UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

TESI DI LAUREA

RAPPRESENTAZIONE DI DUALITÀ TRA CATEGORIE DI MODULI

Relatori: Ch.mo Prof. Adalberto Orsatti
Dott. Riccardo Colpi

Correlatore: Ch.mo Prof. Enrico Gregorio

Laureando: Gino Favero

Goliardicus Ordo
Draconis Imperantis

Sacer Ordo Vespertilionis
Gens Patavina

Anno Accademico 1995-96 (774°)

Indice

Introduzione 1
Notazioni 2
Cotopologie: definizioni e generalità 3

I. Dualità tra Mod-A e ${}_R\mathscr{B}$
1. Generalità 5
2. ${}_R\mathscr{B}$ chiusa per sottomoduli chiusi 6
3. ${}_R\mathscr{B}$ chiusa per prodotti topologici 10

II. Dualità tra Mod-A_σ e ${}_R\mathscr{B}$
1. La categoria Mod-A_σ 13
2. Un bimodulo rappresentante 18
3. Rappresentazione del funtore D_2 26
4. Rappresentazione del funtore D_1 29
5. Complementi 31
6. Esempi 37

Bibliografia 42

Introduzione

Le dualità tra la categoria dei moduli astratti su un anello A e un'opportuna categoria di moduli topologici su un anello topologico R_τ (dove si assume che quest'ultima goda di naturali proprietà di chiusura) sono state profondamente studiate da autori come Ánh, Lefschetz-Kaplansky-MacDonald, Menini-Orsatti, Müller, Tonolo, Zelmanowitz-Jansen. Nei loro lavori è dimostrato che esiste sempre un bimodulo ${}_RK_A$, astratto su A e topologico discreto su R, che rappresenta la dualità; tale bimodulo risulta fedelmente bilanciato nel senso che l'anello A è isomorfo all'anello degli endomorfismi di ${}_RK$ e l'anello R_τ è topologicamente isomorfo all'anello degli endomorfismi di K_A dotato della topologia della convergenza puntuale. Inoltre, l'anello A è linearmente compatto discreto e, se K_A è un A-modulo iniettivo, l'anello R_τ deve essere linearmente compatto.

In questo lavoro si cerca di generalizzare questo risultato, dotando l'anello A di una topologia lineare σ e sostituendo alla categoria degli A-moduli astratti la categoria degli A_σ-moduli discreti topologici (l'idea di utilizzare quest'ultimo tipo di categorie è ispirata al loro impiego nel lavoro di molti autori, tra cui Albu, Gregorio e Wisbauer). Sotto le stesse ipotesi del caso precedente, definiremo un bimodulo ${}_RK_A$, topologico discreto sia su A che su R; doteremo poi ${}_RK$ di una cotopologia lineare (che è il concetto duale di topologia lineare) determinata dalla struttura di A-modulo, attraverso la quale rappresenteremo la dualità mediante il funtore Bchom dei morfismi continui e limitati (dove il concetto di morfismo limitato è il duale del concetto di morfismo continuo).

Analogamente al caso discreto, l'anello R_τ è topologicamente isomorfo all'anello degli endomorfismi di K_A dotato della topologia della convergenza puntuale e deve essere linearmente compatto se K_A è iniettivo. L'anello A_σ è topologicamente isomorfo all'anello degli endomorfismi limitati di K_A dove si dota quest'ultimo della topologia della convergenza uniforme sui sottomoduli limitati; inoltre l'anello A_σ possiede una proprietà debole di compattezza lineare che sarà chiamata auto-compattezza lineare. È dato anche un esempio da cui si deduce che esistono effettivamente dualità come quelle in esame, e che l'auto-compattezza lineare è una proprietà più debole della compattezza lineare.

Rimangono tuttavia aperti molti problemi. Dal momento che sono perfettamente caratterizzati i bimoduli che inducono dualità del tipo studiato da Lefschetz ed altri, ci si chiede se su un modulo topologico discreto K_A o su un modulo topologico discreto ${}_RK$ dotato di una cotopologia esistano condizioni necessarie e sufficienti per l'esistenza di una dualità come quelle in oggetto. Inoltre, ogni anello linearmente compatto può essere visto come l'anello degli endomorfismi di un opportuno modulo su un anello linearmente compatto: è lecito chiedersi, allora, se anche ogni anello auto-linearmente compatto possa essere descritto come l'anello degli endomorfismi limitati di un opportuno modulo cotopologico.

Il lavoro è diviso in due capitoli. Nel primo capitolo sono studiate le dualità di una generica categoria di R-moduli topologici con la categoria degli A-moduli astratti: in particolare, si cerca di capire in che modo le ipotesi di chiusura comunemente assunte sulla prima categoria siano determinanti per la rappresentazione della dualità, e si dimostrano tutti i risultati già noti dalla letteratura che siamo interessati a generalizzare.

Il secondo capitolo raccoglie i risultati originali di questo lavoro. Mediante un procedimento di passaggio al limite diretto è definito un R-modulo topologico sinistro

${}_RK$ al quale sono date una cotopologia e una struttura canonica di A-modulo destro topologico; si dimostra quindi che ${}_RK_A$ possiede proprietà del tutto analoga ai bimoduli che rappresentano le dualità di Morita topologiche e che in particolare ${}_RK$ è discreto. Mediante lo studio delle proprietà di cui gode la categoria degli A-moduli discreti topologici, si riesce a rappresentare uno dei due funtori costituenti la dualità per mezzo del bimodulo ${}_RK_A$: questo risultato e l'unicità dell'aggiunto permettono allora di mostrare che ${}_RK_A$ stesso rappresenta entrambi i funtori della dualità. Riportiamo per completezza gli enunciati dei risultati principali di questo capitolo:

Teorema (II, 4.5). *Siano A_σ, R_τ anelli topologici; siano* Mod-A_σ *la categoria degli A-moduli destri discreti topologici, e ${}_R\mathscr{B}$ una sottocategoria (piena) di R_τ-*LT *chiusa per sottomoduli topologici chiusi e prodotti topologici (cfr. I, 2.1 e I, 3.1). Supponiamo che sia data una dualità*

$$D = (D_1, D_2): \qquad \text{Mod-}A_\sigma \underset{D_2}{\overset{D_1}{\rightleftarrows}} {}_R\mathscr{B}.$$

Esistono allora allora un bimodulo ${}_RK_A$ e una cotopologia $\mathscr{C}$ su ${}_RK$ tali che:

a) *${}_RK$ è un R_τ-modulo topologico discreto, b-autocogeneratore e dotato della E.P.*
b) *K_A è fedele su A e cogeneratore di* Mod-A

e la dualità D è naturalmente isomorfa alla dualità

$$D_K = (\mathrm{Hom}^p_A(-, K), \mathrm{Bchom}_R(-, K)): \qquad \text{Mod-}A_\sigma \underset{\mathrm{Bchom}_R(-,K)}{\overset{\mathrm{Hom}^p_A(-,K)}{\rightleftarrows}} {}_R\mathscr{B}.$$

Teorema (II, 5.3). *Nelle stesse ipotesi di 4.5, i seguenti asserti sono equivalenti:*

a) *Ogni epimorfismo di ${}_R\mathscr{B}$ è suriettivo*
b) *K_A è iniettivo in* Mod-A_σ
c) *Ogni V_I è linearmente compatto discreto*
d) ${}_R\mathscr{B} \subseteq R_\tau$-$\mathrm{LC}_*$

Proposizione (II, 5.7). *Se la categoria* Mod-A_σ *ammette una dualità come nelle ipotesi dei Teorema 4.5, allora A_σ è auto-linearmente compatto.*

Notazioni

Si conviene che tutti gli anelli considerati nel corso del lavoro siano dotati di unità $1 \neq 0$, e che tutti i moduli siano unitari. Tutte le sottocategorie considerate sono piene e chiuse per isomorfismi, e tutti i funtori sono additivi.

Dato un anello R, R-Mod indicherà la categoria degli R-moduli sinistri e Mod-R quella degli R-moduli destri; sarà utilizzata la notazione ${}_RM \in R$-Mod, $M_R \in$ Mod-R.

Per $M, N \in R$-Mod il gruppo abeliano dei morfismi R-lineari $M \to N$ sarà indicato con $\mathrm{Hom}_R(M, N)$, e si scriverà $\mathrm{End}_R(M)$ o $\mathrm{End}({}_RM)$ in luogo di $\mathrm{Hom}_R(M, M)$; i morfismi saranno scritti dalla parte opposta a quella in cui operano gli scalari, e la composizione dei morfismi seguirà questa convenzione. Funzioni tra insiemi (o tra gruppi abeliani) e funtori saranno scritti sulla sinistra oppure in notazione esponenziale; per evitare confusione, la notazione $f \circ g$ indicherà sempre che g agisce per prima e f per seconda.

Se (R, τ) è un anello topologico, si scriverà R_τ in luogo di (R, τ), e la scrittura R_τ-LT indicherà la categoria degli R-moduli sinistri topologici su R_τ, linearmente topologizzati e di Hausdorff; la scrittura R_τ-LC indicherà la sottocategoria di R_τ-LT costituita dai moduli linearmente compatti, e R_τ-LC$_*$ indicherà la sottocategoria di R_τ-LC costituita dai moduli dotati della topologia di Leptin. Per $M, N \in R_\tau$-LT (R_τ-LC, R_τ-LC$_*$), $\mathrm{Chom}_R(M, N)$ indicherà il gruppo abeliano dei morfismi R-lineari e continui $M \to N$, e la scrittura $\mathrm{Cend}_R(M)$ sostituirà $\mathrm{Chom}_R(M, M)$. La scrittura R_τ-Mod indicherà la categoria degli R-moduli sinistri discreti topologici su R_τ; poiché ovviamente ogni morfismo R-lineare è continuo in R_τ-Mod, la scrittura $\mathrm{Hom}_R(M, N)$ è adatta ad indicare i morfismi anche in questa categoria. Nel caso in cui la topologia su R sia quella discreta, essa non sarà indicata nelle scritture precedenti: avremo quindi le categorie R-LT, R-LC e R-LC$_*$.

Cotopologie: definizioni e generalità

La nozione di *cotopologia* di un insieme deriva naturalmente dalla dualizzazione del concetto di topologia; sebbene sia possibile darne una definizione del tutto generale, limiteremo la nostra attenzione alle *cotopologie lineari* definite su un modulo ${}_RM \in R$-Mod.

Come una topologia lineare è definita univocamente dal filtro dei sottomoduli aperti, una cotopologia è individuata da un *cofiltro* di *sottomoduli limitati*, che è un insieme $\mathscr{C}$ di sottomoduli di M, tale che:

a) $X \leqslant Y \in \mathscr{C} \Rightarrow X \in \mathscr{C}$ ($\mathscr{C}$ è chiuso per sottomoduli)
b) $X, Y \in \mathscr{C} \Rightarrow X + Y \in \mathscr{C}$ ($\mathscr{C}$ è chiuso per somme finite)

Una cotopologia definita da $\mathscr{C}$ si dirà *co-Hausdorff* se la somma di tutti i limitati di $\mathscr{C}$ coincide con lo stesso M: nel seguito, tutte le cotopologie si intenderanno di questo tipo. In particolare, se $\mathscr{C}$ definisce una cotopologia (co-Hausdorff), $\mathscr{C}$ deve contenere ogni sottomodulo ciclico di M (perché è chiuso per sottomoduli) e ogni sottomodulo finitamente generato di M (perché è chiuso per somme finite). Dal momento che la famiglia dei sottomoduli finitamente generati costituisce un cofiltro, ogni modulo astratto M possiede la cotopologia che ha il cofiltro di limitati costituito dai suoi sottomoduli finitamente generati; inoltre, per quanto appena detto, questa cotopologia è minima tra tutte le cotopologie (co-Hausdorff) di M. Analogamente, M possiede una cotopologia massima, che è quella per cui il cofiltro di limitati è il reticolo di tutti i sottomoduli di M.

Se sui moduli M, N sono definite due cotopologie lineari dai cofiltri $\mathscr{C}$, $\mathscr{D}$, diremo che un morfismo R-lineare $f : M \to N$ è *limitato* se l'immagine di un sottomodulo limitato di M è un sottomodulo limitato di N (cioè: se $V \in \mathscr{C} \Rightarrow f(V) \in \mathscr{D}$). Ovviamente, somme e composizioni di morfismi limitati risultano morfismi limitati. Con

$\mathrm{Bhom}_R(M, N)$ indicheremo allora l'insieme dei morfismi limitati $M \to N$, che risulta un gruppo abeliano; analogamente $\mathrm{Bend}_R(M)$ (definito in modo ovvio) risulta un anello. Se i moduli M e N sono dotati anche di una topologia, è naturale definire il gruppo abeliano dei morfismi continui e limitati $\mathrm{Bchom}_R(M, N) = \mathrm{Bhom}_R(M, N) \cap \mathrm{Chom}_R(M, N)$ e l'anello degli endomorfismi contunui e limitati $\mathrm{Bcend}_R(M) = \mathrm{Cend}_R(M) \cap \mathrm{Bend}_R(M)$.

Diremo che la cotopologia definita da $\mathscr{C}$ è *più fine* di quella definita da $\mathscr{D}$ se ogni limitato secondo $\mathscr{C}$ è anche limitato secondo $\mathscr{D}$, ovvero se $\mathscr{D} \subseteq \mathscr{C}$. Si noti che, dualmente al caso topologico come era lecito attendersi, un morfismo limitato $f : M \to N$ rimane limitato se si dota il codominio (rispettivamente, il dominio) di una cotopologia più (rispettivamente, meno) fine. Dato allora un morfismo $f : M \to N$, è lecito parlare della meno fine cotopologia su N per cui f risulti limitata (se M ha una cotopologia fissata), e della più fine cotopologia su M per cui f risulti limitata (se N ha una cotopologia fissata): la prima sarà chiamata *cotopologia debole* di f, e la seconda *cotopologia forte* di f. Questo permette di definire, in tutta analogia con il caso topologico, le cotopologie relativa, quoziente, prodotto e debole o forte di una famiglia di morfismi: a titolo di esempio, diamo le seguenti definizioni.

