meno dei vincoli. I problemi di *ottimizzazione vincolata* sono contraddistinti dalla presenza di vincoli di uguaglianza e/o disuguaglianza; all'opposto definiremo i problemi di *ottimizzazione non vincolata* (anche definiti come problemi di *ottimizzazione libera*) quali privi di qualsiasi tipo di vincolo.

---

[33] AGNETIS, A., Introduzione all'ottimizzazione non vincolata. Disponibile su: <https://www3.diism.unisi.it/~agnetis/ottnonvinc.pdf>

Sulla base di quanto sopra enunciato distinguiamo tre tipi di programmazione[34]:

- *programmazione non lineare (PNL)[35]:* definita da vincoli di uguaglianza e disuguaglianza (le condizioni di primo ordine che ne derivano e sulle quali ci concentreremo nel successivo capitolo sono le condizioni di Karush - Kuhn - Tucker).
- *programmazione classica*[36]: così denominata perché utilizza solo vincoli di uguaglianza (in questo caso le condizioni di Kuhn Tucker diventano il Teorema dei moltiplicatori di Lagrange).
- *programmazione lineare* (LP)[37]: caratterizzata da funzioni e vincoli lineari (in questo caso si utilizza il metodo del Simplesso altrimenti conosciuto come Simplex Method).

2.2: Problema di ottimizzazione non vincolata

Con riferimento alla formulazione generale del problema del tipo:

$$\begin{array}{ll} min & f(x) \\ s.a & x \in S \end{array}$$

possiamo concludere che nel caso in cui S coincida con tutto $\mathbb{R}^n$ si parla di *ottimizzazione non vincolata[38]*. Siamo ora in grado di introdurre alcune condizioni in base alle quali è possibile caratterizzare i punti di minimo di una funzione.

Prima di proseguire con la trattazione, è bene sottolineare che una discussione del tutto analoga può essere fatta nel caso di un problema di massimo.

2.2.1: Condizioni di primo e secondo ordine

La *condizione del primo ordine* affinché un punto x^* interno al dominio di *f,* funzione derivabile di una variabile, sia di massimo *o* di minimo per *f* è che $f'(x^*) = 0$, ovvero x^* sia un punto stazionario di *f.* Ad una condizione similare si giunge per una funzione $f\ (\mathrm{x}_1, \dots, \mathrm{x}_\mathrm{n})$ di *n* variabili: tutte le *n* derivate parziali prime $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ devono annullarsi nel punto x^* interno al dominio di *f* [39].

In aggiunta, data una funzione f in $\mathbb{R}$ di classe C^2, la *condizione sufficiente del secondo ordine* affinché il punto stazionario x^* sia di minimo locale è che la derivata seconda $f''(x^*)$ sia positiva. Di conseguenza, la corrispondente condizione per la funzione di *n* variabili *f* è che la

---

[34] ROMA, M., SAGRATELLA, S., 2014. Appunti dalle lezioni di Ricerca Operativa. Roma: Università La Sapienza di Roma. Disponibile su: http://www.diag.uniroma1.it//~roma/didattica/RO14-15/cap1-2-3.pdf

[35] Ibidem

[36] Ibidem

[37] Ibidem

[38] AGNETIS, A., Introduzione all'ottimizzazione non vincolata. Disponibile su: <https://www3.diism.unisi.it/~agnetis/ottnonvinc.pdf>

[39] C. SIMON, L. BLUME, 08-2015. Matematica per le scienze economiche. Milano. Egea. Pg.242

matrice hessiana (simmetrica) $D^2 f(x)$ sia definita positiva[40]. Osservazioni analoghe ma di senso opposto vanno praticate nel caso di un punto di massimo relativo.
Differente è il discorso, invece, per un punto stazionario x^* in cui la matrice hessiana $D^2 f(x^*)$ sia indefinita, in questo caso il suddetto punto nella funzione è definito di sella. Un *punto di sella* è caratterizzato dal fatto di essere un punto di minimo per f lungo certe direzioni e un punto di massimo lungo altre direzioni[41].
Infine, rimanendo fra le *condizioni del secondo ordine*, quelle *necessarie*[42] risultano più deboli delle sufficienti. In questo caso, per le funzioni di una variabile si ha la disuguaglianza debole $f''(x) \geq 0$ per un minimo locale che sostituisce quella stretta dettata dalle condizioni sufficienti.
Un eguale indebolimento lo si trova per le condizioni di funzioni in più variabili. All'interno di questo riferimento, la matrice hessiana anziché essere definita positiva o negativa, risulta semidefinita positivamente o negativamente.
Purtroppo, le condizioni sufficienti del primo e del secondo ordine appena citate fanno menzione esclusivamente di massimi e minimi *locali*, esse non specificano se gli estremanti siano anche globali oppure no.
Di seguito, verranno quindi riportate le *condizioni per definire un massimo o un minimo globale*.
Con riferimento ai problemi di ottimizzazione ad una dimensione, affinché un punto stazionario x^* di *f* sia di minimo (o massimo) globale, qualora *f* sia una funzione C^2 definita su un intervallo aperto *I* di $\mathbb{R}$, si hanno le seguenti condizioni:

- x^* è un *punto di minimo* (o *massimo*) locale, ed è l'unico punto stazionario di *f* su *I*.
  Si sottolinea che tale condizione non vale per le funzioni con un numero maggiore di variabili.
- la derivata seconda è *convessa (concava)* su tutto *I* per un minimo (o per un massimo).

2.2.2: Massimizzazione del profitto dell'impresa secondo l'ottimizzazione libera[43]

Una delle più semplici applicazioni in campo economico dei metodi di ottimizzazione di funzioni di più variabili è la massimizzazione del profitto dell'impresa. Supponiamo che un'impresa utilizzi n fattori per produrre un bene. Sia $x \in \mathbb{R}^n_+$ una combinazione di fattori, $y = F(x)$ la funzione di produzione, *C(x)* la funzione di costo e *R(x)* quella di ricavo. Il profitto $\Pi(x)$ è dato da:

$$\Pi(x) = R(x) - C(x)$$

[40] C. SIMON, L. BLUME, 08-2015. Matematica per le scienze economiche. Milano. Egea. Pg.243
[41] Ibidem. Pg 244
[42] Ibidem. Pg 246
[43] Ibidem. Pg. 250

Supponiamo che le due funzioni R e C siano tali che nel punto di ottimo si utilizzi una quantità positiva di ciascun fattore (questo per giustificare l'insieme ammissibile). Allora per le condizioni del primo ordine, le derivate parziali di Π devono annullarsi nel punto di massimo profitto x^*:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x_i}(x^*) = \frac{\partial R}{\partial x_i}(\mathrm{x}^*) - \frac{\partial C}{\partial x_i}(\mathrm{x}^*) = 0$$

Ossia il ricavo marginale ($\partial R/\partial x$) del prodotto derivante dall'impiego di una unità aggiuntiva del fattore *i* deve eguagliare il costo marginale ($\partial C/\partial x$) dell'acquisto di tale unità per $i = 1,2, \dots, n$.

Per approfondire le implicazioni delle condizioni di primo ordine appena enunciate occorre fare delle ipotesi sulle funzioni che ne sono coinvolte.

Identifichiamo con *p* il prezzo di vendita costante all'interno della funzione dei ricavi *R(x)* dove $R(x) = p \cdot F(x)$.

Assumiamo, inoltre, che *F(x)* sia di classe C^1 e che ogni fattore *i* abbia costo unitario *w*, di modo che:

$$C(x) = w_1 x_1 + \cdots + w_n x_n = w \cdot x$$

In queste ipotesi, le condizioni del primo ordine scritte sopra diventano:

$$\frac{\partial R}{\partial x_i}(\mathrm{x}^*) = p \frac{\partial F}{\partial x_i}(\mathrm{x}^*)$$

$$\frac{\partial C}{\partial x_i}(\mathrm{x}^*) = w_i$$

da cui si ricava:

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(\mathrm{x}^*) = \frac{w_i}{p}$$

La condizione necessaria del secondo ordine sulla funzione di produzione richiede che $D^2F(x^*)$ sia semidefinita negativa in corrispondenza della combinazione di fattori ottima[44]. In particolare, questo implica che ogni derivata seconda pura $\frac{\partial^2 F}{\partial x_i^2}$ sia negativa o nulla nel punto x^*. Riassumendo, significa che se per ogni $x \in \mathbb{R}_+^n$ esiste un indice *i* tale che $\frac{\partial^2 F}{\partial x_i^2}(x) > 0$, allora all'interno di $\mathbb{R}_+^n$ non c'è alcuna combinazione di fattori che rende massimo il profitto dell'impresa.

