

# UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Dipartimento di Fisica e Astronomia “Galileo Galilei”

Corso di Laurea Triennale in Fisica

Tesi di Laurea

**John Bell e l’interpretazione della meccanica quantistica:  
note a partire dall’argomento EPR**

**Relatore**  
Prof. Giulio Peruzzi

**Laureanda**  
Elisabetta Pavanello  
**Matricola**  
1216626

**Anno Accademico 2022/2023**



# Indice

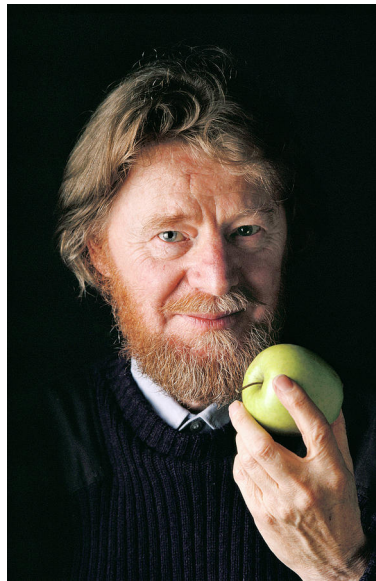
<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Biografia</b>	<b>2</b>
<b>3</b>	<b>Dibattito Einstein-Bohr</b>	<b>6</b>
3.1	Paradosso EPR . . . . .	6
3.2	Diverse interpretazioni . . . . .	7
<b>4</b>	<b>Interpretazione di Bell</b>	<b>8</b>
4.1	Critica ai termini «osservabile» e «misurazione» . . . . .	8
4.2	Contestualità . . . . .	8
4.3	Non-località . . . . .	9
<b>5</b>	<b>"Sul paradosso di Einstein-Podolsky-Rosen"</b>	<b>11</b>
5.1	"Sul paradosso di Einstein-Podolsky-Rosen" . . . . .	11
5.2	Esperimenti EPR . . . . .	13
5.2.1	Prima generazione di esperimenti (anni Settanta) . . . . .	14
5.2.2	Seconda generazione di esperimenti (anni Ottanta) . . . . .	14
5.2.3	Terza generazione di esperimenti (anni Novanta e seguenti) . . . . .	14
<b>6</b>	<b>I calzini di Bertlmann</b>	<b>16</b>
<b>7</b>	<b>John Bell e la Seconda Rivoluzione Quantistica</b>	<b>20</b>
7.1	Prima rivoluzione quantistica . . . . .	20
7.2	Seconda rivoluzione quantistica . . . . .	20



# 1 Introduzione

In questa tesi si vuole mettere in evidenza l'importanza dei contributi di John Stewart Bell alla meccanica quantistica. Dopo una breve introduzione biografica, viene descritto in sintesi il contesto fisico in cui si inseriscono i lavori di Bell, in particolare il dibattito Einstein-Bohr culminato con il cosiddetto paradosso EPR. L'argomento centrale che viene trattato è l'interpretazione di John Bell della meccanica quantistica e dei suoi fondamenti. Viene esposto in modo approfondito l'articolo "Sul paradosso di Einstein-Podolsky-Rosen", in cui compare la famosa disuguaglianza di Bell e viene dimostrata la non-località della meccanica quantistica. Di seguito vengono citati alcuni esperimenti del tipo EPR. Successivamente, è trattato a grandi linee l'articolo "sui calzini di Bertlmann". Si pone, infine, l'attenzione sull'impatto tecnologico dei contributi di Bell che portano alla cosiddetta "Seconda rivoluzione quantistica".

## 2 Biografia



**Figura 1:** John Stewart Bell, fotografia di Peter Menzel, 1987.

John Stewart Bell, nato a Belfast il 28 luglio 1928, ha frequentato la Queen's University di Belfast, laureandosi a pieni voti in Fisica Sperimentale nel 1948 e in Fisica Matematica l'anno seguente. Nel 1949 trova un incarico presso l'Atomic Energy Research Establishment (AERE) ad Harwell, Oxfordshire, ma viene subito spostato nel Telecommunications Research Establishment (TRE) a Malvern, Worcestershire, dove inizia a lavorare nell'ambito della fisica degli acceleratori. Il suo gruppo viene trasferito nuovamente ad AERE nella Theory Division e nel 1953 Bell è tra i pochi ad avere l'opportunità di conseguire un dottorato. In questo periodo approfondisce la teoria quantistica dei campi presso l'Università di Birmingham, lavorando alla tesi di dottorato, costituita da due parti intitolate "Time reversal in field theory" e "Some functional methods in field theory".

In seguito Bell si dedica alla fisica nucleare e delle particelle, trattando, fra gli altri argomenti, il momento magnetico dei nuclei, il metodo variazionale nella teoria dei campi, il problema nucleare a molti corpi, la derivazione di un potenziale efficace ("Formal optical model") per lo scattering di una particella su un bersaglio complesso.

Nel 1952 David Bohm pubblica l'articolo "Interpretation of quantum theory in terms of hidden variables" che per John Bell è come una rivelazione nei suoi studi sui fondamenti della meccanica quantistica.

Nel 1960, insieme alla moglie Mary Bell (anch'essa fisica) inizia a lavorare al CERN, dove rimarrà per tutta la vita. Mary lavora nell'Accelerator Research Group, mentre John nella Theory Division, e hanno spesso collaborato, per esempio su argomenti come l'electron cooling e la bremsstrahlung classica e quantistica. John era interessato sia agli aspetti sperimentali della fisica delle particelle, sia alle caratteristiche più formali e matematiche della teoria. In effetti, era aperto a qualsiasi argomento di discussione, come scrive il suo stretto amico e collega Reinhold A. Bertlmann:

*"As I could experience, John always was open to discuss and study any topic in physics, no matter how speculative it was. He liked to test his thoughts by basic examples. "Always test your general reasoning against simple models!" was his maxim."* [11]



**Figura 2:** Primo incontro fra J. S. Bell e R. A. Bertlmann al CERN nell'aprile del 1978, vignetta di R. A. Bertlmann. [11]

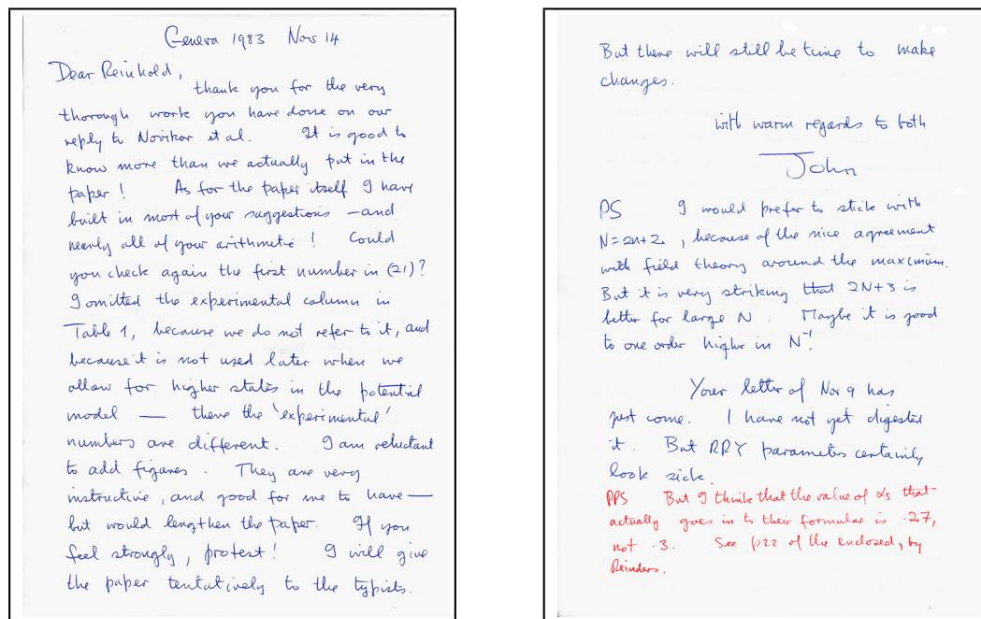
Negli anni Sessanta diviene grande argomento di discussione la teoria delle interazioni deboli. Bell, assieme al collega Jack Steinberger (in seguito Premio Nobel per la scoperta del neutrino muonico), scrive un importante articolo sulle interazioni deboli dei kaoni, per citarne uno. Verso la fine del 1963 John e Mary passano un anno sabbatico negli USA durante il quale John si dedica al suo "hobby", i fondamenti della meccanica quantistica. È proprio presso lo SLAC che Bell scrive il famoso articolo sulle disuguaglianze [6].