Sia N un modulo dotato della cotopologia $\mathscr{C}$, e M sia un sottomodulo di N. La *cotopologia relativa* di M (relativa a N), è allora per definizione la cotopologia lineare forte dell'inclusione canonica. In essa, una base del cofiltro dei sottomoduli limitati è data dalle intersezioni $N \cap V$ al variare di V in $\mathscr{C}$.

Analogamente, se $M_1, ..., M_n$ sono una famiglia di moduli dotati dei cofiltri $\mathscr{C}_1, ..., \mathscr{C}_n$ rispettivamente, e $M = \prod_{i=1}^{n} M_i$, la *cotopologia prodotto* (delle $\mathscr{C}_i$) su M è per definizione la cotopologia lineare forte delle proiezioni canoniche $\pi_i : M \to M_i$. Il cofiltro $\mathscr{C}$ dei sottomoduli limitati nella cotopologia prodotto è dato allora dai sottomoduli dei prodotti di limitati di M_i: in simboli,

$$V \in \mathscr{C} \quad \Leftrightarrow \quad V \subseteq V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n \ \ \exists V_i \in \mathscr{C}_i \quad \Leftrightarrow \quad (V)\pi_i \in \mathscr{C}_i \ \ \forall i = 1, ..., n.$$

Convenzione

Molti dei risultati contenuti nella stessa sezione utilizzano le stesse ipotesi. Converremo dunque che gli enunciati marcati come "lemmi" utilizzino implicitamente le ipotesi esposte all'inizio di ogni sezione come "convenzioni" o "notazioni".

I. Dualità tra Mod-A e ${}_R\mathscr{B}$

1. Generalità

1.1. Notazioni. Siano A un anello astratto, R_τ un anello topologico e ${}_R\mathscr{B}$ una sottocategoria (piena) di R_τ-LT; supponiamo che sia data una dualità

$$D = (D_1, D_2): \qquad \text{Mod-}A \underset{D_2}{\overset{D_1}{\rightleftarrows}} {}_R\mathscr{B}.$$

In particolare, allora, esistono per ogni $M \in$ Mod-A, $N \in {}_R\mathscr{B}$, degli isomorfismi naturali

$$M \xrightarrow{\mu_M} D_2D_1(M)$$
$$N \xrightarrow{\nu_N} D_1D_2(N).$$

Questa situazione è molto simile a quella "classica" della dualità di Morita (cfr. [4], X, 1.2 segg.), con la significativa differenza che, mentre la categoria di sinistra soddisfa ovviamente a qualsiasi ipotesi di chiusura, nulla inizialmente si sa sulla categoria di destra (se non quanto deriva immediatamente dalla dualità, come per esempio il fatto che ${}_R\mathscr{B}$ è abeliana).

Tuttavia, anche senza porre ulteriori ipotesi su ${}_R\mathscr{B}$, è possibile in tutta generalità ricavare il seguente

1.2. Lemma. *Esiste un bimodulo ${}_RK_A$, tale che:*

a) *D_2 sia naturalmente equivalente al funtore* $\mathrm{Chom}_R(-, K)$*;*
b) *${}_RK$ sia cogeneratore iniettivo di ${}_R\mathscr{B}$ (nel senso delle categorie);*
c) *K_A sia fedele su A e cogeneratore di* Mod-A.

Dimostrazione. Sia ${}_RK = D_1(A)$. Allora si hanno gli isomorfismi di anelli

$$A \cong \mathrm{Hom}_A(A, A) \cong \mathrm{Chom}_R(D_1(A), D_1(A)) = \mathrm{Chom}_R(K, K)$$

e la posizione

$$ka = (k)\,(D_1(\lambda_a))$$

(dove $\lambda_a \in \mathrm{End}_A(A)$, $\lambda_a(x) = ax$ è la moltiplicazione a sinistra per $a \in A$) definisce una struttura di modulo destro su K: infatti, poiché il funtore D_1 inverte l'ordine di composizione dei morfismi, si ha

$$(ka)b = [(k)(D_1(\lambda_a))]D_1(\lambda_b) = (k)(D_1(\lambda_a \circ \lambda_b)) = (k)(D_1(\lambda_{ab})) = k(ab).$$

a) La dimostrazione è identica a quella che si percorre nel caso delle dualità di Morita: se $N \in {}_R\mathscr{B}$, si hanno evidentemente gli isomorfismi naturali di gruppi abeliani

$$D_2(N) \cong \mathrm{Hom}_A(A, D_2(N)) \cong \mathrm{Chom}_R(D_1D_2(N), D_1(A)) \cong \mathrm{Chom}_R(N, K_A).$$

Il gruppo $\mathrm{Hom}_A({}_AA, D_2(N))$ si atteggia ad A-modulo destro attraverso la struttura di ${}_AA$, e i gruppi $\mathrm{Chom}_R(D_1D_2(N), D_1(A))$ e $\mathrm{Chom}_R(N, K_A)$ si atteggiano ad A-moduli destri tramite la struttura di K_A; è immediato verificare, data la definizione della struttura di A-modulo destro su K, che gli isomorfismi in oggetto risultano A-lineari.

Con considerazioni del tutto analoghe si vede anche che qualsiasi sia $\varphi \in \mathrm{Chom}_R(N_1, N_2)$, deve essere $D_2(\varphi) = \mathrm{Chom}_R(\varphi, K)$.

b) Segue immediatamente dal fatto che D è una dualità e che A è generatore proiettivo di Mod-A. Vale la pena di osservare che l'iniettività nella categoria ${}_R\mathscr{B}$ è esattamente la proprietà E.P. così come è definita in [2] e [3]; in particolare D è una "buona dualità" nel senso di [2].

c) È evidente, poiché $A \cong \mathrm{Cend}_R(K)$, che K è fedele su A (l'unico morfismo che annulla tutto K è il morfismo nullo). Ora, poiché il funtore D_2 (essendo una dualità) è denso, per ogni $M \in$ Mod-A deve esistere un $N \in {}_R\mathscr{B}$ per cui si ha

$$A \cong D_2(N) \cong \mathrm{Chom}_R(N, K_A) \leqslant K_A^N$$

e dunque K_A è un cogeneratore di Mod-A.

2. ${}_R\mathscr{B}$ chiusa per sottomoduli chiusi

2.1. Convenzioni. Supporremo nel corso di questa sezione che ${}_R\mathscr{B}$ sia *chiusa per sottomoduli topologici chiusi*, nel senso che se N è un elemento di ${}_R\mathscr{B}$ e $N' \leqslant N$ chiuso, allora anche N', dotato della topologia relativa, è un oggetto di ${}_R\mathscr{B}$; in particolare l'inclusione canonica $j : N' \longrightarrow N$ è un morfismo di ${}_R\mathscr{B}$ (ed è mono, in quanto j è iniettiva).

Si noti che questo implica che ogni monomorfismo di ${}_R\mathscr{B}$ è iniettivo: infatti, dato un qualunque morfismo continuo $\varphi \in \mathrm{Chom}_R(N_1, N_2)$, $\varphi^{-1}(0)$ è un sottomodulo chiuso di N_1 che svolge il ruolo di $\ker(\varphi)$ nel senso delle categorie; allora ${}_R\mathscr{B}$ ha i nuclei e dunque un morfismo di ${}_R\mathscr{B}$ è mono se e solo se il suo nucleo è zero, se e solo se esso è iniettivo.

2.2. Sia $V \leqslant {}_RK$ chiuso; allora, data l'ipotesi di chiusura, ${}_RV$ con la topologia relativa è un elemento di ${}_R\mathscr{B}$, e l'inclusione canonica $i_V : V \longrightarrow K$ è (iniettiva e quindi) un monomorfismo di ${}_R\mathscr{B}$. Allora $D_2(i_V)$ è un epimorfismo di Mod-A, cioè un morfismo suriettivo, e così la composizione

$$A \xrightarrow{\mu_A} D_2(K) \xrightarrow{D_2(i_V)} D_2(V)$$

è suriettiva. Usiamo provvisoriamente la notazione $I_V = \ker(D_2(i_V) \circ \mu_A)$; in particolare

$$D_2(V) \cong A/I_V .$$

2.3. Lemma. $I_V = \mathrm{Ann}_A(V)$.

Dimostrazione. Si osservi che, poiché D è una dualità, deve esistere un isomorfismo naturale $\mathrm{Cend}_R(K) \cong \mathrm{End}(A_A) = \{\lambda_a \mid a \in A\}$ e dunque sarà $\mathrm{Cend}_R(K) = \{D_1(\lambda_a) \mid a \in A\}$. Per la rappresentazione del funture D_1, però, $\mathrm{Cend}_R(K) = D_2({}_RK) = D_2D_1(A)$: di conseguenza, $\mathrm{Cend}_R(K) = \{\mu_A(a) \mid a \in A\}$. Ma entrambi gli isomorfismi $\mathrm{Cend}_R(K) \cong \mathrm{End}(A_A)$ e $D_2D_1 \cong \mathrm{id}_{\text{Mod-}A}$ sono naturali; allora, si può concludere che per ogni $a \in A$ deve essere $D_1(\lambda_a) = \mu_A(a)$. Da questo segue che

$$\begin{aligned}\mathrm{Ann}_A(V) &= \{a \in A \mid \forall x \in V,\ 0 = xa = ((x)i_V)(D_1(\lambda_a))\}\\ &= \{a \in A \mid 0 = D_1(\lambda_a) \circ i_V = \mu_A(a) \circ i_V = \mathrm{Chom}_R(i_V, K)(\mu_A(a)) = (D_2(i_V) \circ \mu_A)(a)\}\\ &= \ker(D_2(i_V) \circ \mu_A) = I_V.\end{aligned}$$

2.4. In analogia con quanto accade per i sottomoduli chiusi di ${}_RK$, dato un ideale destro $I \leqslant A_A$ si può definire l'annullatore in K di I, $\mathrm{Ann}_K(I) = \{x \in K \mid xi = 0\ \forall i \in I\}$. $\mathrm{Ann}_K(I)$ risulta chiuso in K, perché

$$\mathrm{Ann}_K(I) = \bigcap_{i\in I} \mathrm{Ann}_K(i) = \bigcap_{i\in I} \ker(D_1(\lambda_i)) = \bigcap_{i\in I} (D_1(\lambda_i))^{-1}(0),$$

cioè $\mathrm{Ann}_K(I)$ è intersezione di chiusi. Allora, in base alle ipotesi di chiusura, $\mathrm{Ann}_K(I) \in {}_R\mathscr{B}$.

Si richiamano qui per comodità alcune ovvie proprietà degli annullatori: indicando con I, I_λ, J un generico ideale destro di A e con V, V_λ, W un generico R-sottomodulo chiuso di K, si ha:

$$\begin{aligned}&\mathrm{Ann}_A(\textstyle\sum_{\lambda\in\Lambda}(V_\lambda)) = \bigcap_{\lambda\in\Lambda}\mathrm{Ann}_A(V_\lambda), && \mathrm{Ann}_K(\textstyle\sum_{\lambda\in\Lambda}(I_\lambda)) = \bigcap_{\lambda\in\Lambda}\mathrm{Ann}_K(I_\lambda);\\ &V \leqslant W \Rightarrow \mathrm{Ann}_A(W) \leqslant \mathrm{Ann}_A(V), && I \leqslant J \Rightarrow \mathrm{Ann}_A(J) \leqslant \mathrm{Ann}_A(I);\\ &V \leqslant \mathrm{Ann}_K\mathrm{Ann}_A(V), && I \leqslant \mathrm{Ann}_A\mathrm{Ann}_K(I).\end{aligned}$$

2.5. Lemma. *Per ogni ideale destro* $I \leqslant A_A$, $I = \mathrm{Ann}_A\mathrm{Ann}_K(I)$.

Dimostrazione. Sia $a \in A \setminus I$; allora $a + I \neq I$, cioè $a + I \neq 0$ in A / I. Poiché K_A è un cogeneratore di Mod-A (vedi 1.2), esiste un morfismo $f : A / I \longrightarrow K_A$ tale che $f(a + I) \neq 0$; componendo f con la proiezione canonica su A / I si ottiene allora un morfismo $\varphi : A \longrightarrow K_A$ tale che $\varphi(a) \neq 0 = \varphi(I)$. Del resto, $\forall a \in A$, $\varphi(a) = \varphi(1a) = \varphi(1)\, a$; allora $k = \varphi(1) \in K$ è tale che $ka \neq 0 = kI$, cioè $k \in \mathrm{Ann}_K(I)$, ma a non annulla k. Allora $a \notin \mathrm{Ann}_A\mathrm{Ann}_K(I)$, cioè $\mathrm{Ann}_A\mathrm{Ann}_K(I) \leqslant I$.

La tesi segue subito dal fatto che l'inclusione opposta è sempre verificata. Si noti che per la dimostrazione è cruciale il fatto che K_A sia un cogeneratore.

2.6. Osservazione. Sia $I \leqslant A_A$, e $\pi_I : A \longrightarrow A / I$ la proiezione canonica. Ovviamente π_I è suriettiva, e allora $D_1(\pi_I) : D_1(A / I) \longrightarrow K$ è un monomorfismo di ${}_R\mathscr{B}$. Ora, poiché $\mathrm{Ann}_A\mathrm{Ann}_K(I) = I$ e per 2.2, 2.3, si ha che

$$D_2(\mathrm{Ann}_K(I)) = A / I \cong D_2D_1(A / I)$$

dove l'ultimo isomorfismo è naturale. Allora l'immagine del morfismo canonico $D_1(A / I) \longrightarrow K$ è proprio $\mathrm{Ann}_K(I)$, e da questo si può ricavare il seguente

2.7. Lemma. *Per ogni sottomodulo chiuso $V \leqslant {}_RK$, $V = \mathrm{Ann}_K\mathrm{Ann}_A(V)$.*

Dimostrazione. Poiché anche $\mathrm{Ann}_K\mathrm{Ann}_A(V)$ è un sottomodulo chiuso di ${}_RK$, esiste in ${}_R\mathscr{B}$ l'inclusione canonica $V \to \mathrm{Ann}_K\mathrm{Ann}_A(V)$. In virtù della precedente osservazione, si ha che $\mathrm{Ann}_K(I) \cong D_1(A / I)$; allora $\mathrm{Ann}_K\mathrm{Ann}_A(V) \cong D_1(A / \mathrm{Ann}_A(V)) \cong D_1(D_2(V)) \cong V$ e dunque l'inclusione canonica deve essere un isomorfismo, da cui segue che deve essere $V = \mathrm{Ann}_K\mathrm{Ann}_A(V)$.