[44] C. SIMON, L. BLUME, 08-2015. Matematica per le scienze economiche. Milano. Egea. Pg.250

Capitolo III:
Ottimizzazione vincolata

3.1: Formulazione generale del problema di ottimizzazione vincolata

La scienza economica studia l'allocazione ottima di risorse scarse. L'*ottimalità* allude alla ricerca di valori estremi di certe grandezze, la *scarsità* implica che tali grandezze non siano libere di assumere qualsiasi valore, bensì soggette a limitazioni. In termini più analitici, si tratta di minimizzare (per esempio dei costi o il rischio) o massimizzare una funzione di più variabili, dovendo tali variabili soddisfare relazioni che ne vincolino i valori[45].

Con riferimento alla formulazione generale del problema[46] del tipo:

$$\begin{array}{ll} \min & f(x) \\ \mathrm{s.a} & x \in S \end{array}$$

a differenza del precedente caso di ottimizzazione non vincolata in cui S coincideva con l'intero spazio vettoriale di *n* variabili $\mathbb{R}^n$, in questo caso l'insieme S è specificato per mezzo di vincoli, ossia un insieme di equazioni $\{h_i(x),\ i \in \varepsilon\}$ e/o disequazioni $\{g_j(x),\ j \in \zeta\}$:

$$\begin{gathered} \min f(x_1, \dots, x_n) \\ h_1(x_1, \dots, x_n) = a_1, \dots, h_m(x_1, \dots, x_n) = a_m, \\ g_1(x_1, \dots, x_n) \leq b_1, \dots, g_k(x_1, \dots, x_n) \leq b_k \end{gathered}$$

dove h_i e g_j sono vettori di funzioni ciascuna di *n* variabili[47]; tale affermazione equivale a dire che, nel caso vincolato, S è un sottinsieme di $\mathbb{R}^n$.

Nel caso *non vincolato*, le condizioni necessarie consistevano nell'annullamento del gradiente e nell'essere l'Hessiana, calcolata nel punto stazionario, semidefinita positiva. Successivamente, verranno illustrate alcune condizioni simili anche per il caso vincolato.

Prima di procedere nella trattazione, è bene definire adeguatamente alcune caratteristiche delle componenti del problema. Ipotizzeremo che la *funzione obiettivo* sia differenziabile con continuità, cioè di classe C^1 e che la *regione ammissibile* sia un insieme convesso, non vuoto e chiuso.

Inoltre, il *vincolo*, geometricamente, individuerà la regione in cui è ristretta la scelta dei valori che assumono le variabili decisionali all'interno di un problema di massimizzazione.

Relativamente ai vincoli, possiamo distinguerli in vincoli lineari, non lineari, violabili, non violabili, veri e propri oppure estremi inferiori e superiori nei gradi di libertà.

---

[45] C. SIMON, L. BLUME, 08-2015. Matematica per le scienze economiche. Milano. Egea. Pg.259
[46] AGNETIS, A., Introduzione all'ottimizzazione vincolata. Disponibile su: https://www3.diism.unisi.it/~agnetis/ottvinc.pdf
[47] C. SIMON, L. BLUME, 08-2015. Matematica per le scienze economiche. Milano. Egea. Pg.259

Inoltre, i vincoli sono destinatari di alcune regole[48] di carattere pratico:

- È necessario che siano consistenti al fine di definire una regione ammissibile alla ricerca dell'ottimo.
- Non è presente alcun limite teorico al numero dei vincoli di disuguaglianza applicabili ai problemi di ottimizzazione, salvo che potrebbero portare ad una regione ammissibile vuota e dunque ad un problema inammissibile e perciò senza soluzione.
- Se il numero di vincoli di uguaglianza è uguale al numero delle variabili decisionali, allora, qualora siano compatibili, l'unica soluzione ammissibile coincide anche con il punto di ottimo.

  Operativamente, se il sistema di equazioni dei vincoli ha più soluzioni, per ottenere il punto di ottimo assoluto occorre valutare la funzione obiettivo in ogni punto della regione ammissibile, selezionando alla fine il punto che produca il valore migliore della funzione obiettivo.
- Qualora vi siano più variabili *(n)* che vincoli di uguaglianza *(m)* il sistema si definisce sottodeterminato ed occorre procedere alla ricerca effettiva degli ottimi della funzione obiettivo.
- Qualora vi siano più vincoli di uguaglianza *(m)* che variabili decisionali *(n)* il sistema si dice sovradeterminato e non esiste una soluzione che soddisfi in modo preciso tutti i vincoli.

Oltretutto, si sottolinea che per tutta la trattazione ipotizzeremmo che sia la funzione obiettivo f che le h_i e g_j siano continuamente derivabili, ossia di classe C^1. Si noti, infine, che questo non pone restrizioni alla forma della regione ammissibile *S*. Infatti, benché la frontiera della regione ammissibile possa presentare "irregolarità" (come, ad esempio, salti o punti angolosi), essa spesso è ancora esprimibile come intersezione di varie regioni, ciascuna avente frontiera regolare.

Infine, poiché nelle applicazioni economiche è frequente trovare vincoli definiti da disuguaglianze, il presente capitolo, si preoccuperà di analizzare in una fase iniziale le condizioni necessarie, ed eventualmente sufficienti, nel caso generalizzato della massimizzazione in presenza di vincoli misti (i.e. vincoli di disuguaglianza e uguaglianza).

Successivamente, la stessa situazione verrà analizzata attraverso i moltiplicatori di Lagrange, che rappresentano un quadro particolare in cui sono presenti solo vincoli di uguaglianza.

[48] MANCA, D. Metodi avanzati per la progettazione e ottimizzazione di processo. Milano: Politecnico di Milano. Disponibile su: https://pselab.chem.polimi.it/wp-content/uploads/2014/03/MAPOP/1-Introduzione-ottimizzazione.pdf

3.2: Problemi con vincoli misti (uguaglianza e disuguaglianza)

Consideriamo il seguente problema:

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) \\ s.a \quad & h_1(x) = 0, \\ & h_2(x) = 0, \\ & \dots \\ & h_m(x) = 0, \\ & g_1(x) \leq 0, \\ & g_2(x) \leq 0, \\ & \dots \\ & g_k(x) \leq 0 \\ & x \in S \subset \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

dove $m \leq n$ e le funzioni f, h_1, h_2, …, h_m, g_1, g_2,…, g_k sono continue[49]. Per semplicità d'ora in avanti scriveremo senza pedici in notazione matriciale $h(x)$ e $g(x)$ affinché il problema P sia più agevole nella forma:

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) \\ s.a \quad & h(x) = 0, \\ & g(x) \leq 0, \\ & x \in S \end{aligned}$$

In questo caso il sottoinsieme S è composto sia da vincoli di uguaglianza $h(x) = 0$ che disuguaglianza $g(x) \leq 0$ (caratterizzati da funzioni concave in modo da rendere S convesso). Algebricamente, si potrà esprimere la precedente proprietà con l'insieme A (detta *regione ammissibile del problema*):

$$A = \{x \in S |\ h(x) = 0, g(x) \leq 0\}.$$

Si noti che un vincolo di disuguaglianza $g_j(x) \leq 0$ è considerato *attivo* nel punto $x^* \in A$ se $g_j(x^*) = 0$, al contrario, è detto *inattivo* nel punto $x^* \in A$ se $g_j(x^*) < 0$[50]. Mentre, i vincoli di uguaglianza $h_i(x) = 0$ sono detti *attivi* in ogni soluzione ammissibile $x \in A$.

Fondamentalmente, un vincolo è detto attivo qualora la soluzione x^* giaccia nel confine della regione ammissibile. È chiaro che solo i vincoli attivi in un punto $x^* \in A$ hanno influenza sull'ammissibilità dei punti in un qualunque intorno $I_r(x^*)$, $\varepsilon > 0$, quindi sull'insieme delle direzioni ammissibili in x^*.