Al CERN la collaborazione più importante è probabilmente quella con il collega Martinus Veltman (in seguito Premio Nobel per studi sulle interazioni deboli), incentrata sui quanti dell'interazione debole, i bosoni W, che al tempo erano solo ipotizzati. Grazie alla loro convinzione nell'esistenza di queste particelle, incoraggiano e assistono i fisici sperimentali del CERN e pubblicano articoli sulla produzione dei bosoni W, che saranno alla base anche di esperimenti sui neutrini.

In questi anni il modello standard non è ancora stato sviluppato, ma vengono elaborate diverse idee. Una di queste è l'*algebra delle correnti* di Gell-Mann: un'algebra di Lie infinito-dimensionale definita da determinate relazioni di commutazione tra gli operatori di densità di corrente. Bell è uno tra i fisici che investigano i fondamenti e le applicazioni dell'algebra delle correnti, in particolare trova delle contraddizioni con gli esperimenti di alcuni decadimenti. Questi aspetti vengono visti come limiti di una teoria comunque valida, ma Bell insoddisfatto, tiene sempre a mente tale incompletezza. Continua a lavorare al problema insieme a Roman Jackiw, studente di post-dottorato proveniente dal MIT, pubblicando nel 1969 l'articolo "A PCAC puzzle:  $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$  in the  $\sigma$ -model". Lo stesso anno Stephan L. Adler, dell' Institute of Advanced Study a Princeton, corregge l'algebra delle correnti con un termine aggiuntivo ottenendo ottimi accordi con gli esperimenti. Questo termine è la cosiddetta *ABJ anomaly* (in onore di Adler, Bell e Jackiw). L'anomalia apre la porta ad una comprensione più profonda della teoria quantistica dei campi e dà inizio a una nuova era di ricerca. È interessante notare che Bell non proseguì attivamente ai successivi sviluppi dell'anomalia. L'amico Bertlmann prova a spiegare tale comportamento in una lettera a Jackiw:

*"... my impression is that one aspect of his character or of his attitude towards physics was to find out the fundamental weaknesses of a theory. It was his criticism which has led him to important discoveries. This was so in his famous works on quantum mechanics and also I experienced this attitude in our collaboration. After having found the crucial point (error, ...) he was not so interested any more in working out the further details."* [11]

Gli ultimi studi di John Bell riguardano la cromodinamica quantistica, il condensato di gluoni e i modelli di potenziale.



**Figura 3:** Lettera scritta da J. Bell a R. A. Bertlmann relativa all'articolo "SVZ moments for charmonium and potential model" che stavano preparando, 1983. [11]

Tra i numerosi premi ricevuti si ricordano la medaglia Dirac dell'Institute of Physics (1988), il premio Dannie Heinemann dell'American Physical Society (1989) e la medaglia Hughes della Royal Society (1989):

*"For his outstanding contributions to our understanding of the structure and interpretation of quantum theory, in particular demonstrating the unique nature of its predictions."* [11]

Bell è sempre stato da solo a sostenere le sue convinzioni, quando durante le conferenze parlava di non-località il pubblico non voleva sentire e si creava grande tensione nella sala. La meccanica quantistica, in quegli anni, funzionava benissimo e nessuno avrebbe investigato i suoi fondamenti. Soltanto dopo il 1982, anno del time-flip experiment di Aspect, si inizia a comprendere l'importanza del lavoro di Bell. Egli, comunque, è sempre stato preoccupato del concetto di non-località e delle sue implicazioni. Bertlmann ricorda così una delle frequenti discussioni avute con il collega riguardo questo argomento:

*"On a summer afternoon in 1987, John and I were sitting outside in the garden of the CERN cafeteria, drinking our late 4 o'clock tea, and talked as so often about the implications of nonlocality. In this tea-atmosphere I spontaneously said: "John, you deserve the Nobel prize for your theorem." John, for a moment puzzled, replied quite strictly: "No, I don't. ... it's like a null experiment, and you don't get the Nobel prize for a null experiment. ... for me, there are Nobel rules as well, it's hard to make the case that my inequality benefits mankind." I countered: "I disagree with you! It's not a null result. You have proved something new, nonlocality! And for that I think you deserve the Nobel Prize." John, although feeling somehow pleased, raised slowly his arms, shrugged his shoulders and mumbled sadly: "Who cares about this nonlocality?""* [11]

John Bell muore inaspettatamente per un'emorragia cerebrale nel 1990 senza poter ricevere il premio Nobel per il quale era stato appena nominato. Al giorno d'oggi i fisici concordano che,



se fosse vissuto più a lungo, avrebbe sicuramente ricevuto il Nobel per i suoi contributi sui fondamenti della meccanica quantistica. Ad esempio Daniel Greenberger lo dichiara apertamente durante un'intervista tenutasi alla conferenza di Vienna "Quantum [Un]Speakables II" (2014):

*“Of course, people more and more appreciate John Bell’s beautiful work. He was essentially starting the field, his work was totally seminal, and if he were alive he certainly would have won the Nobel Prize!”*



**Figura 4:** R. A. Bertlmann (sinistra) and J. S. Bell (destra) mentre scelgono il tè, fotografia di Renate Bertlmann, casa di J. Bell 1980.

### 3 Dibattito Einstein-Bohr

La meccanica quantistica stravolge alcuni concetti fondamentali della fisica classica, primo fra tutti il concetto classico di traiettoria, che in questa teoria viene meno per spiegare il dualismo onda-corpuscolo. Ciò è espresso dal *principio di indeterminazione di Heisenberg* che descrive quantitativamente l'impossibilità di definire in linea di principio con infinita precisione e simultaneamente posizione e velocità di una particella. In generale, due quantità fisiche descritte da operatori che non commutano non possono essere conosciute simultaneamente (*relazione di indeterminazione*):

$$(\Delta A)_{\psi,a} \cdot (\Delta B)_{\psi,b} \geq \frac{1}{2} | \langle [A, B] \rangle_{\psi} | \quad (1)$$

Tali revisioni dei concetti classici sono così radicali che in molti, tra cui Einstein e De Broglie, non vogliono accettarle, al contrario di altri, come Bohr e Heisenberg, i quali sostengono totalmente la nuova teoria, secondo la cosiddetta *interpretazione di Copenaghen*. Le idee centrali di questa interpretazione sono il principio di indeterminazione, il carattere statistico, la complementarità, l'identificazione di vettore di stato con "conoscenza del sistema" e il positivismo di Heisenberg. Einstein non sfida direttamente il formalismo della meccanica quantistica e le sue predizioni, ma pensa che le rinunce di Bohr a determinati concetti classici siano sintomo dell'incompletezza di questa teoria.

Seguono grandi dibattiti tra queste posizioni e il punto più significativo viene sollevato nell'articolo di A. Einstein, B. Podolsky e N. Rosen "Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete?" del 1935.

#### 3.1 Paradosso EPR

Il punto di partenza dell'articolo di EPR è l'osservazione che la relazione di indeterminazione implica o una o l'altra delle seguenti:

1. la descrizione quanto-meccanica della realtà data dalla funzione d'onda non è completa;
2. quando operatori corrispondenti a due quantità fisiche non commutano, le due quantità non possono avere realtà simultanea.

EPR mostrano che due particelle che hanno interagito in passato presentano forti correlazioni nelle posizioni e nelle velocità, indipendentemente dalla distanza tra di esse. Infatti, le posizioni sono simmetriche rispetto all'origine e le velocità sono opposte. Si ricordi che  $\mathbf{X}$  e  $\mathbf{P}$ , operatori di posizione e quantità di moto, non commutano ( $[\mathbf{X}, \mathbf{P}] = i\hbar \implies \mathbf{XP} \neq \mathbf{PX}$ ), quindi "when the momentum of a particle is known, its coordinate has no physical reality". Tuttavia, le correlazioni tra le due particelle implicano che una misura di  $\mathbf{X}$  o  $\mathbf{P}$  effettuata sulla prima permetta di conoscere istantaneamente il valore di  $\mathbf{X}$  o  $\mathbf{P}$  della seconda. Quindi, posizione e velocità della seconda particella appartengono alla stessa realtà, ma questo contraddice il principio di Heisenberg. Oppure, la realtà di  $\mathbf{X}$  e  $\mathbf{P}$  dipende dal processo di misura sulla prima particella, che non disturba in nessun modo la seconda, ma "No reasonable definition of reality could be expected to permit this.". Pertanto, si dimostra che negando la 1. si arriva a negare la 2., ossia l'unica alternativa. Allora la meccanica quantistica deve essere incompleta.