2.8. Lemma. *Data una qualsiasi famiglia $(V_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ di sottomoduli chiusi di ${}_RK$, si ha che*

$$\mathrm{Ann}_A(\textstyle\bigcap_{\lambda\in\Lambda} V_\lambda) = \sum_{\lambda\in\Lambda}\mathrm{Ann}_A(V_\lambda).$$

Dimostrazione. Poniamo $I = \mathrm{Ann}_A(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} V_\lambda)$, $J = \sum_{\lambda\in\Lambda}\mathrm{Ann}_A(V_\lambda)$; è ovvio che sia $J \leqslant I$.

Supponiamo che l'inclusione sia propria: poiché, per quanto visto fino ad ora, la corrispondenza tra ideali di A e sottomoduli chiusi di K è una biiezione di insiemi che inverte le inclusioni, si avrebbe

$$\textstyle\bigcap_{\lambda\in\Lambda} V_\lambda = \mathrm{Ann}_K(I) < \mathrm{Ann}_K(J) = \mathrm{Ann}_K(\sum_{\lambda\in\Lambda}\mathrm{Ann}_A(V_\lambda)) = \bigcap_{\lambda\in\Lambda}\mathrm{Ann}_K\mathrm{Ann}_A(V_\lambda) = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} V_\lambda,$$

con un'inclusione propria, il che è assurdo.

2.9. Corollario. *${}_RK$ è dotato della topologia discreta ed è finitamente cogenerato.*

Dimostrazione. Si ricordi innanzitutto che ogni sottomodulo aperto di un modulo linearmente topologizzato è anche chiuso. Ora, poiché la topologia di ${}_RK$ è lineare e di Hausdorff, esiste una famiglia $(V_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ di sottomoduli aperti (e quindi chiusi) di ${}_RK$ la cui intersezione è il sottomodulo nullo. Ma allora, per il lemma precedente, si ha

$$A = \mathrm{Ann}_A(0) = \mathrm{Ann}_A(\textstyle\bigcap_{\lambda\in\Lambda} V_\lambda) = \sum_{\lambda\in\Lambda}\mathrm{Ann}_A(V_\lambda).$$

Si ricordi ora che, poiché $1 \in A$, la somma di ideali all'ultimo membro si riduce a una somma su un sottoinsieme finito F di Λ. Allora, ricordando che K_A è fedele, si ha che

$$0_K = \mathrm{Ann}_K(A) = \mathrm{Ann}_K(\Sigma_{\lambda\in F}\mathrm{Ann}_A(V_\lambda)) = \bigcap_{\lambda\in F}\mathrm{Ann}_K\mathrm{Ann}_A(V_\lambda) = \bigcap_{\lambda\in F}V_\lambda,$$

e allora lo 0 di K, essendo intersezione finita di aperti, è aperto.

Si noti che la seconda parte della tesi deriva dalla stessa dimostrazione: infatti, poiché ogni sottomodulo di un modulo discreto è aperto e chiuso, si è dimostrato che ogni famiglia di sottomoduli di ${}_RK$ a intersezione nulla ammette una sottofamiglia finita a intersezione nulla.

2.10. Lemma. *A_A è linearmente compatto nella topologia discreta.*

Dimostrazione. Sia $\mathscr{V} = (a_\lambda + I_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ una famiglia di varietà lineari di A dotata della proprietà dell'intersezione finita; per ogni $\lambda \in \Lambda$ poniamo $V_\lambda = \mathrm{Ann}_K(I_\lambda)$. Definiamo

$$f : \Sigma_{\lambda\in\Lambda}V_\lambda \longrightarrow {}_RK, \qquad f(\Sigma_{\lambda\in F}v_\lambda) = \Sigma_{\lambda\in F}(v_\lambda a_\lambda)$$

Il fatto che i V_λ siano gli annullatori in K degli I_λ e che $\mathscr{V}$ abbia la p.i.f. permette di verificare direttamente che f è ben definita. Supponiamo che sia $\Sigma_{\lambda\in F}v_\lambda = \Sigma_{\mu\in G}w_\mu$ e osserviamo che non è restrittivo supporre $F = G$ (se non lo sono, si somma sull'insieme finito $F \cup G$, ponendo nulle le componenti che non sono coinvolte direttamente); scelto un $a \in \bigcap_{\lambda\in F}(a_\lambda + I_\lambda)$ si ha

$$\begin{aligned} f(\Sigma_{\lambda\in F}v_\lambda) &= \Sigma_{\lambda\in F}(v_\lambda a_\lambda) = \Sigma_{\lambda\in F}(v_\lambda a) = (\Sigma_{\lambda\in F}v_\lambda)a = \\ &= (\Sigma_{\mu\in F}w_\mu)a = \Sigma_{\mu\in F}(w_\mu a) = \Sigma_{\mu\in F}(w_\mu a_\mu) = f(\Sigma_\mu v_\mu). \end{aligned}$$

Poiché ${}_RK$ è discreto, $\Sigma_{\lambda\in\Lambda}V_\lambda$ è un oggetto di ${}_R\mathscr{B}$ e f è un morfismo continuo; allora, poiché ${}_RK$ è un oggetto iniettivo di ${}_R\mathscr{B}$, f si estende a un endomorfismo $\varphi \in \mathrm{End}({}_RK)$. Ma $\mathrm{End}({}_RK) \cong A$, e allora esiste un $a_0 \in A$ tale che per ogni $x \in {}_RK$ si abbia $(x)\varphi = xa_0$. In particolare, per ogni $v_\lambda \in V_\lambda$ si ha $v_\lambda a_0 = (v_\lambda)\varphi = (v_\lambda)f = v_\lambda a_\lambda$, cioè $v_\lambda(a_0 - a_\lambda) = 0$; ma allora per ogni $\lambda \in \Lambda$, risulta $a_0 \equiv a_\lambda \bmod \mathrm{Ann}_K(V_\lambda)$, e allora da 2.5 segue che effettivamente $a_0 \in \bigcap_{\lambda\in\Lambda}(a_\lambda + I_\lambda)$.

2.11. Lemma. *Se K_A è iniettivo, allora ${}_RK$ è linearmente compatto (nella topologia discreta).*

Dimostrazione. È del tutto analoga alla precedente. Sia $\mathscr{V} = (k_\lambda + V_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ una famiglia di varietà lineari di ${}_RK$ dotata della proprietà dell'intersezione finita e per ogni $\lambda \in \Lambda$ si definisca $I_\lambda = \mathrm{Ann}_A(V_\lambda)$; il morfismo

$$f : \Sigma_{\lambda\in\Lambda}I_\lambda \longrightarrow K_A, \qquad f(\Sigma_{\lambda\in F}i_\lambda) = \Sigma_{\lambda\in F}(k_\lambda i_\lambda).$$

risulta ben definito applicando lo stesso ragionamento seguito nella dimostrazione del lemma precedente. Se ora K_A è iniettivo, f si estende a un morfismo $\varphi \in \mathrm{Hom}_A(A, K) \cong K_A$, e allora esiste un $k_0 \in K$ tale che per ogni $a \in A$, $\varphi(a) = k_0 a$. In particolare, per ogni $i_\lambda \in I_\lambda$ risulta $k_0 i_\lambda = \varphi(i_\lambda) = f(i_\lambda) = k_\lambda i_\lambda$ $\forall i_\lambda$, cioè $(k_0 - k_\lambda) i_\lambda = 0$, e da 2.7 segue infine $k_0 \in \cap_{\lambda \in \Lambda}(k_\lambda + V_\lambda)$.

Ricordando anche 1.2, siamo ora in condizioni di enunciare il seguente

2.12. Teorema. *Siano A un anello astratto, R_τ un anello topologico e ${}_R\mathscr{B}$ una sottocategoria (piena) di R_τ-*LT *chiusa per sottomoduli topologici chiusi nel senso precisato in 2.1. Supponiamo che sia data una dualità*

$$D = (D_1, D_2): \qquad \text{Mod-}A \underset{D_2}{\overset{D_1}{\rightleftarrows}} {}_R\mathscr{B}.$$

Si definisca ${}_RK = D_1(A)$. Esiste un isomorfismo canonico di anelli tra A e $\mathrm{End}({}_RK)$, *che definisce su K una struttura canonica di modulo destro su A; il bimodulo ${}_RK_A$ è tale che*

a) *${}_RK$ è un R_τ-modulo topologico finitamente cogenerato e discreto, cogeneratore iniettivo di ${}_R\mathscr{B}$;*
b) *K_A è fedele su A e cogeneratore di* Mod-*A;*
c) *il funtore D_2 è naturalmente isomorfo al funtore* $\mathrm{Chom}_R(-, K)$.

Inoltre l'anello A è linearmente compatto discreto e, se K_A è iniettivo, ${}_RK$ è linearmente compatto discreto.

3. ${}_R\mathscr{B}$ chiusa per prodotti topologici

3.1. Convenzioni. Supponiamo ora che, ferme restando le ipotesi della sezione 2, ${}_R\mathscr{B}$ sia anche *chiusa per prodotti topologici*: se, cioè $(N_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ è una famiglia di moduli di ${}_R\mathscr{B}$, allora $N = \prod_{\lambda \in \Lambda} N_\lambda$ (dotato della topologia prodotto) è un modulo di ${}_R\mathscr{B}$. In particolare le proiezioni canoniche $\pi_\lambda : N \longrightarrow N_\lambda$ sono (epi)morfismi di ${}_R\mathscr{B}$.

Si noti che, poiché ${}_RK$ è un cogeneratore di ${}_R\mathscr{B}$ e ${}_R\mathscr{B}$ è chiusa per sottomoduli chiusi, è equivalente supporre che ${}_R\mathscr{B}$ contenga ${}_RK^X$ qualunque sia l'insieme X.

3.2. Indichiamo con M un generico elemento di Mod-A.

Il gruppo abeliano $H = \mathrm{Hom}_A(M, {}_RK_A)$ si atteggia a R-modulo sinistro tramite la struttura di ${}_RK$. È noto che, in questa situazione, la topologia relativa di H visto come sottomodulo di ${}_RK^M$ coincide con la topologia finita di H, per cui una base del filtro di intorni di zero è data, al variare di F tra i sottoinsiemi finiti di K, dai sottomoduli della forma $\mathrm{W}(F) = \{f \in H \mid f(F) = 0\}$.

Per ogni $\varphi \in \mathrm{Hom}_A(M, M')$, con $\varphi^* = \mathrm{Hom}_A(\varphi, K) : \mathrm{Hom}_A(M', K) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(M, K)$ si definisce il "morfismo trasposto" di φ (esplicitando la notazione, $\varphi^*(f) = f \circ \varphi$); se i

due moduli sono dotati delle rispettive topologie finite, φ^* risulta continua perché se F è un sottoinsieme finito di M è evidente che $\varphi^*\{\mathrm{W}(f(F))\} \subseteq \mathrm{W}(F)$.

Queste posizioni definiscono un funtore $\mathrm{Hom}_A^p(-, K) : \text{Mod-}A \longrightarrow R\text{-LT}$; ma nelle nostre ipotesi di chiusura, poiché $\mathrm{Hom}_A^p(M, K)$ è un sotto-R-modulo chiuso di ${}_RK^M$, $\mathrm{Hom}_A^p(-, K) : \text{Mod-}A \longrightarrow {}_R\mathscr{B}$. È inoltre noto (cfr. II, 4.1) che esiste un'aggiunzione tra i funtori $\mathrm{Hom}_A^p(-, K)$ e $\mathrm{Chom}_R(-, K)$ data dagli isomorfismi di gruppi abeliani definiti dalle posizioni

$$\vartheta : \mathrm{Hom}_A(M, \mathrm{Chom}_R(N, K)) \longrightarrow \mathrm{Chom}_R(N, \mathrm{Hom}_A^p(M, K)), \quad ((n)f^{\vartheta})(m) = (n)(f(m)),$$
$$\delta : \mathrm{Chom}_R(N, \mathrm{Hom}_A^p(M, K)) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(M, \mathrm{Chom}_R(N, K)), \quad (n)(g^{\delta}(m)) = ((n)g)(m);$$

e vicendevolmente inversi. Allora, poiché l'aggiunto di un funtore è unico a meno di isomorfismo funtoriale, è immediato il seguente:

3.3. Lemma. *Il funtore D_1 è naturalmente isomorfo a* $\mathrm{Hom}_A^p(-, K)$.

3.4. Lemma. *Sia $\mathscr{C}({}_RK)$ la categoria dei moduli K-*compatti*, cioè dei moduli topologicamente isomorfi a R-sottomoduli chiusi di prodotti topologici di K. Allora ${}_R\mathscr{B} = \mathscr{C}({}_RK)$.*

Dimostrazione. È evidente, nelle nostre ipotesi di chiusura, che sia $\mathscr{C}({}_RK) \subseteq {}_R\mathscr{B}$. D'altra parte, poiché D è una dualità, $\forall N \in {}_R\mathscr{B}$ si ha

$$N \cong D_1D_2(N) = \mathrm{Hom}_A^p(\mathrm{Chom}_R(N, K), K);$$

ma $\mathrm{Hom}_A^p(\mathrm{Chom}_R(N, K), K)$ è un sottomodulo chiuso di ${}_RK^{\mathrm{Chom}_R(N,K)}$ e, essendo completo, è chiuso. Allora ${}_R\mathscr{B} \subseteq \mathscr{C}({}_RK)$.

In queste ipotesi di chiusura su ${}_R\mathscr{B}$ si ricade dunque in una situazione già studiata profondamente (si vedano ad esempio [3] e [5]). In particolare si può dare il seguente

3.5. Teorema. *Sia $D = (D_1, D_2)$ la dualità definita in 1.1, e si supponga che la categoria ${}_R\mathscr{B}$ sia chiusa per sottomoduli chiusi e prodotti topologici (come precisato in 2.1 e 3.1); sia ${}_RK_A$ il bimodulo definito in 2.12. Allora D è naturalmente isomorfa alla dualità*

$$\Delta_K = (\mathrm{Hom}_A^p(-, K), \mathrm{Chom}_R(-, K)): \qquad \text{Mod-}A \underset{\mathrm{Chom}_R(-,K)}{\overset{\mathrm{Hom}_A^p(-,K)}{\rightleftarrows}} {}_R\mathscr{B}.$$

Inoltre i seguenti asserti sono equivalenti:

a) *K_A è iniettivo*
b) *${}_RK$ è l.c.d.*
c) ${}_R\mathscr{B} \subseteq R\text{-LC}_*$
d) *Gli epimorfismi di ${}_R\mathscr{B}$ sono morfismi suriettivi*

Dimostrazione. La prima parte della tesi segue direttamente dal teorema 2.12 e dal lemma 3.3; dimostreremo allora solo la seconda parte.