---

[49] A. BURATTO, L. GROSSET, B. VISCOLANI. 2018. Ottimizzazione dinamica. Libreria Progetto. Pg332

[50] C. SIMON, L. BLUME, 08-2015. Matematica per le scienze economiche. Milano. Egea. Pg.277

Se x^* è una soluzione ottima locale del problema in esame e se appartiene all'insieme degli indici dei vincoli di disuguaglianza attivi

$$J_0(x^*) = \{j \in \{1,2,\dots,p\} | g_j(x^*) = 0\},$$

allora x^* è una soluzione ottima locale anche del problema P'_{x^*}:

$$\begin{aligned} min \quad & f(x) \\ s.a \quad & h(x) = 0, \\ & g(x) = 0, j \in J_0, \\ & g(x) \leq 0, j \notin J_0 \\ & x \in S \end{aligned}$$

la cui regione ammissibile è un sottoinsieme A[51]. Inoltre, x^* è anche una soluzione ottima locale del problema P_{x^*}:

$$\begin{aligned} min \quad & f(x) \\ s.a \quad & h(x) = 0, \\ & g(x) = 0, j \in J_0 \\ & x \in S \end{aligned}$$

che è ottenuto dal problema P'_{x^*} togliendo i vincoli di disuguaglianza che risultavano inattivi in x^* . Infatti, se x^*, è soluzione ottima locale de problema P'_{x^*}, allora:

$$\begin{aligned} & h(x^*) = 0, \\ & g(x^*) = 0, \\ & g(x) \leq 0, \\ & x^* \in S \end{aligned}$$

ed esiste un intorno I di x^* tale che

$$\begin{aligned} & f(x^*) \leq f(x) \\ & g(x) < 0 \end{aligned}$$

per ogni *x* soddisfacente le condizioni

$$\begin{aligned} & h(x) = 0 \\ & g(x) = 0 \\ & x \in I \cap S \end{aligned}$$

3.2.1: Condizioni di Karush - Kuhn - Tucker (Condizioni necessarie del primo ordine)

L'obiettivo del seguente paragrafo è analizzare le *condizioni necessarie di ottimalità* per x^*, ossia le condizioni che devono essere soddisfatte quando la soluzione x^* è minimo locale per la funzione $f(x)$. Inoltre, dobbiamo supporre che i vincoli, come detto precedentemente, siano

[51] A. BURATTO, L. GROSSET, B. VISCOLANI. 2018. Ottimizzazione dinamica. Libreria Progetto. Pg333

di classe C^1, affinché le direzioni ammissibili possano caratterizzarsi facilmente tramite i gradienti dei vincoli.

Condizioni di regolarità per i vincoli

In termini generali, sia x^* un punto soddisfacente i vincoli di un problema di massimizzazione, $h(x^*) = 0$, $g(x^*) \leq 0$, e sia $J_0(x^*) = \{j \in \{1,2,\dots,k\} | g_j(x^*) = 0\}$ l'insieme degli indici dei vincoli di disuguaglianza attivi, allora x^* è detto *punto regolare*[52] per i vincoli del problema di ottimizzazione se sono linearmente indipendenti i gradienti

$$\nabla h_i(x^*),\ \ 1 \leq i \leq m; \quad \nabla g_i(x^*), \quad j \in J_0(x^*).$$

In altri termini, la condizione lineare di indipendenza di qualificazione dei vincoli [53]asserisce che un punto x^*, soddisfacente i vincoli del problema, è un punto regolare per gli stessi vincoli se i gradienti dei vincoli attivi in x^*sono linearmente indipendenti.

A questo punto dell'elaborato è indispensabile esporre le condizioni di Karush - Kuhn - Tucker[54] elaborate pubblicate nel 1950:

Sia x^* un punto di minimo locale[55] *per il problema*

$$\begin{array}{ll} min & f(x) \\ s.a & h(x) = 0, \\ & g(x) \leq 0 \end{array}$$

e sia x^* un punto regolare per i vincoli. Allora esistono un vettore $\lambda \in \mathbb{R}^m$ ed un vettore $\mu \in \mathbb{R}^k$, $\mu \geq 0$, tali che:

$$(1) \quad \nabla f(x^*) + \lambda' \nabla h(x^*) + \mu' \nabla g(x^*) = 0'$$

$$(2) \quad \mu' g(x^*) = 0$$

Di conseguenza, una volta definita la *funzione Lagrangiana* associata al problema precedente come

$$\mathcal{L}(x, \lambda, \mu) = f(x) + \lambda' h(x) + \mu' g(x),$$

le condizioni necessarie del primo ordine possono essere scritte nella seguente forma[56]:

(1) $\nabla_x \mathcal{L}(x^*, \lambda, \mu) = 0'$

(2) $\nabla_\lambda \mathcal{L}(x^*, \lambda, \mu) = 0$

---

[52] A. BURATTO, L. GROSSET, B. VISCOLANI. 12/2018. Ottimizzazione dinamica. Padova. Libreria Progetto. Pg328-329
[53] C. SIMON, L. BLUME, 08-2015. Matematica per le scienze economiche. Milano. Egea. Pg.268
[54] A. BURATTO, L. GROSSET, B. VISCOLANI. 12/2018. Ottimizzazione dinamica. Padova. Libreria Progetto. Pg334
[55] Ibidem
[56] Ibidem. Pg. 336

(3) $\nabla_{\mu}\mathcal{L}(x^*, \lambda, \mu) \leq 0$

(4) $\mu'\nabla_{\mu}\mathcal{L}(x^*, \lambda, \mu) = 0'$

(5) $\mu \geq 0$

La condizione (1) rappresenta la condizione di annullamento del gradiente della funzione Lagrangiana associata al problema; la (2) e la (3) sono i vincoli di ammissibilità del punto di ottimo; la (4) è detta *condizione di complementarietà* in quanto il moltiplicatore di un vincolo inattivo deve essere nullo (come vedremo di seguito); mentre, la condizione (5) è la condizione di non negatività del moltiplicatore associato ai vincoli di disuguaglianza

Se in x^*, *punto di minimo locale,* tutti i vincoli di disuguaglianza sono inattivi (cioè se $g^*(x) < 0$ o $J_0(x^*) = \emptyset$), allora $\mu = 0$ e le condizioni di Karush - Kuhn - Tucker sono equivalenti all'affermazione dell'esistenza di un vettore $\lambda \in \mathbb{R}^m$ tale che:

$$\nabla f(x^*) + \lambda'\nabla h(x^*) = 0'.$$

Interpretazione geometrica

Di seguito, l'attenzione verrà spostata sull'interpretazione geometrica delle condizioni di Karush - Kuhn - Tucker, di conseguenza, limiteremo il caso ai soli vincoli di disuguaglianza.

Prima di continuare, si rimanda alla definizione del capitolo I di *cono* (cioè un *insieme di direzioni*) che ci permette di concentrarci sull'operatività delle condizioni.

Fra gli esempi di cono troviamo i sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$, i raggi uscenti dall'origine, le unioni di coni e le intersezioni di coni. Un cono può essere chiuso oppure no, convesso oppure no (se il cono è convesso si considerano le direzioni contenute all'interno dei raggi che delimitano l'insieme. Nel caso inverso le direzioni di riferimento saranno quelle contenute nella regione restante).

Per il problema

$$\begin{array}{cc} min & f(x) \\ s.t & g(x) \leq 0, \end{array}$$

le condizioni di primo ordine[57] si possono scrivere come:

$$-\nabla f(x^*) = \mu'\nabla g(x^*)$$

$$\mu'\nabla g(x^*) = 0, \qquad \mu' \geq 0,$$

ossia come:

$$-\nabla f(x^*) = \sum \mu_j \nabla g_j(x^*),$$

$$\mu_j \geq 0, j \in J_0(x^*)$$

[57] A. BURATTO, L. GROSSET, B. VISCOLANI. 12/2018. Ottimizzazione dinamica. Padova. Libreria Progetto. Pg337

dove $J_0(x^*)$ è l'insieme degli indici dei vincoli di disuguaglianza attivi nel punto x^*.

È possibile affermare che la direzione di preferenza per un problema di minimo è data dall'opposto del gradiente della funzione obiettivo (i.e: $-\nabla f(x^*)$); analogamente, per un problema di massimo è espressa in termini del gradiente della funzione obiettivo, anziché del suo opposto (i.e.: $\nabla f(x^*)$).

Nel caso generale in cui x^*sia un punto regolare per i vincoli, esso soddisfa le condizioni di Karush-Kuhn-Tucker se la direzione di preferenza applicata a tale punto appartiene al cono convesso generato dai vincoli attivi nel punto stesso.

Nel caso particolare in cui x^*, punto di minimo locale, sia *punto interno* alla regione ammissibile, cioè sia tale che $g(x) < 0$, allora necessariamente $\mu = 0$ e le condizioni di Karush - Kuhn - Tucker (alla luce della definizione di cono) equivalgono alla stazionarietà di *f* in x^*:

$$\nabla f(x^*) = 0'$$

In questo caso, il cono convesso generato dai gradienti delle funzioni di vincolo, per i soli vincoli attivi è il cono nullo $\{0\}$. Il medesimo risultato si può ottenere con il punto di massimo locale interno.