*"While we have thus shown that the wave function does not provide a complete description of the physical reality, we left open the question of whether or not such a description exists. We believe, however, that such a theory is possible."* [16]

Come completamento viene ipotizzata l'esistenza di *variabili nascoste*, valori che si manifestano con la misurazione ma sono in realtà predeterminati.

### 3.2 Diverse interpretazioni

Bohr rimane inizialmente spiazzato da tale argomentazione che si fonda sulla meccanica quantistica stessa e che avrebbe portato al crollo dell'intera fisica quantistica. Egli prende subito posizione contraria pubblicando, qualche mese più tardi, un articolo con lo stesso titolo<sup>1</sup>, sostenendo che per quel particolare stato quantistico analizzato da EPR non si può parlare di proprietà delle singole particelle. Schrödinger, invece, reagisce positivamente e conia il termine *entanglement* per descrivere tale stato EPR non fattorizzabile. Quando a Bohr viene chiesto se la meccanica quantistica rispecchi una realtà quantistica sottostante, egli risponde:

*"Non esiste un universo quantistico. Esiste solo una descrizione quantistica astratta. È sbagliato pensare che il compito della fisica sia quello di riscoprire com'è la Natura. La fisica si occupa di ciò che noi possiamo dire sulla Natura."*<sup>2</sup>

Similmente, secondo Heisenberg (1958):

*"Negli esperimenti sugli eventi atomici noi abbiamo a che fare con cose e fatti, con fenomeni che sono esattamente altrettanto reali quanto i fenomeni della vita quotidiana. Ma gli atomi e le stesse particelle elementari non sono altrettanto reali; formano un mondo di possibilità e di potenzialità piuttosto che un mondo di cose o di fatti."*<sup>3</sup>

Ancora, Jordan sostiene che le osservazioni non solo *disturbano* ciò che si vuole misurare, ma addirittura lo *producono*. Così Zilsel (1935) sostiene che, per esempio, nella misura di posizione con microscopio a raggi gamma

*"L'elettrone è costretto a una decisione. Noi lo obblighiamo ad assumere una posizione definita; prima esso non si trovava, in generale, nè qui nè là."*<sup>4</sup>

La posizione di Einstein è ben diversa e, in realtà, di difficile comprensione. Secondo John Bell, il principio inviolabile per Einstein non è il determinismo, per questo sostiene che "il continuo appellarsi al suo famoso detto «Dio non gioca a dadi» non è stato di grande aiuto" ma è stato spesso travisato. Il determinismo non è un presupposto dell'analisi, bensì una deduzione. Ciò che Einstein non vuole proprio abbandonare è, invece, il principio di *causalità locale* o di *assenza di azione a distanza*.

La comunità dei fisici non dà molta importanza a questo dibattito poiché la meccanica quantistica in questo periodo sta collezionando un successo dopo l'altro. Aderire ad una posizione o all'altra sembra più una questione di gusto personale o epistemologica, senza conseguenze pratiche sulla teoria. Solo trent'anni più tardi la questione sarà risolta, grazie proprio a John Bell, che dimostrerà, in sintesi, che è possibile completare la meccanica quantistica con le variabili nascoste, ma che anche queste teorie sono non locali (contro le aspettative di Einstein).

---

<sup>1</sup>Niels Bohr. "Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete?" In: Physical review 48.8 (1935), p. 696. [13]

<sup>2</sup>In Petersen (1963), p. 12 [19], citato in Jammer (1974), p. 204 [17], citato in Bell (1981) [2].

<sup>3</sup>Citato in Jammer (1974), p. 205 [17], citato in Bell (1981) [2].

<sup>4</sup>Citato in Jammer (1974), p. 161 [17], citato in Bell (1981) [2].

## 4 Interpretazione di Bell

Il primo contatto tra John Bell e la meccanica quantistica avviene durante gli studi universitari.

*"Quand'ero studente avevo molte difficoltà con la meccanica quantistica. Fu confortante scoprire che persino Einstein, per molto tempo, aveva avuto queste difficoltà." [7]*

Già a quel tempo Bell non apprezza l'interpretazione di Copenhagen e, in modo particolare, la sua distinzione tra mondo quantico e mondo classico, aspirando ad eliminare questa separazione. Quando Bell si trasferisce al CERN comincia ad intervenire attivamente nel dibattito Einstein-Bohr, sull'incompletezza della meccanica quantistica e sull'introduzione delle cosiddette variabili nascoste. I concetti principali della sua interpretazione sono i seguenti: esseribile ("beable" in contrapposizione a "observable"), contestualità e non-località.

### 4.1 Critica ai termini «osservabile» e «misurazione»

La "realtà" dei sistemi microscopici, per essere rilevata, richiede un apparato strumentale che la amplifichi fino a una scala macroscopica rilevabile. Questo è espresso dal postulato del collasso della funzione d'onda. Ma qual è il confine tra mondo microscopico e macroscopico, dove la meccanica quantistica cessa di valere? Secondo Bell una teoria basata su questa divisione imprecisata non è soddisfacente, bensì ambigua e approssimata.

*"Ecco alcuni termini che, sebbene legittimi e necessari nell'applicazione, non trovano spazio in una formulazione che abbia una qualsiasi pretesa di precisazione fisica: sistema, apparato, ambiente, microscopico, macroscopico, reversibile, irreversibile, osservabile, informazione, misura, misurazione ... la peggiore di tutte è «misurazione»." [1]*

Propone, quindi, di sostituire il termine *osservabile* con *esseribile* (traduzione italiana di *beables*), ossia un elemento la cui esistenza non dipende dall'atto di misura, e il termine *misurazione* con *esperimento*, sebbene sia comunque fastidioso pensare che la meccanica quantistica riguardi esclusivamente risultati di esperimenti. Il motivo per cui il termine «misura» in ambito quantistico può risultare fuorviante è che fa pensare al risultato come a qualche proprietà preesistente dell'oggetto in questione.

Secondo Bell il punto debole della meccanica quantistica è proprio questo:

*"Il Problema è dunque il seguente: in che modo esattamente l'universo va diviso in un apparato «dicibile» (speakable), di cui è possibile parlare, e in un sistema quantistico «indicibile» (unspeakable), di cui non è possibile parlare? ... Una teoria fondamentale non dovrebbe contemplare una formulazione matematica esatta?" [9]*

Egli ritiene che una descrizione uniforme dell'universo microscopico e macroscopico non sia da escludere. Similmente a quanto sosteneva De Broglie nel 1927, quando alla domanda "Onda o particella?" rispose "Onda e particella".

### 4.2 Contestualità

Secondo l'interpretazione ortodossa della meccanica quantistica, le osservabili non hanno un valore definito prima della misurazione, al contrario le teorie delle variabili nascoste (HVT, hidden variables theories) stabiliscono che le osservabili hanno determinati valori preesistenti che vengono rivelati solo nell'atto della misura. Nelle HVT gli stati specificati da un vettore di stato e da una variabile nascosta aggiuntiva sono detti *senza dispersione*.

Erano già state date dimostrazioni dell'impossibilità matematica dell'esistenza di variabili nascoste, separatamente, da von Neumann, Jauch e Piron e Gleason. L'ipotesi che vogliono confutare è

l'esistenza di stati senza dispersione. La critica mossa da Bell verso queste dimostrazioni è sempre la stessa: l'estensione di proprietà valide per gli stati quantistici agli stati senza dispersione. Bell sostiene, infatti, che questa assunzione non sia affatto banale, pertanto i risultati ottenuti non sono giustificati. Ad esempio critica a von Neumann di aver imposto la proprietà additiva per operatori che non commutano: se due operatori non possono essere misurati simultaneamente, in generale, non c'è motivo di imporre l'additività (per i valori di aspettazione degli stati quantistici usuali si può imporre:  $\langle \psi | A + B | \psi \rangle = \langle \psi | A | \psi \rangle + \langle \psi | B | \psi \rangle$ ).

Questa osservazione è riassunta nel *Corollario di Bell*, secondo cui, se lo spazio degli stati ha dimensione  $d > 2$ , non è possibile assegnare un valore definito ad ogni osservabile in ogni sistema. Bell è orientato verso un altro modello di variabili nascoste, in cui i risultati possono dipendere dalle diverse configurazioni dell'apparato di misura. Questo nuovo modello è detto appunto *contestuale* e può essere compatibile con la meccanica quantistica, mentre tutte le HVT con  $d > 2$  sono in conflitto con essa.