(a) $\Rightarrow$ (b) è la 2.11.

(b) $\Rightarrow$ (c): poiché ${}_R\mathscr{B} = \mathscr{C}({}_RK)$, ogni modulo di ${}_R\mathscr{B}$ è un sottomodulo chiuso di un prodotto topologico di copie di K. Ma sottomoduli chiusi e prodotti topologici di moduli linearmente compatti sono linearmente compatti, così come prodotti di topologie di Leptin e topologie relative (a sottomoduli chiusi) di topologie di Leptin danno ancora topologie di Leptin. Per concludere basta osservare che, poiché ${}_RK$ è finitamente cogenerato, la topologia discreta è minimale tra le topologie di Hausdorff, e dunque che ${}_RK$ ha la topologia di Leptin.

(c) $\Rightarrow$ (b): è evidente, perché ${}_RK$ deve essere l.c. per ipotesi e discreto per 2.9.

(b) $\Rightarrow$ (a) (criterio di Baer): si noti che, dal momento che ${}_RK$ è discreto, ogni suo sottomodulo è aperto e chiuso, e allora la 2.7 vale per ogni sottomodulo $V \leqslant {}_RK$. Del resto, dal momendo che $A \cong \mathrm{End}({}_RK)$, dire che $\mathrm{Ann}_K\mathrm{Ann}_A(V) = V$ equivale a dire che per ogni sottomodulo $V \leqslant {}_RK$ e per ogni $x \in K \setminus V$ esiste un endomorfismo $\varphi \in \mathrm{End}({}_RK)$ tale che $(x)\varphi \neq 0 = (V)\varphi$. Inoltre, se ${}_RK$ è l.c.d., per ogni $V \leqslant {}_RK$ il modulo quoziente K / V è ancora l.c.d. e per quanto appena detto esiste un monomorfismo continuo $K / V \longrightarrow {}_RK^X$ con X insieme opportuno. Dotando allora K / V della topologia debole di questa inclusione si ha che K / V è ancora linearmente compatto, e pertanto risulta isomorfo a un sottomodulo chiuso di ${}_RK^X$, cioè $K / V \in {}_R\mathscr{B}$.

Sia dunque $I \leqslant A_A$ e si definisca $V = \mathrm{Ann}_K(I)$. Poiché, rappresentato il funtore D_1 come in 3.3, $D_1(A) = \mathrm{Hom}^p_A(A, K) \cong K$ e $D_1(I) = \mathrm{Hom}^p_A(I, K) \cong K / V$, detta $i_I : I \to A$ l'iniezione canonica si ha che $D_1(i_I) = \mathrm{Hom}_A(i_I, K)$ risulta essere la proiezione sul quoziente $K \longrightarrow K / V$, cioè che $\mathrm{Hom}_A(i_I, K)$ è suriettivo. Allora K_A è iniettivo.

(a) $\Rightarrow$ (d): siano dati due moduli ${}_RM, {}_RN \in {}_R\mathscr{B}$, e un epimorfismo $f : M \to N$; il morfismo $D_2(f)$, duale di f, è allora un monomorfismo di Mod-A, cioè un morfismo iniettivo. Dal momento che $\mathrm{Hom}_A(-, K)$ è esatto per ipotesi, allora, il morfismo $\mathrm{Hom}_A(D_2(f), K)$ risulta un morfismo suriettivo; del resto per 3.3 $\mathrm{Hom}_A(D_2(f), K)$ è naturalmente isomorfo a $D_1D_2(f)$ e, poiché D è una dualità, $D_1D_2(f)$ è naturalmente isomorfo a f. Allora f deve essere suriettivo.

(d) $\Rightarrow$ (a): siano dati due moduli $M_A, N_A \in$ Mod-A, e un monomorfismo $f : M \to N$. Il morfismo duale di f deve essere un epimorfismo; ma allora per ipotesi e per 3.3, $\mathrm{Hom}_A(f, K)$ è suriettivo. Per l'arbitrarietà di f segue che il funtore $\mathrm{Hom}_A(-, K)$ è esatto, cioè che K_A è iniettivo.

3.6. Osservazioni. Si noti che nel dimostrare "(b) $\Rightarrow$ (a)" in 3.5, si è enunciato il fatto che K sia fortemente quasi iniettivo (cfr. [2]). Ciò, data anche l'iniettività di K in ${}_R\mathscr{B}$, permette di concludere (cfr. [4], VI, 1.3) che K è un autocogeneratore, cioè che per ogni $n \in \mathbb{N}$, scelti comunque un sottomodulo chiuso $B \leqslant {}_RK^n$ e un elemento $x \in K^n \setminus B$, esiste in ${}_R\mathscr{B}$ un morfismo $f : K^n \to K$ tale che $(B)f = 0 \neq (x)f$.

Allora K soddisfa le ipotesi di un noto teorema di densità (cfr. [4], III, 2.8) e possiamo concludere che il morfismo canonico $R \to \mathrm{End}^p(K_A)$ è un'immersione topologica densa. Ma allora, per 3.3, il completamento di R risulta essere il duale di K_A secondo la dualità D, e come tale appartiene a ${}_R\mathscr{B}$ ed è linearmente compatto.

II. Dualità tra Mod-A_σ e ${}_R\mathscr{B}$

Notazioni. Siano A_σ e R_τ due anelli topologici; supponiamo che sia data una dualità

$$D = (D_1, D_2): \qquad \text{Mod-}A_\sigma \underset{D_2}{\overset{D_1}{\rightleftarrows}} {}_R\mathscr{B}$$

dove ${}_R\mathscr{B}$ è una sottocategoria (piena) di R_τ-LT, e Mod-A_σ è la categoria dei moduli discreti topologici su A_σ; in particolare un modulo M appartiene a Mod-A_σ se e solo se per ogni $x \in M$ si ha che $\mathrm{Ann}_A(x)$ è un ideale aperto di A.

Supponiamo subito, motivati dal caso particolare visto nel primo capitolo, che la categoria ${}_R\mathscr{B}$ sia chiusa per sottomoduli chiusi e per prodotti topologici, nello stesso modo visto in precedenza (cfr. I, 2.1 e I, 3.1).

1. La categoria Mod-A_σ

1.1. Osservazione. Non è restrittivo supporre che A_σ sia di Hausdorff e completo.

Sia infatti $\overline{0} = \mathrm{Ch}_A(0)$ la chiusura in A dello zero; poiché ogni ideale aperto di A deve contenere $\overline{0}$ deve essere $\overline{0} \subseteq \mathrm{Ann}_A(x)$ qualsiasi sia $x \in M \in$ Mod-A_σ. Allora deve essere $\overline{0} \subseteq \mathrm{Ann}_A(M)$ qualsiasi sia $M \in$ Mod-A_σ, e dunque ogni modulo di Mod-A_σ si atteggia in modo naturale a modulo discreto topologico sull'anello quoziente $A / \overline{0}$ dotato della topologia quoziente, che è lo spazio di Hausdorff associato ad A.

Per quanto riguarda la completezza è sufficiente osservare che, poiché ogni modulo discreto è completo, ogni modulo di Mod-A_σ si atteggia in modo unico a modulo topologico destro sul completamento di A.

1.2. Osservazioni. Mod-A_σ è una sottocategoria abeliana di Mod-A, chiusa per sottomoduli, immagini omomorfe e somme dirette arbitrarie. Indichiamo con

$$\mathscr{F}_\sigma = \{I \leqslant A_A \mid I \in \sigma\}$$

il filtro degli ideali aperti di A: si ha che $I \in \mathscr{F}_\sigma$ se e solo se $A / I \in$ Mod-A_σ. Infatti per ogni $I \in \mathscr{F}_\sigma$ si ha che la topologia quoziente di A / I coincide con quella discreta e quindi che $A / I \in$ Mod-A_σ; inoltre, poiché $I = \mathrm{Ann}_A(1 + I)$, da $A / I \in$ Mod-A_σ segue $I \in \mathscr{F}_\sigma$.

Si noti che $\mathscr{F}_\sigma$ è un insieme diretto (se I_1, I_2 sono ideali aperti, allora $I_1 \cap I_2$ è aperto e contenuto in entrambi), e che se $I, J \in \mathscr{F}_\sigma$, con $I \leqslant J$ si può definire in modo del tutto naturale un morfismo suriettivo

$$\pi^I_J : A/I \longrightarrow A/J, \qquad \pi^I_J(a + I) = a + J.$$

È immediato che gli ideali aperti di A insieme con i morfismi π^I_J costituiscano un sistema inverso di A-moduli, ed è noto che il loro limite inverso è canonicamente

isomorfo al completamento di Hausdorff di A. Allora, poiché in virtù di 1.1 supponiamo che A sia di Hausdorff e completo, si ha un isomorfismo canonico

$$A \xrightarrow{\eta} \lim_{I \in \mathscr{F}_\sigma} A/I,$$

(dove "lim" indica il limite inverso) che risulta un isomorfismo topologico dotando A della topologia σ e il limite inverso degli A / I della topologia relativa alla topologia prodotto degli A / I rispetto all'inclusione canonica

$$\lim A/I \longrightarrow \prod A/I.$$

Indicheremo con $p_I : \lim(A / I) \longrightarrow A / I$ i morfismi canonici del limite inverso; si noti che qualsiasi siano $I \in \mathscr{F}_\sigma$, $a \in A$, dal momento che le p_I sono le restrizioni delle proiezioni canoniche del prodotto si ha:

$$p_I(\eta(a)) = p_I(\,(a + J)_J\,) = a + I;$$

allora i $p_I \circ \eta$ sono suriettivi, e dunque i p_I sono morfismi suriettivi.

1.3. Definiamo ora una particolare famiglia di morfismi che sarà usata spesso nel seguito. Si fissi un $I \in \mathscr{F}_\sigma$, e per ogni $a \in A$ si definisca $(I : a) = \{x \in A \mid ax \in I\}$; $(I : a)$ è un ideale destro di A e, dal momento che A è un anello topologico, è aperto. Allora il morfismo

$$\lambda_{a,\,I} : A/(I : a) \longrightarrow A/I, \qquad \lambda_{a,\,I}(x + (I : a)) = ax + I,$$

(che è evidentemente A-lineare) è ben definito: se $x_1 - x_2 \in (I : a)$, allora $a(x_1 - x_2) \in I$, e dunque $\lambda_{a,\,I}(x_1 + (I : a)) = \lambda_{a,\,I}(x_2 + (I : a))$. Inoltre $\lambda_{a,\,I}$ è iniettivo, perché se fosse $ax + I = I$ dovrebbe essere $ax \in I$ e, dunque, $x \in (I : a)$; infine, dal momento che $(I : a) \in \mathscr{F}_\sigma$, $\lambda_{a,\,I}$ è un morfismo della categoria Mod-A_σ. Si noti anche che, se $I \leqslant J \in \mathscr{F}_\sigma$, per ogni $x \in A$ si ha

$$[\pi^I_J \circ \lambda_{a,\,I}](x + (I : a)) = ax + J = \lambda_{a,\,J}(x + (J : a)) = [\lambda_{a,\,J} \circ \pi^{(I:a)}_{(J:a)}](x + (I : a))$$

cioè: $\pi^I_J \circ \lambda_{a,\,I} = \lambda_{a,\,J} \circ \pi^{(I:a)}_{(J:a)}$, e che per ogni ideale $J \leqslant (I : a)$ è ben definito il morfismo

$$\lambda_{a,\,I,\,J} : A/J \longrightarrow A/I, \qquad \lambda_{a,\,I,\,J} = \lambda_{a,\,I} \circ \pi^J_{(I:a)},$$

tale che $\lambda_{a,\,I,\,J}(x + J) = ax + I$.

1.4. I morfismi appena definiti permettono di esprimere in modo abbastanza esplicito la naturale struttura di A-modulo sinistro di cui è dotato $\lim(A / I)$ attraverso l'isomorfismo η. Infatti, la famiglia di morfismi di gruppi $\lambda_{a,\,I} \circ p_{(I\,:\,a)} : \lim(A / I) \to A / I$ costituisce un sistema inverso, perché se $I \leqslant J \in \mathscr{F}_\sigma$,

$$\pi^I_J \circ \lambda_{a,\,I} \circ p_{(I\,:\,a)} = \lambda_{a,\,J} \circ \pi^{(I\,:\,a)}_{(J\,:\,a)} \circ p_{(I\,:\,a)} = \lambda_{a,\,J} \circ p_{(J\,:\,a)}.$$

Allora si può definire $\beta_a = \lim(\lambda_{a,\,I} \circ p_{(I\,:\,a)})$, l'unico morfismo cioè per cui per ogni $I \in \mathscr{F}_\sigma$, $p_I \circ \beta_a = \lambda_{a,\,I} \circ p_{(I\,:\,a)}$. La famiglia $\{\beta_a \,|\, a \in A\}$ dà a $\lim(A / I)$ una struttura di A-modulo sinistro: infatti, presi comunque $I \in \mathscr{F}_\sigma$, $a, b \in A$, e utilizzando il fatto che ovviamente è $((I : a) : b) = (I : ab)$,

$$\begin{aligned} p_I \circ \beta_a \circ \beta_b &= \lambda_{a,\,I} \circ p_{(I\,:\,a)} \circ \beta_b \\ &= \lambda_{a,\,I} \circ \lambda_{b,\,(I\,:\,a)} \circ p_{(I\,:\,ab)} \\ &= \lambda_{ab,\,I} \circ p_{(I\,:\,ab)} \\ &= p_I \circ \beta_{ab}. \end{aligned}$$

Inoltre, scelto un qualsiasi ideale aperto $J \leqslant (I : a) \cap (I : b) \cap (I : a + b)$,

$$\begin{aligned} p_I \circ (\beta_a + \beta_b) &= \lambda_{a,\,I} \circ p_{(I\,:\,a)} + \lambda_{b,\,I} \circ p_{(I\,:\,b)} \\ &= \lambda_{a,\,I} \circ \pi^J_{(I\,:\,a)} \circ p_J + \lambda_{b,\,I} \circ \pi^J_{(I\,:\,b)} \circ p_J \\ &= \lambda_{a,\,I,\,J} \circ p_J + \lambda_{b,\,I,\,J} \circ p_J \\ &= \lambda_{a\,+\,b,\,I,\,J} \circ p_J \\ &= \lambda_{a\,+\,b,\,I} \circ \pi^J_{(I\,:\,a+b)} \circ p_J \\ &= \lambda_{a\,+\,b,\,I} \circ p_{(I\,:\,a\,+\,b)} \\ &= p_I \circ \beta_{a\,+\,b}. \end{aligned}$$

Tale struttura, inoltre, commuta evidentemente con l'isomorfismo η, ed è dunque la struttura naturale di A-modulo sinistro (e, dunque, di anello) del limite inverso degli A / I.