Condizioni di Karush-Kuhn-Tucker per diverse formulazioni del problema e della funzione Lagrangiana

Le condizioni di Karush - Kuhn - Tucker (anche note come condizioni necessarie di ottimalità) possono essere così riassunte:

- *caso 1: problema di minimo con vincolo di disuguaglianza non positivo*

$$\begin{array}{ll} min & f(x) \\ s.a. & g(x) \leq 0 \end{array}$$

La funzione Lagrangiana sarà espressa nel seguente modo:

$$\mathcal{L}(x, \lambda, \mu) = f(x) + \mu' g(x)$$

(appurato che verrà ignorata l'esistenza dei vincoli di uguaglianza, la condizione di ammissibilità dei vincoli varrà solo per quelli di disuguaglianza; per questo caso e per i seguenti ci sarà una condizione in meno). Le condizioni di primo ordine, infatti, saranno:

(1) $\nabla_x \mathcal{L}(x^*, \lambda, \mu) = 0$

(2)$\nabla_\mu \mathcal{L}(x^*, \lambda, \mu) \leq 0$

(3) $\mu' \nabla_\mu \mathcal{L}(x^*, \lambda, \mu) = 0$

(4) $\mu \geq 0$

Nel caso in cui la funzione Lagrangiana sia del tipo:

$$\mathcal{L}(x, \lambda, \mu) = f(x) - \mu' g(x)$$

le condizioni saranno identiche tranne che per la numero (4) che diventerà $\mu \leq 0$.

- caso 2: problema di minimo con vincolo di disuguaglianza non negativo.

$$\begin{array}{ll} min & f(x) \\ s.a. & g(x) \geq 0 \end{array}$$

La funzione Lagrangiana sarà:

$$\mathcal{L}(x, \lambda, \mu) = f(x) + \mu' g(x)$$

Le condizioni di primo ordine sono ivi esplicitate:

(1) $\nabla_x \mathcal{L}(x^*, \lambda, \mu) = 0$

(2)$\nabla_\mu \mathcal{L}(x^*, \lambda, \mu) \geq 0$

(3) $\mu' \nabla_\mu \mathcal{L}(x^*, \lambda, \mu) = 0$

(4) $\mu \leq 0$

Si evidenzia che nel caso in cui la funzione Lagrangiana sia del tipo:

$$\mathcal{L}(x, \lambda, \mu) = f(x) - \mu' g(x)$$

Non sono segnalate variazioni ad eccezione della condizione (4) che muta in $\mu \geq 0$.

Analizzando i problemi di massimo troveremo due casi analoghi:

- caso 3: *problema di massimo con vincolo di disuguaglianza non negativo.*

$$\begin{array}{ll} max & f(x) \\ s.a. & g(x) \geq 0 \end{array}$$

La funzione Lagrangiana sarà espressa, come nel caso 1 nel seguente modo:

$$\mathcal{L}(x, \lambda, \mu) = f(x) + \mu' g(x)$$

Analogamente, le condizioni di primo ordine saranno:

(1) $\nabla_x \mathcal{L}(x^*, \lambda, \mu) = 0$

(2)$\nabla_\mu \mathcal{L}(x^*, \lambda, \mu) \geq 0$

(3) $\mu' \nabla_\mu \mathcal{L}(x^*, \lambda, \mu) = 0$

(4) $\mu \geq 0$

Si segnala che nel caso in cui la funzione Lagrangiana sia del tipo:

$$\mathcal{L}(x, \lambda, \mu) = f(x) - \mu' g(x)$$

Le variazioni alle condizioni di Karush - Kuhn - Tucker sono da considerarsi identiche, ad eccezione, come dinanzi esposto della condizione (4) che sarà: $\mu \leq 0$.

- caso 4: problema di massimo con vincolo di disuguaglianza non positivo.

$$\begin{array}{ll} max & f(x) \\ s.a. & g(x) \leq 0 \end{array}$$

La funzione Lagrangiana sarà espressa nel seguente modo:

$$\mathcal{L}(x, \lambda, \mu) = f(x) + \mu' g(x)$$

Analogamente, le condizioni di primo ordine saranno:

(1) $\nabla_x \mathcal{L}(x^*, \lambda, \mu) = 0$

(2)$\nabla_\mu \mathcal{L}(x^*, \lambda, \mu) \leq 0$

(3) $\mu' \nabla_\mu \mathcal{L}(x^*, \lambda, \mu) = 0$

(4) $\mu \leq 0$

Si segnala che nel caso in cui la funzione Lagrangiana sia del tipo:

$$\mathcal{L}(x, \lambda, \mu) = f(x) - \mu' g(x)$$

La condizioni di Karush - Kuhn - Tucker (4), in questo caso diventerà $\mu \geq 0$.

In conclusione, facendo riferimento al problema del tipo:

$$\begin{array}{ll} min & f(x) \\ s.t & g(x) \leq 0, \end{array}$$

ed essendo la funzione Lagrangiana associata esplicitata come segue:

$$\mathcal{L}(x, \lambda, \mu) = f(x) - \mu' g(x)$$

vi sono due possibilità: o il vincolo è attivo, ossia $g(x) = 0$, quindi può essere $\mu \geq 0$; oppure, il vincolo è inattivo, ossia $g(x) < 0$ e nel caso deve valere μ=0. La condizione per cui una delle due disuguaglianze (quella riferita al vincolo o quella riferita al moltiplicatore) deve essere soddisfatta come uguaglianza è detta *condizione di complementarietà* e rappresenta una delle condizioni elaborate da Karush-Kuhn-Tucker.
Una condizione equivalente e più pratica è che sia nullo il loro prodotto; il requisito affinché questo sia possibile è che nella formula $\mu * g(x) = 0$ sia $g(x) = 0$ oppure $\mu = 0$.

Interpretazione economica

Al fine di un'interpretazione economica è utile introdurre l'*ottimizzazione parametrica.* All'interno di questa macroclasse troviamo i *Teoremi dell'inviluppo*[58], ossia una classe di problemi matematici che trova applicazione economica e che si occupa di descrivere la variazione del valore ottimale della funzione obiettivo al variare del parametro di riferimento. Nel caso di vincoli di disuguaglianza, l'ottimizzazione vincolata si articola nel seguente modo:

[58] C. SIMON, L. BLUME, 08-2015. Matematica per le scienze economiche. Milano. Egea. Pg. 300

dati i valori $a^* = (a_1^*, \dots, a_k^*)$, consideriamo il problema Q_a di massimizzare $f(x_1, \dots, x_n)$ sotto i vincoli di disuguaglianza $g_1(x_1, \dots, x_n) \leq a_1^*, \dots, g_k(x_1, \dots, x_n) \leq a_k^*$.

Indichiamo con $x_1^*(a), \dots, x_n^*(a)$ la soluzione del problema[59] Q_{a^*} e con $\mu_1^*(a^*), \dots, \mu_k^*(a^*)$ i corrispondenti valori dei moltiplicatori di Lagrange. Facciamo variare a vicino ad a^*. Supponendo che $x_1^*, \dots, x_n^*$ e $\mu_1^*, \dots, \mu_n^*$ siano funzioni differenziabili di $(a_1, \dots, a_k)$ e che la qualificazione dei vincoli di non degenerazione sia soddisfatta in a^*, vale per ogni $j = 1, \dots, k$

$$\mu_j^*(a_1^*, \dots, a_k^*) = \frac{\partial}{\partial a_j} f(x_1^*(a_1^*, \dots, a_k^*), \dots, x_n^*(a_1^*, \dots, a_k^*).$$

Ipotizziamo quindi che $f(x)$ sia una funzione che rappresenta il profitto dell'impresa e che i parametri a_j al secondo membro siano la quantità disponibile dei fattori produttivi. Ipotizziamo di considerare n attività produttive per cui x_i rappresenta il livello dell'i-esima attività. Sia $g_j(x_1, \dots, x_n)$ la quantità del fattore *j* necessaria per svolgere l'attività 1 al livello x_1, l'attività 2 al livello x_2 e così via. Se a_j rappresenta la quantità del fattore *j* di cui l'impresa dispone, si ottiene il vincolo $g_j(x_1, \dots, x_n) \leq a_j$. Indicando con $f(x_1, \dots, x_n)$ il profitto realizzato quando vengono svolte le attività ai livelli $x_1, \dots, x_n$, la derivata parziale $\frac{\partial}{\partial a_j} f(x_1^*(a), \dots, x_n^*(a)$ rappresenta la variazione del profitto ottimo conseguente alla disponibilità di una unità aggiuntiva del fattore *j*. Il moltiplicatore $\mu_j^*(a)$ misura questa variazione infinitesima, perciò fornisce il valore di un'unità aggiuntiva del fattore *j* in termini di profitto dell'impresa[60]. Alternativamente, esso indica il massimo prezzo che l'impresa sarebbe disposta a pagare per acquisire un'unità aggiuntiva del fattore *j*. Per questa ragione $\mu_j^*(a)$ è anche detto *prezzo ombra* (o *interno*) del fattore *j* e può rappresentare una valutazione altrettanto importante di quanto lo sia il prezzo di mercato che rappresenta il prezzo esterno del fattore.