### 4.3 Non-località

Il punto di partenza degli studi di Bell è l'interpretazione di Bohm<sup>5</sup> (1952) della teoria dei quanti come una teoria deterministica e con variabili nascoste, identificate con le posizioni delle particelle. Essa consiste nell'elaborazione del concetto di *onda pilota*, espresso in precedenza da De Broglie<sup>6</sup> (1927): l'onda matematica non fornisce solo i possibili risultati di una misura della posizione, ma "pilota" appunto la particella verso le possibili posizioni che potrà assumere. Per uno stato entangled prevede che ogni traiettoria dipenda in modo complesso e istantaneo dalla traiettoria delle altre particelle. Questa interpretazione non era per nulla apprezzata dalla comunità dei fisici, né da Einstein né da Pauli, al contrario Bell pensa addirittura che "In ogni corso di meccanica quantistica dovresti imparare il modello di Bohm!" [11].

Il modello consiste in un sistema di due particelle di spin 1/2. È presente un campo magnetico esterno  $\mathbf{H}$  generato da due magneti di Stern-Gerlach che analizzano gli spin (a seconda dello spin, la particella viene deflessa in un verso o nel verso opposto). Lo stato quantico del sistema è rappresentato non solo dalla funzione d'onda  $\Psi_{ij}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ , con  $i$  e  $j$  indici di spin, ma anche dalle variabili nascoste, ossia i vettori  $\mathbf{X}_1$  e  $\mathbf{X}_2$  che forniscono direttamente i risultati delle misure di posizione, le altre misure sono riconducibili ad esse. Nel caso della meccanica quantistica, invece,  $\Psi$  contiene l'informazione massimale.

La funzione d'onda evolve nel tempo secondo l'equazione di Schrödinger

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = -i \left( -\frac{\partial^2}{\partial \mathbf{r}_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{r}_2^2} + V(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) + a\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \mathbf{H}(\mathbf{r}_1) + b\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \mathbf{H}(\mathbf{r}_2) \right) \Psi \quad (2)$$

A questa vanno affiancate le equazioni di evoluzione temporale per le variabili nascoste:

$$\frac{d\mathbf{X}_1}{dt} = \rho(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2)^{-1} \text{Im} \sum_{ij} \Psi_{ij}^*(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2) \frac{\partial}{\partial \mathbf{X}_1} \Psi_{ij}(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2) \quad (3)$$

$$\frac{d\mathbf{X}_2}{dt} = \rho(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2)^{-1} \text{Im} \sum_{ij} \Psi_{ij}^*(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2) \frac{\partial}{\partial \mathbf{X}_2} \Psi_{ij}(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2) \quad (4)$$

<sup>5</sup>Böhm, David. "A Suggested Interpretation of the Quantum Theory in Terms of" Hidden" Variables. I." Physical Review 85.2 (1952): 166-179. [12]

<sup>6</sup>De Broglie, Louis. "La mécanique ondulatoire et la structure atomique de la matière et du rayonnement." J. Phys. Radium 8.5 (1927): 225-241. [15]

dove  $\rho(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2) = \sum_{ij} |\Psi_{ij}(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2)|^2$  è la densità di probabilità,  $\hbar = 1$  e  $2m = 1$ .

Si osserva che queste equazioni hanno, in generale, carattere non locale. Solo nel caso di funzione d'onda fattorizzabile del tipo  $\Psi_{ij} = \Phi_i(\mathbf{X}_1)\chi_j(\mathbf{X}_2)$  le traiettorie sono determinabili indipendentemente, ma in generale la traiettoria della particella 1 dipende dalla traiettoria e dalla funzione d'onda della particella 2, a prescindere dalla distanza delle due. Le equazioni (3) e (4) si riducono a

$$\frac{d\mathbf{X}_1}{dt} = \left[ \sum_i \Phi_i^*(\mathbf{X}_1)\Phi_i(\mathbf{X}_1) \right]^{-1} \text{Im} \sum_i \Phi_i^*(\mathbf{X}_1) \frac{\partial}{\partial \mathbf{X}_1} \Phi_i(\mathbf{X}_1) \quad (5)$$

$$\frac{d\mathbf{X}_2}{dt} = \left[ \sum_j \chi_j^*(\mathbf{X}_2)\chi_j(\mathbf{X}_2) \right]^{-1} \text{Im} \sum_j \chi_j^*(\mathbf{X}_2) \frac{\partial}{\partial \mathbf{X}_2} \chi_j(\mathbf{X}_2) \quad (6)$$

A questo punto Bell realizza l'importanza del carattere non locale, domandandosi se sia un limite solo di questo modello di variabile nascosta o se sia intrinseco nella teoria.

*"... al momento non esiste alcuna prova che una qualsiasi spiegazione della meccanica quantistica basata sulle variabili nascoste debba avere questa straordinaria proprietà." [8]*

Tuttavia, la non-località implica un problema che ha sempre tormentato John Bell:

*"... potremmo essere costretti ad ammettere che le influenze causali si propagano davvero più velocemente della luce. Il ruolo dell'invarianza di Lorentz nella teoria completa sarebbe dunque molto problematico. Un "etere" sarebbe la soluzione più economica (Eberhard, 1978). Ma l'impossibilità di osservare questo etere sarebbe disturbante. E così dicasi per l'impossibilità di "messaggi" più veloci della luce, che consegue dall'ordinaria meccanica quantistica relativistica ... L'esatta chiarificazione di concetti come "messaggio" e "noi" rappresenterebbe una sfida formidabile." [2]*

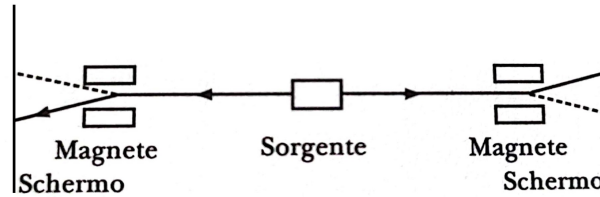
## 5 "Sul paradosso di Einstein-Podolsky-Rosen"

### 5.1 "Sul paradosso di Einstein-Podolsky-Rosen"

John Bell ritorna sull'argomento EPR, che era stato ignorato dalla comunità scientifica, nell'articolo "Sul paradosso Einstein-Podolsky-Rosen" del 1964. In esso viene ripresa l'ipotesi di Einstein dell'esistenza di variabili nascoste che dovrebbero riportare causalità e località nella meccanica quantistica, altrimenti incompleta. Nell'articolo Bell chiarirà il suo dubbio, espresso in precedenza, circa la necessità intrinseca della non-località:

*"Questa particolare interpretazione ha una struttura fortemente non locale, e questo è un aspetto caratteristico, secondo il risultato che sarà dimostrato qui, di una qualsiasi teoria che riproduca esattamente le previsioni quantistiche."* [6]

Bell analizza l'argomento EPR nella versione di Bohm e Aharonov del 1957, in cui è considerata una coppia di particelle di spin  $\frac{1}{2}$  nello stato di singoletto che si propagano liberamente in versi opposti. La misura degli spin,  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$ , lungo una certa direzione viene effettuata con un magnete di Stern-Gerlach. Siano  $A$  e  $B$  gli osservatori che misurano gli spin rispettivamente della prima e della seconda particella nelle direzioni  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$ , cui corrispondono gli operatori  $\sigma_1 \cdot \mathbf{a}$  e  $\sigma_2 \cdot \mathbf{b}$ . Secondo la meccanica quantistica, se la misura della componente  $\sigma_1 \cdot \mathbf{a}$  fornisce  $+1$ , allora  $\sigma_2 \cdot \mathbf{a}$  deve fornire  $-1$ .



**Figura 5:** Gedankenexperiment di EPR nella versione di Bohm. [2]

Sia fatta l'ipotesi che, se le due misure sono effettuate a grande distanza, l'orientazione di un magnete non influenzi il risultato ottenuto dall'altro. Come precedentemente osservato, la misura  $B$  è predeterminata dalla misura  $A$ , questa predeterminazione è denotata dal parametro aggiuntivo  $\lambda$ . Si ha pertanto

$$A(\mathbf{a}, \lambda) = \pm 1, \quad B(\mathbf{b}, \lambda) = \pm 1 \quad (7)$$

Ripetiamo che l'ipotesi fondamentale è che  $B$  non dipenda da  $\mathbf{a}$  e  $A$  non dipenda da  $\mathbf{b}$ . Sia  $\rho(\lambda)$  la distribuzione di probabilità normalizzata di  $\lambda$ . Allora il valore di aspettazione del prodotto delle due componenti  $\sigma_1 \cdot \mathbf{a}$  e  $\sigma_2 \cdot \mathbf{b}$  è dato da

$$P(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \int d\lambda \rho(\lambda) A(\mathbf{a}, \lambda) B(\mathbf{b}, \lambda) \quad (8)$$

e dovrebbe essere uguale al valore di aspettazione quantistico, che per lo stato di singoletto vale

$$\langle \sigma_1 \cdot \mathbf{a} \sigma_2 \cdot \mathbf{b} \rangle = -\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \quad (9)$$

Ma si dimostrerà che questo è impossibile.