1.5. Proposizione. *Per ogni* $M \in$ Mod-A_σ *si ha*

$$\mathrm{Chom}_A(A, M) = \mathrm{Hom}_A(A, M) \cong M$$

Dimostrazione. Il secondo isomorfismo è del tutto generale, e dunque è sufficiente dimostrare la prima uguaglianza, e in particolare l'inclusione "$\supseteq$", essendo ovvia quella opposta.

Sia $\varphi \in \mathrm{Hom}_A(A, M)$. Allora, poiché $\mathrm{Hom}_A(A, M) \cong M$, $\varphi = \lambda_m$ (dove si indica con $\lambda_m \in \mathrm{Hom}_A(A, M)$, $\lambda_m(a) = ma$ la moltiplicazione a sinistra per $m = \varphi(1) \in M$); ma essendo M un modulo discreto topologico, $\mathrm{Ann}_A(m)$ è aperto $\forall m \in M$, e dunque ogni λ_m è continuo.

Si noti in particolare che, dato il fatto che A_σ è completo, vale anche

$$M \cong \mathrm{Hom}_A(A, M) \cong \mathrm{Hom}_A(\lim(A / I), M).$$

1.6. Sia $M \in \text{Mod-}A_\sigma$. Gli $\mathrm{Hom}_A(A / I, M)$ costituiscono un sistema diretto di gruppi abeliani con i morfismi

$$(\pi^I_J)^* = \mathrm{Hom}_A(\pi^I_J, M) : \mathrm{Hom}_A(A / J, M) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(A / I, M)$$

i quali, essendo il funtore $\mathrm{Hom}_A(-, M)$ esatto a sinistra sono morfismi iniettivi. È allora possibile definire il loro limite diretto, con i morfismi canonici

$$u_I : \mathrm{Hom}_A(A / I, M) \longrightarrow \operatorname*{colim}_{J \in \mathscr{F}_\sigma} \mathrm{Hom}_A(A / J, M).$$

Sul gruppo abeliano $\mathrm{colim}(\mathrm{Hom}_A(A / I, M))$ è definita una struttura naturale di A-modulo destro. La famiglia di morfismi

$$u_{(I : a)} \circ (\lambda_{a, I})^* : \mathrm{Hom}_A(A / I, M) \to \mathrm{colim}(\mathrm{Hom}_A(A / I, M))$$

(dove $(\lambda_{a, I})^* = \mathrm{Hom}_A(\lambda_{a, I}, M)$) costituisce un sistema diretto perché se $I \leqslant J \in \mathscr{F}_\sigma$,

$$\begin{aligned}
u_{(I : a)} \circ (\lambda_{a, I})^* \circ (\pi^I_J)^* &= u_{(I : a)}(\mathrm{Hom}_A(\lambda_{a, I}, M) \circ \mathrm{Hom}_A(\pi^I_J, M)) \\
&= u_{(I : a)}(\mathrm{Hom}_A(\pi^I_J \circ \lambda_{a, I}, M)) \\
&= u_{(I : a)}(\mathrm{Hom}_A(\lambda_{a, J} \circ \pi^{(I : a)}_{(J : a)}, M)) \\
&= u_{(I : a)}(\mathrm{Hom}_A(\pi^{(I : a)}_{(J : a)}, M) \circ \mathrm{Hom}_A(\lambda_{a, J}, M)) \\
&= u_{(I : a)} \circ (\pi^{(I : a)}_{(J : a)})^* \circ (\lambda_{a, J})^* \\
&= u_{(J : a)} \circ (\lambda_{a, J})^*;
\end{aligned}$$

e dunque è possibile definire il morfismo $\gamma_a = \mathrm{colim}(u_{(I : a)} \circ (\lambda_{a, I})^*)$, l'unico morfismo per cui $\gamma_a \circ u_I = u_{(I : a)} \circ (\lambda_{a, I})^*$ per ogni $I \in \mathscr{F}_\sigma$. La famiglia di endomorfismi $\{\gamma_a \mid a \in A\}$ dà a $\mathrm{colim}(\mathrm{Hom}_A(A / I, M))$ una struttura di A-modulo destro: infatti, presi $I \in \mathscr{F}_\sigma$, $a, b \in A$, e poiché $((I : b) : a) = (I : ba)$,

$$\begin{aligned}
\gamma_a \circ \gamma_b \circ u_I &= \gamma_a \circ u_{(I : b)} \circ (\lambda_{b, I})^* \\
&= u_{(I : ba)} \circ (\lambda_{a, (I : b)})^* \circ (\lambda_{b, I})^* \\
&= u_{(I : ba)} \circ (\lambda_{ba, I})^* \\
&= \gamma_{ba} \circ u_I.
\end{aligned}$$

Inoltre, scelto un qualsiasi ideale aperto $J \leqslant (I : a) \cap (I : b) \cap (I : a + b)$ (cfr. 1.4),

$$\begin{aligned}
(\gamma_a + \gamma_b) \circ u_I &= u_{(I : a)} \circ (\lambda_{a, I})^* + u_{(I : b)} \circ (\lambda_{b, I})^* \\
&= u_J \circ (\pi^J_{(I : a)})^* \circ (\lambda_{a, I})^* + u_J \circ (\pi^J_{(I : b)})^* \circ (\lambda_{b, I})^* \\
&= u_J \circ [(\lambda_{a, I, J})^* + (\lambda_{b, I, J})^*] \\
&= u_J \circ (\lambda_{a + b, I, J})^*
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= u_J \circ (\pi^J_{(I\,:\,a+b)})^* \circ (\lambda_{a+b,\,I})^* \\
&= u_{(I\,:\,a+b)} \circ (\lambda_{a+b,\,I})^* \\
&= (\gamma_{a+b}) \circ u_I.
\end{aligned}
$$

1.7. Proposizione. *Sia $M \in$ Mod-A_σ: allora esistono due isomorfismi di A-moduli destri tali che $M \cong \mathrm{Hom}_A(\lim(A / I), M) \cong \mathrm{colim}(\mathrm{Hom}_A(A / I, M))$.*

Dimostrazione. La famiglia di morfismi

$$h_I = \mathrm{Hom}_A(p_I, M) : \mathrm{Hom}_A(A / I, M) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(\lim(A / I), M)$$

costituisce un sistema diretto di morfismi in quanto, se $I \leqslant J \in \mathscr{F}_\sigma$,

$$
\begin{aligned}
h_I \circ (\pi^I_J)^* &= \mathrm{Hom}_A(p_I, M) \circ \mathrm{Hom}_A(\pi^I_J, M) \\
&= \mathrm{Hom}_A(\pi^I_J \circ p_I, M) \\
&= \mathrm{Hom}_A(p_J, M) \\
&= h_J.
\end{aligned}
$$

Allora le h_I determinano un morfismo $h : \mathrm{colim}(\mathrm{Hom}_A(A / I, M)) \to \mathrm{Hom}_A(\lim(A / I), M)$. Si noti che (sempre per l'esattezza del funtore Hom) le h_I sono iniettive e che di conseguenza, poiché $h_I = h \circ u_I$, le u_I risultano iniettive. Da questo segue che anche h è iniettiva: se infatti fosse $h(\varphi) = 0$, per una proprietà del limite diretto (vedi [6], 24.3) dovrebbe esistere un $I \in \mathscr{F}_\sigma$ tale che $\varphi = u_I(\varphi_I)$, per qualche $\varphi_I \in \mathrm{Hom}_A(A / I, M)$; allora $0 = h(u_I(\varphi_I)) = h_I(\varphi_I)$, da cui segue $\varphi_I = 0$ e, infine, $\varphi = 0$.

Per dimostrare la suriettività di h, si ricordi che si ha $A \cong \lim(A / I)$ canonicamente: allora, a ogni morfismo $\varphi \in \mathrm{Hom}_A(\lim(A / I), M)$ è possibile associare un unico $\lambda_m \in \mathrm{Hom}_A(A, M)$ (la notazione è come in 1.5), nel senso che $\lambda_m = \varphi \circ \eta$. Detto ora $I = \mathrm{Ann}_A(m) \in \mathscr{F}_\sigma$, si ha che λ_m si fattorizza attraverso la proiezione sul quoziente $\pi_I : A \to A / I$, cioè che esiste un morfismo $\psi_m \in \mathrm{Hom}_A(A / I, M)$ tale che $\lambda_m = \psi_m \circ \pi_I$. Sia dunque $\psi = u_I(\psi_m)$: si ha che

$$h(\psi) \;=\; h(u_I(\psi_m)) \;=\; h_I(\psi_m) \;=\; \psi_m \circ p_I \;=\; \psi_m \circ \pi_I \circ \eta^{-1} \;=\; \lambda_m \circ \eta^{-1} \;=\; \varphi.$$

Ora, dal momento che la struttura di A-modulo destro di $\mathrm{Hom}_A(\lim(A / I), M)$ è data dalla famiglia di morfismi $\{\mathrm{Hom}_A(\beta_a, M) \mid a \in A\}$ (vedi 1.4), la A-linearità di h si dimostra prendendo un qualsiasi $\varphi = u_I(\varphi_I) \in \mathrm{colim}(\mathrm{Hom}_A(A / I, M))$, e verificando che

$$
\begin{aligned}
[h \circ \gamma_a](u_I(\varphi_I)) &= [h \circ \gamma_a \circ u_I](\varphi_I) \\
&= [h \circ u_{(I\,:\,a)} \circ (\lambda_{a,\,I})^*](\varphi_I) \\
&= [h_{(I\,:\,a)} \circ (\lambda_{a,\,I})^*](\varphi_I) \\
&= \mathrm{Hom}_A(\lambda_{a,\,I} \circ p_{(I\,:\,a)}, M)\,(\varphi_I) \\
&= \mathrm{Hom}_A(p_I \circ \beta_a, M)\,(\varphi_I) \\
&= \mathrm{Hom}_A(\beta_a, M)\,(h_I(\varphi_I))
\end{aligned}
$$

$$= \mathrm{Hom}_A(\beta_a, M)\,[h \circ u_I](\varphi_I)$$
$$= [\mathrm{Hom}_A(\beta_a, M) \circ h](u_I(\varphi_I)).$$

Infine, per dimostrare che h è naturale si ragioni nel modo seguente. L'isomorfismo canonico

$$\delta : M \to \mathrm{Hom}_A(\lim(A / I), M), \qquad \delta(m) = \lambda_m \circ \eta^{-1},$$

(vedi 1.5) è ovviamente naturale, in quanto deriva dall'isomorfismo di anelli tra A e $\lim(A / I)$ e dall'isomorfismo naturale di A-moduli tra M e $\mathrm{Hom}_A(A, M)$. È possibile inoltre definire un morfismo di gruppi

$$\vartheta : M \to \mathrm{colim}(\mathrm{Hom}_A(A / I, M)), \qquad \vartheta(m) = u_{I(m)}(\zeta_m)$$

dove $I(m) = \mathrm{Ann}_A(m)$ è aperto perché $M \in \text{Mod-}A_\sigma$, e $\zeta_m \in \mathrm{Hom}_A(A / (I(m)), M)$ è un morfismo ben definito dalla posizione $\zeta_m(a + I(m)) = ma$. Vale la pena di osservare che preso un ideale I tale che $I(m) \leqslant I < A_A$, e detto $\zeta_{m,\,I} \in \mathrm{Hom}_A(A / I, M)$, $\zeta_{m,\,I}(a + I) = ma$ si ha che $\zeta_{m,\,I} = \zeta_m \circ \pi_I^{I(m)}$, e dunque

$$u_I(\zeta_{m,\,I}) = [u_I \circ (\pi_I^{I(m)})^*](\zeta_m) = u_{I(m)}(\zeta_m) = \vartheta(m).$$

Utilizzando questa proprietà è facile verificare che il morfismo ϑ è un morfismo naturale: infatti dato comunque un morfismo $f : M \to N$, è ovvio che per ogni ideale I tale che tutti i morfismi in gioco siano ben definiti sia $\zeta_{f(m),\,I} = f \circ \zeta_{m,\,I}$, da cui segue subito il risultato cercato.

Si noti ora che per ogni $\varphi = u_I(\varphi_I) \in \mathrm{colim}(\mathrm{Hom}_A(A / I, M))$ si ha

$$\delta \circ \vartheta^{-1}(u_I(\varphi_I)) = \delta(\varphi_I(1 + I)) = \lambda_{m^*} \circ \eta^{-1}$$

con $m^* = \varphi_I(1 + I)$, e

$$h(u_I(\varphi_I)) = h_I(\varphi_I) = \varphi_I \circ p_I;$$

valutando i due morfismi in $(a + I)_I \in \lim(A / I)$, si ottiene

$$[\varphi_I \circ p_I]((a + I)_I) = \varphi_I(a + I) = m^* a = \lambda_{m^*}(a) = [\lambda_{m^*} \circ \eta^{-1}]((a + I)_I)$$

e dunque, poiché in virtù della completezza di A, $(a + I)_I$ rappresenta il generico elemento di $\lim(A / I)$, si può concludere che $h = \delta \circ \vartheta^{-1}$, da cui segue immediatamente (oltre al fatto che ϑ è un isomorfismo di A-moduli) che h è naturale.