3.2.2: Massimizzazione dell'utilità con l'ausilio di vincoli di disuguaglianza

All'interno di questo paragrafo verrà analizzato un altro tipico esempio applicativo[61] di quanto sopra formulato, ossia il tipico problema economico di massimizzazione dell'utilità del consumatore. Ipotizziamo di avere una determinata quantità del bene *i*, rappresentata mediante la variabile x_i.

L'utilità, anche intesa come il livello di soddisfazione provato dall'individuo nel consumare x_1 unità del bene 1, x_2 unità del bene 2 e così via è rappresentata dalla funzione $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ a cui sarà alluso di seguito con $U(x_1, \dots, x_n)$.

---

[59] Ibidem. Pg. 298

[60] Ibidem. Pg. 299

[61] Esempio tratto da: C. SIMON, L. BLUME, 08-2015. Matematica per le scienze economiche. Milano. Egea. Pg. 336

Verranno poi indicati con $p_1, \dots, p_n$ i rispettivi prezzi dei beni e con *I* il reddito individuale. Un decisore razionale, ivi nelle vesti del consumatore, vorrà massimizzare la propria utilità prestando però attenzione a rispettare i limiti imposti dal proprio reddito *I*; operativamente, il problema nella forma generale si svilupperà nella seguente modalità:

$$\begin{array}{rl} massimizzare & U(x_1, \dots, x_n) \\ con\ i\ vincoli & p_1x_1 + p_2x_2 + \cdots + p_nx_n \leq I, \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0. \end{array}$$

Si noti che per ricondurci alla forma generale descritta nel precedente paragrafo, basterà riscrivere i vincoli di non negatività $x_i \geq 0$ come $-x_i \leq 0$, in modo che tutti i vincoli di disuguaglianza appaiano nella forma minore o uguale.

Per facilità nell'esemplificazione, trascuriamo i vincoli di non negatività, consideriamo l'esistenza di soli due beni x_1 e x_2, con i relativi prezzi p_1 e p_2, e ipotizziamo che il vincolo di bilancio sia di tipo attivo nel punto di massimo. Il nostro obiettivo è massimizzare una funzione di utilità *U* di classe C^1, sotto il vincolo di bilancio $p_1x_1 + p_2x_2 \leq I$, con p_1 e p_2 prezzi positivi. Supponiamo, inoltre, che per ogni (x_1, x_2) valga:

$$\frac{\partial U}{\partial x_1}(x_1, x_2) > 0 \quad \text{o} \quad \frac{\partial U}{\partial x_2}(x_1, x_2) > 0$$

Quanto appena descritto è una formalizzazione della consueta ipotesi di monotonia; esprimendo la derivata prima della funzione di utilità sempre positivamente, si afferma che i beni considerati sono effettivamente "beni", ossia all'aumentare del loro consumo l'utilità cresce. Essendo soddisfatta la condizione di *qualificazione dei vincoli di non degenerazione* (per cui il numero dei vincoli attivi in un punto non deve superare il numero di variabili indipendenti), possiamo costruire la funzione Lagrangiana:

$$\mathcal{L}(x_1, x_2, \lambda) = U(x_1, x_2) - \lambda(p_1x_1 + p_2x_2 - I)$$

e successivamente ponendo

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1}(x_1, x_2) = \frac{\partial U}{\partial x_1}(x_1, x_2) - \lambda p_1 = 0,$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2}(x_1, x_2) = \frac{\partial U}{\partial x_2}(x_1, x_2) - \lambda p_2 = 0,$$

ottenere le coordinate x_1 e x_2 dei punti stazionari.

Nel punto di massimo, il moltiplicatore λ non potrà annullarsi in quanto si annullerebbero anche $\frac{\partial U}{\partial x_1}$ e $\frac{\partial U}{\partial x_2}$, in contraddizione con quanto prefissato inizialmente per ipotesi.

Pertanto, dovrà essere:

$$\lambda > 0 \quad e \quad \lambda(p_1x_1 + p_2x_2 - I) = 0$$

da cui $p_1x_1 + p_2x_2 = I$; il consumatore spenderà tutto il reddito disponibile, di conseguenza il vincolo di bilancio è attivo e potrà essere trattato come vincolo di uguaglianza.

3.3: Problemi con vincoli di uguaglianza

Una volta analizzato il caso in presenza di soli vincoli di disuguaglianza, risulta più immediato comprendere il caso in presenza di soli vincoli di uguaglianza.
Consideriamo, ora problemi[62] del tipo:

$$\begin{array}{ll} min & f(x) \\ s.a & h_1(x) = 0, \\ & h_2(x) = 0 \\ & \dots \\ & h_m(x) = 0, \\ & x \in S \subset \mathbb{R}^n \end{array}$$

Affinché la regione ammissibile non si riduca ad un insieme di punti isolati o addirittura all'insieme vuoto, occorre fare l'ipotesi che sia $m \leq n$ (ossia il numero dei vincoli di uguaglianza è al massimo pari al numero delle variabili), e che le funzioni f, h_1, h_2, …, h_m siano continue. Per celerità scriveremo $h' = (h_1,\ h_2,\ \dots,\ h_m)$ così che il problema appena descritto diventi:

$$\begin{array}{ll} min & f(x) \\ s.a & h(x) = 0, \\ & x \in S \end{array}$$

Prima di procedere, è necessario caratterizzare le *proprietà* dei singoli fattori che compongono il problema.
Innanzitutto, l'insieme S è definito da vincoli di uguaglianza; analiticamente verrà tradotto dall'insieme

$$A = \{x \in S |\ h(x) = 0\}$$

che rappresenta la regione ammissibile e i suoi punti $x \in A$ sono le soluzioni ammissibili. Come detto per i problemi con vincoli misti, i vincoli di uguaglianza $h_i(x) = 0$ sono detti *attivi* in ogni soluzione ammissibile $x \in A$.

[62] A. BURATTO, L. GROSSET, B. VISCOLANI. 12/2018. Ottimizzazione dinamica. Padova. Libreria Progetto. Pg328

Supponiamo che le funzioni h_1, h_2, …, h_m siano di classe C^1 su S. Chiameremo *spazio tangente*[63] alla superficie *s* nel punto x^* l'insieme delle derivate in x^* di tutte le curve differenziabili su *s* passanti per x^*.

Un punto x^* soddisfacente il vincolo $h(x) = 0$ è detto *punto regolare*[64] del vincolo se sono linearmente indipendenti i gradienti:

$$\nabla h_1(x^*), \nabla h_2(x^*), \dots, \nabla h_m(x^*).$$

In altri termini, appartenga x^* all'insieme $\mathbb{R}^n$, x^* è un punto regolare se e solo se:

$$rk\big(\nabla h(x^*)\big) = m$$

Ossia la naturale generalizzazione della *condizione di qualificazione dei vincoli* è che il rango sia m, ovvero il massimo. La condizione di regolarità implica che l'insieme ammissibile ammetta in ogni punto un piano tangente a *n-m* dimensioni. Più semplicemente, questo indica che lo spazio *S* sia vincolato e definito da *n-m* dimensioni.

La regolarità del punto x^* è una proprietà relativa alla particolare rappresentazione, $h(x) = 0$, della superficie *s* e non relativa semplicemente alla superficie *s* stessa.

3.3.1: Teorema dei moltiplicatori di Lagrange (Condizioni necessarie di primo ordine)

Sia x^* un punto regolare del vincolo $h(x) = 0$ e sia x^* anche un estremante locale (punto di minimo o di massimo locale) per *f* soggetta allo stesso vincolo.

Allora vale

$$\nabla f(x^*)y = 0, \quad \textit{per ogni } y \in \mathbb{R}^n \qquad \textit{tale che } \nabla h(x^*)y = 0$$

Di conseguenza, il *teorema dei moltiplicatori di Lagrange*[65] afferma che:

sia x^* un punto regolare del vincolo $h(x) = 0$ e sia x^* anche un estremante locale per f soggetta allo stesso vincolo. Allora esiste un vettore $\lambda \epsilon \mathbb{R}^m$ tale che:

$$\nabla f(x^*) + \lambda' \nabla h(x^*) = 0'$$

Le condizioni necessarie di 1° ordine appena esplicitate insieme ai vincoli $h(x^*) = 0$ danno $n + m$ equazioni nelle $n + m$ variabili x^*, λ.

[63] A. BURATTO, L. GROSSET, B. VISCOLANI. 12/2018. Ottimizzazione dinamica Padova. Libreria Progetto. Pg.338-339

[64] Ibidem. Pg.329

[65] A. BURATTO, L. GROSSET, B. VISCOLANI. 12/2018. Ottimizzazione dinamica. Padova. Libreria Progetto. Pg.330

Qualora introducessimo la funzione Lagrangiana associata al problema, definita come

$$\mathcal{L}(x,\lambda) = f(x) + \lambda' h(x),$$

allora le condizioni necessarie si esprimerebbero anche nella forma:

$$\nabla_{\mathrm{x}}\mathcal{L}(x^*,\lambda) = 0'$$
$$\nabla_{\lambda}\mathcal{L}(x^*,\lambda) = 0$$

dove le componenti di λ sono dette "*moltiplicatori di Lagrange*". Le condizioni stesse sono note come "*condizioni di Lagrange*" [66].

