

# UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Dipartimento di Fisica e Astronomia “Galileo Galilei”

Corso di Laurea Triennale in Fisica

Tesi di Laurea

Ricerche Dirette di Materia Oscura Inelastica

Relatore

Prof. Francesco D’Eramo

Laureando

Tobia Vecchiatto Montorio

Anno Accademico 2023/2024



# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>1</b>
<b>1 Evidenze di materia oscura</b>	<b>2</b>
1.1 Scale Galattiche . . . . .	2
1.2 Scale di Ammassi di Galassie . . . . .	3
1.2.1 Massa totale col Teorema del Viriale . . . . .	3
1.2.2 Osservazioni a raggi X . . . . .	4
1.2.3 Lensing gravitazionale debole . . . . .	4
1.3 Scale Cosmologiche . . . . .	5
1.3.1 Formazione di strutture . . . . .	5
1.3.2 Anisotropie nella Radiazione Cosmica di Fondo . . . . .	6
<b>2 Candidati Particellari</b>	<b>7</b>
2.1 Limiti sulla Massa della Materia Oscura . . . . .	7
2.2 Materia Oscura Fredda . . . . .	8
2.2.1 WIMPs . . . . .	9
2.2.2 Assioni . . . . .	9
<b>3 Freeze-out delle WIMP</b>	<b>11</b>
3.1 Equilibrio termico . . . . .	11
3.2 Reliquie termiche . . . . .	12
3.3 Freeze-out Relativistico . . . . .	13
3.4 Freeze-out non Relativistico . . . . .	14
<b>4 Rivelazione Diretta</b>	<b>15</b>
4.1 Cinematica dello Scattering WIMP-Nucleo . . . . .	15
4.2 Rate di Scattering . . . . .	16
4.3 Distribuzione delle velocità . . . . .	18
4.4 Teoria di Campo Efficace . . . . .	19
<b>5 Materia Oscura Inelastica</b>	<b>21</b>
<b>A Cosmologia</b>	<b>24</b>
<b>Bibliografia</b>	<b>26</b>



# Introduzione

La materia oscura (*Dark Matter*, DM) può essere definita come un fluido non relativistico, necessario a spiegare la dinamica e l'evoluzione dell'universo.

A partire da osservazioni su larga scala si può infatti ricavare che la materia ordinaria, inquadrata nella teoria del Modello Standard (*Standard Model*, SM), costituisce solo il 5% del cosmo. Il 68% è dovuto all'energia oscura, responsabile dell'espansione accelerata dell'universo, mentre il restante 27% rende conto della presenza di una componente che non interagisce elettromagneticamente: la materia oscura.

La natura della DM risulta essere uno dei più grandi problemi della fisica moderna e la sua ricerca spazia molti campi, coinvolgendo acceleratori di particelle, osservazioni astronomiche e grandi esperimenti sotterranei.

Questo lavoro di tesi mira a fornire una visione generale su tale argomento, concentrandosi in particolare sulla ricerca diretta nei laboratori.

Nella prima parte verranno descritte le motivazioni principali che hanno portato alla necessità di rendere conto di una quantità di materia nell'universo molto maggiore rispetto alla sola materia luminosa. Successivamente verranno presentati alcuni candidati possibili, seguiti dalla descrizione del meccanismo di produzione termico della DM a partire dal plasma primordiale.

Gli ultimi capitoli saranno infine dedicati alla rivelazione diretta, che costituisce una delle principali modalità di indagine della DM, e al formalismo matematico della materia oscura inelastica. Questo modello teorico risulta essere rilevante in quanto permetterebbe di spiegare le difficoltà finora incontrate nella ricerca sperimentale, grazie ad una soppressione del rate rispetto al caso elastico.

# Capitolo 1

## Evidenze di materia oscura

L'obiettivo di questo capitolo risulta essere quello di descrivere le evidenze che hanno portato ad ipotizzare l'esistenza della materia oscura. La loro analisi verrà articolata sulla scala di galassie, ammassi di galassie e dell'universo.

### 1.1 Scale Galattiche

La prima evidenza di materia oscura emerge analizzando il moto di rotazione delle stelle attorno al centro delle galassie a spirale. Poichè tali corpi difficilmente collidono tra loro, è possibile descriverne il comportamento solo considerando le interazioni di natura gravitazionale. In particolare, applicando la legge di gravitazione Newtoniana, si ottiene il seguente risultato:

$$v_c(r) = \sqrt{\frac{GM(< r)}{r}} \quad (1.1)$$

Dove  $G$  è la costante di gravitazione universale,  $r$  la distanza radiale della stella dal centro della galassia e  $M(< r) = 4\pi \int_0^r z^2 \rho(z) dz$  è la massa contenuta all'interno di un volume di raggio  $r$  con densità  $\rho(r)$ . A partire da queste considerazioni, al di fuori del disco galattico,  $M$  dovrà risultare costante e  $v_c \propto r^{-1/2}$  (caduta Kepleriana).

Analizzando l'effetto Doppler della riga a 21 cm dell'Idrogeno neutro è quindi possibile ricostruire le curve rotazionali caratteristiche di ciascuna galassia. I dati sperimentali rendono però conto di un andamento diverso da quello precedentemente descritto, osservando delle velocità di rotazione approssimativamente costanti per le stelle che si trovano nelle regioni periferiche delle galassie, come si deduce dall'immagine 1.1. Di conseguenza la presenza di materia non può essere limitata solo all'interno del disco galattico, ma ci sarà una componente che non interagisce elettromagneticamente (da qui il nome "materia oscura") che si estende in un alone che circonda la galassia ben oltre il confine visibile.

A partire dalle curve di rotazione, e ipotizzando una distribuzione sferica e simmetrica, è possibile estrarre un profilo di densità approssimativo dell'alone di DM:

$$M(r) \propto r \rightarrow \rho(r) \propto \frac{M(r)}{r^3} \propto \frac{1}{r^2} \quad (1.2)$$

L'ipotesi della distribuzione sferica simmetrica è dovuta al fatto che la DM è supposta essere non dissipativa, considerazione derivante dallo studio degli ammassi di galassie. Tale comportamento si discosta da quello della materia luminosa che, con le continue interazioni reciproche, dissipa molta energia portando al collasso della struttura barionica della galassia in un disco.

Un'ipotesi alternativa per spiegare le curve rotazionali senza dover introdurre la DM è fornita dalla MOND (*Modified Newton Dynamics*). Questa teoria prevede l'introduzione di un fattore  $\mu(a/a_0)$  che andrebbe a modificare la seconda legge di Newton in:  $\mathbf{F} = m\mathbf{a}\mu(a/a_0)$ . In particolare per continuare a far valere la seconda legge della dinamica su scale più piccole di quella galattica, la funzione  $\mu(x)$  viene costruita in modo tale che  $\mu(x) = 1$  per  $x \gg 1$  e  $\mu(x) = x$  per  $x \ll 1$ .

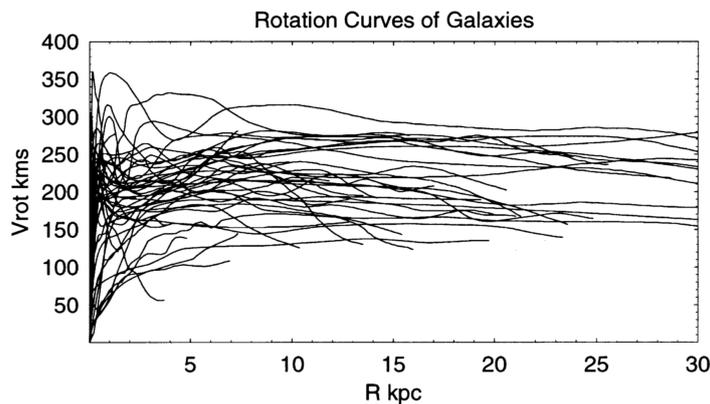


Figura 1.1: Andamenti di curve rotazionali per alcune galassie. Immagine presa da [1]

Si considera quindi un corpo di massa  $m$  orbitante attorno ad una galassia di massa  $M$  a distanza  $r$  molto grande in modo tale che l'accelerazione gravitazionale di cui risente il corpo sia molto piccola ( $x = a/a_0 \ll 1$ ). Allora:

$$F = \frac{GMm}{r^2} = ma\mu(x) \xrightarrow{\mu(x)=\frac{a}{a_0}} \frac{v^2}{r} = a = \frac{\sqrt{GMa_0}}{r} \rightarrow v = (GMa_0)^{1/4} \quad (1.3)$$

Essendo la velocità di rotazione indipendente da  $r$ , la MOND descriverebbe efficacemente le curve di rotazione osservate con  $a_0 \simeq 1.2 \times 10^{-10} \text{ m/s}^2$ , troppo piccola per avere una qualche influenza su esperimenti su scale inferiori del Sistema Solare. Per scale superiori a quelle galattiche la MOND però esaurisce la sua efficienza, fallendo nel descrivere adeguatamente le caratteristiche degli ammassi di galassie, la formazione delle strutture e le anisotropie della radiazione cosmica di fondo (*Cosmic Microwave Background*, CMB).

## 1.2 Scale di Ammassi di Galassie

A questi livelli di indagine dell'universo si possono dedurre importanti caratteristiche sfruttando la virializzazione dei sistemi auto-gravitanti e combinando le informazioni ottenute tramite i raggi-X e il lensing gravitazionale debole.

### 1.2.1 Massa totale col Teorema del Viriale

A partire dai lavori di Fritz Zwicky del 1933 è stato possibile dimostrare la necessità di extra materia per tenere insieme gli ammassi di galassie.

In un sistema auto-gravitante, ossia soggetto alla sua stessa forza gravitazionale, come lo sono ad esempio gli ammassi che contengono dalle centinaia alle migliaia di galassie che interagiscono tra di loro, è possibile applicare il teorema del viriale. Detta  $T$  l'energia cinetica e  $V$  quella potenziale, vale  $2T + V = 0$ . Si considerano quindi le seguenti relazioni:

$$\langle v^2 \rangle = \frac{\sum_i m_i v_i^2}{\sum_i m_i} = \frac{2T}{M}, \quad V = -\frac{1}{2} \sum_i \sum_{j \neq i} \frac{Gm_i m_j}{r_{ij}} \quad (1.4)$$

Dove  $M = \sum_i m_i$  è la massa totale dell'ammasso. Si definisce poi il raggio gravitazionale come segue:

$$R_G = 2M^2 \left( \sum_i \sum_{j \neq i} \frac{m_i m_j}{r_{ij}} \right)^{-1} \quad (1.5)$$

Vale quindi  $V = -GM^2/R_G$  e tramite il teorema del viriale è possibile ottenere la massa totale dalla seguente relazione:

$$M = \frac{R_G \langle v^2 \rangle}{G} \quad (1.6)$$

La velocità quadratica media delle galassie può essere determinata tramite effetto Doppler e proiettando la loro posizione si ricava  $R_G$ .

L'alone di materia oscura, che si estende ben oltre le galassie che lo popolano, può essere modellato come una regione di sovradensità che ha subito un collasso gravitazionale ed è virializzata al tempo presente. La maggior parte della massa dov'è concentrata la materia barionica è essenzialmente dovuta alla DM e quindi si possono utilizzare le stelle come tracciatori del potenziale gravitazionale della materia oscura, trascurandone lo specifico contributo.

Applicando tali considerazioni al *Coma Cluster*, Zwicky ottenne una massa totale sensibilmente maggiore rispetto a quella ricavata dalle osservazioni, a indicare la necessità della presenza della DM.

### 1.2.2 Osservazioni a raggi X

L'idrogeno e l'elio ionizzati, presenti all'interno degli ammassi, subiscono una compressione adiabatica collassando nelle buche di potenziale gravitazionale, raggiungendo temperature di almeno dell'ordine di  $T_{gas} \approx 10 \text{ keV} \approx 10^8 \text{ K}$ . Nonostante le alte temperature, a causa della bassa densità, non avvengono reazioni di fusione nucleare e il gas emette raggi X tramite Bremsstrahlung.

Considerando il gas distribuito secondo una simmetria sferica e imponendo l'equilibrio idrostatico tra il gradiente della pressione ( $P_{gas}$ ) e del potenziale gravitazionale ( $\phi$ ) si ottiene:

$$\frac{1}{\rho_{gas}(r)} \frac{dP_{gas}}{dr} = -\frac{d\phi}{dr} = -\frac{GM_{tot}(< r)}{r^2} \quad (1.7)$$

dove  $\rho_{gas}$  rappresenta la densità di massa. Assumendo valida la condizione di gas ideale e considerando un mix di 75% H e 25% He, vale la relazione  $P_{gas} = \rho_{gas} k_B T_{gas} / \mu m_p$  con  $\mu \approx 0.6$  che rende conto della massa atomica media. In particolare le quantità  $\rho_{gas}$  e  $T_{gas}$  sono ricavabili dall'intensità e dallo spettro dei raggi X emessi, e si può quindi risalire al profilo di massa dell'ammasso tramite:

$$\frac{k_B T}{\mu m_p} \left( \frac{d \ln T}{d \ln r} + \frac{d \ln \rho_{gas}}{d \ln r} \right) = -\frac{GM_{tot}(< r)}{r} \quad (1.8)$$

La massa ricavata dovuta ai soli barioni ( $M_b$ ) risulta essere inferiore a quella totale ed è possibile calcolare la frazione barionica  $f_b = M_b/M_{tot} \approx 0.144 \pm 0.005$ . Considerando l'ammasso come un campione fedele della distribuzione di massa dell'universo è possibile imporre  $f_b \approx \Omega_b/\Omega_m$ , e da qui ricavare una stima della percentuale di materia non barionica nell'universo, al netto degli errori sistematici presenti nella precedente misura.