2. Un bimodulo rappresentante

2.1. Notazioni. Si noti che la famiglia $\{V_I = D_1(A/I) \mid I \in \mathscr{F}_\sigma\}$ costituisce un sistema diretto di R_τ-moduli sinistri topologici insieme con i morfismi $\rho_J^I = D_1(\pi_J^I)$: allora esiste in R-Mod il loro limite diretto, insieme con una famiglia di morfismi canonici:

$$_RK = \operatorname*{colim}_{I \in \mathscr{F}_\sigma}(V_I), \qquad\qquad j_I : V_I \longrightarrow {}_RK.$$

Dal momento che ogni monomorfismo di $_R\mathscr{B}$ è iniettivo in virtù dell'ipotesi di chiusura per sottomoduli chiusi, si ha che i ρ_J^I sono iniettivi in quanto duali di epimorfismi. Ma allora anche i j_I sono iniettivi, perché per proprietà del limite diretto (vedi [6], 24.3),

$$(x_I)j_I = 0 \iff (x_I)\rho_I^J = 0 \text{ per qualche } J \leqslant I \in \mathscr{F}_\sigma \iff x_I = 0.$$

Dotando $_RK$ della topologia lineare forte dei morfismi j_I (cioè la più fine topologia lineare per cui tutti i morfismi j_I risultano continui), si ottiene che $_RK \in R_\tau$-LT e che un sottomodulo V di K è aperto se e solo se $(V)j_I^{-1}$ è aperto in V_I per ogni $I \in \mathscr{F}_\sigma$.

Definiamo inoltre su $_RK$ la cotopologia generata dai $(V_I)j_I$ (cfr. l'introduzione): in particolare, il cofiltro dei sottomoduli limitati di K è

$$\mathscr{C} = \{V \leqslant {}_RK \mid V \leqslant (V_I)j_I \ \exists I \in \mathscr{F}_\sigma\}.$$

Evidentemente $\mathscr{C}$ è chiusa per sottomoduli; quanto alla chiusura per somme finite, si noti che comunque si prendano $I, J \in \mathscr{F}_\sigma$, detto $H = I \cap J$ si ha che $(V_I)j_I, (V_J)j_J \subseteq (V_H)j_H$ e che, dunque, questo vale anche per la loro somma.

Quando parleremo di morfismi limitati da $N \in {}_R\mathscr{B}$ in K, intenderemo sempre che N sia dotato della cotopologia massima (cioè quella generata da N stesso).

2.2. Si fissi un ideale $J \in \mathscr{F}_\sigma$, e si prenda un qualsiasi sottomodulo chiuso $V \leqslant V_J$. Allora (in virtù dell'ipotesi di chiusura per sottomoduli chiusi) l'inclusione canonica $i_V : V \to V_J$ è un monomorfismo di $_R\mathscr{B}$, e dunque il suo duale $D_2(i_V)$ è un morfismo suriettivo di A-moduli destri. In particolare la composizione

$$A \xrightarrow{\pi_J} A/J \xrightarrow{\mu_{A/J}} D_2(V_J) = D_2D_1(A/J) \xrightarrow{D_2(i_V)} D_2(V)$$

risulta un morfismo suriettivo: in analogia a quanto fatto in I, 2.2, utilizziamo la notazione provvisoria $I_V = \ker(D_2(i_V) \circ \mu_{A/J} \circ \pi_J)$. I_V è allora un ideale destro di A, ed è aperto in quanto chiaramente è $J \leqslant I_V$; inoltre si ha che $D_2(V) \cong A/I_V$.

In questo modo, a ogni sottomodulo chiuso di V_J si associa un $I \in \mathscr{F}_\sigma$ tale che $J \leqslant I \leqslant A$; inoltre, se si hanno due sottomoduli chiusi tali che $V \leqslant W \leqslant V_J$, il morfismo duale dell'inclusione di V in W induce un epimorfismo di A/I_W su A/I_V, da cui segue che $I_W \leqslant I_V$: insomma, questa corrispondenza inverte le inclusioni.

Si noti inoltre che, secondo questa corrispondenza, $I_{V_J} = J$ e $I_0 = A$; inoltre, poiché gli isomorfismi si preservano sotto l'azione di una dualità e l'oggetto nullo di una categoria abeliana è unico, da $I_V = J$ (rispettivamente, $I_V = A$) segue necessariamente $V = V_J$ (risp. $V = 0$).

2.3. Lemma. *Fissato un* $J \in \mathscr{F}_\sigma$, *sia* $(V_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ *una famiglia di sottomoduli chiusi di* V_J *e si definisca* $V = \cap_{\lambda\in\Lambda} V_\lambda$. *Allora* $I_V = \Sigma_{\lambda\in\Lambda} I_{V_\lambda}$.

Dimostrazione. Sia $I = \Sigma_{\lambda\in\Lambda} I_{V_\lambda}$. Dal momento che V è contenuto in tutti i V_λ, si ha che per ogni $\lambda\in\Lambda$, $I_{V_\lambda} \subseteq I_V$, da cui segue $I \subseteq I_V$.

Si noti ora che, poiché anche V è un sottomodulo chiuso di V_J, V è un elemento di ${}_R\mathscr{B}$ e dunque coincide con l'intersezione dei V_λ nel senso delle categorie (cioè: il più grande sotto-oggetto di V_I che sia sotto-oggetto di ognuno dei V_λ). Del resto, fissato comunque un $\lambda \in \Lambda$ si ha che $I_{V_\lambda} \subseteq I$: esiste dunque un epimorfismo canonico $A / I_{V_\lambda} \to A / I$ che induce un monomorfismo $V_I \to V_\lambda$. In questo modo, V_I risulta essere un sotto-oggetto di V_J e di tutti i V_λ: allora, per le proprietà dell'intersezione, deve essere $V_I \subseteq V$. Di conseguenza, esiste un monomorfismo da V_I a V, da cui segue che la composizione di morfismi

$$A / I_V \cong D_2(V) \longrightarrow D_2(V_I) = D_2D_1(A / I) \cong A / I,$$

è suriettiva: allora deve essere $I_V \subseteq I$.

2.4. Lemma. ${}_RK$ *è dotato della topologia discreta, in quanto lo sono tutti i* V_I.

Dimostrazione. È del tutto analoga alla dimostrazione di I, 2.9. Si fissi un $J \in \mathscr{F}_\sigma$; dal momento che la topologia di V_J è lineare e di Hausdorff, esiste una famiglia $(V_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ di sottomoduli aperti (e quindi chiusi) di V_J la cui intersezione sia il sottomodulo nullo. Ma allora, per la precedente,

$$A = I_0 = I_{\cap_{\lambda\in\Lambda} V_\lambda} = \Sigma_{\lambda\in\Lambda} I_{V_\lambda}.$$

Poiché $1 \in A$, la somma di ideali all'ultimo membro si riduce a una somma su un sotto-insieme $F \subseteq \Lambda$ finito; ma allora si ha

$$A = \Sigma_{\lambda\in F} I_{V_\lambda} = I_{\cap_{\lambda\in F} V_\lambda} \quad \Rightarrow \quad 0 = \cap_{\lambda\in F} V_\lambda,$$

e allora lo 0 di V_J, essendo intersezione finita di aperti, risulta aperto.

Sia ora V un sottomodulo di ${}_RK$. Qualsiasi sia $I \in \mathscr{F}_\sigma$, si ha che $(V)j_I^{-1}$ è aperto in V_I, perché V_I è discreto: ma allora, per come è stata definita la topologia di ${}_RK$, V risulta aperto in ${}_RK$. Questo ragionamento vale in particolare anche per il sottomodulo nullo di ${}_RK$: allora ${}_RK$ è dotato della topologia discreta.

2.5. Lemma. *Sia* X *un sottomodulo di* ${}_RK$: $X \in \mathscr{C}$ *se, e solo se,* $X = (V_I)j_I$ *per qualche* $I \in \mathscr{F}_\sigma$.

Dimostrazione. Ovviamente, per definizione, se $X = (V_I)j_I$ allora X appartiene a $\mathscr{C}$. Supponiamo dunque che X sia un R-sottomodulo limitato di K: allora di certo esiste un $J \in \mathscr{F}_\sigma$ tale che $X \subseteq (V_J)j_J$ Del resto i j_J sono monomorfismi e i V_J e K sono discreti: allora si ha che $(V_J)j_J \cong V_J \cong D_1(A / J)$.

In particolare, X risulta un sottomodulo (chiuso) di V_J, e dualizzando l'inclusione canonica (che risulta essere un morfismo in ${}_R\mathscr{B}$ per l'ipotesi di chiusura per sottomoduli chiusi) si trova un morfismo suriettivo $A / J \to D_2(X)$. Allora deve esistere un $I \in \mathscr{F}_\sigma$ tale che $D_2(X) \cong A / I$, e di conseguenza sarà $X \cong D_1D_2(X) \cong D_1(A / I) \cong (V_I)j_I$; del resto, poiché tutti gli isomorfismi considerati sono naturali, si può concludere che $X = (V_I)j_I$.

2.6. Siano $a \in A$, $I \in \mathscr{F}_\sigma$; indicando con $\delta_{a,\,I} = D_1(\lambda_{a,\,I}) : V_I \to V_{(I\,:\,a)}$, si consideri l'insieme dei morfismi $j_{(I\,:\,a)} \circ \delta_{a,\,I} : V_I \to K$. Notiamo che, scelto un qualsiasi ideale aperto $J \leqslant (I : a)$ e indicando con $\delta_{a,\,I,\,J} = D_1(\lambda_{a,\,I,\,J}) : V_I \to V_J$, si ha che

$$\begin{aligned} j_{(I\,:\,a)} \circ \delta_{a,\,I} &= j_J \circ \rho^J_{(I\,:\,a)} \circ \delta_{a,\,I} \\ &= j_J \circ D_1(\pi^J_{(I\,:\,a)}) \circ D_1(\lambda_{a,\,I}) \\ &= j_J \circ D_1(\lambda_{a,\,I} \circ \pi^J_{(I\,:\,a)}) \\ &= j_J \circ D_1(\lambda_{a,\,I,\,J}) \\ &= j_J \circ \delta_{a,\,I,\,J}. \end{aligned}$$

È possibile insomma definire ognuno dei morfismi della nostra famiglia utilizzando un qualsiasi ideale contenuto in $(I : a)$. Inoltre, questi morfismi costituiscono un sistema diretto: scelti due ideali $I \leqslant J \in \mathscr{F}_\sigma$,

$$\begin{aligned} [j_{(I\,:\,a)} \circ \delta_{a,\,I}] \circ \rho^I_J &= j_{(I\,:\,a)} \circ D_1(\pi^I_J \circ \lambda_{a,\,I}) \\ &= j_{(I\,:\,a)} \circ D_1(\lambda_{a,\,J} \circ \pi^{(I\,:\,a)}_{(J\,:\,a)}) \\ &= j_{(I\,:\,a)} \circ \rho^{(I\,:\,a)}_{(J\,:\,a)} \circ \delta_{a,\,J} \\ &= j_{(J\,:\,a)} \circ \delta_{a,\,J}. \end{aligned}$$

Allora, per ogni $a \in A$, è definito un morfismo R-lineare $\alpha_a = \operatorname{colim}(j_{(I\,:\,a)} \circ \delta_{a,\,I}) : K \to K$, che è l'unico per cui $\alpha_a \circ j_I = j_{(I\,:\,a)} \circ \delta_{a,\,I}$ per ogni $I \in \mathscr{F}_\sigma$. Si verifica inoltre che, scelti comunque $I \in \mathscr{F}_\sigma$, $a, b \in A$,

$$\begin{aligned} (\alpha_a \circ \alpha_b) \circ j_I &= \alpha_a \circ j_{(I\,:\,b)} \circ \delta_{b,\,I} \\ &= j_{(I\,:\,ba)} \circ \delta_{a,\,(I\,:\,b)} \circ \delta_{b,\,I} \\ &= j_{(I\,:\,ba)} \circ D_1(\lambda_{b,\,I} \circ \lambda_{a,\,(I\,:\,b)}) \\ &= j_{(I\,:\,ba)} \circ D_1(\lambda_{ba,\,I}) \\ &= j_{(I\,:\,ba)} \circ \delta_{ba,\,I} \\ &= \alpha_{ba} \circ j_I. \end{aligned}$$

Si noti che, poiché il funtore D_1 è additivo, deve essere $\delta_{a,\,I,\,J} + \delta_{b,\,I,\,J} = \delta_{a\,+\,b,\,I,\,J}$ (ogni volta che le scritture abbiano significato) perché un'analoga relazione vale per i λ. Allora, scelto in $\mathscr{F}_\sigma$ un $J \leqslant (I : a) \cap (I : b) \cap (I : a + b)$,

$$
\begin{aligned}
(\alpha_a + \alpha_b) \circ j_I &= j_{(I:a)} \circ \delta_{a,I} + j_{(I:b)} \circ \delta_{b,I} \\
&= j_J \circ \delta_{a,I,J} + j_J \circ \delta_{b,I,J} \\
&= j_J\,[\delta_{a,I,J} + \delta_{b,I,J}] \\
&= j_J \circ \delta_{a+b,I,J} \\
&= \alpha_{a+b} \circ j_I.
\end{aligned}
$$

Allora la famiglia di morfismi $\{\alpha_a \mid a \in A\}$ dà a K una struttura di R-A-bimodulo. Nel resto della sezione, vedremo come tale struttura si leghi alla cotopologia di K e permetta di individuarne alcune interessanti proprietà.

2.7. Lemma. *Per ogni $I \in \mathscr{F}_\sigma$ e per ogni $V \in \mathscr{C}$, valgono le seguenti relazioni:*

1. $\mathrm{Ann}_A((V_I)j_I) = I$
2. $\mathrm{Ann}_K(I) = (V_I)j_I$.
3. $\mathrm{Ann}_A\mathrm{Ann}_K(I) = I$, $\qquad \mathrm{Ann}_K\mathrm{Ann}_A(V) = V$;

in particolare $K_A \in$ Mod-A_σ ed è fedele. Inoltre si ha che

4. $W \leqslant {}_RK$ *è limitato* $\Leftrightarrow$ $W = \mathrm{Ann}_K(I)$ $\exists I \in \mathscr{F}_\sigma$ $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Ann}_A(W)$ *è aperto*
5. $J \leqslant A_A$ *è aperto* $\Leftrightarrow$ $J = \mathrm{Ann}_A(V)$ $\exists V \in \mathscr{C}$
6. $J \leqslant A_A$ *è chiuso* $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Ann}_A\mathrm{Ann}_K(J) = J$
7. $\forall J \leqslant A_A$, $\mathrm{Ch}_A(J) = \mathrm{Ann}_A\mathrm{Ann}_K(J)$.