Interpretazione dei moltiplicatori di Lagrange

Prima di elaborare un esempio dei moltiplicatori di Lagrange è opportuno traslare le nozioni precedentemente apprese ai problemi parametrici.

Siano $f, h_1, \dots, h_m$ funzioni di classe C^1 su $\mathbb{R}^n$ con $m < n$. Dati gli m parametri $a = (a_1, \dots, a_m)$, consideriamo il problema (P_a) consistente nel massimizzare la funzione $f(x_1, \dots, x_n)$ sotto i vincoli

$$h_1(x_1, \dots, x_n) = a_1, \dots, h_m(x_1, \dots, x_n) = a_m$$

Indichiamo con $x_1^*(a), \dots, x_n^*(a)$ la soluzione del problema P_a e con $\lambda_1^*(a), \dots, \lambda_m^*(a)$ i corrispondenti valori dei moltiplicatori di Lagrange[67]. Supponiamo inoltre che le x_i^* e le λ_j^* siano funzioni differenziabili di $a = (a_1, \dots, a_m)$ e che la qualificazione dei vincoli di non degenerazione sia soddisfatta.

Allora per ogni $j = 1, \dots, m$ vale

$$\lambda_j^*(a_1, \dots, a_m) = \frac{\partial}{\partial a_j} f\big(x_1^*(a_1, \dots, a_m), \dots, x_n^*(a_1, \dots, a_m)\big).$$

Nell'analisi economica i valori dei moltiplicatori λ svolgono un ruolo importante poiché misurano la sensibilità del valore ottimo della funzione obiettivo alle *variazioni del parametro.*

3.3.2: Condizioni del secondo ordine

Solitamente nelle applicazioni è possibile dare un significato economico alle condizioni del primo ordine; le condizioni del secondo ordine servono a specificare tale significato.

Ricordando il caso di un'impresa su un mercato concorrenziale (riportata al capitolo II, paragrafo 2.2.2), la condizione del primo ordine per la massimizzazione del profitto implica l'uguaglianza fra ricavo e costo marginale in corrispondenza della quantità ottima. La condizione del secondo ordine richiede che il *costo marginale* in corrispondenza della quantità ottima sia *crescente*.

---

[66] Ibidem

[67] C. SIMON, L. BLUME, 08-2015. Matematica per le scienze economiche. Milano. Egea. Pg. 303

Inoltre, grazie alle condizioni del secondo ordine è in genere possibile eliminare alcuni punti candidati lasciandone magari solo uno. Infine, le condizioni del secondo ordine svolgono un ruolo nell'analisi della statica comparata (o analisi di sensitività) investigando qual è l'effetto di variazioni delle variabili indipendenti sui valori ottimi delle variabili dipendenti[68].
Per rispondere, facendo riferimento al Teorema della funzione implicita, calcoliamo il differenziale totale delle condizioni del primo ordine. Otterremo un sistema di equazioni lineari le cui incognite sono i differenziali delle variabili dipendenti, mentre la matrice dei coefficienti, non è altro che la matrice che descrive le condizioni del secondo ordine del problema ottimo considerato.
Intuitivamente, una condizione del secondo ordine per un problema di minimo vincolato dovrebbe:
- richiedere che qualche matrice hessiana abbia segno positivo;
- considerare solo direzioni "lungo" l'insieme ammissibile.

Condizioni sufficienti del secondo ordine:
Sia (x^*, λ^*) un punto stazionario della funzione Lagrangiana $\mathcal{L}(x, \lambda) = f(x) + \lambda' h(x)$.
Se ci aspettiamo che la condizione del secondo ordine richieda che sia *positivo* il segno di una forma quadratica su un certo insieme di vincoli lineari[69], viene naturale pensare che tale forma quadratica sia la *matrice hessiana* della lagrangiana rispetto a x_i e che i vincoli lineari siano quelli che definiscono il piano tangente all'insieme ammissibile $\{x \in \mathbb{R}^n : h(x) = a\}$ nel punto x^*.
Quindi, il *Teorema sulle condizioni sufficienti del secondo ordine* afferma che:
Siano $f, h_1, \dots, h_m$ funzioni C^2 su $\mathbb{R}^n$ con $m < n$. Consideriamo il problema di minimizzazione di f sull'insieme ammissibile $C_h \equiv \{x : h_1(x) = a_1, \dots, h_m(x) = a_m\}$.
Introduciamo la funzione Lagrangiana e supponiamo che:

a) x^* appartenga all'insieme ammissibile C_h;
b) esistano *m* valori $\lambda_1{}^*, \dots, \lambda_m{}^*$ tali che:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = 0, \dots, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_n} = 0,$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_1} = 0, \dots, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_m} = 0$$

nel punto $(x_1^*, \dots, x_n^*; \lambda_1^*, \dots, \lambda_m^*)$.

[68] C. SIMON, L. BLUME, 08-2015. Matematica per le scienze economiche. Milano. Egea. Pg. 304
[69] Ibidem. Pg. 306

c) la matrice hessiana di $\mathcal{L}$ rispetto a x nel punto (x^*, λ^*), ${D_x}^2\mathcal{L}(x^*, \lambda^*)$, sia *definita positiva* sull'insieme lineare $\{v: Dh(x^*)v = 0\}$, ossia:

$$v \neq 0 \text{ e } Dh(x^*)v = 0 \Longrightarrow v^T(\ {D_x}^2\mathcal{L}(x^*, \lambda^*))v > 0.$$

Allora x^*è punto di minimo locale in senso stretto per f vincolata su C_h.

Ricordiamo che la matrice hessiana[70] $n \times n$ ${D_x}^2\mathcal{L}(x^*, \lambda^*)$, orlata con la matrice $m \times n$ dei gradenti delle funzioni di vincolo $Dh(x^*)$ è così costituita:

$$H \equiv \begin{pmatrix} 0 & Dh(x^*) \\ Dh(x^*)^T & {D_x}^2\mathcal{L}(x^*, \lambda^*) \end{pmatrix}$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & \cdots & 0 & \frac{\partial h_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial h_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{\partial h_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial h_m}{\partial x_n} \\ \hline \frac{\partial h_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial h_m}{\partial x_1} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x_n x_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial h_1}{\partial x_n} & \cdots & \frac{\partial h_m}{\partial x_n} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x_1 x_n} & \cdots & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x_n^2} \end{array} \right)$$

Essa soddisfa le condizioni del secondo ordine per cui è definita positiva se gli ultimi $n - m$ minori principali di Nord-ovest hanno lo stesso segno di $(-1)^{\mathrm{m}}$, essendo *m* il numero dei vincoli.

Se volessimo esporre lo stesso teorema retrocedendo al caso di un problema con due variabili e un vincolo, esso diventerebbe:

Siano *f* e h funzioni C^2 su $\mathbb{R}^2$. Consideriamo il problema di massimizzare *f* sull'insieme ammissibile $C_h = \{(x, y): h(x, y) = a\}$. Introduciamo la funzione Lagrangiana:

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda(h(x, y) - a).$$

Supponiamo che nel punto (x^*, y^*, λ^*) valgano:

(a) $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0,\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 0,\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 0$

(b) $det \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial h}{\partial x} & \frac{\partial h}{\partial y} \\ \frac{\partial h}{\partial x} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial h}{\partial y} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial y^2} \end{pmatrix} < 0$

Allora il punto *(x*, y*)* è di *minimo locale* per *f* su C_h.

---

[70] C. SIMON, L. BLUME, 08-2015. Matematica per le scienze economiche. Milano. Egea. Pg. 307

Condizioni necessarie del secondo ordine:

I teoremi finora enunciati nel presente paragrafo danno condizioni sufficienti del secondo ordine affinché un punto candidato sia soluzione di un problema di minimo vincolato. Se volessimo analizzare la corrispondente *condizione necessaria*[71] per un punto di minimo vincolato è che $D_x^2\mathcal{L}(x^*, \lambda^*)$ sia semidefinito positivo sul nucleo di $D(h^*)$. A tal fine si dovrà richiedere che ognuno degli $n - m$ minori principali di Nord-Ovest sia nullo o abbia lo stesso segno di $(-1)^{\mathrm{m}}$.