### 1.2.3 Lensing gravitazionale debole

Il lensing gravitazionale è quel fenomeno che è possibile osservare in corrispondenza di grandi masse che vanno a modificare il percorso della luce nello spazio, come previsto dalla Relatività Generale. Se tale deflessione è piccola si parla di lensing debole e a partire dalla distorsione delle immagini di galassie distanti, si può ricostruire la distribuzione di massa degli ammassi e delle galassie intermedie che generano tali modifiche.

Si considera adesso il caso del *Bullet Cluster* (figura 1.2) che porta una delle evidenze di materia oscura più forti a livello di ammassi di galassie. Il sistema è costituito da due ammassi in collisione l'uno con l'altro e tramite il lensing gravitazionale debole e l'emissione di raggi X risulta possibile ricostruire rispettivamente il profilo di massa totale e di materia barionica. Dai dati ottenuti, si può evidenziare come il gas che compone gli ammassi si concentra prevalentemente nei pressi del punto di collisione. Analizzando la massa totale, invece, si possono osservare le regioni a densità massima in posizioni diametralmente opposte rispetto al centro di interazione e a distanze significativamente maggiori della zona di concentrazione della materia barionica.

La spiegazione del fenomeno si basa sul fatto che al contrario del gas, la materia oscura difficilmente interagisce con sè stessa e di conseguenza le concentrazioni di DM dei due ammassi continuano il loro percorso senza essere rallentati nella collisione. A partire dai dati ricavati è quindi possibile definire un limite sulla sezione d'urto di auto-interazione delle particelle di DM che è pari a:

$$\frac{\sigma_{\chi\chi \rightarrow \chi\chi}}{m_\chi} \leq 1 \text{ cm}^2/\text{g} \simeq 2 \text{ barn}/\text{GeV} \simeq 2 \times 10^{-24} \text{ cm}^2/\text{GeV} \quad (1.9)$$

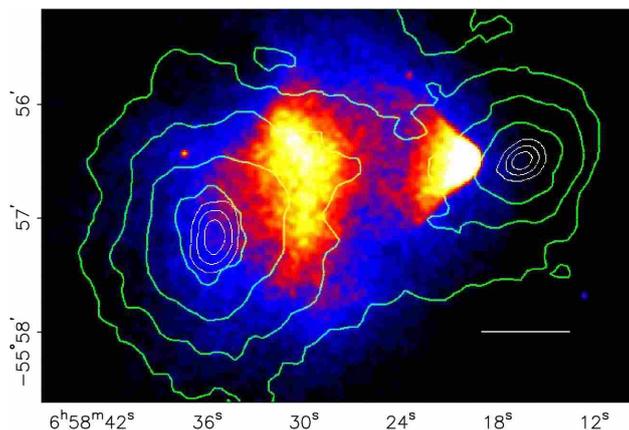


Figura 1.2: Analisi del *Bullet Cluster* a raggi-X (regioni colorate) e tramite weak lensing per ricostruire la massa totale (contorni verdi). Il segmento bianco corrisponde a 200 kpc. Immagine presa da [2].

Tale valore è stato ottenuto imponendo che il cammino libero medio fosse abbastanza lungo da rispettare le osservazioni fatte sull'ammasso. Definendo  $\rho_\chi$  la densità di DM ottenuta tramite weak lensing si può infatti sfruttare la seguente relazione per la stima di  $\sigma_{\chi\chi\rightarrow\chi\chi}/m_\chi$ :

$$\lambda_{\chi\chi\rightarrow\chi\chi} = \frac{1}{n\sigma_{\chi\chi\rightarrow\chi\chi}} = \frac{m_\chi}{\rho_\chi\sigma_{\chi\chi\rightarrow\chi\chi}} \quad (1.10)$$

## 1.3 Scale Cosmologiche

Per quanto riguarda le massime scale osservabili si possono ottenere evidenze di DM studiando il meccanismo di formazione delle strutture nell'universo primordiale e analizzando le anisotropie dello spettro del CMB.

### 1.3.1 Formazione di strutture

Le macrostrutture che compongono il nostro universo (galassie, ammassi,...) nascono a partire da instabilità gravitazionali, generate dalle perturbazioni della densità nello spazio primordiale, che sono cresciute nel tempo. L'evoluzione di tali perturbazioni è determinata dal contenuto dell'universo e dall'orizzonte cosmologico. Detta  $k^{-1}$  la scala comovente di riferimento della perturbazione analizzata, se risulta essere più grande del raggio di Hubble comovente,  $(H^{-1}/a)$ , tale perturbazione non può crescere, poichè legata a punti spaziali non casualmente connessi tra di loro.  $k$  può crescere solo quando "entra nell'orizzonte" ossia se vale la condizione  $k \geq aH$ .

Andando a trattare l'evoluzione dell'universo in funzione delle *fluid equations* di Eulero si ottiene l'equazione di Jeans. Tale relazione descrive come varia il contenuto energetico delle regioni dello spazio con densità che si discosta di  $\rho_1(\mathbf{r}, t)$  dalla densità media dell'universo  $\rho_0(t)$ . Detta  $\delta_k$  la trasformata di Fourier comovente di  $\delta(\mathbf{r}) = \rho_1(\mathbf{r})/\rho_0$ , l'equazione di Jeans si esprime nel seguente modo:

$$\frac{\partial^2 \delta_k}{\partial t^2} + 2H \frac{\partial \delta_k}{\partial t} + \left( \frac{c_s^2 k^2}{a^2} - 4\pi G \rho_0 \right) \delta_k = 0 \quad (1.11)$$

dove è stata definita la velocità sonica come  $c_s^2 = \partial p / \partial \rho = w$  con  $\rho = \rho_0(t) + \rho_1(\mathbf{r}, t)$ . Sfruttando quanto mostrato in appendice A, risolvendo l'equazione di Jeans, si può quindi distinguere il comportamento di materia barionica e DM a seconda del periodo della storia termica dell'universo.

Si considera come primo caso  $c_s = \sqrt{w_r} = 1/\sqrt{3}$  in quanto la materia barionica risulta strettamente accoppiata con la radiazione per i primi 380 kyr. Si utilizzano quindi i risultati esposti in equazione A.11 per un universo dominato dalla materia, ossia la condizione più favorevole per la crescita delle perturbazioni. Considerando  $\rho_0 = \rho_{cr} = 3H^2/8\pi G$  e sostituendo gli andamenti di  $a(t)$  e  $H(t)$  nell'equazione di Jeans, si ottiene:

$$\delta_k = \frac{c_1 \cos(c_0 k t^{1/3}) + c_2 \sin(c_0 k t^{1/3})}{k t^{1/3}} \quad (1.12)$$

che rappresenta una soluzione oscillante (onde di pressione) e smorzata, dove  $c_{0,1,2}$  sono coefficienti dipendenti da  $c_s$  e  $H_0$ . La materia barionica di conseguenza non può addensarsi se non dopo che sia avvenuto il disaccoppiamento dalla radiazione.

Si suppone ora che la DM si sia disaccoppiata dal bagno termico primordiale durante il dominio della radiazione (RD). Ripetendo il procedimento eseguito per la materia barionica con  $c_s = 0$ , si può ricavare l'evoluzione dei modi di perturbazione nell'epoca di RD (sinistra) e di dominio della materia (destra):

$$\delta_k \propto \ln t + \text{cost.}, \quad \delta_k = c_{\text{grow}} t^{2/3} + c_{\text{decay}} t^{-1} \quad (1.13)$$

La formazione di strutture avviene quindi nel seguente modo. Fluttuazioni quantistiche nell'universo primordiale subiscono un'espansione accelerata a causa dell'inflazione che comporta una riduzione del raggio di Hubble. Terminata l'inflazione quest'ultimo torna a crescere, permettendo alle lunghezze d'onda che soddisfano la relazione  $k \geq aH$  di entrare nell'orizzonte ed evolvere con gli andamenti descritti a seconda delle epoche di riferimento.

Al contrario della DM, la crescita di perturbazioni barioniche è però impedita dal bagno di fotoni fino al periodo della Ricombinazione. A quel punto anche i barioni cessano di interagire strettamente con la radiazione e possono addensarsi nelle buche di potenziale gravitazionale già formate dalla materia oscura, disaccoppiandosi in epoche precedenti.

A partire dai risultati ricavati si può quindi costruire il *Matter Power Spectrum*  $P(k)$  teorico. Quest'ultimo risulta essere la trasformata della funzione di autocorrelazione  $\eta(\mathbf{r}) = \langle \delta(\mathbf{x})\delta(\mathbf{x}') \rangle$  con  $\mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{x}'$ . Fisicamente significa che ad alti (bassi) valori di  $P(k)$  esistono molte (poche) strutture di lunghezza caratteristica  $1/k$ . Risulta però che le simulazioni che rimpiazzano la DM con i barioni sono incompatibili con lo spettro ottenuto dalle osservazioni, che invece può essere ben rappresentato col modello descritto precedentemente.

### 1.3.2 Anisotropie nella Radiazione Cosmica di Fondo

Osservando lo spettro del CMB è possibile notare dei discostamenti dalla condizione di omogeneità della temperatura dei fotoni. Il fenomeno può essere studiato espandendo le fluttuazioni di temperatura in armoniche sferiche nel seguente modo:

$$\frac{\Delta T(\theta, \phi)}{\bar{T}} = \frac{T(\theta, \phi) - \bar{T}}{\bar{T}} = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^l a_{lm} Y_l^m(\theta, \phi) \quad (1.14)$$

Dove  $\bar{T}$  è la temperatura media e  $T(\theta, \phi)$  è la temperatura rilevata lungo una certa direzione. Lo spettro in potenza angolare viene costruito a partire dalla quantità  $C_l = \langle |a_{lm}|^2 \rangle$ .

Le prove della materia oscura si possono osservare a partire dall'ampiezza delle fluttuazioni di temperatura e osservando i picchi acustici dello spettro del CMB. Quest'ultimi sono dovuti alle oscillazioni a cui era soggetto il fluido composto da fotoni e materia nell'universo primordiale, causate dalla contrapposizione tra forze di pressione e forze gravitazionali.

Si considera una tipica fluttuazione di temperatura:  $\delta T/T \approx 10^{-5}$ . Quest'ultima in generale è causata da una perturbazione della densità  $\rho_0 \delta$  che genera una perturbazione nel potenziale  $\nabla^2 \Phi_1 = 4\pi G \rho_0 \delta$  che si traduce in una variazione locale della temperatura dei fotoni.

Le perturbazioni di densità della materia barionica però non possono crescere fino al periodo della ricombinazione come evidenziato dall'equazione 1.12. L'unica possibilità per avere un universo caratterizzato da soli barioni e osservare comunque le macrostrutture che caratterizzano lo spazio, sarebbe quella di avere fluttuazioni ben più grandi di quelle rilevate:  $\delta T/T \approx 10^{-4}$ . Da qui la necessità di materia non barionica che segue un'evoluzione indipendente dal bagno dei fotoni prima della Ricombinazione.

Per quanto riguarda i picchi acustici, una maggiore densità barionica aumenta l'ampiezza dei picchi dispari mentre l'altezza del terzo picco risulta essere sensibile alla concentrazione di materia oscura fredda ossia non relativistica  $m < T$  (*Cold Dark Matter*, CDM). Da queste considerazioni è possibile ricavare i parametri densità della materia (*Planck 2018*):

$$\Omega_b h^2 = 0.02237 \pm 0.00015, \quad \Omega_{cdm} h^2 = 0.120 \pm 0.012 \quad (1.15)$$

## Capitolo 2

# Candidati Particellari

Per definire delle ipotesi sulla composizione della DM risulta essere utile elencare le caratteristiche che devono essere soddisfatte.

- Innanzitutto bisogna considerare che la DM interagisce gravitazionalmente e quindi deve avere massa. Le evidenze descritte in capitolo 1 si basano infatti solo su tale forza fondamentale.
- Deve essere inoltre stabile o avere un tempo di vita medio di almeno dell'ordine dell'età dell'universo
- Bisogna considerare che la DM non è stata osservata interagire col campo elettromagnetico.
- La maggior parte della DM deve anche essere non dissipativa altrimenti non si potrebbero formare gli aloni attorno le galassie. Una piccola frazione potrebbe però esserlo (5-10%), comportando l'emissione di "fotoni oscuri" o altre particelle "oscuri".
- Si assume infine che la DM sia non collisionale.

Successivamente verranno quindi descritti alcuni dei principali candidati di DM che sono stati sviluppati nel corso degli anni.

### 2.1 Limiti sulla Massa della Materia Oscura

Il punto di partenza nella ricerca della DM consiste nel caratterizzare lo spettro delle masse dei possibili candidati. In particolare per quanto riguarda i limiti inferiori bisogna considerare le proprietà statistiche, andando a distinguere le caratteristiche di bosoni e fermioni.