Innanzitutto, si osserva che per la (7),  $P$  nella (8) non può essere minore di  $-1$ . E il valore minimo è soddisfatto per  $\mathbf{a} = \mathbf{b}$  solo se

$$A(\mathbf{a}, \lambda) = -B(\mathbf{a}, \lambda) \quad (10)$$

o nei punti  $\lambda$  con probabilità zero. Supponendo la (10), si può riscrivere la (8) come

$$P(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = - \int d\lambda \rho(\lambda) A(\mathbf{a}, \lambda) A(\mathbf{b}, \lambda) \quad (11)$$

Sia  $\mathbf{c}$  un altro vettore unitario, usando la (7) si ha

$$\begin{aligned} P(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - P(\mathbf{a}, \mathbf{c}) &= - \int d\lambda \rho(\lambda) [A(\mathbf{a}, \lambda) A(\mathbf{b}, \lambda) - A(\mathbf{a}, \lambda) A(\mathbf{c}, \lambda)] \\ &= \int d\lambda \rho(\lambda) A(\mathbf{a}, \lambda) A(\mathbf{b}, \lambda) [A(\mathbf{b}, \lambda) A(\mathbf{c}, \lambda) - 1] \end{aligned} \quad (12)$$

da cui

$$|P(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - P(\mathbf{a}, \mathbf{c})| \leq \int d\lambda \rho(\lambda) [1 - A(\mathbf{b}, \lambda) A(\mathbf{c}, \lambda)] \quad (13)$$

$$1 + P(\mathbf{b}, \mathbf{c}) \geq |P(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - P(\mathbf{a}, \mathbf{c})| \quad (14)$$

In generale, il secondo membro è dell'ordine di  $|\mathbf{b} - \mathbf{c}|$ , per  $|\mathbf{b} - \mathbf{c}|$  piccolo. Quindi  $P(\mathbf{b}, \mathbf{c})$  non può essere stazionario al valore minimo e non può essere uguale al valore quantistico (9). Di seguito vediamo che essa non può neanche essere approssimata con precisione arbitraria da un'espressione del tipo (8). Consideriamo le medie di  $P(\mathbf{a}', \mathbf{b}')$  e di  $-\mathbf{a}' \cdot \mathbf{b}'$  fatte su  $\mathbf{a}'$  e  $\mathbf{b}'$  entro piccoli angoli tra  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$ :  $\overline{P(\mathbf{a}, \mathbf{b})}$  e  $\overline{-\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}$ . Supponiamo valgano per tutti gli  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$

$$|\overline{P(\mathbf{a}, \mathbf{b})} + \overline{-\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}| \leq \epsilon \quad (15)$$

$$|\overline{-\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}} - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}| \leq \delta \quad (16)$$

Dalla (15) e dalla (8) si ha rispettivamente

$$|\overline{P(\mathbf{a}, \mathbf{b})} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}| \leq \epsilon + \delta \quad (17)$$

$$\overline{P(\mathbf{a}, \mathbf{b})} = \int d\lambda \rho(\lambda) \overline{A(\mathbf{a}, \lambda)} \overline{B(\mathbf{b}, \lambda)} \quad (18)$$

Dalla (17) e dalla (18), con  $\mathbf{a} = \mathbf{b}$ ,

$$d\lambda \rho(\lambda) [\overline{A(\mathbf{b}, \lambda)} \overline{B(\mathbf{b}, \lambda)} + 1] \leq \epsilon + \delta \quad (19)$$

Dalla (18)

$$\begin{aligned} \overline{P(\mathbf{a}, \mathbf{b})} - \overline{P(\mathbf{a}, \mathbf{c})} &= \int d\lambda \rho(\lambda) [\overline{A(\mathbf{a}, \lambda)} \overline{B(\mathbf{b}, \lambda)} - \overline{A(\mathbf{a}, \lambda)} \overline{B(\mathbf{c}, \lambda)}] \\ &= \int d\lambda \rho(\lambda) \overline{A(\mathbf{a}, \lambda)} \overline{B(\mathbf{b}, \lambda)} [1 + \overline{A(\mathbf{b}, \lambda)} \overline{B(\mathbf{c}, \lambda)}] - \int d\lambda \rho(\lambda) \overline{A(\mathbf{a}, \lambda)} \overline{B(\mathbf{c}, \lambda)} [1 + \overline{A(\mathbf{b}, \lambda)} \overline{B(\mathbf{c}, \lambda)}] \end{aligned} \quad (20)$$

e usando che  $|\overline{A(\mathbf{a}, \lambda)}| \leq 1$  e  $|\overline{B(\mathbf{b}, \lambda)}| \leq 1$

$$|\overline{P(\mathbf{a}, \mathbf{b})} - \overline{P(\mathbf{a}, \mathbf{c})}| \leq \int d\lambda \rho(\lambda) [1 + \overline{A(\mathbf{b}, \lambda)} \overline{B(\mathbf{c}, \lambda)}] + \int d\lambda \rho(\lambda) [1 + \overline{A(\mathbf{b}, \lambda)} \overline{B(\mathbf{b}, \lambda)}] \quad (21)$$

Da cui, usando (18) e (19)



$$|\overline{P}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - \overline{P}(\mathbf{a}, \mathbf{c})| \leq 1 + \overline{P}(\mathbf{b}, \mathbf{c}) + \epsilon + \delta \quad (22)$$

Infine dalla (17) si ha

$$|\mathbf{a} \cdot \mathbf{c} - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}| - 2(\epsilon + \delta) \leq 1 - \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} + 2(\epsilon + \delta) \quad (23)$$

$$4(\epsilon + \delta) \geq |\mathbf{a} \cdot \mathbf{c} - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}| + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} - 1 \quad (24)$$

Ora, prendendo ad esempio  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{c} = 0$ ,  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = 1/\sqrt{2}$ , si ottiene

$$4(\epsilon + \delta) \geq \sqrt{2} - 1 \quad (25)$$

Pertanto, per valori finiti e piccoli di  $\delta$ ,  $\epsilon$  non può essere arbitrariamente piccolo. Quindi il valor medio quantistico non può essere rappresentato, nè accuratamente nè arbitrariamente vicino, nella forma (8).

In conclusione, in una teoria a variabili nascoste

*"... deve essere presente un meccanismo mediante il quale la preparazione di uno strumento di misura possa influenzare la lettura di un altro strumento, per quanto lontano." [6]*

*"Si scoprirà infatti che nessuna teoria deterministica locale a variabili nascoste è in grado di riprodurre tutte le previsioni sperimentali della meccanica quantistica. Ciò apre la possibilità di condurre la questione nel dominio sperimentale, cercando di approssimare, quanto meglio possibile, le situazioni idealizzate in cui variabili nascoste locali e meccanica quantistica non possono essere in accordo tra loro." [4]*

In altre parole, una teoria a variabili nascoste deve avere carattere non locale per riprodurre tutte le predizioni della meccanica quantistica. Ciò è noto come *Teorema di Bell*.

L'importanza del lavoro di John Bell sta soprattutto nel convertire il dibattito filosofico tra Einstein e Bohr, che era ritenuto questione di gusto personale, in termini matematici, con una formulazione che può essere testata sperimentalmente. Il problema da superare ora è se le deviazioni dalla situazione ideale descritta dai passaggi precedenti possano essere mantenute sufficientemente piccole affinché la previsione quantistica violi ancora la disuguaglianza.

Al tempo della pubblicazione di questo articolo non c'è interesse in questo campo della fisica, è la cosiddetta *"epoca buia"* dei fondamenti della meccanica quantistica. È esemplificativa l'opinione espressa da Pauli<sup>7</sup> al riguardo:

*"One should no more rack one's brain about the problem of whether something one cannot know anything about exists at all."*

## 5.2 Esperimenti EPR

In questa sezione vengono nominati e/o spiegati brevemente alcuni dei più importanti esperimenti EPR, volti a verificare la violazione della disuguaglianza di Bell.

---

<sup>7</sup>Letter of W. Pauli to M. Born, March 31st, 1954 [18].