[71] C. SIMON, L. BLUME, 08-2015. Matematica per le scienze economiche. Milano. Egea. Pg.315

Capitolo IV:

Applicazioni del teorema dei moltiplicatori di Lagrange

Le applicazioni che il mondo quotidiano ci suggerisce sono molteplici. Per portare un esempio concreto di quanto descritto nei capitoli precedenti, continuiamo con il caso sul benessere del consumatore[72] trattato nel paragrafo 3.2.2. La teoria delle scelte del consumatore descrive come i consumatori distribuiscano i propri redditi tra differenti beni e servizi per massimizzare il proprio benessere.

È costituita da tre aspetti[73]:

- le *preferenze* del consumatore, che ipotizziamo essere razionali sia perché il consumatore preferirà sempre una quantità maggiore dei beni *ceteris paribus*, sia perché ipotizziamo non sia mai sazio;
- i *vincoli di bilancio*, che nel caso del consumatore sono espressi dal *reddito disponibile I*, mostrano le possibili combinazioni di beni che si può permettere di acquistare;
- le scelte del consumatore, date dall'intersezione fra le preferenze del consumatore e il reddito disponibile.

Supponiamo, di conseguenza, che la funzione obiettivo $f(x)$ di un problema di massimizzazione sia rappresentata dall'utilità del consumatore (che rappresenta le *preferenze del consumatore*) e che i parametri a_j al secondo membro dei vincoli di uguaglianza siano, invece, il reddito disponibile dei fattori produttivi (noto come *vincolo di bilancio*). Per il consumatore, così come affermato precedentemente, la scelta ottima consisterà nel procurarsi la migliore combinazione di beni, ovvero quella che lo colloca sulla curva di indifferenza (rappresentata analiticamente dalle *curve di livello*) più alta.

Prima di procedere è bene sottolineare che dal punto di vista geometrico, la massimizzazione vincolata della funzione obiettivo consiste nell'individuazione della più "alta" curva di livello di f tangente alla curva C, che nel nostro caso è in realtà il vincolo di bilancio[74].

[72] Esempio tratto da: Immagine a sinistra: C. SIMON, L. BLUME, 08-2015. Matematica per le scienze economiche. Milano. Egea. Pg261-264

[73] RICOTTA, F., 2012. La teoria delle scelte del consumatore. Cosenza: Università della Calabria. Disponibile su: <http://www.ecostat.unical.it/ricotta/didattica/istituzioni/slides/Consumatore_2012.pdf >

[74] Ibidem

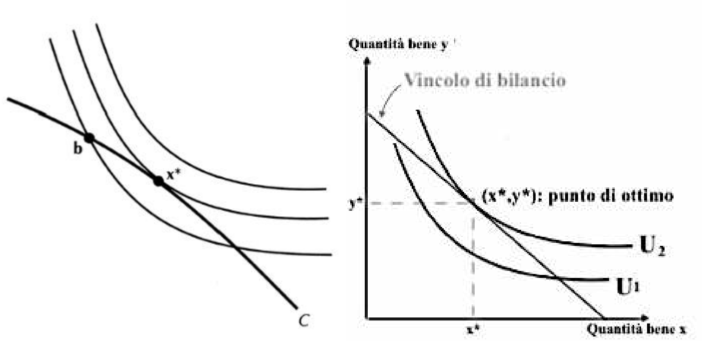

Figura 1[75]*: Confronto fra il concetto geometrico di curva di livello (sulla sinistra) e il concetto economico di curva di indifferenza (a destra).*

Con riferimento alla teoria finora riportata, siamo quindi in grado di costruire la funzione Lagrangiana come segue:

$$\mathcal{L}(x_1, x_2, \lambda) = U(x_1, x_2) + \lambda(p_1 x_1 + p_2 x_2 - I)$$

Risolvendo la massimizzazione non vincolata grazie all'ausilio della funzione Lagrangiana rispetto alle tre variabili (x_1, x_2, λ) otterremo, analogamente alla situazione descritta precedentemente, le seguenti condizioni necessarie:

(1) $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1}(x_1, x_2) = \frac{\partial U}{\partial x_1}(x_1, x_2) - \lambda p_1 = 0,$

(2) $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2}(x_1, x_2) = \frac{\partial U}{\partial x_2}(x_1, x_2) - \lambda p_2 = 0,$

(3) $\lambda(p_1 x_1 + p_2 x_2 - I) = 0$ per $\lambda < 0$

Risistemando le equazioni (1) e (2) si avrà che $\lambda = \frac{\partial U_{x_1}}{\partial U_{x_2}} = \frac{p_{x_1}}{p_{x_2}}$.

Economicamente il rapporto fra le utilità $\frac{\partial U_{x_1}}{\partial U_{x_2}}$ rappresenta il saggio marginale di sostituzione, ossia il beneficio associato al consumo di un'unità aggiuntiva del bene[76]. Il secondo membro dell'equazione è il termine $\frac{p_{x_1}}{p_{x_2}}$ che rappresenta il costo marginale, ossia il costo di un'unità aggiuntiva di x_1.

Inoltre, l'opposto del costo marginale, $-\frac{p_{x_1}}{p_{x_2}}$, coincide con l'inclinazione del vincolo di bilancio.

---

[75] Immagine a sinistra: C. SIMON, L. BLUME, 08-2015. Matematica per le scienze economiche. Milano. Egea. Riferimento Figura 11.1. Pg261.

[76] La teoria delle scelte del consumatore. Disponibile su: http://www.ecostat.unical.it/ricotta/didattica/istituzioni/slides/Consumatore_2012.pdf

Siamo arrivati a concludere che *nel punto di ottimo (x_1*,x_2*) il saggio marginale di sostituzione eguaglia il costo marginale*.

Esposto il problema del consumatore in termini generali, di seguito riportiamo il seguente esempio numerico[77].

Un consumatore usa il proprio reddito per acquistare il bene benzina (x_1) e altri beni (x_2). Data la funzione di utilità $U(x_1, x_2) = x_1^{\frac{2}{5}} x_2^{\frac{3}{5}}$, un reddito disponibile I di 3000 euro, un prezzo della benzina p_{x_1} pari a 1,5 euro/litro e un prezzo degli altri beni p_{x_2} assunto essere pari a 1, si costruirà il problema di ottimizzazione come segue:

$$\begin{array}{ll} Massimizzare & U(x_1, x_2) = x_1^{\frac{2}{5}} x_2^{\frac{3}{5}} \\ soggetto\ a & 1{,}5\, x_1 + x_2 = 3000 \end{array}$$

Date le preferenze e il reddito a disposizione del consumatore, le sue scelte soddisferanno in ogni momento contemporaneamente due condizioni:

1) il paniere ottimale (x_1^*, x_2^*) si deve trovare lungo il vincolo di bilancio.

2) il paniere ottimale deve corrispondere alla combinazione che conferisce al consumatore la massima utilità (se questa condizione non fosse verificata non potremmo trovarci sulla curva di indifferenza più esterna).

Tali condizioni vengono sempre applicate, indipendentemente dal tipo di bene o servizio.

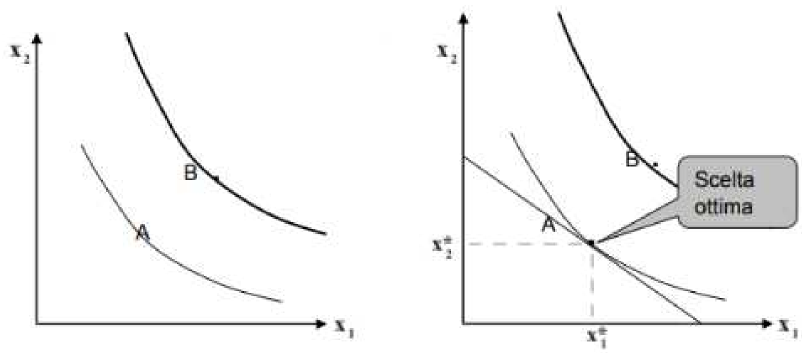

***Figura 2*[78]**: *Il consumatore preferirebbe un paniere B posto su una curva di livello più elevata ma non può acquistarlo poiché non si trova sul vincolo di bilancio; il paniere A è quello che si trova sulla curva più esterna dato il vincolo, perciò rappresenta la scelta ottimale.*

[77] Esempio disponibile su: https://matematicaoltre.altervista.org/esercizi-svolti-sulla-funzione-di-domanda-utilita-scelta-ottima-del-consumatore/

[78] Vedi sopra

Una volta definite le condizioni del problema di massimo, possiamo scrivere la funzione Lagrangiana nel seguente modo:

$$\mathcal{L}(x_1, x_2, \lambda) = x_1^{\frac{2}{5}} x_2^{\frac{3}{5}} + \lambda(1{,}5x_1 + x_2 - 3000) = 0$$

Le condizioni necessarie del primo ordine (con l'ausilio del teorema dei moltiplicatori di Lagrange) saranno così composte:

(1) $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = \frac{2}{5} x_1^{-\frac{3}{5}} x_2^{\frac{3}{5}} + 1{,}5\lambda = 0$