Il limite inferiore della massa di un candidato bosonico lo si ricava dal principio di indeterminazione di Heisenberg:

$$\Delta p \Delta x \geq 1, \quad \Delta x = 2R_{halo}, \quad \Delta p = m_\chi v \quad (2.1)$$

dove  $v$  è la velocità tipica del sistema. Prendendo il caso di una galassia nana, dove si possono formare i più piccoli aloni stabili, si ottiene:

$$m_\chi \geq 10^{-22} \text{ eV} \quad (2.2)$$

Si considera adesso il numero di particelle all'interno di un volume di de Broglie:

$$\lambda_{dB} = \frac{2\pi}{m_\chi} v_\chi \simeq 0.4 \text{ kpc} \left( \frac{10^{-22} \text{ eV}}{m_\chi} \right), \quad N = (\lambda_{dB})^3 \frac{\rho_\chi}{m_\chi} \simeq 10^{94} \left( \frac{10^{-22} \text{ eV}}{m_\chi} \right)^4 \quad (2.3)$$

dove sono stati utilizzati i valori di riferimento della DM nel Sistema Solare  $v_\chi = 10^{-3}$  e  $\rho_\chi = 0.3 \text{ GeV/cm}^3$ . Nel momento nel quale si considerano dei bosoni (ossia particelle per le quali è possibile avere uno stato con numero di occupazione molto elevato) con una massa dell'ordine di  $10^{-22} \text{ eV}$ , ottengo  $N \gg 1$ . A seguito di tale conclusione risulta più utile considerare il comportamento collettivo e quindi tali candidati vengono descritti secondo il formalismo dei campi classici.

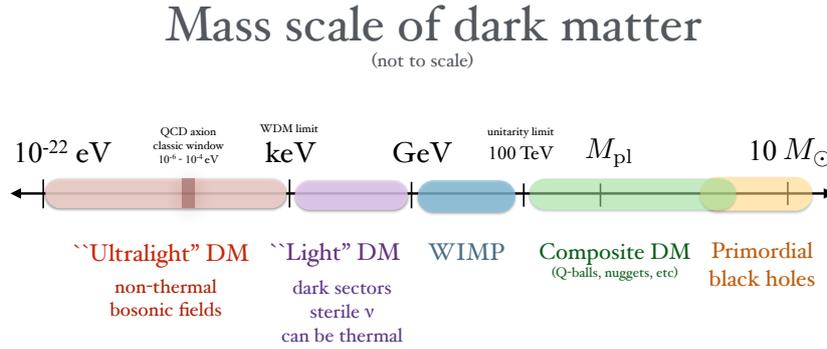


Figura 2.1: Spettro delle masse dei candidati di materia oscura. Immagine presa da [3]

Per quanto riguarda i candidati fermionici bisogna considerare il principio di esclusione di Pauli che, utilizzando il modello a gas di Fermi, comporta un limite superiore della densità nello spazio delle fasi:

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{p}) \leq \frac{g}{2\pi^2 \hbar^3} \quad (2.4)$$

dove  $g$  è il numero di stati di spin e sapore. Considerando quindi la densità numerica di materia oscura fermionica si ottiene:

$$n = \int d^3p f(\mathbf{x}, \mathbf{p}) \leq \frac{g}{2\pi^2 \hbar^3} \frac{4\pi}{3} p_{\max}^3 = n_{\max} \quad (2.5)$$

dove  $p_{\max} = m_\chi v_{esc}$  e  $v_{esc}$  è la velocità di fuga dalla galassia calcolata tramite l'ipotesi di un alone virializzato  $v_{esc} = \sqrt{\frac{2GM}{R_G}}$ . Vale quindi:

$$n_{avg} = \frac{3}{4\pi R_G^3} \frac{M}{m_\chi} \leq n_{\max} \quad (2.6)$$

$$m_\chi^4 \geq \frac{9}{8} \frac{\hbar^3}{g} (2GR_G)^{-\frac{3}{2}} M^{-\frac{1}{2}} \rightarrow m_\chi \geq 70 \text{ eV} \quad (2.7)$$

dove nell'ultimo passaggio sono state utilizzate  $R_G$  e  $M$  della galassia nana della Fornace.

Infine il limite superiore di un generico candidato particellare è dato dalla massa di Planck  $M_{pl}$ , mentre lo spettro completo dei candidati di DM presenta come estremo i buchi neri primordiali. Quest'ultimi appartengono alla classe dei MACHOS (*MASSive Compact Halo Object*) che comprende tutti quegli oggetti astronomici standard che presentano un grande rapporto massa/luminosità.

Avendo definito l'intervallo di masse spaziato dalla materia oscura e rappresentato in figura 2.1, si vuole adesso mettere un vincolo sulle sue proprietà per poter descriverne alcune classi di candidati.

## 2.2 Materia Oscura Fredda

La materia oscura in generale può essere classificata come calda (*Hot Dark Matter*, HDM), che è relativistica, fredda (*Cold Dark Matter*, CDM), con velocità trascurabile, e tiepida (*Warm Dark Matter*, WDM), con caratteristiche intermedie ad entrambe.

In realtà per rispettare le informazioni ottenute sulle dinamiche delle formazione di strutture nell'universo, la maggior parte della DM deve essere del tipo CDM.

Se infatti si considera la HDM, si osserverebbe un meccanismo che comporta una iniziale formazione di superammassi e solo successivamente le odierne strutture tramite frammentazione, mentre le osservazioni rendono conto del processo inverso nel quale galassie e ammassi sono costituiti da un gran numero di sottostrutture formatesi precedentemente.

Se invece fosse la WDM la componente principale della materia oscura, si osserverebbe, a causa del moto delle sue componenti, una soppressione dei  $k$ -modi corrispondenti a piccole lunghezze di scala nel *Matter Power Spectrum*. Tale caratteristica non rispecchia però le osservazioni sperimentali.

Il modello di materia oscura più accreditato è quindi quello della CDM e successivamente verranno presentati alcuni specifici candidati *cold* che estendono lo SM.

### 2.2.1 WIMPs

Le "Weakly Interacting Massive Particle" rappresentano una classe di candidati particellari termici che spaziano su masse dai keV a  $\approx 100$  TeV. Con candidati termici si intende che le WIMP erano in equilibrio col bagno termico dello SM nell'universo primordiale, per poi disaccoppiarsi ed evolvere in modo indipendente fino ai giorni nostri. Tale meccanismo verrà descritto nel capitolo 3. La caratteristica di essere debolmente interagenti non deriva da alcuna prova sperimentale ma è giustificata dal meccanismo di freeze-out accennato precedentemente ed è alla base degli esperimenti di rivelazione diretta che altrimenti non potrebbero rilevare gli eventi di scattering tra DM e nuclei bersaglio.

Un esempio di candidato appartenente alla classe delle WIMP emerge dalla teoria della Supersimmetria (SUSY), che sarebbe in grado di risolvere il problema gerarchico legato alla massa del bosone di Higgs.

Tale ostacolo viene superato introducendo un partner supersimmetrico ad ogni particella del Modello Standard (SM): ad ogni bosone corrisponderà un fermione supersimmetrico e viceversa. La presenza di queste particelle permetterebbe una cancellazione degli effetti delle fluttuazioni sulla massa dell'Higgs, risolvendo il problema gerarchico.

La più leggera particella supersimmetrica (*Lightest Supersymmetric Particle*, LSP) risulta essere un'ottima candidata per la materia oscura se vale la conservazione della  $R$ -parità. Quest'ultima è definita nel seguente modo:  $R = (-1)^{3B+L+2S}$  con  $R$ ,  $B$ ,  $S$  rispettivamente il numero quantico barionico, leptonico e di spin. Per le particelle del SM vale  $R = +1$ ,  $R = -1$  per i partner supersimmetrici. La conservazione della  $R$ -parità implica la stabilità della LSP.

Restringendo il campo al *Minimal Supersymmetric Standard Model* (MSSM), gli unici superpartner neutri e privi di carica di colore sono il gravitino, tre sneutrini (esclusi per considerazioni sulla sezione d'urto) e i quattro neutralini. Quest'ultimi sono stati che si formano a partire dal mescolamento dei superpartner dei bosoni di gauge neutri che mediano l'interazione elettrodebole e dell'Higgs, ossia il bino ( $\tilde{B}$ ), il wino ( $\tilde{W}^3$ ) e due higgsini neutri ( $\tilde{H}_1$ ,  $\tilde{H}_2$ ). "Il neutralino" fa riferimento alla configurazione di massa minore tra le quattro possibili.

Sia  $N$  la matrice che diagonalizza la matrice di massa nella base  $\{\tilde{B}, \tilde{W}, \tilde{H}_1, \tilde{H}_2\}$ . In termini di elementi di matrice, la composizione del neutralino è data da:

$$\chi^0 = N_{11}\tilde{B} + N_{12}\tilde{W}^3 + N_{13}\tilde{H}_1 + N_{14}\tilde{H}_2 \quad (2.8)$$

che è una funzione delle masse dei due gaugini, del parametro di massa dell'higgsino, dell'angolo di Weinberg e del rapporto dei valori di aspettazione nel vuoto dei doppietti di Higgs.

Si osserva però che per la maggior parte dello spazio dei parametri del neutralino, l'abbondanza di materia oscura prevista risulta essere superiore a quella osservata. È necessario quindi introdurre dei meccanismi che ne rendano più efficiente l'annichilazione nell'universo primordiale. Ad esempio se si suppone una grande frazione di higgsino ( $|N_{13}|^2 + |N_{14}|^2$ ) o wino ( $|N_{12}|^2$ ), l'annichilazione risulta essere maggiormente favorita grazie a costanti di accoppiamento elevate, mentre la presenza di una particella supersimmetrica con massa di poco maggiore al neutralino renderebbe possibile le co-annichilazioni anche tra questi due stati.

### 2.2.2 Assioni

Gli assioni sono particelle teorizzate per risolvere il problema della violazione della simmetria CP per le interazioni forti. A tale fenomeno è associato il parametro  $\theta$ , che rende conto delle interazioni tra gluoni che violano tale simmetria. A partire da misurazioni del momento di dipolo elettrico del neutrone, si può ricavare il valore  $\theta < 10^{-10}$ , insolitamente piccolo per un parametro che può spaziare da 0 a  $2\pi$ .

La soluzione proposta per superare tale problema è quella del meccanismo di Pacci-Quinn (PQ). Si introduce quindi nel Modello Standard un nuovo tipo di simmetria globale  $U(1)_{PQ}$  chirale dalla cui rottura esplicita verrà prodotto uno pseudo-bosone di Goldstone: l'assione. Per questioni fenomenologiche la scala di rottura spontanea della simmetria (SSB) deve essere  $f_a \gg 100$  GeV, che coincide con l'energia al di sotto della quale i termini di rottura della simmetria non sono più trascurabili.

Il problema viene quindi risolto associando a  $\theta$  un campo quantistico che emerge quando la simmetria PQ viene rotta esplicitamente, comportando la formazione di un potenziale del tipo  $V(a) = \frac{m_a}{2} a^2$ . Il campo degli assioni è definito come  $a = \theta f_a$  e il potenziale presenta quindi un minimo per  $\theta = 0$ . La rottura della simmetria avviene al momento della transizione di fase della cromodinamica quantistica (QCD), quando l'abbassamento della temperatura dell'universo primordiale ha permesso il passaggio da un plasma di quark e gluoni (QGP) alla formazione degli stati legati di adroni. La transizione di fase rompe la simmetria PQ, distorcendo il potenziale e formando minimi discreti il cui andamento può essere approssimato da  $V(a)$ .

Considerando uno scostamento dalla posizione di equilibrio  $a_i = f_a \theta_i$ , si genereranno delle oscillazioni coerenti nel campo degli assioni. Quest'ultime si comporteranno come CDM e il valore della relativa densità di energia al tempo presente è dato da:

$$\Omega_a h^2 = 0.195 \theta_i^2 \left( \frac{f_a}{10^{12} \text{ GeV}} \right)^{1.184} = 0.105 \theta_i^2 \left( \frac{10 \mu\text{eV}}{m_a} \right)^{1.184} \quad (2.9)$$

Nella trattazione degli assioni come candidati di materia oscura è necessario distinguere il momento in cui è stata possibile la rottura della simmetria PQ: prima o dopo l'inflazione.

Se avvenuta prima, gli assioni risultano essere casualmente connessi e presenteranno tutti lo stesso valore di  $\theta_i$ . Se  $\theta_i \approx \mathcal{O}(1)$  allora per  $m_a \simeq 10 \mu\text{eV}$  e  $f_a \simeq 10^{12} \text{ GeV}$  sarebbe possibile ottenere la corretta densità di DM. Opposta a questa "regione classica", è presente anche la "regione antropica" caratterizzata da valori di  $\theta_i \ll 1$  e conseguenti valori di  $m_a$  e  $f_a$  rispettivamente più bassi e più alti, come evidenziato dall'equazione 2.9.

Considerando invece che la PQ SSB sia avvenuta dopo l'inflazione, si potrebbe osservare un universo caratterizzato da differenti domini tutti casualmente disconnessi l'uno con l'altro e ognuno con un valore casuale di  $\theta_i$ . Attraverso il meccanismo di Kibble si va a formare una rete di stringhe che decade generando gli assioni al momento della rottura esplicita della simmetria.

## Capitolo 3

# Freeze-out delle WIMP

All'interno di questo capitolo si vuole descrivere il framework teorico che si ipotizza abbia portato alla formazione dell'attuale densità di materia oscura a partire dal plasma primordiale e le conseguenze che si possono ricavare sulla natura della DM.

### 3.1 Equilibrio termico

Nell'universo primordiale dominato dalla radiazione tutti i componenti sono in equilibrio in un bagno termico, con la temperatura che risulta essere l'unico parametro necessario per caratterizzare il cosmo.