### 5.2.1 Prima generazione di esperimenti (anni Settanta)

Verso la fine degli anni Sessanta il primo ad interessarsi all'argomento EPR è John Clauser, studente della Columbia University, desideroso di verificare sperimentalmente la violazione della disuguaglianza. Come già detto, esperimenti di questo tipo non erano apprezzati al tempo e, quando il giovane prova a chiedere consiglio a Richard Feynman al Caltech, non viene preso in considerazione. Clauser, caratterizzato dall'ostinatezza della generazione ribelle di quegli anni, prepara comunque l'esperimento, inviando la proposta all'American Physical Society. Insieme ad altri fisici con idee simili alle sue, scrive nel 1969 l'articolo CHSH (Clauser, Horne, Shimony, Holt), in cui è proposta la disuguaglianza adatta agli esperimenti: una coppia di fotoni emessa in una cascata radioattiva generata da atomi di calcio eccitati tramite raggi laser. L'esperimento viene eseguito nel 1972, il segnale è molto debole e una misurazione dura circa 200 ore. Tuttavia, in accordo con la meccanica quantistica, si ottiene una chiara violazione della *disuguaglianza CHSH*

$$|P(a, b) - P(a, b')| + |P(a', b) + P(a', b')| \leq 2 \quad (26)$$

Nel 1976, Edward Fry e il suo studente Randall Thompson eseguono un esperimento simile utilizzando atomi di mercurio. Grazie ai miglioramenti sui laser, le misurazioni durano circa 80 minuti e la disuguaglianza viene violata a 4 sigma.

### 5.2.2 Seconda generazione di esperimenti (anni Ottanta)

Colpito dall'articolo di Bell, Alain Aspect decide di approfondire l'argomento nella sua tesi di dottorato e si reca al CERN per discuterne con lo stesso Bell. L'obiettivo di Aspect è quello di includere analizzatori variabili per dimostrare più chiaramente la non-località. Viene svolta una serie di esperimenti a partire ancora una volta da atomi di calcio eccitati che emettono una coppia di fotoni nello stato di Bell. Viene utilizzata la disuguaglianza di Clauser-Horne e risulta significativamente violata. L'esperimento finale è quello del cosiddetto *time-flip* (che potrebbe essere tradotto con *salto temporale quantistico*) e prevede un meccanismo ottico-acustico di inversione dei polarizzatori. Il tempo di inversione degli stessi e il tempo di vita dei fotoni sono molto minori del tempo di volo dalla sorgente agli analizzatori, questo implica un intervallo di tipo spazio tra gli eventi (non può sussistere alcuna correlazione causa-effetto).

Gli esperimenti con polarizzatori variabili mostrano che è come se le due particelle entangled fossero ancora a contatto tra loro e ciò sembra contraddire il principio di causalità relativistica, secondo cui nessuna interazione può propagarsi con velocità superluminale e di certo non istantaneamente. In realtà non si verifica nessuna violazione di questo principio, la non-separabilità non permette di trasferire *informazioni* istantaneamente. La risposta sta nel fatto che per inviare informazioni è necessario inviare anche una qualche griglia di decodifica e ciò è possibile solo attraverso un canale classico, non superluminale. Bell fa emergere un fatto che era stato trascurato: anche la meccanica quantistica, senza completamenti con le variabili nascoste, contiene una sottile non-località (senza violare la Lorentz invarianza).

Questo esperimento riceve molta attenzione dalla comunità scientifica e rappresenta un punto di svolta: i fisici realizzano l'importanza del lavoro di Bell e inizia una forte ricerca in questo ambito, che porterà all'odierna informazione quantistica e comunicazione quantistica.

### 5.2.3 Terza generazione di esperimenti (anni Novanta e seguenti)

Negli anni Novanta, l'atteggiamento verso i fondamenti della meccanica quantistica è totalmente cambiato e le basi di ricerca sono proprio le disuguaglianze di Bell e il fenomeno dell'entanglement. Nel frattempo, gli apparati strumentali hanno subito grandi miglioramenti e, in aggiunta, si sperimenta un nuovo modo di produrre fotoni entangled. Esso consiste nel colpire un cristallo

non lineare con raggi laser, ottenendo due fotoni che si propagano con polarizzazione verticale e orizzontale.

Questo tipo di esperimento viene svolto da Anton Zeilinger e il suo gruppo nel 1998. L'obiettivo è costruire degli analizzatori veramente casuali (quelli utilizzati da Aspect non lo erano propriamente, infatti erano detti quasi periodici) per ottenere la località stretta di Einstein. La violazione della disuguaglianza avviene a 30 sigma e l'alta efficienza della sorgente di fotoni permette misurazioni della durata di 3-4 minuti.

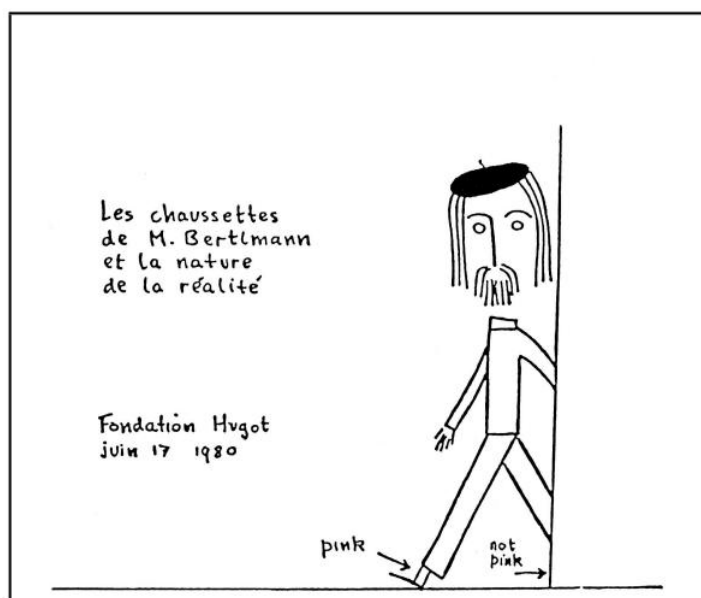
Vengono svolti altri esperimenti che provano che la distanza tra gli osservatori A e B non ha effetto sull'entanglement dei fotoni. Inizia una sorta di gara per ottenere il record di fotoni entangled a lunga distanza, per esempio viene eseguito un esperimento tra due isole delle Canarie, La Palma e Tenerife, con una distanza di 144 km.

## 6 I calzini di Bertlmann

Nell'articolo "I calzini di Bertlmann e la natura della realtà" del 1981 John Bell evidenzia ancora una volta la peculiarità delle correlazioni quantistiche, ben diverse da quelle classiche, e il fatto che siano localmente inspiegabili.

*"Il filosofo dilettante, che non ha dovuto pensare sulle dispense di meccanica quantistica, è piuttosto indifferente alle correlazioni di Einstein-Podolsky-Rosen. Egli potrebbe indicare molti esempi di correlazione di questo tipo nella vita quotidiana. Si cita spesso il caso dei calzini di Bertlmann." [2]*

Con l'ironia che lo contraddistingue, Bell propone quindi un esempio classico di correlazione che vede come protagonista il collega Reinhold Bertlmann, il quale ama indossare calzini di colore diverso. Bertlmann, appena vede l'articolo, è molto divertito e anche sorpreso che l'amico avesse notato quella sua particolare abitudine, nata in età giovanile come piccolo e personale gesto di protesta al tempo delle rivoluzioni del '68.

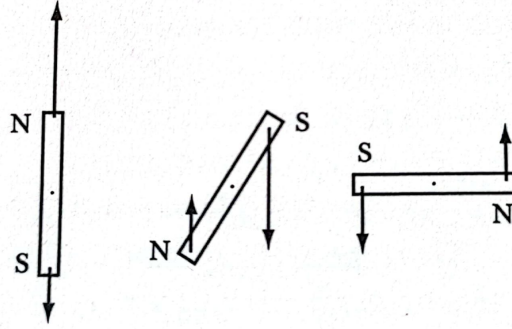


**Figura 6:** Raffigurazione di "I calzini di Bertlmann e la natura della realtà", articolo basato su una lecture di J. Bell intitolata "Implicazioni concettuali della fisica quantistica", presso la Fondation Hugot del College de France il 17 giugno 1980, pubblicato nel Journal de Physique, vignetta di J. Bell.

In tale esempio, l'osservazione del colore del calzino (rosa) e la conoscenza delle abitudini di Bertlmann dà immediatamente informazione sul secondo calzino (non rosa).