Dimostrazione. (1) "$\geqslant$". Sia $i \in I$; allora $(I : i) = \{x \in A \mid ix \in I\} = A$, perché I è un ideale destro di A. Allora $V_A = 0$: i morfismi $\delta_{i,I} : V_I \to V_A$ e j_A sono dunque morfismi nulli, e così $[(V_I)j_I]\alpha_i = [(V_I)\delta_{i,I}]j_A = (0)j_A = 0$.

"$\leqslant$". Sia $a \in A \setminus I$; allora, dal momento che $1 \notin (I : a)$, deve essere $(I : a) \neq A$ e dunque. essendo iniettivo, anche il morfismo $\lambda_{a,I}$ non è nullo. Ma allora anche $\delta_{a,I} \neq 0$, e essendo $j_{(I:a)}$ iniettiva si conclude che $[(V_I)j_I]\alpha_a = [(V_I)\delta_{a,I}]j_{(I:a)} \neq 0$. Allora $a \notin \mathrm{Ann}_A((V_I)j_I)$.

(2) Dal fatto che per ogni sottomodulo $V \leqslant {}_RK$ sia $V \leqslant \mathrm{Ann_K Ann_A}(V)$, e da (1), segue l'inclusione "$\geqslant$". Per dimostrare quella opposta, supponiamo che esista un elemento $x \in \mathrm{Ann}_K(I) \setminus (V_I)j_I$. Per la solita proprietà del limite diretto, esiste un $J \in \mathscr{F}_\sigma$ tale che $x = (x_J)j_J$; allora il sottomodulo $Rx + (V_I)j_I \leqslant {}_RK$ è somma di limitati, e dunque limitato. Si noti che poiché $x \notin (V_I)j_I$, non è restrittivo supporre che sia $J < I$ e anzi che sia addirittura $Rx + (V_I)j_I = (V_J)j_J$. Del resto, poiché $[(V_J)j_J]I = RxI + (V_I)j_II = 0$, deve anche essere $I \leqslant \mathrm{Ann}_K((V_J)j_J) = J$, che è assurdo.

(3) La prima delle due uguaglianze segue da (1) e da (2); la seconda segue da (1), da (2) e da 2.5.

Per quanto riguarda il fatto che sia $K_A \in$ Mod-A_σ, si prenda un qualsiasi $x \in K$. Come il solito, $x = (x_J)j_J$ per qualche $J \in \mathscr{F}_\sigma$; allora $\mathrm{Ann}_A(x) \geqslant \mathrm{Ann}_A((V_J)j_J) = J$ e, pertanto, è aperto. La fedeltà segue dal fatto che, essendo $K = \Sigma_I[(V_I)j_I]$ (cfr. sempre [6]), deve essere

$$\mathrm{Ann}_A(K) \leqslant \bigcap_{I\in\mathscr{F}_\sigma} \mathrm{Ann}_A[(V_I)j_I] = \bigcap_{I\in\mathscr{F}_\sigma} \mathrm{Ann}_A\mathrm{Ann}_K(I) = \bigcap_{I\in\mathscr{F}_\sigma} I = 0.$$

(4) Sia W limitato. Allora per 2.5 esiste un $I \in \mathscr{F}_\sigma$, tale che $W = (V_I)j_I = \mathrm{Ann}_K(I)$ per (2); inoltre $\mathrm{Ann}_A(W) = I$ per (1), e dunque è aperto.

Supponiamo che $I = \mathrm{Ann}_A(W)$ sia aperto: allora $W \leqslant \mathrm{Ann}_K\mathrm{Ann}_A(W) = (V_I)j_I$, cioè W, in quanto sottomodulo di un limitato, è limitato. Inoltre, se $W = \mathrm{Ann}_K(I)$ con I aperto, W è evidentemente limitato per la (2).

(5) Sia $J \in \mathscr{F}_\sigma$. Allora, per la (2), $\mathrm{Ann}_K(J)$ è limitato, e per la (3), J è annullatore di un limitato.

Supponiamo che J sia annullatore di $(V_I)j_I$ con $I \in \mathscr{F}_\sigma$ (non restrittivo per 2.5); allora, $J = \mathrm{Ann}_A((V_I)j_I) = \mathrm{Ann}_A\mathrm{Ann}_K(I) = I$ è aperto.

(6) Evidentemente, poiché K_A è un modulo discreto, qualsiasi annullatore è chiuso in quanto intersezione di chiusi; l'unica implicazione interessante è pertanto la "$\Rightarrow$". Ora: se J è chiuso,

$$J = \mathrm{Ch}_A(J) = \bigcap_{I\in\mathscr{F}_\sigma} (J + I)$$

(e si noti che i $J + I$ sono tutti ideali aperti); allora, passando agli annullatori, si ha

$$\mathrm{Ann}_K(J) = \mathrm{Ann}_K\Big(\bigcap_{I\in\mathscr{F}_\sigma} (J + I)\Big) \geqslant \Sigma_I(\mathrm{Ann}_K(J + I));$$

$$J \leqslant \mathrm{Ann}_A\mathrm{Ann}_K(J) \leqslant \mathrm{Ann}_A\Big(\Sigma_I(\mathrm{Ann}_K(J + I))\Big) = \bigcap_{I\in\mathscr{F}_\sigma} \mathrm{Ann}_A\mathrm{Ann}_K(J + I) =$$
$$= \bigcap_{I\in\mathscr{F}_\sigma} (J + I) = J.$$

(7) Dal momento che K è un modulo topologico discreto su A, l'annullatore in K di un modulo e quello della sua chiusura coincidono; allora (indicando con $\bar{J} = \mathrm{Ch}_A(J)$ la chiusura di J) dovrà essere $\bar{J} = \mathrm{Ann}_A\mathrm{Ann}_K(\bar{J}) = \mathrm{Ann}_A\mathrm{Ann}_K(J)$.

2.8. Lemma. *A è canonicamente isomorfo all'anello degli endomorfismi limitati di K*

$$\mathrm{Bend}({}_RK) = \{\varphi \in \mathrm{End}({}_RK) \mid \forall V \in \mathscr{C}, (V)\varphi \in \mathscr{C}\}.$$

Dimostrazione. Ovviamente ogni α_a è limitato perché, per ogni $I \in \mathscr{F}_\sigma$,

$$((V_I)j_I)\alpha_a = ((V_I)\delta_{a,\,I})\, j_{(I\,:\,a)} \subseteq (V_{(I\,:\,a)})j_{(I\,:\,a)} \in \mathscr{C}.$$

Sia dunque $\varphi \in \mathrm{Bend}({}_RK)$, e si prenda un $I \in \mathscr{F}_\sigma$. Dal momento che φ è limitata, deve esistere un ideale aperto $I^* \in \mathscr{F}_\sigma$ tale che $((V_I)j_I)\varphi \subseteq (V_{I^*})j_{I^*}$; ma allora, essendo le j_I iniettive, φ induce un morfismo $\varphi_I : V_I \to V_{I^*}$. Va immediatamente notato che anche le φ_I individuano φ: è facile infatti convincersi che deve essere $\varphi = \mathrm{colim}(j_{I^*} \circ \varphi_I)$.

Dualizzando i morfismi φ_I si trova la famiglia di morfismi $\psi_I : A / I^* \to A / I$; allora a φ resta associata la rete $(a_I)_I$ dove a_I è un rappresentante della classe immagine di $1 + I^*$ tramite ψ_I (cioè: $\psi_I(1 + I^*) = a_I + I$). Vogliamo ora dimostrare che la stringa $(a_I + I)_I$ è un elemento di $\lim(A / I)$: ciò equivale a dimostrare che, presi due qualsiasi $I \leqslant J \in \mathscr{F}_\sigma$, sia $a_I - a_J \in J$, ovvero che per ogni $H \leqslant I^* \cap J^*$ aperto sia commutativo il diagramma

$$\begin{tikzcd}
 & A / I^* \arrow[r, "\psi_I"'] & A / I \arrow[dd, "\pi^I_J"] \\
A / H \arrow[ur, "\pi^H_{I^*}"] \arrow[dr, "\pi^H_{J^*}"'] & & \\
 & A / J^* \arrow[r, "\psi_J"] & A / J
\end{tikzcd}$$

Del resto, esso è commutativo se e solo se lo è il suo diagramma duale, che è il bordo esterno di

$$\begin{tikzcd}
 & V_{I^*} \arrow[dl, "\rho^H_{I^*}"'] \arrow[d, "j_{I^*}"] & V_I \arrow[l, "\varphi_I"'] \arrow[d, "j_I"'] \\
V_H \arrow[r, "j_H"] & K & K \arrow[l, "\varphi"'] \\
 & V_{J^*} \arrow[ul, "\rho^H_{J^*}"] \arrow[u, "j_{J^*}"] & V_J \arrow[l, "\varphi_J"'] \arrow[u, "j_J"'] \arrow[uu, "\rho^I_J"']
\end{tikzcd}$$

È facile vedere che quest'ultimo diagramma è effettivamente commutativo: infatti, i triangoli commutano per definizione dei morfismi j_I (e di limite diretto), e i quadrati commutano per come sono state definite le φ_I. Ma allora, per la completezza di A, esiste un $a \in A$ tale che per ogni $I \in \mathscr{F}_\sigma$ sia $a - a_J \in I$: in particolare da questo segue che per ogni $I \in \mathscr{F}_\sigma$, sia $\psi_I = \lambda_{a, I, I^*}$ e dunque che $\varphi_I = \delta_{a, I, I^*}$. Segue che

$$\varphi = \mathrm{colim}(j_{I^*} \circ \varphi_I) = \mathrm{colim}(j_{I^*} \circ \delta_{a, I, I^*}) = \mathrm{colim}(j_{(I : a)} \circ \delta_{a, I}) = \alpha_a.$$

2.9. Definizione. Diremo che ${}_RK$ ha la *proprietà di estensione dei caratteri* (abbreviato, che ${}_RK$ ha la E.P.) se presi comunque due moduli $M, N \in {}_R\mathscr{B}$ e un monomorfismo $i : M \to N$, per ogni morfismo continuo e limitato $f : M \to K$ esiste un morfismo continuo e limitato $\varphi : N \to K$ tale che $\varphi \circ i = f$.

2.10. Lemma. *${}_RK$ ha la proprietà di estensione dei caratteri.*

Dimostrazione. Poiché f è limitata, deve esistere un $I \in \mathscr{F}_\sigma$ per cui $\mathrm{Im}(f) \subseteq (V_I)j_I$; allora f induce un morfismo $g : M \to V_I$ il cui duale sarà chiamato $g^* : A / I \to D_2(M)$. Evidentemente g^* è individuato da $m = g^*(1 + I)$, perché $g^*(a + I) = g^*(1 + I)a = ma$; inoltre non è restrittivo supporre che sia $I = \mathrm{Ann}_A(m)$ perché, essendo $I \leqslant \mathrm{Ann}_A(m) = \ker(g^*)$, g^* si fattorizza attraverso il morfismo $\pi^I_{\mathrm{Ann}_A(m)}$.

$D_2(i)$ è duale di un monomorfismo: allora, in quanto epimorfismo di Mod-A_σ, è suriettivo. Sia dunque $n \in D_2(N)$ tale che $D_2(i)(n) = m$; detto $J = \mathrm{Ann}_A(n)$ è possibile definire il morfismo $\vartheta_n : A / J \to D_2(N)$, $\vartheta_n(1 + J) = n$. Inoltre, essendo $D_2(i)(n) = m$, deve essere $J \leqslant I$, ed è evidente che sia $g^* \circ \pi^J_I = D_2(i) \circ \vartheta_n$. Ma allora deve valere una relazione analoga per le funzioni duali: sarà allora $D_1(\vartheta_n) \circ i = \rho^J_I \circ g$. Si conclude allora che

$$j_J \circ D_1(\vartheta_n) \circ i = j_J \circ \rho^J_I \circ g = j_I \circ g = f,$$

cioè che il morfismo $j_J \circ D_1(\vartheta_n) : N \to K$ estende f tramite i.

2.11. Lemma. *Siano $n \in \mathbb{N}$, $V \leqslant {}_RK^n$ limitato, $f : V \to K$ un R-morfismo limitato. Allora f si estende a un morfismo $\varphi : K^n \to K$.*

Dimostrazione. Prima di procedere con la dimostrazione vera e propria, ricordiamo (cfr. l'introduzione) che la cotopologia indotta da $\mathscr{C}$ sul prodotto è la seguente:

$$V \leqslant {}_RK^n \text{ limitato} \iff V \subseteq V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n \ (V_i \in \mathscr{C}) \iff (V)\pi_i \in \mathscr{C},\ i = 1, 2, ..., n$$

dove $\pi_i : K^n \to K$ indica l'i-esima proiezione. Dimostriamo ora la tesi per induzione su n.

$n = 1$. In virtù di 2.5, devono esistere due ideali I, J aperti di A tali che $V = (V_I)j_I$, $\mathrm{Im}(f) = (V_J)j_J$. In particolare j_I (rispettivamente, j_J) è un isomorfismo tra V e V_I (risp. tra $\mathrm{Im}(f)$ e V_J); in questo modo f induce un morfismo $g : V_I \to V_J$, e si ha che g individua f perché $f = j_J \circ g \circ j_I^{-1}$. Del resto, detto $\psi : A / J \to A / I$ il morfismo duale di g, deve essere $\psi = \lambda_{a, I, J}$ dove a è un qualsiasi elemento di A tale che $a + I = \psi(1 + J)$. Ma allora, poiché $f = j_J \circ \delta_{a, I, J} \circ j_I^{-1}$,

$$f \circ j_I = j_J \circ \delta_{a, I, J} = j_{(I : a)} \circ \delta_{a, I} = \alpha_a \circ j_I,$$

cioè il morfismo α_a (che, come già visto, è un endomorfismo limitato di K) estende f.