La funzione di distribuzione di una generica particella termica è data da:

$$f(\mathbf{p}) = \frac{1}{e^{E/T} \pm 1} \quad (3.1)$$

che rappresenta una distribuzione di Fermi-Dirac (segno "+" al denominatore) o di Bose-Einstein (segno "-") a seconda che la particella descritta sia rispettivamente un fermione o un bosone.

La densità numerica ( $n_{eq}$ ) e la densità di energia ( $\rho_{eq}$ ) si calcolano nel seguente modo:

$$n_{eq}(T) = g \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} f(\mathbf{p}), \quad \rho_{eq}(T) = g \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} E f(\mathbf{p}) \quad (3.2)$$

Dove  $g$  è il numero di gradi di libertà di spin della particella.

Si considerano due casi estremali:

- Particelle relativistiche ( $m \ll T \rightarrow E^2 \simeq \mathbf{p}^2$ ). Distinguendo con "b" i bosoni e "f" i fermioni si ottengono i seguenti risultati:

$$n_{eq,b}(T) = \frac{\zeta(3)}{\pi^2} g T^3, \quad n_{eq,f}(T) = \frac{3}{4} \frac{\zeta(3)}{\pi^2} g T^3 \quad (3.3)$$

$$\rho_{eq,b}(T) = \frac{\pi^2}{30} g T^4, \quad \rho_{eq,f}(T) = \frac{7}{8} \frac{\pi^2}{30} g T^4 \quad (3.4)$$

con  $\zeta(3) \approx 1.20$  che rappresenta la funzione di Riemann. La densità di energia totale, considerando solo specie relativistiche, è data da:

$$\rho_r(T) = \frac{\pi^2}{30} g_r(T) T^4, \quad g_r(T) = \sum_{m \ll T} g_b \left( \frac{T_b}{T} \right)^4 + \frac{7}{8} \sum_{m \ll T} g_f \left( \frac{T_f}{T} \right)^4 \quad (3.5)$$

Dove nella sommatoria particelle e anti-particelle vengono contate separatamente. I gradi di libertà interni  $g_{b,f}$  di bosoni e fermioni tengono conto dello spin e qualsiasi altro numero quantico.

- Particelle non relativistiche ( $m \gg T \rightarrow E \simeq m$ ). Le distribuzioni si riducono alla p.d.f. di Boltzmann, dalla quale si ottiene la seguente soppressione esponenziale:

$$n_{eq}(T) = g \left( \frac{mT}{2\pi} \right)^{3/2} e^{-m/T} \quad \rho_{eq} \simeq m n_{eq} \quad (3.6)$$

Tale andamento è dovuto al fatto che mentre rimane sempre possibile l'annichilazione delle particelle, se  $m \gg T$  la formazione di nuove è sfavorita viste le basse energie in gioco in confronto con la massa considerata.

Si definisce a questo punto la densità di entropia  $s = (p + \rho)/T$ . Poichè il contributo all'entropia è dato maggiormente dalle componenti relativistiche, sfruttando l'equazione di stato  $p = w\rho$  per tali particelle ( $w = 1/3$ ) e l'equazione 3.5, si ottiene:

$$s = \frac{2\pi^2}{45} g_{*S}(T) T^3 \quad (3.7)$$

Dove  $g_{*S}$  sono i gradi di libertà entropici definiti nel seguente modo:

$$g_{*S}(T) = \sum_{m \ll T} g_b \left( \frac{T_b}{T} \right)^3 + \frac{7}{8} \sum_{m \ll T} g_f \left( \frac{T_f}{T} \right)^3 \quad (3.8)$$

Le sommatorie tengono in considerazione bosoni e fermioni relativistici che a seconda del periodo della storia dell'universo possono essersi disaccoppiati dall'equilibrio termico (processo di "freeze-out"), evolvendosi quindi a temperature differenti. Ad alte temperature tutte le particelle dello SM sono relativistiche e in equilibrio. Si avrà quindi  $T_i = T$  e conseguentemente  $g_{*S}(T) = 106.75$ .

Si può inoltre osservare che poichè l'universo non può scambiare calore con un sistema esterno, l'entropia per unità di volume comovente rimane costante  $S = sa^3 = \text{cost}$ . Il valore attuale della densità di entropia corrisponde a quello dei fotoni del CMB e utilizzando 3.7 si ottiene:

$$s_0 = 1.1 \times 10^{-11} \text{ eV}^3 \quad (3.9)$$

Un'ulteriore relazione utile è data dalla dipendenza del parametro di Hubble dalla temperatura ottenuta sfruttando l'equazione di Friedmann  $H^2 = \frac{8\pi G\rho}{3}$  e l'equazione 3.5:

$$H = \frac{\pi}{3} \sqrt{\frac{8\pi}{10}} \sqrt{g_\rho(T)} \frac{T^2}{M_{pl}} \quad (3.10)$$

dove la massa di Planck in unità naturali è definita come  $M_{pl} = \frac{1}{\sqrt{G}}$

## 3.2 Reliquie termiche

Si vuole definire quindi l'evoluzione di una generica particella  $\chi$  mantenuta in equilibrio chimico con il bagno termico primordiale tramite la reazione  $\chi\bar{\chi} \leftrightarrow f\bar{f}$  dove  $f$  è una componente dello SM. Si considera una situazione priva di asimmetria tra particelle e antiparticelle  $n_\chi = n_{\bar{\chi}} = n$  e in cui  $\chi$  e  $\bar{\chi}$  possono solo annichilirsi e crearsi in coppia. L'andamento della densità nel tempo è dato dall'equazione di Boltzmann:

$$\frac{dn}{dt} = -3Hn - \langle \sigma_A v \rangle (n^2 - n_{eq}^2) \quad (3.11)$$

dove  $\sigma_A$  è la sezione d'urto di annichilazione  $\chi\bar{\chi}$  e  $v$  è la velocità relativa tra  $\chi$  e  $\bar{\chi}$ . La notazione bracket indica che il prodotto viene mediato sulla funzione di distribuzione. Il primo termine del secondo membro tiene conto dell'espansione dell'universo e infatti trascurando i processi di annichilazione e creazione, dovuti al secondo termine, si ritrova la diluizione della densità di materia per un universo in espansione  $n \propto a^{-3}$ .

Si definiscono quindi le seguenti variabili adimensionali:  $Y = \frac{n}{s}$  e  $x = \frac{m}{T}$ . Da  $S = \text{cost}$  si ricava:

$$\frac{ds}{dt} a^3 + 3sa^2 \frac{da}{dt} = 0 \rightarrow \frac{ds}{dt} = -3 \frac{s}{a} \frac{da}{dt} = -3Hs \quad (3.12)$$

Dividendo 3.11 per  $s$  si ottiene quindi:

$$\frac{1}{s} \frac{dn}{dt} = \frac{dY}{dt} - 3H \frac{n}{s} = -3H \frac{n}{s} - \langle \sigma_A v \rangle \frac{(n^2 - n_{eq}^2)}{s} \quad (3.13)$$

$$\frac{dY}{dt} = -s \langle \sigma_A v \rangle (Y^2 - Y_{eq}^2) \quad (3.14)$$

Effettuando la sostituzione  $\frac{dY}{dt} = \frac{dY}{dx} \frac{dx}{ds} \frac{ds}{dt}$  e applicando 3.12 si arriva a:

$$\frac{dY}{dx} = \frac{1}{3H} \frac{ds}{dx} \langle \sigma_{Av} \rangle (Y^2 - Y_{eq}^2) \quad (3.15)$$

dove per arrivare alla precedente espressione è stato considerato  $g_{*S}$  costante, condizione che risulta essere una buona approssimazione per i nostri scopi. Vale quindi che  $\frac{ds}{dx} = -3\frac{s}{x}$  e l'equazione 3.15 diventa:

$$\frac{x}{Y_{eq}} \frac{dY}{dx} = -\frac{\Gamma_A}{H} \left[ \left( \frac{Y}{Y_{eq}} \right)^2 - 1 \right] \quad (3.16)$$

dove  $\Gamma_A = n_{eq} \langle \sigma_{Av} \rangle$  è la frequenza di annichilazione delle particelle. Poichè  $S = sa^3$  è costante si avrà che il numero di particelle per unità di volume comovente  $N = na^3$  è proporzionale a  $Y$ . Osservando l'equazione 3.16 si ottiene che tale quantità è costante ( $dY/dx = 0$ ) se  $\frac{\Gamma_A}{H} \ll 1$ .

Il freeze-out avviene quando l'espansione dell'universo, regolata dal parametro  $H$ , porta a rendere estremamente improbabili ulteriori interazioni tra le particelle a causa della loro diluizione nello spazio. Cessando di interagire, anche gli eventi di annichilazione vengono meno, mantenendo costante il numero di particelle per unità di volume comovente.

Partendo da una situazione di equilibrio nel bagno termico primordiale con  $\Gamma_A > H$ , il disaccoppiamento avverrà quando:

$$\Gamma_A(T_{fo}) = \langle \sigma_{Av} \rangle_{T=T_{fo}} n_{eq}(T_{fo}) \simeq H(T_{fo}) \quad (3.17)$$

dove  $T_{fo}$  coincide con la temperatura dell'universo al momento del freeze-out.

### 3.3 Freeze-out Relativistico

Si vuole adesso andare a caratterizzare l'evoluzione di particelle relativistiche in equilibrio col bagno di fotoni, in particolare dei neutrini. Quest'ultimi sono mantenuti in equilibrio da interazioni elettrodeboli come  $e^+e^- \leftrightarrow \nu\bar{\nu}$  e la sezione d'urto può essere stimata come  $\langle \sigma_{Av} \rangle \approx G_F^2 T^2$  dove  $G_F \simeq 10^{-5} \text{ GeV}^2$  è la costante di Fermi. Sfruttando questo risultato e l'equazione 3.3 si ottiene  $\Gamma_\nu \approx G_F^2 T^5$ . La condizione per il freeze-out dei neutrini risulta quindi essere:

$$\frac{\Gamma_\nu}{H} \approx G_F^2 T^3 M_{pl} \ll 1 \quad (3.18)$$

Dove al primo passaggio è stata utilizzata la dipendenza di  $H$  dalla temperatura evidenziata precedentemente in 3.10. I neutrini di conseguenza sono usciti dall'equilibrio quando la temperatura è diminuita al di sotto di  $(G_F^2 M_{pl})^{-1/3} \approx 1 \text{ MeV}$ .

Avvenuto il freeze-out i neutrini sono liberi di muoversi nell'universo e vanno a costituire il *Cosmic Neutrino Background*.

La relativa abbondanza al momento del freeze-out risulta essere:

$$Y_{fo} = \frac{135\zeta(3)g}{8\pi^4 g_{*S}} \quad (3.19)$$

con  $g_{*S} = \frac{11}{2} + \frac{7}{8} \cdot 6 = 10.75$  calcolato tenendo in considerazione fotoni, elettroni/positroni e neutrini (3 specie per 2 polarizzazioni) nel bagno termico e  $g = 3/2$  nel caso di neutrini attivi.

Per calcolare l'abbondanza di neutrini termici nell'universo attuale bisogna considerare la conservazione di  $Y_{fo}$  e l'attuale densità di entropia, ricavata in sezione 3.1. Supponendo un freeze-out istantaneo di tutti i neutrini si ottiene quindi:

$$\Omega_\chi h^2 = \frac{\rho_\chi}{\rho_0} h^2 = \frac{m_\chi Y_{fo} s_0}{\rho_0} h^2 \rightarrow \Omega_\nu h^2 \approx 0.12 \times 0.14 \left( \frac{\sum_\nu m_\nu}{4.1 \text{ eV}} \right) \quad (3.20)$$

dove per  $s_0$  è stato considerato il valore riportato in equazione 3.9. Con  $m_\nu = 0.1 \text{ eV}$  (limite superiore sulla massa del neutrino) e considerando una sola specie, si ottiene una quantità pari allo 0.2% della densità di materia attuale e di conseguenza i neutrini termici dello SM non possono essere considerati i costituenti principali della DM. A questi fatti si aggiungono anche le considerazioni fatte sulla formazione di strutture nell'universo da parte della HDM e sui limiti inferiori della DM fermionica.