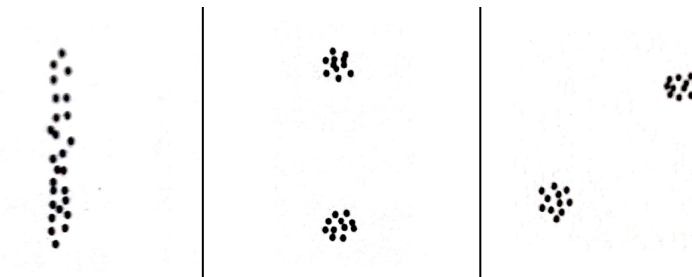
*"I suoi gusti restano inspiegabili, ma, a parte questo, non c'è nulla di misterioso. E la questione di EPR non è forse la stessa cosa? ... Dobbiamo approfondire la questione." [2]*

Tornando al caso EPR di due particelle di spin  $1/2$ , analizziamo il segnale registrato dai magneti di Stern-Gerlach in modo semplificato. Innanzitutto, consideriamo la particella come un piccolo magnete rotante con i poli nord e sud che giacciono lungo l'asse di rotazione. Supponiamo che il campo magnetico sia diretto verso l'alto e che l'intensità aumenti spostandosi verso l'alto.



**Figura 7:** Forze agenti su un magnete immerso in un campo magnetico non uniforme: diretto verso l'alto e la cui intensità aumenta verso l'alto. [2]

A seconda dell'angolo tra l'asse della particella e il campo, esiste un intervallo di possibili deflessioni. Consideriamo una successione di particelle e uno schermo che ne tracci il passaggio dopo la deflessione. Classicamente è attesa una figura a banda continua, invece quella che si ottiene mostra due gruppi distinti di tracce (nel caso semplice di spin  $s = 1/2$ , altrimenti si avrebbero  $2s + 1$  gruppi). Ruotando il magnete anche l'immagine sullo schermo ruota.



**Figura 8:** Distribuzioni attese sullo schermo di rivelazione posto dietro a un magnete di Stern-Gerlach. Distribuzione classica attesa con magnete verticale (sinistra), distribuzione quantistica con magnete verticale (centro), distribuzione quantistica con magnete ruotato (destra). [2]

Per imputare alla sorgente l'assenza di deflessioni intermedie, bisognerebbe immaginare che essa emetta particelle con spin orientato come il campo magnetico, addirittura anticipando in qualche modo la sua orientazione. Fenomeni di questo tipo generano scetticismo sulla possibilità di una descrizione spazio-temporale coerente del mondo microscopico. Altri sostengono che sia sbagliato ricercarne una. Altri ancora che le particelle non abbiano alcuna proprietà definita prima dell'osservazione. È come se, tornando all'esempio dei calzini, fossimo giunti a negare la realtà dei loro colori quando non vengono osservati.

*"In realtà è un paradosso! Ma per gli altri, non per EPR ... Per EPR si tratterebbe di «fantomatici effetti a distanza» (Born<sup>8</sup>,1971). Per evitare tutto questo, EPR devono attribuire alle regioni spaziotemporali in questione proprietà reali prima dell'osservazione, proprietà correlate che predeterminano i risultati di ogni singola osservazione."*

<sup>8</sup>Carriveau, G. W. "The Bornwith-Einstein Letters, with Commentaries by Max Born Translated by Irene Born Macmillan Press Ltd., London 1971." (1972): 139-139. [14]

Successivamente, Bell presenta una banale rappresentazione *ad hoc*. Si è precedentemente assunto che la forza risultante nella direzione del gradiente del campo magnetico abbia la forma

$$F \cos \theta \quad (27)$$

con  $\theta$  l'angolo tra direzione del campo magnetico e asse della particella. Nell'ipotesi *ad hoc*, quest'espressione si modifica come segue per spiegare l'osservazione di due soli gruppi di particelle deflesse

$$\frac{F \cos \theta}{|\cos \theta|} \quad (28)$$

Per spiegare le correlazioni EPR basta assumere che le due particelle abbiano assi magnetici diretti in versi opposti. Finchè i due magneti sono paralleli non ci sono problemi. Pertanto, si ruotino i due analizzatori rispettivamente di un angolo  $a$  e di un angolo  $b$  rispetto a una qualche direzione standard. Si può calcolare la probabilità dei risultati possibili nel modello *ad hoc*

$$P(\text{su}, \text{su}) = P(\text{giù}, \text{giù}) = \frac{|a - b|}{2\pi} \quad (29)$$

$$P(\text{su}, \text{giù}) = P(\text{giù}, \text{su}) = \frac{1}{2} - \frac{|a - b|}{2\pi} \quad (30)$$

Secondo la meccanica quantistica si ottiene invece

$$P(\text{su}, \text{su}) = P(\text{giù}, \text{giù}) = \frac{1}{2} \left( \sin \frac{a - b}{2} \right)^2 \quad (31)$$

$$P(\text{su}, \text{giù}) = P(\text{giù}, \text{su}) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left( \sin \frac{a - b}{2} \right)^2 \quad (32)$$

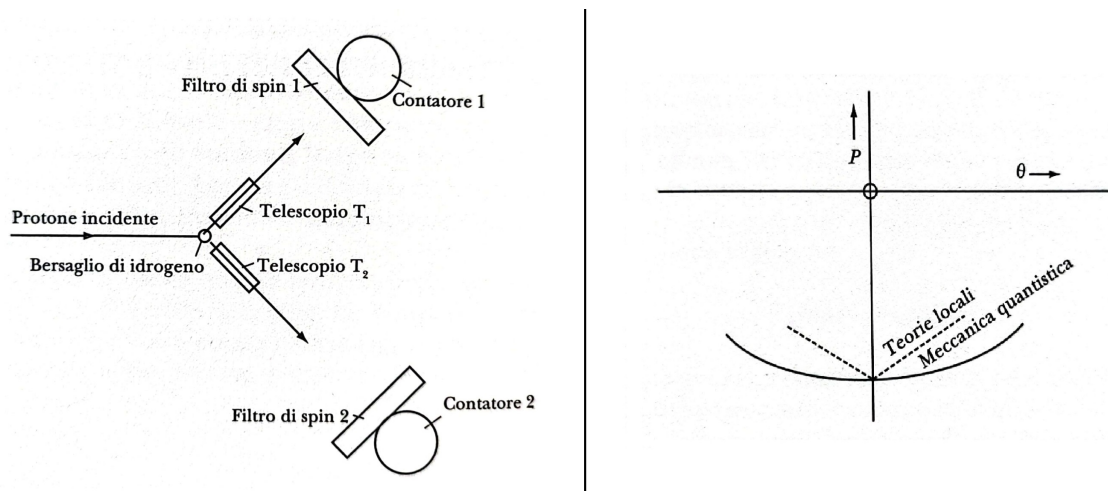
Il modello *ad hoc* riproduce i risultati della MQ solo per  $a - b = 0$ ,  $a - b = \pi/2$  e  $a - b = \pi$ . Non si può ideare un modello che riproduca i risultati attesi se si esclude l'azione a distanza.

Bell, servendosi ancora dell'esempio di Bertlmann, fa un'analogia tra calzini e particelle che lui stesso definisce "un po' tirata per i capelli" [2]. Tratta la probabilità di avere calzini resistenti a lavaggi a 0°C, 45°C e 90°C e particelle che oltrepassano i magneti ruotati di 0°, 45° e 90°, giungendo infine a una disuguaglianza che, tuttavia, non è rispettata usando la probabilità quantistica prevista dalle (31) e (32). Pertanto, non è possibile escludere che l'intervento su una parte abbia effetto causale sull'altra. Ammettere che i risultati da entrambe le parti siano determinati in anticipo porta a contraddire la meccanica quantistica, nel caso di magneti non paralleli.

Un risultato analogo è esposto anche nell'articolo "Gli esperimenti Einstein-Podolsky-Rosen", in cui viene proposto un esperimento mentale che consiste nell'analisi degli spin nell'urto protone-protone. Questo fenomeno, a grandi angoli e a bassa energia (qualche MeV), avviene essenzialmente in onda S, pertanto lo stato di spin deve essere quello di singoletto. Come prima, le correlazioni quantistiche sono riprodotte da una teoria a variabili nascoste solo se gli analizzatori di spin sono allineati. Bell dimostra che

*"Al contrario della correlazione quantistica, che è stazionaria in  $\theta$  a  $\theta = 0$ , la correlazione per la variabile nascosta deve avere qui un punto angoloso."* [3]

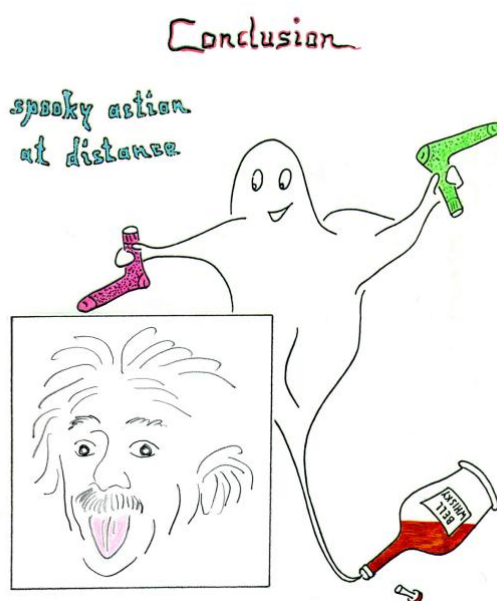
dove  $\theta$  è l'angolo tra le direzioni delle componenti di spin analizzate.