(2) $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} = \frac{3}{5} x_1^{\frac{2}{5}} x_2^{-\frac{2}{5}} + \lambda = 0$

(3) $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 1{,}5x_1 + x_2 - 3000 = 0$

Rapportando tra loro le condizioni (1) e (2) otterremo che $\frac{x_2}{x_1} = 1{,}5^2$. Quella appena individuata rappresenta la condizione di tangenza fra la funzione di utilità $U(x_1, x_2)$ (i.e. la funzione obiettivo) e il vincolo di bilancio (i.e il vincolo di uguaglianza); in altre parole si eguaglia il saggio marginale di sostituzione al costo marginale così come concluso nel caso generale sopra citato.
Sarà ora possibile porre a sistema la condizione di tangenza appena identificata con il vincolo di bilancio.

$$\begin{cases} \frac{x_2}{x_1} = 1{,}5^2 \\ 1{,}5\, x_1 + x_2 = 3000 \end{cases}$$

Dalla risoluzione otteniamo il punto di ottimo A (x_1^*, x_2^*) di coordinate $(x_1 = 800, x_2 = 1800)$. Sostituendo le coordinate del punto ottimale all'interno del vincolo di bilancio, ci accorgeremo immediatamente che il reddito disponibile *I* è interamente speso. Inoltre, il termine λ , economicamente, rappresenta il *saggio marginale di sostituzione* ossia il beneficio per il consumatore associato all'utilizzo di un'unità aggiuntiva della benzina qualora egli rinunciasse ad un'unità degli altri beni.
In conclusione, il consumatore non potrà migliorare ulteriormente la situazione in cui si trova, ad esempio, sostituendo il consumo della benzina con il consumo di altri beni, poiché il paniere appena identificato è ottimale e non vi è modo di modificarlo senza ridurre il grado di soddisfazione del consumatore. Abbiamo così dimostrato che la ricerca del paniere ottimale per un consumatore che vuole massimizzare la sua utilità deriva dalla ricerca di un punto di ottimo all'interno dei problemi di ottimizzazione.

Conclusione

Il confronto fra problemi di ottimizzazione libera e problemi di ottimizzazione vincolata ci ha permesso di ricondurre i secondi, attraverso l'ausilio della funzione Lagrangiana, ai primi. Con questa premessa, dopo aver approfondito l'ottimizzazione vincolata, è stato più intuitivo elaborare un confronto tra i vincoli di disuguaglianza e i vincoli di uguaglianza. In particolare, possiamo concludere che le condizioni necessarie di ottimalità che derivano dall'applicazione della procedura di Lagrange siano valide solamente nel caso particolare in cui tutti i vincoli risultino essere attivi nel punto di ottimo e non vengano considerati i vincoli di non negatività.

Le condizioni di Karush-Kuhn-Tucker rappresentano quindi una generalizzazione del teorema di Lagrange, ma con la presenza di vincoli di non negatività e vincoli di disuguaglianza.

Una volta caratterizzato il campo di applicazione dei problemi di ottimizzazione e i conseguenti schemi risolutivi è stato possibile analizzare un caso applicativo in cui si ipotizzava che il consumatore dovesse scegliere il paniere ottimale tale da massimizzare il suo grado di soddisfazione. Ancora una volta si è dimostrato che la ricerca del paniere ottimale inteso con accezione economica deriva dall'identificazione del punto di ottimo all'interno di un problema di massimizzazione, inteso nella forma matematica.

Il presente caso concreto rappresenta solo uno dei molteplici ambiti di attuazione dei problemi di ottimizzazione. Volendo fare un riferimento al contesto recente, si consideri un agente economico che, di fronte ad una persistente inflazione, debba scegliere la politica monetaria e/o fiscale più efficace fra quelle a disposizione. Il suo dovere sarà quello di ottimizzare le proprie decisioni sulla base della situazione corrente e del portafoglio di strumenti a sua disposizione che possono comprendere sia l'attuazione di una politica monetaria restrittiva (consistente in un aumento dei tassi di interesse, nell'innalzamento del coefficiente di riserva obbligatoria o nella vendita dei titoli di Stato) sia il ricorso ad una politica fiscale volta a diminuire le imposte indirette sul consumatore e ad aumentare quelle dirette.

Tali applicazioni possono, in sostanza, spaziare da situazioni inerenti al processo produttivo aziendale fino alle scelte di politica economica.

In conclusione, è possibile sostenere con ferma certezza, che Lagrange prima e Karush, Kuhn e Tucker in seguito, abbiano contribuito ad alimentare lo sviluppo in molteplici campi, ivi compreso il settore economico, grazie all'elaborazione dei loro teoremi.

Bibliografia

- BERTSCH, M., DAL PASSO, R., GIACOMELLI, L. Analisi matematica. 2 ª edizione. Milano. McGraw-Hill
- BURATTO, A., et al., 09/2014. Matematica generale. 2ª edizione. Padova. Libreria Progetto.
- BURATTO, A., GROSSET, L., VISCOLANI, B. 12/2018. Ottimizzazione dinamica. 5ª edizione. Padova. Libreria Progetto
- INTRILIGATOR, M.D. 2002. Mathematical Optimization and Economic Theory. 1ª edizione. Philadelphia. Siam.
- SIMON, C., BLUME, L., 08/2015. Matematica per le scienze economiche. Traduzione a cura di G. Malafarina, C. Rossignoli, R. Gazzolo. 3ª edizione. Milano. Egea.

Sitografia

- AGNETIS, A., Introduzione all'ottimizzazione non vincolata. Siena: Università degli Studi di Siena. Disponibile su:<https://www3.diism.unisi.it/~agnetis/ottnonvinc.pdf> [data di ultimo accesso: 27/08/2022]
- AGNETIS, A., Introduzione all'ottimizzazione vincolata. Siena: Università degli Studi di Siena. Disponibile su: <https://www3.diism.unisi.it/~agnetis/ottvinc.pdf> [data di ultimo accesso 27/08/2022]
- ANON., 2011. Differenziazione per funzioni di più variabili. Università del Piemonte Orientale. Disponibile su: <https://www.dir.uniupo.it/pluginfile.php/158603/mod_resource/content/1/differenziale.pdf> [data di ultimo accesso: 27/08/2022]
- INVERSI, M., 2019. Introduzione al problema dell'ottimizzazione. Disponibile su: <https://poisson.phc.dm.unipi.it/~inversi/Seminario_Liceo.pdf> [data di ultimo accesso: 27/08/2022]
- KUHN, H. W., 2000. Al posto giusto nel momento giusto. Trascrizione della Lectio Magistralis tenuta presso Princeton University Princeton, Department of Mathematics. Disponibile su: <https://www.unibg.it/sites/default/files/documenti/26-05-2015/lhkuhn.pdf> [data di ultimo accesso 29/08/2022]
- MANARA, C.F., LUCCHINI G., 2013. L'ottimizzazione: dimensioni storico-culturali e matematiche. Disponibile su: <http://www.carlofelicemanara.it/public/file/File/Biografia/Ottimizzazione%20dimensioni%20storico-culturali%20e%20matematiche%202013.pdf > [data di accesso: 27/08/2022]

[i]- MANCA, D. Metodi avanzati per la progettazione e ottimizzazione di processo. Milano: Politecnico di Milano. Disponibile su: <https://pselab.chem.polimi.it/wp-content/uploads/2014/03/MAPOP/1-Introduzione-ottimizzazione.pdf> [data di ultimo accesso 29/08/2022]

- MANUCCI, P., SOMMARIVA, A., 2014. Limiti e continuità in $\mathbb{R}^n$. Padova: Università degli Studi di Padova. Disponibile su: <https://www.math.unipd.it/~alvise/IA_2014/TOPOLOGIA/topologia.pdf> [data di ultimo accesso: 27/08/2022]

- RICOTTA, F., 2012. La teoria delle scelte del consumatore. Cosenza: Università della Calabria. Disponibile su: <http://www.ecostat.unical.it/ricotta/didattica/istituzioni/slides/Consumatore_2012.pdf > [data di ultimo accesso 22/08/2022]

- ROMA, M., SAGRATELLA, S., 2014. Appunti dalle lezioni di Ricerca Operativa. Roma: Università La Sapienza di Roma. Disponibile su: http://www.diag.uniroma1.it//~roma/didattica/RO14-15/cap1-2-3.pdf [data di ultimo accesso: 27/08/2022]

- SESTINI V., 2017. La struttura dei problemi di ottimizzazione. Roma: Università La Sapienza di Roma. Disponibile su <http://www.diag.uniroma1.it//~sestini/ottimizzazione-scan17-18.pdf> [data di ultimo accesso: 27/08/2022]

[i] Totale parole (esclusa bibliografia in nota): 9993