### 3.4 Freeze-out non Relativistico

Considerando una particella non relativistica ( $T \ll m_\chi$ ) di materia oscura si possono andare a sostituire le equazioni 3.6 e 3.10 dentro 3.17 ottenendo:

$$g_\chi \left( \frac{m_\chi^2}{2\pi x_{fo}} \right)^{3/2} e^{-x_{fo}} \langle \sigma_{Av} \rangle \approx \frac{\pi}{3} \sqrt{\frac{8\pi}{10}} \sqrt{g_\rho(x_{fo})} \frac{m_\chi^2}{M_{pl} x_{fo}^2} \quad (3.21)$$

dove  $x_{fo} = m_\chi/T_{fo}$ . La soluzione per trovare tale quantità si ottiene risolvendo numericamente:

$$x_{fo} = \frac{1}{2} \ln(x_{fo}) + \ln \left( \sqrt{\frac{45}{8}} \frac{g_\chi}{2\pi^3} \frac{m_\chi M_{pl} \langle \sigma_{Av} \rangle}{g_\rho^{1/2}(x_{fo})} \right) \quad (3.22)$$

Considerando ora  $Y(x)$ , a seguito del congelamento del numero di particelle per unità di volume comovente, vale che:

$$Y(x) = \begin{cases} Y_{eq}(x) & \text{per } x < x_{fo} \\ Y_{eq}(x_{fo}) & \text{per } x \geq x_{fo} \end{cases} \quad (3.23)$$

A partire dalla stima del parametro di densità della DM, ottenuto dalle analisi di *Planck 2018* ( $\Omega_{cdm} h^2 = 0.120 \pm 0.012$ ), si può ricavare una stima di  $Y(x)$  al tempo presente:

$$\Omega_\chi h^2 = \frac{m_\chi s_0 Y_0}{\rho_0/h^2} \rightarrow Y_0 \simeq \frac{\text{eV}}{m_\chi} \quad (3.24)$$

Al momento del freeze-out valgono invece le seguenti relazioni:

$$Y_{fo} = \frac{n_\chi^{eq}}{s} = \frac{H}{s \langle \sigma v \rangle} = \frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{g_\rho(T_{fo})}}{g_{*S}(T_{fo})} \frac{x_{fo}}{m_\chi M_{pl} \langle \sigma_{Av} \rangle} \quad (3.25)$$

Uguagliando 3.24 e 3.25 si ottiene quindi:

$$\langle \sigma_{Av} \rangle \simeq \frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{g_\rho(T_{fo})}}{g_{*S}(T_{fo})} \frac{x_{fo}}{\text{eV} \times M_{pl}} \simeq \frac{1}{10^9 \text{ GeV}^2} \quad (3.26)$$

dove sono stati considerati i valori tipici di  $g_\rho$ ,  $g_{*S}$  e dato che la densità numerica viene soppressa esponenzialmente se  $T < m_\chi$  è stato considerato  $x_{fo} = 10$ , dato compatibile con le soluzioni numeriche di equazione 3.22.

Si può osservare come la sezione d'urto ricavata coincide con le tipiche sezioni d'urto delle interazioni deboli, come per esempio si ottiene prendendo dei valori di massa e costante di accoppiamento debole come  $m_\chi = 100 \text{ GeV}$  e  $\alpha_W = 0.03$ :

$$\langle \sigma_{Av} \rangle \approx \frac{\alpha_W^2}{m_\chi^2} \approx \frac{1}{10^9 \text{ GeV}^2} \quad (3.27)$$

che nelle unità del sistema internazionale, introducendo un fattore di velocità non relativistico, si ottiene:

$$\langle \sigma_{Av} \rangle \approx 2 \times 10^{-26} \text{ cm}^3/\text{s} \quad (3.28)$$

Da qui nasce l'ipotesi che la materia oscura possa essere composta da particelle massive che siano soggette a questo tipo di interazioni oltre che alla forza gravitazionale: le WIMP. La coincidenza fenomenologica appena descritta va sotto il nome di "miracolo delle WIMP".

Per quanto riguarda il limite inferiore sulla massa di questi candidati, si possono ricavare delle informazioni dal *Matter Power Spectrum*. Il più piccolo modo di perturbazione osservato risulta essere dell'ordine dei  $10 - 20 \text{ Mpc}^{-1}$ , che entra all'interno dell'orizzonte per  $z \approx 10^7$ . La temperatura del bagno di fotoni corrispondente a quell'epoca risulta essere  $T_0(1+z) \approx \text{keV}$ . Affinchè la DM sia non relativistica al momento del freeze-out è quindi necessario che  $m_\chi > \text{keV}$ , assumendo un meccanismo di produzione termico.

# Capitolo 4

## Rivelazione Diretta

La ricerca della materia oscura avviene essenzialmente lungo tre direzioni: acceleratori di particelle, rivelazione indiretta, basata sull'indagine di prodotti di annichilazione o decadimento di particelle di DM nello spazio, e rivelazione diretta. Quest'ultima modalità si basa sulla ricostruzione di eventi di interazione WIMP-nucleo all'interno di laboratori opportunamente schermati in modo tale da abbattere i segnali di fondo indesiderati.

Vengono riportati alcuni dati significativi per la direct detection:

- Distanza del Sole dal centro galassia(GC):  $R_\odot = (8.178 \pm 0.013 \pm 0.022)$  kpc (GRAVITY collaboration)
- Velocità di rotazione locale attorno al GC:  $v_c(R_\odot) = v_\odot = (229.0 \pm 0.2)$  km/s (GAIA, APOGEE e altre fonti combinate)
- Densità locale di DM:  $\rho_\chi(R_\odot) = (0.36 \pm 0.02)$  GeV/cm<sup>3</sup>. Tale risultato è stato ottenuto a partire da misurazioni su scala locale, osservando i movimenti delle stelle vicine, e galattiche, relazionando opportunamente il moto della materia luminosa a dati riguardanti ad esempio le curve di rotazione o la massa totale.
- Velocità di fuga:  $v_{esc}(R_\odot) = (580 \pm 63)$  km/s (GAIA)

Successivamente verranno espone le caratteristiche principali della rivelazione diretta.

### 4.1 Cinematica dello Scattering WIMP-Nucleo

Si considera un tipico esperimento con un nucleo bersaglio di massa  $m_N \approx 100$  GeV e temperatura  $T \approx 1$  K. Per quanto riguarda le velocità in gioco, imponendo  $c = 1$ , si osserva un moto di agitazione termica dei nuclei con  $v_N \approx 10^{-16}$  e una velocità media delle particelle di DM nel laboratorio pari a  $v_\chi \approx 10^{-3}$ . Nella trattazione di tali interazioni risulta quindi ragionevole considerare il limite non-relativistico.

Si indicano quindi con  $\mathbf{p}$  e  $\mathbf{p}'$  i momenti della WIMP prima e dopo l'interazione e con  $\mathbf{k}$  e  $\mathbf{k}'$  le analoghe quantità per il nucleo. Gli invarianti Galileiani che verranno considerati saranno invece il momento trasferito e la velocità relativa tra WIMP incidente e nucleo, definiti nel seguente modo:

$$\mathbf{q} = \mathbf{p} - \mathbf{p}' = \mathbf{k}' - \mathbf{k}, \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}_\chi - \mathbf{v}_N \quad (4.1)$$

Sapendo che nel sistema del CM  $\tilde{\mathbf{k}} = -\tilde{\mathbf{p}}$  si ricava che le quantità di moto in tale sistema sono riscrivibili in modo invariante sotto trasformazioni Galileiane:

$$\tilde{\mathbf{p}} = \frac{m_\chi \tilde{\mathbf{p}} + m_N \tilde{\mathbf{p}}}{m_\chi + m_N} = \frac{m_\chi m_N}{m_\chi + m_N} (\tilde{v}_\chi + \tilde{v}_N) = \mu |\tilde{\mathbf{v}}_\chi - \tilde{\mathbf{v}}_N| \rightarrow \tilde{\mathbf{p}} = \mu \mathbf{v} \quad (4.2)$$

dove  $\mu = \frac{m_\chi m_N}{m_\chi + m_N}$  è la massa ridotta WIMP-nucleo.

Ponendosi quindi nel sistema di riferimento del centro di massa vale che  $\tilde{\mathbf{p}}' = \mathbf{q} + \mu\mathbf{v} = -\tilde{\mathbf{k}}'$ . Si può quindi ricavare:

$$\frac{q^2}{2} = \frac{1}{2}(\tilde{\mathbf{p}}' - \tilde{\mathbf{p}})^2 \stackrel{|\tilde{\mathbf{p}}|=|\tilde{\mathbf{p}}'|}{=} \tilde{p}^2 - \tilde{\mathbf{p}} \cdot \tilde{\mathbf{p}}' = \tilde{p}^2(1 - \cos\theta) = \mu^2 v^2(1 - \cos\theta) \quad (4.3)$$

dove è stata sfruttata la condizione di scattering elastico ( $|\tilde{\mathbf{p}}| = |\tilde{\mathbf{p}}'|$ ) ed stato introdotto il parametro  $\theta$  che rappresenta l'angolo di scattering nel sistema del CM:

$$\cos\theta = \hat{\tilde{\mathbf{p}}} \cdot \hat{\tilde{\mathbf{p}}}' = \hat{\tilde{\mathbf{k}}} \cdot \hat{\tilde{\mathbf{k}}}' \quad (4.4)$$

L'analisi procede considerando nulle le fluttuazioni di velocità termiche del nucleo ( $\mathbf{k} = \mathbf{0}$ ) viste le basse temperature dei tipici esperimenti di rivelazione diretta. L'energia di rinculo nucleare (*Nuclear Recoil*, NR) dopo l'interazione è quindi pari a :

$$E_R = \frac{k'^2}{2m_N} = \frac{q^2}{2m_N} = \frac{\mu^2 v^2}{m_N}(1 - \cos\theta) \quad (4.5)$$

dalla quale è possibile ricavare la velocità minima della particella di DM necessaria per indurre un NR con una determinata energia  $E_R$  e quindi generare un segnale osservabile dall'apparato strumentale:

$$v = \sqrt{\frac{m_N E_R}{\mu^2(1 - \cos\theta)}} \rightarrow v_{min} = \sqrt{\frac{m_N E_R}{2\mu^2}} = \frac{q}{2\mu} \quad (4.6)$$

È quindi possibile notare che a parità di  $E_R$ , una WIMP con massa minore avrà velocità minima più alta. Questo si traduce quindi in una maggiore difficoltà nel rilevare interazioni con particelle poco massive in quanto il numero di NR che posso analizzare diminuisce se aumenta la velocità minima. Quest'ultima inoltre diventa ancora più grande se vado a considerare il caso di uno scattering di tipo inelastico che verrà trattato nel capitolo 5.

Considerando una WIMP con momento  $p = 10$  MeV (con ad esempio  $m_\chi = 100$  GeV e  $v_\chi = 10^{-4}$ ) si ottiene la seguente lunghezza di de Broglie:  $\lambda_{dB} = h/p \approx 12$  pm. Confrontando quest'ultima con il raggio di un nucleo di Uranio,  $r \approx (1.25 \text{ fm})A^{1/3} \approx 8$  fm, si può osservare che il processo di scattering considerato sia di tipo coerente, ossia coinvolge il nucleo nella sua interezza senza andare a distinguere l'interazione della WIMP col singolo nucleone o quark.

## 4.2 Rate di Scattering

A questo punto risulta necessario effettuare delle previsioni teoriche che permettano di caratterizzare lo spettro energetico di interazione WIMP-nuclei. In questo modo sarà possibile interpretare i risultati degli esperimenti e distinguere eventi che coinvolgono la DM da altri agenti indesiderati.

Si definiscono quindi la densità numerica di DM ( $n$ ), il numero di bersagli ( $N_T$ ) e l'esposizione ( $\epsilon$ ) nel seguente modo:

$$n = \frac{\rho_\chi}{m_\chi}, \quad N_T = \frac{M_T}{m_N}, \quad \epsilon = tM_T \quad (4.7)$$

dove  $M_T$  è la massa totale dei bersagli e  $t$  è il tempo di durata dell'esperimento.

Detto  $\Phi$  il flusso di WIMP incidenti, il numero di interazioni è quindi dato da:

$$N = \Phi t N_T \sigma = n v t N_T \sigma = \frac{\epsilon \rho_\chi N_T}{m_\chi M_T} v \sigma \quad (4.8)$$

dove  $\sigma$  è la sezione d'urto di interazione DM-nucleo.

Detto  $R = N/\epsilon$  il rate di eventi, cioè il numero di eventi per unità di tempo e di massa del bersaglio, si può calcolare il rate di eventi differenziale nel seguente modo:

$$\frac{dR}{dE_R} = \frac{\rho_\chi N_T}{m_\chi M_T} \left\langle v \frac{d\sigma}{dE_R} \right\rangle = \frac{\rho_\chi N_T}{m_\chi M_T} \int v f(\mathbf{v}) \frac{d\sigma}{dE_R} d\mathbf{v} \quad (4.9)$$

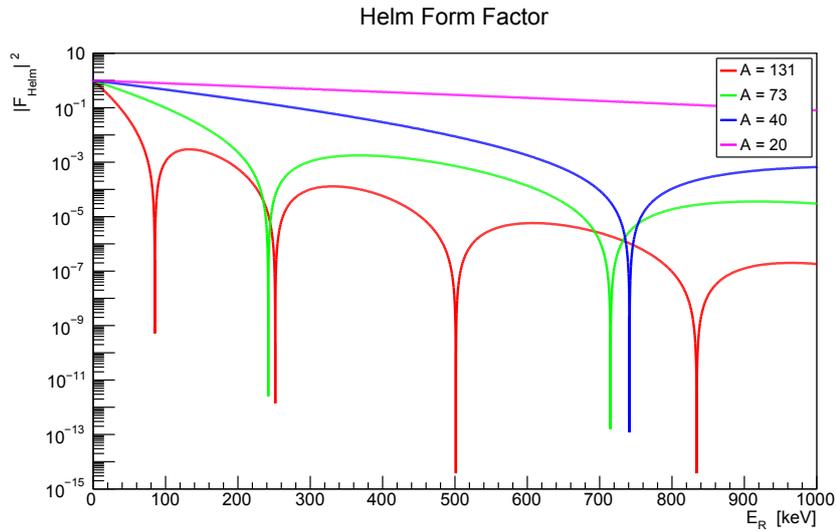


Figura 4.1: Fattori di forma di Helm in funzione dell'energia di rinculo nucleare per differenti nuclei utilizzati in esperimenti di rivelazione diretta: Xenon( $A=131$ ), Germanio( $73$ ), Argon( $40$ ) e Neon( $20$ )

Dove  $f(\mathbf{v})$  è la funzione di distribuzione della DM nel sistema di riferimento del laboratorio che verrà descritta in sezione 4.3 e  $\frac{d\sigma}{dE_R}$  rappresenta la sezione d'urto differenziale di scattering.