**Figura 9:** Gedankenexperiment di urto protone-protone (sinistra). Comportamento della correlazione  $P$  vicino a  $\theta = 0$ ,  $P = -1$  (destra). [3]

Bertlmann "risponde" all'articolo che lo vede protagonista con il suo "Bell's theorem and the nature of reality"<sup>9</sup> che gli dedica per il suo sessantesimo compleanno. Nelle conclusioni non può mancare una vignetta disegnata da Bertlmann.

*"John, as a strict teetotaler, was very much amused by my illustration, since the spooky, nonlocal ghost emerged from a bottle of Bell's Whisky, a brand that really did exist."* [2]



**Figura 10:** Conclusioni dell'articolo "Bell's theorem and the nature of reality", vignetta di Reinhold A. Bertlmann. [2]

<sup>9</sup>Reinhold A Bertlmann. Bell's theorem and the nature of reality. Rapp. tecn. Vienna Univ.(Austria). Inst. fuer Theoretische Physik, 1988. [10]

## 7 John Bell e la Seconda Rivoluzione Quantistica

John Bell inizia la sua attività di fisico in un periodo in cui i grandi successi della prima rivoluzione quantistica non avrebbero mai spinto nessuno a interrogarsi sui fondamenti della meccanica quantistica e ci vuole almeno un decennio perchè il suo lavoro venga preso in seria considerazione, tanto da dar vita alla seconda rivoluzione quantistica.

### 7.1 Prima rivoluzione quantistica

La meccanica quantistica è fondamentale per comprendere le caratteristiche dei materiali e dei dispositivi alla base di molte applicazioni tecnologiche. Grazie a riflessioni sulla natura quantistica della conducibilità elettrica, nel 1948 viene inventato il transistor, seguito dai microcircuiti integrati. Ha inizio l'età dell'informazione. La seconda grande invenzione è costituita dal laser, sviluppato alla fine degli anni Cinquanta. Esempi di applicazioni quotidiane sono i lettori di codici a barre, i lettori cd, alcuni strumenti medici e le fibre ottiche nell'ambito delle telecomunicazioni. In aggiunta, la spiegazione quantistica delle interazioni atomo-fotone ha portato all'invenzione degli orologi ad atomi freddi, che permettono accuratissime di 1 su  $10^{15}$  nelle misure di tempo (uno scarto di un secondo in trenta milioni di anni!).

### 7.2 Seconda rivoluzione quantistica

Nuove possibilità nel settore del trattamento e della trasmissione di informazioni derivano dallo studio dell'entanglement. I due esempi principali di applicazione sono la crittografia quantistica e la computazione quantistica.

La crittografia è la scienza che studia i metodi per codificare e/o trasmettere un messaggio senza che esso venga letto/compreso da terzi. In meccanica quantistica, ogni misurazione perturba il sistema fisico, pertanto qualsiasi tentativo di spionaggio lascia una traccia. In particolare vengono utilizzate proprio coppie EPR per consegnare in sicurezza le due chiavi casuali di lettura del messaggio. Infatti, se una spia effettua una misura sul sistema può rompere la correlazione perfetta delle particelle entangled. Nel caso di fotoni entangled, ad esempio, si può rilevare la spia utilizzando polarizzatori variabili.

*"Naturalmente può sempre succedere che un intercettatore cerchi di scoprire la chiave, intervenendo in un qualche punto del percorso lungo il quale vengono trasmessi i fotoni. Potrebbe per esempio misurare un fotone un attimo prima che arrivi a Giulietta e rimandarne uno, sempre a Giulietta, uguale a quello misurato. In questo caso però sarebbe molto facile ingannare l'intercettatore: basta che Romeo e Giulietta, ognuno per conto suo, cambino continuamente l'orientamento del polarizzatore. È sufficiente, in questo caso, che alternino due direzioni di polarizzatore sfasate di 45 gradi." [20]*

All'inizio degli anni Ottanta i fisici pensano che un calcolatore quantistico avrebbe potuto realizzare nuovi algoritmi, in particolare avrebbe ridotto i tempi di fattorizzazione di un numero: mentre i calcolatori tradizionali impiegano un tempo superpolinomiale (ossia il tempo necessario cresce più velocemente di una qualsiasi potenza del numero di cifre), un calcolatore quantistico impiega un tempo che cresce solo come una potenza della dimensione del numero. Ne segue un'importante implicazione concettuale: la complessità di un problema non è indipendente dalla macchina utilizzata. Vengono sviluppati i bit quantistici, che possono trovarsi in una sovrapposizione di due stati, e le porte logiche quantistiche, in grado di combinare i qubit per formare stati entangled.



## Bibliografia

- [1] John S Bell. “Against ‘measurement’”. In: *Physics world* 3.8 (1990), p. 33.
- [2] John S Bell. “Bertlmann’s socks and the nature of reality”. In: *Le Journal de Physique Colloques* 42.C2 (1981), pp. C2–41.
- [3] John S Bell. *Einstein-Podolsky-Rosen experiments*. 1976.
- [4] John S Bell. *Introduction to the hidden-variable question*. Rapp. tecn. CM-P00058691, 1971.
- [5] John S Bell. *Locality in quantum mechanics: reply to critics*. Rapp. tecn. CM-P00061609, 1975.
- [6] John S Bell. “On the Einstein Podolsky Rosen paradox”. In: *Physics Physique Fizika* 1.3 (1964), p. 195.
- [7] John S Bell. “On the impossible pilot wave”. In: *Foundations of Physics* 12.10 (1982), pp. 989–999.
- [8] John S Bell. “On the Problem of Hidden Variables in Quantum Mechanics”. In: *Rev. Mod. Phys.* 38 (3 lug. 1966), pp. 447–452.
- [9] John S Bell, Rodolfo Figari e Giuseppe Trautteur. *Dicibile e indicibile in meccanica quantistica*. Adelphi, 2010.
- [10] Reinhold A Bertlmann. *Bell’s theorem and the nature of reality*. Rapp. tecn. Vienna Univ.(Austria). Inst. fuer Theoretische Physik, 1988.
- [11] Reinhold A Bertlmann. “Bell’s universe: a personal recollection”. In: *Quantum [Un]Speakables II: Half a Century of Bell’s Theorem* (2017), pp. 17–80.
- [12] David Böhm. “A Suggested Interpretation of the Quantum Theory in Terms of " Hidden " Variables. I”. In: *Physical Review* 85.2 (1952), pp. 166–179.
- [13] Niels Bohr. “Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete?” In: *Physical review* 48.8 (1935), p. 696.
- [14] Gary W Carriveau. *The Bornwith-Einstein Letters, with Commentaries by Max Born Translated by Irene Born Macmillan Press Ltd., London 1971*. 1972.
- [15] Louis De Broglie. “La mécanique ondulatoire et la structure atomique de la matière et du rayonnement”. In: *J. Phys. Radium* 8.5 (1927), pp. 225–241.
- [16] Albert Einstein, Boris Podolsky e Nathan Rosen. “Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete?” In: *Physical Review* 47 (1935), pp. 777–780.
- [17] Max Jammer. *Philosophy of Quantum Mechanics. The interpretations of Quantum Mechanics in historical perspective*. 1974.
- [18] Karl von Meyenn. *Wolfgang Pauli, scientific correspondence with Bohr, Einstein, Heisenberg*. Vol. IV, Part II, 1953-1954. 1999.
- [19] Aage Petersen. “The philosophy of Niels Bohr”. In: *Bulletin of the Atomic Scientists* 19.7 (1963), pp. 8–14.
- [20] Anton Zeilinger. *Il Velo di Einstein. Il nuovo mondo della fisica quantistica*. Einaudi, Torino 2005, pp. 108–09.