Nel limite non-relativistico si può quindi approssimare l'interazione con una distribuzione di scattering isotropica nel CM e quindi vale:

$$\frac{d\sigma}{d\cos\theta} = \text{cost} = \frac{\sigma}{2} \quad (4.10)$$

Sfruttando quindi l'espressione di  $E_R$  ricavata in equazione 4.5 si ottiene:

$$\frac{d\sigma}{dE_R} = \frac{d\sigma}{d\cos\theta} \frac{d\cos\theta}{dE_R} = \frac{m_N}{2\mu^2\beta^2} [\sigma_0^{SI} F_{SI}^2 + \sigma_0^{SD} F_{SD}^2] \quad (4.11)$$

dove SD e SI indicano interazioni tra DM e nucleoni che coinvolgono o meno lo spin di quest'ultimi (spin-dependent o spin-independent).  $F_{SI/SD}$  sono i fattori di forma nucleare che tengono conto della struttura del nucleo che non può più essere considerato come oggetto puntiforme per  $q \neq 0$ . Nel caso di interazioni SI si utilizza solitamente il fattore di forma di Helm ottenuto dalla trasformata di Fourier della distribuzione di massa del nucleo:

$$F(q) = \frac{3j_1(qr_0)}{qr_0} e^{-\frac{q^2 s^2}{2}} \quad (4.12)$$

dove  $q$  è il momento trasferito in unità di  $\hbar$ ,  $s$  è lo spessore della pelle nucleare ( $s \approx 1$  fm) ed è stato definito il parametro  $r_0$  nel seguente modo:

$$r_0 = \sqrt{r^2 - 5s^2} \quad (4.13)$$

dove  $r = (1.25 \text{ fm})A^{1/3}$  rappresenta il raggio nucleare. Con  $j_1(x)$  è stata poi indicata a funzione sferica di Bessel:

$$j_1(x) = \frac{\sin(x)}{x^2} - \frac{\cos(x)}{x} \quad (4.14)$$

In figura 4.1 sono stati plottati alcuni fattori di forma di Helm in funzione dell'energia di rinculo nucleare.

Definendo  $\sigma_n$  e  $\mu_n$  rispettivamente la sezione d'urto WIMP-neutrone con  $q = 0$  e la massa ridotta WIMP-nucleone, vengono proposte le sezioni d'urto SI e SD WIMP-nucleo più utilizzate:

$$\sigma_0^{SI} = \frac{\mu^2}{\mu_n^2} \sigma_n \frac{[f_p Z + f_n(A - Z)]^2}{f_n^2} \propto A^2 \text{ (se } f_n = f_p) \quad (4.15)$$

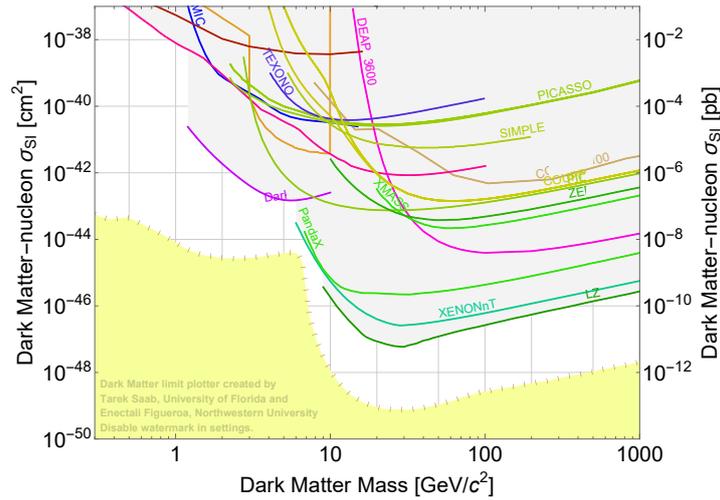


Figura 4.2: L'immagine rappresenta i limiti nello spazio dei parametri della sezione d'urto SI della DM, aggiornati al 07/04/2023. La regione colorata in giallo costituisce il "ν-floor" ossia quella regione la cui esplorazione presenta una sensibilità limitata a causa dello scattering coerente dei neutrini coi nuclei. Immagine presa da <https://supercdms.slac.stanford.edu/science-results/dark-matter-limit-plotter>.

$$\sigma_0^{SD} = \frac{32G_F^2 \mu^2}{\pi} \frac{j+1}{j} [a_p \langle S_p \rangle + a_n \langle S_n \rangle]^2 \quad (4.16)$$

dove  $j$  indica il momento angolare del nucleo bersaglio,  $f_{p,n}$  sono coefficienti che emergono mappando gli operatori tra DM e quark al livello di protoni e neutroni e  $a_{p,n}$  sono le costanti di accoppiamento WIMP-nucleoni.  $\langle S_{p,n} \rangle$  rappresentano i valori di aspettazione degli spin di protoni e neutroni nei nuclei bersaglio e sono dell'ordine  $\lesssim \mathcal{O}(1)$ . In figura 4.2 vengono quindi mostrati gli attuali limiti posti sulla sezione d'urto SI.

### 4.3 Distribuzione delle velocità

Lo Standard Halo Model prevede che le particelle di materia oscura alla distanza del Sole dal GC possano essere descritte da una funzione di distribuzione Maxwelliana troncata alla velocità di fuga della Via Lattea:

$$f_{\text{Galaxy}}(\mathbf{v}) = \frac{1}{N} \exp\left(-\frac{v^2}{v_0^2}\right) \Theta(v_{\text{esc}} - |\mathbf{v}|) \quad (4.17)$$

dove, esprimendo le velocità nel sistema internazionale solo per questa sezione, vale  $v_0 = 220$  km/s, mentre  $N$  è un fattore di normalizzazione che si ricava dalla seguente espressione:

$$N = \pi^{3/2} v_0^3 \left[ \text{erf}\left(\frac{v_{\text{esc}}}{v_0}\right) - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{v_{\text{esc}}}{v_0} \exp\left(-\frac{v_{\text{esc}}^2}{v_0^2}\right) \right] \quad (4.18)$$

Per gli esperimenti di rivelazione diretta si è interessati però a passare dal sistema di riferimento della galassia a quello del laboratorio. La funzione di distribuzione diventa quindi:

$$f_{\text{Earth}}(\mathbf{v}) = f_{\text{Galaxy}}(\mathbf{v} + \mathbf{V}_e(t)) \quad \text{con } \mathbf{V}_e(t) = \mathbf{v}_\odot + \mathbf{V}_\otimes(t) \quad (4.19)$$

dove  $\mathbf{V}_e(t)$  e  $\mathbf{V}_\otimes(t) \approx 29.8$  km/s coincidono con la velocità della Terra nel sistema di riferimento solidale rispettivamente con il GC e con il Sole. Poichè il Sistema Solare si muove attorno al GC nella direzione della costellazione del Cigno, nel laboratorio ci si aspetta di osservare un "vento" di WIMP con velocità media  $-\mathbf{v}_\odot$  proveniente da quella costellazione.

Trascurando inizialmente il moto di rivoluzione della Terra attorno al Sole, si può andare a calcolare il seguente contributo al rate differenziale, tenendo in considerazione la necessità di una velocità minima (equazione 4.6) per generare il rinculo del nucleo:

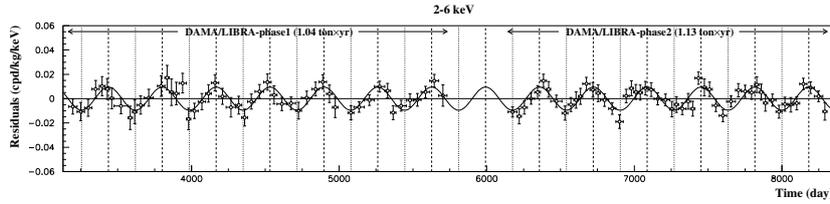


Figura 4.3: Modulazione annuale rilevata con l'esperimento DAMA/LIBRA. Immagine presa da [4]

$$\begin{aligned}
 g(v_{min}) &= \int d^3v \frac{f_{\text{Earth}}(\mathbf{v})}{v} \Theta(v - v_{min}(E_R)) \\
 &= \frac{1}{N} \int_{v_{min}}^{v_{esc}} dv \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin\theta d\theta v \exp\left(-\frac{(\mathbf{v} + \mathbf{v}_\odot)^2}{v_0^2}\right) \\
 &= \frac{\pi^{3/2} v_0^3}{2N v_\odot} \left[ \operatorname{erf}\left(\frac{v_{esc} - v_\odot}{v_0}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{v_{min} - v_\odot}{v_0}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{v_{esc} + v_\odot}{v_0}\right) + \operatorname{erf}\left(\frac{v_{min} + v_\odot}{v_0}\right) \right]
 \end{aligned} \tag{4.20}$$

Riprendendo le considerazioni fatte in sezione 4.2, si ottiene la seguente espressione della sezione d'urto differenziale di scattering SI:

$$\frac{dR}{dE_R} = \frac{\rho_\chi}{m_\chi} \frac{N_T}{M_T} \frac{m_N c^2}{2} F^2(E_R) \frac{\sigma_n}{\mu_n^2} \frac{[f_p Z + f_n(A - Z)]^2}{f_n^2} g(v_{min}) \tag{4.21}$$

Il moto di rivoluzione della Terra attorno al Sole implicherà inoltre una modulazione annuale della funzione di distribuzione con pulsazione  $w = 2\pi/\text{anno}$ . Definendo  $\eta = \frac{V_{\otimes, \parallel}}{v_\odot} \approx 0.07$ , con  $V_{\otimes, \parallel}$  la componente della velocità della Terra parallela alla direzione di moto del Sole, si può approssimare:

$$\mathbf{V}_e(t) \approx \mathbf{v}_\odot (1 + \eta \cos[w(t - t_0)] + \dots) \tag{4.22}$$

Tale variazione ricade anche sul rate di scattering che si può espandere in serie di Taylor:

$$\frac{dR}{dE_R}(E_R, t) \approx \frac{dR}{dE_R} \{1 + \Delta(E_R) \cos[w(t - t_0)]\} \tag{4.23}$$

dove  $\Delta(E_R)$  è detta ampiezza di modulazione. Per questo motivo ci si aspetta che si verifichi un massimo degli eventi rilevabili in giugno, ossia quando la Terra si muove in verso contrario al "vento di WIMP", e un minimo a dicembre, quando invece il moto del nostro pianeta è nello stesso verso del "vento", comportando un minor numero di interazioni ad alte velocità coi nuclei che compongono l'esperimento.

A supporto di queste considerazioni gli esperimenti DAMA e poi DAMA/LIBRA hanno riscontrato un segnale nel range di energie tra 2-6 keV con compatibilità di  $12.6\sigma$  con l'ipotesi di modulazione nulla. La validità di questi risultati viene però messa in discussione dai limiti superiori posti sulle sezioni d'urto SI che risultano essere incompatibili con la modulazione osservata e rappresentata in figura 4.3.

## 4.4 Teoria di Campo Efficace

Oltre alle interazioni precedentemente discusse, per rendere conto di tutti i possibili indizi di DM nel corso degli anni, sono state esplorate molte altre modalità in cui possono avvenire gli scattering.

Per arrivare alla più generica forma di interazione DM-nucleoni non-relativistica, è necessario costruire un framework teorico caratterizzato da operatori che rispettino l'invarianza Galileiana e la conservazione di energia e momento angolare. La scelta di  $\mathbf{q}$  e  $\mathbf{v}$  non è però ottimale in quanto non

$$\begin{array}{ll}
\mathcal{O}_1 = \mathbb{1}_{\chi N} & \mathcal{O}_9 = i\mathbf{S}_\chi \cdot (\mathbf{S}_N \times \mathbf{q}) \\
\mathcal{O}_3 = i\mathbf{S}_N \cdot (\mathbf{q} \times \mathbf{v}^\perp) & \mathcal{O}_{10} = i\mathbf{S}_N \cdot \mathbf{q} \\
\mathcal{O}_4 = \mathbf{S}_\chi \cdot \mathbf{S}_N & \mathcal{O}_{11} = i\mathbf{S}_\chi \cdot \mathbf{q} \\
\mathcal{O}_5 = i\mathbf{S}_\chi \cdot (\mathbf{q} \times \mathbf{v}^\perp) & \mathcal{O}_{12} = \mathbf{S}_\chi \cdot (\mathbf{S}_N \times \mathbf{v}^\perp) \\
\mathcal{O}_6 = (\mathbf{S}_\chi \cdot \mathbf{q}) (\mathbf{S}_N \cdot \mathbf{q}) & \mathcal{O}_{13} = i (\mathbf{S}_\chi \cdot \mathbf{v}^\perp) (\mathbf{S}_N \cdot \mathbf{q}) \\
\mathcal{O}_7 = \mathbf{S}_N \cdot \mathbf{v}^\perp & \mathcal{O}_{14} = i (\mathbf{S}_\chi \cdot \mathbf{q}) (\mathbf{S}_N \cdot \mathbf{v}^\perp) \\
\mathcal{O}_8 = \mathbf{S}_\chi \cdot \mathbf{v}^\perp & \mathcal{O}_{15} = - (\mathbf{S}_\chi \cdot \mathbf{q}) [(\mathbf{S}_N \times \mathbf{v}^\perp) \cdot \mathbf{q}]
\end{array}$$

Tabella 4.1: Operatori di EFT usati per descrivere l'interazione DM-nucleone.  $\mathcal{O}_2 = (\mathbf{v}^\perp)^2$  è stato escluso perchè non può emergere nel limite non relativistico.

sarebbero operatori invarianti sotto una trasformazione Hermitiana. Tale azione scambia gli stati prima e dopo l'interazione e in particolar modo si avrebbe  $\mathbf{q} \rightarrow -\mathbf{q}$  mentre per quanto riguarda  $\mathbf{v}$ :

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v}'_\chi - \mathbf{v}'_N = \frac{\mathbf{p}'}{m_\chi} - \frac{\mathbf{k}'}{m_N} = \frac{\mathbf{p} - \mathbf{q}}{m_\chi} - \frac{\mathbf{k} + \mathbf{q}}{m_N} = \mathbf{v}_\chi - \mathbf{v}_N - \frac{\mathbf{q}}{\mu} = \mathbf{v} - \frac{\mathbf{q}}{\mu} \quad (4.24)$$

Sfruttando quindi l'invarianza Galileiana e la condizione di urto elastico si osserva che vale  $v = v'$  e quadrando 4.24 si ottiene:

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{q} = \frac{q^2}{2\mu} \quad (4.25)$$

A partire da queste considerazioni il sistema risulta essere caratterizzabile tramite i seguenti operatori:

$$i\mathbf{q}, \quad \mathbf{v}^\perp = \mathbf{v} - \frac{\mathbf{q}}{2\mu}, \quad \mathbf{S}_\chi, \quad \mathbf{S}_N \quad (4.26)$$

dove  $\mathbf{v}^\perp$  è Hermitiano e vale inoltre che  $\mathbf{v}^\perp \cdot \mathbf{q} = 0$ , mentre  $\mathbf{S}_{\chi,N}$  rappresentano gli operatori di spin della WIMP e del nucleone considerati. In particolare le interazioni si distinguono in spin-dependent (SD) o spin-independent (SI) a seconda che compaia o meno  $\mathbf{S}_N$  nell'espressione dell'operatore che descrive il fenomeno. In particolare nel caso in cui la DM sia composta da fermioni, gli operatori di spin si riducono a  $\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}$ , dove  $\sigma^i$  sono le matrici di Pauli che agiscono sugli spinori  $\chi$  e  $N$ .

In tabella 4.1 sono rappresentati gli operatori che possono essere costruiti a partire dalle considerazioni fatte.

Tali operatori agiscono nello spazio di Hilbert a due particelle dato dal prodotto tensore degli stati di DM e del nucleo:  $|\mathbf{p}, j_\chi\rangle$  e  $|\mathbf{k}, j_N\rangle$  rispettivamente.

La generica Lagrangiana che descrive il sistema è data da:

$$\mathcal{L} = \sum_{N=n,p} \sum_{i=1}^{15} c_i^{(N)} \mathcal{O}_i \chi^+ \chi^- N^+ N^- \quad (4.27)$$

dove i coefficienti  $c_i$  sono funzioni che dipendono dalle costanti di accoppiamento, dai mediatori dell'interazione, dagli angoli di mescolamento, da  $m_\chi$  e  $m_N$  e dal momento trasferito.

Ridefinendo i coefficienti in modo da eliminare la dipendenza da  $q$ , si può ottenere la seguente espressione dell'ampiezza di scattering mediata sui possibili stati di spin:

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} = \frac{m_N^2}{m_n^2} \sum_{i,j=1}^{15} \sum_{N,N'=p,n} c_i^N c_j^{N'} F_{i,j}^{(N,N')} \quad (4.28)$$

dove  $F_{i,j}^{(N,N')}$  sono fattori di forma che si possono trovare in appendice di [5] e  $m_n$  è la massa di un nucleone. In generale tali quantità possono essere scritte utilizzando le funzioni di risposta nucleare, la cui espressione si ricava dall'espansione in multipoli delle cariche e correnti nucleari utilizzando le armoniche sferiche vettoriali. Ciascuna delle funzioni di risposta che descrive il fenomeno si ritrovano anche nelle trattazioni standard delle interazioni deboli o da loro estensioni.

Infine si può arrivare all'espressione della sezione d'urto differenziale di scattering tramite la seguente relazione:

$$\frac{d\sigma}{dE_R}(v, E_R) = \frac{1}{32\pi} \frac{1}{m_\chi^2 m_N} \frac{1}{v^2} \overline{|\mathcal{M}|^2} \quad (4.29)$$

## Capitolo 5

# Materia Oscura Inelastica

Fino a questo punto è stato considerato solo il caso di interazioni tra DM e nucleo che non modificavano la struttura della WIMP incidente. In un caso più generale di urto inelastico la particella transita in uno stato di massa  $m'_\chi = m_\chi + \delta$ . Tale reazione è detta endotermica o esotermica a seconda che  $\delta$  sia maggiore o minore di zero.

Per la conservazione dell'energia nel caso non relativistico deve valere:

$$\frac{p^2}{2m_\chi} + \frac{k^2}{2m_N} = \delta + \frac{p'^2}{2m'_\chi} + \frac{k'^2}{2m_N} \quad (5.1)$$

che, sfruttando la relazione 4.2, nel sistema del CM si ottiene:

$$\frac{1}{2}\mu v^2 = \frac{1}{2}\mu' v'^2 + \delta \quad (5.2)$$

$$\tilde{p}^2 = \mu'^2 v'^2 = \mu^2 v^2 - 2\mu\delta \quad (5.3)$$

dove al secondo passaggio è stato utilizzato  $\delta \ll m_\chi$  ottenendo al prim'ordine  $\mu' \approx \mu$ . In particolare da 5.2 si può ricavare la condizione che lo splitting delle masse che dev'essere inferiore all'energia cinetica nel centro di massa. Per far sì che l'interazione avvenga è quindi necessario che

$$\delta \leq \frac{1}{2}\mu v^2 = \tilde{E}_{kin} \quad (5.4)$$

Poichè lo scattering può avvenire su tutto l'angolo solido il valore del modulo di  $\tilde{\mathbf{q}} = \tilde{\mathbf{p}} - \tilde{\mathbf{p}}'$  presenta un range di valori che possono essere espressi dalle seguenti disuguaglianze:

$$(\tilde{p} - \tilde{p}')^2 \leq \tilde{q}^2 \leq (\tilde{p} + \tilde{p}')^2 \quad (5.5)$$

dalla quale si ottiene:

$$\tilde{q}^2 - \tilde{p}^2 - \tilde{p}'^2 \leq 2\tilde{p}\tilde{p}' \quad (5.6)$$

$$(\tilde{q}^2 + 2\mu\delta)^2 \leq 4\mu^2 v^2 \tilde{q}^2 \quad (5.7)$$

dove l'ultimo passaggio è stato ricavato sostituendo  $\tilde{p}$  e  $\tilde{p}'$  grazie alle equazioni 4.2 e 5.3 e quadrando i membri della disuguaglianza ottenuta.

Sfruttando infine l'invarianza per trasformazioni Galileiane ( $\mathbf{q} = \tilde{\mathbf{q}}$ ), si può ottenere la nuova condizione sulla velocità minima per generare un rinculo del nucleo di energia  $E_R$ :

$$v_{min}(E_R) = \left| \frac{q}{2\mu} + \frac{\delta}{q} \right| = \frac{1}{\sqrt{2m_N E_R}} \left| \frac{m_N E_R}{\mu} + \delta \right| \quad (5.8)$$

Dove è possibile notare che per  $\delta = 0$  ci si riconduce al caso elastico di equazione 4.6. L'effetto dell'inelasticità emerge nella modifica della  $v_{min}$  e quindi sugli estremi di integrazione di  $g(v_{min})$  di equazione 4.20.

Si è proceduto quindi a confrontare come cambierebbe uno spettro energetico di un possibile esperimento di rivelazione diretta rispetto al caso elastico.

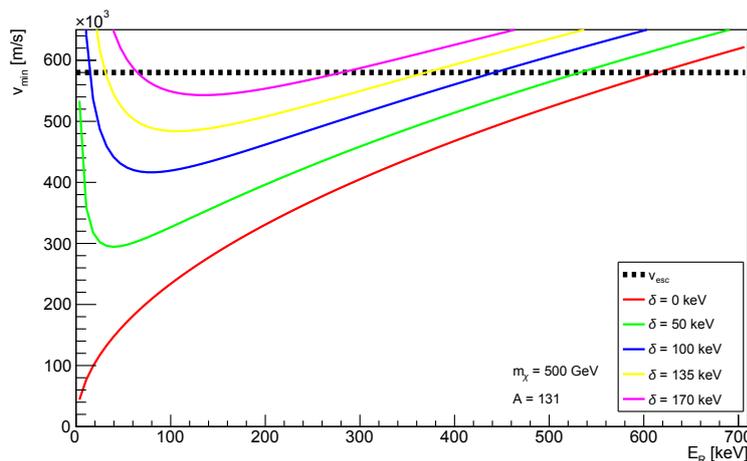


Figura 5.1: Andamento della  $v_{min}$  necessaria per indurre un rinculo di energia  $E_R$  su nucleo bersaglio. In particolare è stato scelto un numero di massa pari ad  $A = 131$  che corrisponde ad un esperimento di rivelazione diretta che utilizza lo Xenon. La WIMP incidente presenta invece  $m_\chi = 500$  GeV

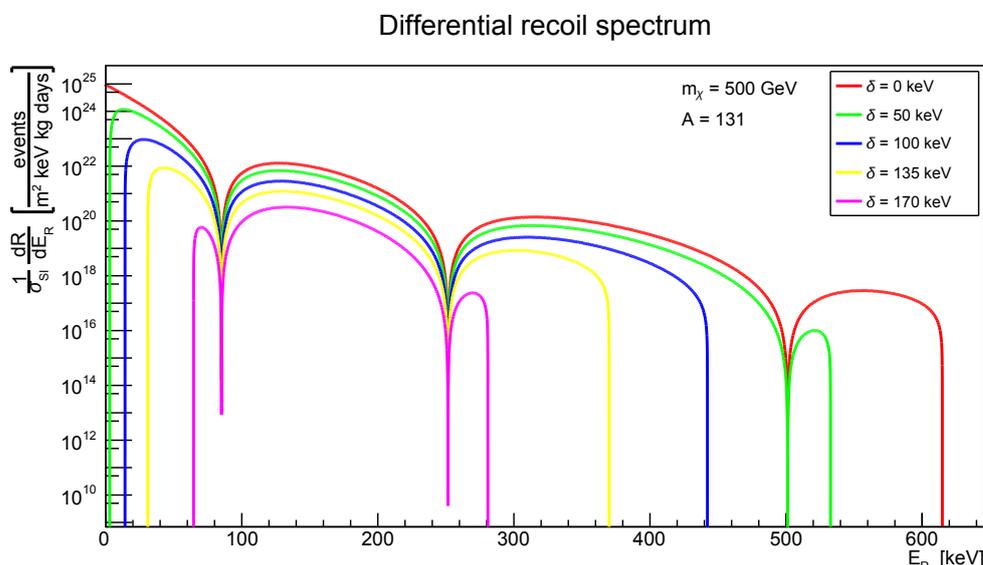


Figura 5.2: Spettro del rate differenziale diviso per la sezione d'urto supposta nel caso SI e costante. I casi studiati sono gli stessi di figura 5.1 con gli stessi nuclei bersaglio e stessa massa della WIMP.

Per riprodurre i risultati è stata assunta una sezione d'urto di interazione costante e di tipo spin-independent in modo da poter utilizzare il risultato di equazione 4.21 con gli opportuni accorgimenti per  $v_{min}$  nel caso inelastico.

In figura 5.1 è stato quindi deciso di rappresentare gli effetti che avrebbe l'inelasticità della DM sulla  $v_{min}$  studiando il comportamento per diversi  $\delta$ .

Si osserva quindi che all'aumentare di  $\delta$ , diminuisce la regione di integrazione di  $g(v_{min})$  di equazione 4.20. Tale effetto si propaga sul rate differenziale rappresentato in figura 5.2.

Come previsto i casi che tengono in considerazione un  $\delta$  maggiore sono quelli con un range minore di energie in cui posso osservare un rinculo nucleare. Questo comporta quindi un numero minore di eventi rilevabili in un esperimento e una maggiore difficoltà nella caratterizzazione della DM.

A partire da questi risultati si è proceduto a valutare l'effetto della DM inelastica per diversi nuclei bersaglio. Questo modello risulta infatti molto utile nel momento in cui si vanno a confrontare i risultati dei differenti esperimenti svolti nel corso degli anni nell'ambito della rivelazione diretta di materia oscura. L'analisi si è basata sul calcolo dell'integrale degli spettri ottenuti in modo analogo a quelli di figura 5.2. Tali risultati sono stati divisi per il rate ottenuto considerando il caso elastico ed

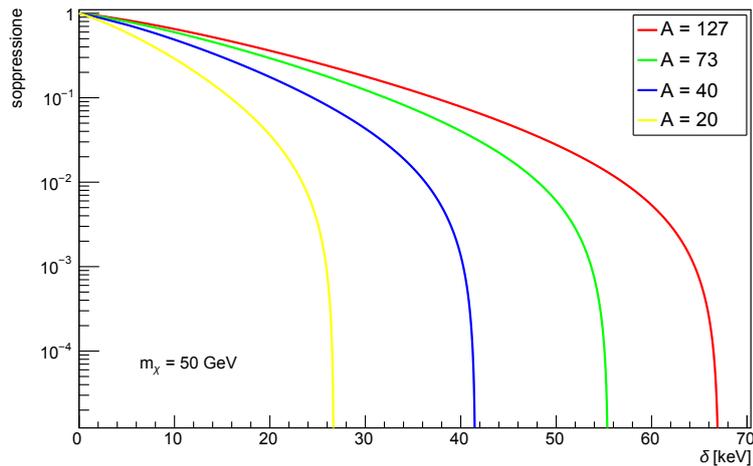


Figura 5.3: Soppressione del rate rispetto al caso elastico in funzione dello splitting tra gli stati di DM. I casi analizzati corrispondono a differenti nuclei bersaglio che sono Iodio( $A=127$ ), Germanio( $73$ ), Argon( $40$ ) e Neon( $20$ )

infine si è proceduto andando a plottare la soppressione del rate di eventi in funzione dei  $\delta$  possibili.

In figura 5.3 sono stati riportati alcuni andamenti ricavati.

Si può osservare come all'aumentare della massa dei nuclei, l'intervallo di  $\delta$  su cui si può calcolare il rate aumenta sempre di più. Questo significa che la rivelazione diretta di DM potrebbe essere possibile solo con determinati bersagli. Infatti se la transizione dallo stato  $\chi$  a  $\chi'$  è caratterizzata da un  $\delta$  troppo elevato, non vi può essere alcun trasferimento di quantità di moto verso quei nuclei per cui non esiste  $v < v_{esc}$  tale che l'equazione 5.4 non sia soddisfatta. Questa caratteristica si manifesta nella mancanza di eventi oltre una certa soglia di splitting per gli andamenti rappresentati in figura 5.3.

Da queste considerazioni si può osservare come, grazie alla possibile natura inelastica della materia oscura, alcuni esperimenti che prima erano in contraddizione l'uno con l'altro, potrebbero trovare un punto di incontro. Un esempio è la presenza di eventi rilevati dall'esperimento DAMA (nuclei di NaI) descritto in sezione 4.3, ma esclusi da CDMS (nuclei di Ge), che nel caso della materia oscura inelastica può essere spiegata con uno splitting tra stato finale e iniziale di  $\delta = 60$  keV.

Inoltre la soppressione del rate osservata rispetto al caso elastico, sotto le opportune ipotesi, sarebbe tale da spiegare le difficoltà riscontrate nella ricerca di prove di materia oscura nell'ambito della rivelazione diretta. Questo fatto permetterebbe quindi di riconsiderare lo spazio dei parametri della DM, con limiti meno stringenti rispetto a quelli di riferimento per il solo caso di urto elastico.

In conclusione dopo aver esposto le caratteristiche generali della DM e della sua ricerca diretta, questo lavoro di tesi si riproponeva di descrivere in particolare la rilevanza della materia oscura inelastica. Dopo averne caratterizzato la cinematica è stato possibile osservare come questo modello possa cambiare l'interpretazione dei dati degli esperimenti e superare alcune inconsistenze tra gli stessi. L'analisi proposta risulta comunque descrivere il fenomeno in modo qualitativo e potrebbe essere implementata andando a considerare le singole specifiche dei rivelatori considerati, come i threshold e le sensibilità alle diverse regioni dello spettro energetico.

# Appendice A

## Cosmologia

Nella descrizione di un universo in espansione risulta utile passare ad un sistema di coordinate comovente definito come segue:  $\mathbf{R}(t) = a(t)\mathbf{x}$ .  $\mathbf{R}$  sono le coordinate fisiche,  $\mathbf{x}$  sono le coordinate comoventi e  $a(t)$  rappresenta il fattore di scala.

Un osservatore si dice comovente se solidale con l'espansione dell'universo, quindi dal suo punto di vista le distanze tra gli oggetti celesti rimangono invariate. La dipendenza temporale fa riferimento invece al tempo cosmologico, ossia il tempo misurato da un osservatore solidale al sistema di coordinate comoventi. Nella convenzione utilizzata  $a(t)$  risulta essere adimensionale e normalizzata in modo tale che nel momento presente valga  $a_0 = a(t = t_U) = 1$ . A partire da questa quantità è possibile definire il redshift cosmologico:

$$z = \frac{\lambda_0 - \lambda_e}{\lambda_e} = \frac{1}{a(t_e)} - 1 \quad (\text{A.1})$$

che permette di quantificare la variazione della lunghezza d'onda di una radiazione elettromagnetica dovuta all'espansione dell'universo, tra come si presentava al momento della sua emissione ( $\lambda_e$ ) e della sua ricezione ( $\lambda_0$ ).

Considerando quindi un universo in espansione, omogeneo e isotropo (in accordo col principio cosmologico e con le osservazioni su larga scala), risulta possibile caratterizzare gli intervalli spazio-temporali utilizzando la metrica di Friedmann-Lemaitre-Robertson-Walker (FLRW):

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[ \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\phi^2) \right] \quad (\text{A.2})$$

Dove  $(r, \theta, \phi)$  sono coordinate comoventi e  $k$  è una costante che tiene conto della geometria dell'universo e può assumere i valori maggiori, minori o uguali a zero a seconda che la curvatura dello spazio sia rispettivamente sferica, iperbolica o piatta.

Detta  $\rho$  la densità di energia e  $p$  la pressione e considerando l'universo come un unico fluido cosmico in cui valgono le caratteristiche descritte precedentemente, è possibile definire il tensore energia-impulso (sinistra) che verrà opportunamente inserito all'interno delle equazioni di campo di Einstein (destra):

$$T_\nu^\mu = \text{diag}(-\rho c^2, p, p, p) \quad G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \quad (\text{A.3})$$

dove  $G$  è la costante gravitazionale di Newton e il tensore di Einstein  $G_{\mu\nu}$  è definito in funzione della metrica esposta in A.2. Utilizzando queste considerazioni e passando in unità naturali, si possono quindi ottenere le equazioni di Friedmann:

$$H^2 = \left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho - \frac{k}{a^2} \quad (\text{A.4})$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} (\rho + 3p) \quad (\text{A.5})$$

dove  $H$  è il parametro di Hubble. Il valore di quest'ultimo al tempo presente risulta essere  $H_0 = 100h \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ , dove  $h \approx 0.7$  è una costante adimensionale che parametrizza l'incertezza della misura.

Il parametro di Hubble è stato introdotto la prima volta per rendere conto delle osservazioni sperimentali che hanno poi portato alla formulazione della legge di Hubble:

$$v_{rec} = HD \quad (\text{A.6})$$

dove  $D$  è la distanza tra il punto di osservazione e la galassia considerata e  $v_{rec}$  è la velocità di recessione di quest'ultima dovuta all'espansione dell'universo. Da questa relazione è possibile osservare come all'aumentare della distanza, aumenti la velocità con cui gli oggetti celesti si allontanano dall'osservatore. Si va a definire quindi la "sfera di Hubble" come quella regione di spazio in contatto causale con l'osservatore, ossia data una radiazione emessa da un punto generico all'interno della sfera, questa impiega un tempo finito a raggiungere l'osservatore. L'orizzonte cosmologico è l'insieme dei punti della superficie della sfera di Hubble che presentano  $v_{rec} = c$ . Poichè il parametro di Hubble dipende dal tempo anche la dimensione della sfera di Hubble non è costante.

Per completare le equazioni di Friedmann è necessaria la *fluid equation* che permette di descrivere come la densità dei componenti dell'universo è influenzata dall'espansione dello stesso:

$$\dot{\rho} = -3H(\rho + p) \quad (\text{A.7})$$

Sfruttando poi l'equazione di stato  $p = w\rho$ , è possibile ricavare l'evoluzione di  $\rho$  a seconda delle caratteristiche del fluido considerato:

$$\dot{\rho} = -3H(w+1)\rho \rightarrow \frac{\dot{\rho}}{\rho} = -3\frac{\dot{a}}{a}(w+1) \rightarrow \rho \propto a^{-3(w+1)} \quad (\text{A.8})$$

A partire da  $w_r = 1/3$ ,  $w_m = 0$ ,  $w_\Lambda = -1$  rispettivamente i valori di  $w$  per radiazione, materia ed energia oscura, si possono ricavare gli andamenti delle densità di energia in funzione del parametro di scala.

La densità di energia della materia subisce l'andamento  $\rho_m \propto a^{-3}$  a causa dell'espansione spaziale dell'universo mentre la radiazione presenta un ulteriore fattore  $a^{-1}$  dovuto al redshift delle lunghezze d'onda. Inoltre, poichè materia e radiazione presentano densità di energia che diminuiscono nel tempo, la componente dell'universo che sarà destinata a dominare sulle altre sarà quella di energia oscura che presenta invece  $\rho_\Lambda = \text{cost}$ .

Considerando adesso la costante cosmologica nulla, si vuole introdurre la densità critica ossia la densità di energia dell'universo per cui la curvatura risulti essere nulla ( $k = 0$ ). Utilizzando l'equazione A.4 si ottiene:

$$\rho_{cr} = \frac{3H^2}{8\pi G} = 126 \times 10^{-6} \text{ GeV/cm}^3 \quad (\text{A.9})$$

Vengono quindi riportati i valori dei parametri densità dei componenti dell'universo attuale (definiti come  $\Omega_i = \rho_i/\rho_c$ ):

$$\Omega_\Lambda \simeq 68.5\% \quad \Omega_m \simeq 31.3\% \quad \Omega_r \simeq 0.0091\%$$

Dal fatto che  $\Omega_{tot} = \sum_i \Omega_i \simeq 1$  si avrà che  $k \approx 0$  e la geometria del nostro universo risulta quindi essere essenzialmente piatta.

Ciascuna delle componenti varia in modo differente al variare di  $a(t)$  e questo definisce periodi nella storia dell'universo in si avrà il dominio di un tipo di fluido sugli altri. La distribuzione delle densità dei diversi componenti andrà poi a determinare come l'universo stesso si espande.

Riscrivendo l'equazione di Friedmann si ottiene:

$$\frac{\dot{a}}{a} = H = H_0 \sqrt{\frac{\rho}{\rho_{cr}}} = H_0 \sqrt{\Omega_\Lambda + \frac{\Omega_r}{a^4} + \frac{\Omega_m}{a^3}} \quad (\text{A.10})$$

Da questa espressione si possono ricavare i seguenti andamenti per il fattore di scala e il parametro di Hubble durante il periodo di dominio della radiazione (RD) e della materia (MD):

$$a(t) = \begin{cases} (2tH_0)^{1/2} & \text{(RD)} \\ (3tH_0/2)^{2/3} & \text{(MD)} \end{cases} \quad H(t) = \begin{cases} 1/(2t) & \text{(RD)} \\ 2/(3t) & \text{(MD)} \end{cases} \quad (\text{A.11})$$

# Bibliografia

- [1] M. Lisanti, “Lectures on dark matter physics,” in *New Frontiers in Fields and Strings*, WORLD SCIENTIFIC, Nov. 2016.
- [2] M. Cirelli, A. Strumia, and J. Zupan, “Dark matter,” 2024.
- [3] T. Lin, “Tasi lectures on dark matter models and direct detection,” 2019.
- [4] J. Cooley, “Dark matter direct detection of classical wimps,” *SciPost Physics Lecture Notes*, May 2022.
- [5] A. L. Fitzpatrick, W. Haxton, E. Katz, N. Lubbers, and Y. Xu, “The effective field theory of dark matter direct detection,” *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, vol. 2013, p. 004–004, Feb. 2013.
- [6] A. Green, “Dark matter in astrophysics/cosmology,” *SciPost Physics Lecture Notes*, Jan. 2022.
- [7] G. B. Gelmini, “Tasi 2014 lectures: The hunt for dark matter,” 2015.
- [8] D. Hooper, “Tasi 2008 lectures on dark matter,” 2009.
- [9] A. L. Fitzpatrick, W. Haxton, E. Katz, N. Lubbers, and Y. Xu, “Model independent direct detection analyses,” 2012.
- [10] F. Bishara, J. Brod, B. Grinstein, and J. Zupan, “From quarks to nucleons in dark matter direct detection,” *Journal of High Energy Physics*, vol. 2017, Nov. 2017.
- [11] D. Smith and N. Weiner, “Inelastic dark matter,” *Physical Review D*, vol. 64, July 2001.
- [12] R. Catena and B. Schwabe, “Form factors for dark matter capture by the sun in effective theories,” *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, vol. 2015, p. 042–042, Apr. 2015.
- [13] G. Arcadi, C. Döring, C. Hasterok, and S. Vogl, “Inelastic dark matter nucleus scattering,” *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, vol. 2019, pp. 053–053, Dec. 2019.
- [14] D. Smith and N. Weiner, “Inelastic dark matter at dama, cdms and future experiments,” *Nuclear Physics B - Proceedings Supplements*, vol. 124, pp. 197–200, July 2003.
- [15] E. Del Nobile, *The Theory of Direct Dark Matter Detection: A Guide to Computations*. Springer International Publishing, 2022.
- [16] M. Cirelli, E. D. Nobile, and P. Panci, “Tools for model-independent bounds in direct dark matter searches,” *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, vol. 2013, p. 019–019, Oct. 2013.