$n > 1$. Scriviamo $K^n = K^1 \oplus K^{(n-1)}$, con le rispettive proiezioni χ_1 e χ_2, e sia $V' = V \cap K^{(n-1)}$. Allora, dal momento che per $i = 2, ..., n$ si ha $(V_2)\pi_i \subseteq (V)\pi_i \in \mathscr{C}$, e che

$f_{|V'}$ è limitata perché $\mathrm{Im}(f_{|V'}) \subseteq \mathrm{Im}(f)$, per ipotesi induttiva $f_{|V'}$ si estende a un morfismo limitato $g : K^{(n-1)} \to K$.

Definiamo ora $\psi : V + K^{(n-1)} \to K$, $(v + x)\psi = (v)f + (x)g$; ψ è ben definita perché evidentemente $g_{|V'} = f_{|V'}$, è limitata perché lo sono f e g e estende f per definizione. Definito allora $W = (V)\chi_1$, risulta $V + K^{(n-1)} = W \oplus K^{(n-1)}$; inoltre W è limitato perché $\chi_1 = \pi_1$, e $g_{|W}$ è limitata perché $\mathrm{Im}(g_{|W}) \subseteq \mathrm{Im}(g)$ Allora $g_{|W}$ si estende a un qualche $\alpha_a : K \to K$, e di conseguenza il morfismo $\alpha_a \oplus \psi$ è limitato e estende g, dunque estende f.

2.12. Definizione. Diremo che ${}_RK$ è un *b-autocogeneratore* se scelti comunque un numero naturale $n \in \mathbb{N}$, un sottomodulo limitato $V \in \mathscr{C}$ e un $x \in K^n \setminus V$, esiste un morfismo R-lineare e limitato $\varphi : K^n \to K$ tale che $(V)\varphi = 0 \neq (x)\varphi$.

2.13. Lemma. *${}_RK$ è un b-autocogeneratore.*

Dimostrazione. Induzione su n. Se $n = 1$, allora in virtù della 2.8 si cerca un $a \in \mathrm{Ann}_A(V)$ tale che $xa \neq 0$. Ora, poiché per la 2.5 esiste un $I \in \mathscr{F}_\sigma$, tale che $V = (V_I)j_I$, per la 2.7 $\mathrm{Ann}_A(V) = I$; se per ogni $i \in I$ fosse $xi = 0$ allora sarebbe $x \in \mathrm{Ann}_K\mathrm{Ann}_A(V) = V$ contro le ipotesi.

$n > 1$. Scriviamo, come nella precedente, $K^n = K^1 \oplus K^{(n-1)}$ con proiezioni χ_1 e χ_2; in queste notazioni, scriviamo $x = (a, b)$. È evidente che $V_1 = V \cap K^1$ e $V_2 = V \cap K^{(n-1)}$ siano sottomoduli limitati, rispettivamente, di K^1 e $K^{(n-1)}$; inoltre, poiché $x \notin V$, non è essenzialmente restrittivo supporre $a \notin V_1$. Distinguiamo allora due casi:

Se $b \notin (V)\chi_2$, dal momento che anche $(V)\chi_2$ è limitato esiste per ipotesi induttiva un morfismo limitato $\psi : K^{(n-1)} \to K$ tale che $((V)\chi_2)\psi = 0 \neq (x)\psi$. Il morfismo $\varphi : K^n \to K$ definito da $\varphi = \psi \circ \chi_2$ ha dunque le caratteristiche volute.

Se invece $b \in (V)\chi_2$, esiste un $c \in K$ tale che $(c, b) \in V$; allora $x = (a - c, 0) + (c, b)$, da cui si deduce che deve essere $a - c \notin V_1$ (altrimenti sarebbe $x \in V$). Esiste allora un $f \in \mathrm{Bend}_R(K)$ tale che $(V_1)f = 0 \neq (a - c)f$. Si definisca ora $\psi : V + K^1 \to K$, $(v + k)\psi = (k)f$; allora ψ è limitato (perché lo è f) e $(V)\psi = 0$, $(x)\psi = (a - c)f \neq 0$. Per la precedente, ψ si estende a un morfismo limitato $\varphi : K^n \to K$ che realizza la tesi.

3. Rappresentazione del funtore D_2

3.1. Sia $N \in {}_R\mathscr{B}$; la famiglia $\{\mathrm{Chom}_R(N, V_I) \mid I \in \mathscr{F}_\sigma\}$ costituisce evidentemente un sistema diretto di gruppi abeliani insieme con i morfismi $(\rho^I_J)_* = \mathrm{Chom}_R(N, \rho^I_J)$ (cfr. 2.1). Allora esiste il loro limite diretto $\mathrm{colim}(\mathrm{Chom}_R(N, V_I))$, con i morfismi canonici

$$\xi_I : \mathrm{Chom}_R(N, V_I) \longrightarrow \mathrm{colim}(\mathrm{Chom}_R(N, V_I))$$

In base a considerazioni del tutto identiche a quelle già fatte in 2.1, sia i $(\rho^I_J)_*$ che gli ξ_I devono essere morfismi iniettivi di gruppi abeliani.

Anche colim($\mathrm{Chom}_R(N, V_I)$) possiede una struttura naturale di A-modulo destro. La famiglia di morfismi $\xi_{(I:a)} \circ \in(\delta_{a,I})_* : \mathrm{Chom}_R(N, V_I) \longrightarrow \mathrm{colim}(\mathrm{Chom}_R(N, V_I))$ (dove $(\delta_{a,I})_*$ indica $\mathrm{Chom}_R(N, \delta_{a,I})$) costituisce un sistema diretto perché, se $I \leqslant J \in \mathscr{F}_\sigma$,

$$\begin{aligned}
\xi_{(I:a)} \circ \in(\delta_{a,I})_* \circ (\rho^I_J)_* &= \xi_{(I:a)}(\mathrm{Chom}_R(N, \delta_{a,I}) \circ \mathrm{Chom}_R(N, \rho^I_J)) \\
&= \xi_{(I:a)}(\mathrm{Chom}_R(N, \delta_{a,I} \circ \rho^I_J)) \\
&= \xi_{(I:a)}(\mathrm{Chom}_R(N, \rho^{(I:a)}_{(J:a)} \circ \delta_{a,J})) \\
&= \xi_{(I:a)}(\mathrm{Chom}_R(\rho^{(I:a)}_{(J:a)}, M) \circ \mathrm{Chom}_R(\delta_{a,J}, M)) \\
&= \xi_{(I:a)} \circ (\rho^{(I:a)}_{(J:a)})_* \circ (\delta_{a,J})_* \\
&= \xi_{(J:a)} \circ (\delta_{a,J})_*;
\end{aligned}$$

e dunque è possibile definire il morfismo $\varepsilon_a = \mathrm{colim}(\xi_{(I:a)} \circ \in(\delta_{a,I})_*)$, l'unico morfismo per cui $\varepsilon_a \circ \xi_I = \xi_{(I:a)} \circ \in(\delta_{a,I})_*$ per ogni $I \in \mathscr{F}_\sigma$. Le verifiche del fatto che la famiglia $\{\varepsilon_a \mid a \in A\}$ dia a colim($\mathrm{Chom}_R(N, V_I)$) una struttura di A-modulo destro sono identiche a quelle svolte in 2.1: presi comunque $I \in \mathscr{F}_\sigma$, $a, b \in A$, e poiché $((I : b) : a) = (I : ba)$,

$$\begin{aligned}
\varepsilon_a \circ \varepsilon_b \circ \xi_I &= \varepsilon_a \circ \xi_{(I:b)} \circ (\delta_{b,I})_* \\
&= \xi_{(I:ba)} \circ (\delta_{a,(I:b)})_* \circ (\delta_{b,I})_* \\
&= \xi_{(I:ba)} \circ (\delta_{ba,I})_* \\
&= \varepsilon_{ba} \circ \xi_I;
\end{aligned}$$

inoltre, scelto un qualsiasi ideale aperto $J \leqslant (I : a) \cap (I : b) \cap (I : a + b)$,

$$\begin{aligned}
(\varepsilon_a + \varepsilon_b) \circ \xi_I &= \xi_{(I:a)} \circ (\delta_{a,I})_* + \xi_{(I:b)} \circ (\delta_{b,I})_* \\
&= \xi_J \circ (\rho^J_{(I:a)})_* \circ (\delta_{a,I})_* + \xi_J \circ (\rho^J_{(I:b)})_* \circ (\delta_{b,I})_* \\
&= \xi_J \circ [(\delta_{a,I,J})_* + (\delta_{b,I,J})_*] \\
&= \xi_J \circ (\delta_{a+b,I,J})_* \\
&= \xi_J \circ (\rho^J_{(I:a+b)})_* \circ (\delta_{a+b,I})_* \\
&= \xi_{(I:a+b)} \circ (\delta_{a+b,I})_* \\
&= (\varepsilon_{a+b}) \circ \xi_I.
\end{aligned}$$

3.2. Si scelgano due moduli $M \in \text{Mod-}A_\sigma$ e $N \in {}_R\mathscr{B}$; allora la dualità D (abbreviando come il solito $(\nu_N)^* = \mathrm{Chom}_R(\nu_N, D_1(M))$) induce un isomorfismo naturale di gruppi abeliani

$$l_{M,N} : \mathrm{Hom}_A(M, D_2(N)) \longrightarrow \mathrm{Chom}_R(N, D_1(M)), \qquad l_{M,N}(\varphi) = D_1(\varphi) \circ \nu_N.$$

In particolare, per ogni $I \in \mathscr{F}_\sigma$ (e scrivendo $l_{I,N}$ invece di $l_{A/I,N}$ per semplificare la notazione), essendo $V_I = D_1(A / I)$, i gruppi abeliani $\mathrm{Hom}_A(A / I, D_2(N))$ e $\mathrm{Chom}_R(N, V_I)$ sono naturalmente isomorfi.

Da questo segue anche, in particolare, che i rispettivi limiti diretti siano naturalmente isomorfi come gruppi abeliani: infatti la famiglia di morfismi $\xi_I \circ l_{I,N}$ costituisce un sistema diretto perché $\forall \varphi \in \mathrm{Hom}_A(A/J, D_2(N))$, ricordando che i $l_{I,N}$ sono naturali,

$$\begin{aligned}[\xi_I \circ l_{I,N} \circ (\pi^I_J)^*](\varphi) &= [\xi_I \circ l_{I,N}](\varphi \circ \pi^I_J) \\ &= \xi_I \circ D_1(\pi^I_J) \circ l_{J,N}(\varphi) \\ &= \xi_I \circ \rho^I_J \circ l_{J,N}(\varphi) \\ &= [\xi_I \circ (\rho^I_J)_*](l_{J,N}(\varphi)) \\ &= [\xi_J \circ l_{J,N}](\varphi).\end{aligned}$$

Allora esiste il morfismo $l = \mathrm{colim}(\xi_I \circ l_{I,N})$, che risulta essere un isomorfismo in quanto limite diretto di isomorfismi (cfr. [6], 24.4). Del resto, entrambi i limiti diretti possiedono una struttura naturale di A-moduli destri: da questa considerazione scaturisce il seguente

3.3. Lemma. *Comunque si scelga* $N \in {}_R\mathscr{B}$, $\mathrm{colim}(\mathrm{Hom}_A(A/I, D_2(N)))$ *è naturalmente isomorfo a* $\mathrm{colim}(\mathrm{Chom}_R(N, V_I))$ *come A-modulo destro.*

Dimostrazione. Rimane ormai solo da dimostrare che l'isomorfismo l sia A-lineare: ma qualsiasi sia $I \in \mathscr{F}_\sigma$, ricordando che $l_{I,N}$ è naturale e che $\delta_{a,I} = D_1(\lambda_{a,I})$

$$\begin{aligned}\varepsilon_a \circ l \circ u_I &= \varepsilon_a \circ \xi_I \circ l_{I,N} \\ &= \xi_{(I:a)} \circ (\delta_{a,I})_* \circ l_{I,N} \\ &= \xi_{(I:a)} \circ \mathrm{Chom}_R(N, \delta_{a,I}) \circ l_{I,N} \\ &= \xi_{(I:a)} \circ l_{(I:a),N} \circ \mathrm{Hom}_A(\lambda_{a,I}, D_2(N)) \\ &= l \circ u_{(I:a)} \circ (\lambda_{a,I})^* \\ &= l \circ \gamma_a \circ u_I.\end{aligned}$$

3.4. Lemma. *Per ogni* $N \in {}_R\mathscr{B}$, $\mathrm{colim}(\mathrm{Chom}_R(N, V_I)) \cong \mathrm{Bchom}_R(N, K)$ *con un isomorfismo naturale di A-moduli destri.*

Dimostrazione. Per ogni $I \in \mathscr{F}_\sigma$, sia $q_I = \mathrm{Chom}_R(N, j_I) : \mathrm{Chom}_R(N, V_I) \to \mathrm{Bchom}_R(N, K)$. Va da sé (dal momento che i j_I sono i morfismi canonici del limite diretto dei V_I e dunque commutano con i ρ^I_J) che i q_I costituiscano un sistema diretto di morfismi e che quindi esista il loro limite diretto $q = \mathrm{colim}(q_I) : \mathrm{colim}(\mathrm{Chom}_R(N, V_I)) \to \mathrm{Bchom}_R(N, K)$.

q è iniettivo perché lo sono le q_I per esattezza del funtore Chom: se infatti si sceglie $0 \neq \varphi \in \mathrm{colim}(\mathrm{Chom}_R(N, V_I))$, essendo $\varphi = \xi_I(\varphi_I)$ per qualche $I \in \mathscr{F}_\sigma$, deve essere anche $q(\varphi) = q(\xi_I(\varphi_I)) = q_I(\varphi_I) \neq 0$. Ancora più facilmente si vede che q è suriettivo: se un morfismo $\psi \in \mathrm{Bchom}_R(N, K)$ e $I \in \mathscr{F}_\sigma$ è tale che $\mathrm{Im}(\psi) = (V_I)j_I$, ψ induce un morfismo $\varphi_I \in \mathrm{Chom}_R(N, V_I)$, tale che $\psi = j_I \circ \varphi_I = q_I(\varphi_I) = q(\xi_I(\varphi_I))$. Inoltre, per ogni $I \in \mathscr{F}_\sigma$,

$$\begin{aligned}[\mathrm{Hom}_R(N, \alpha_a) \circ q] \circ \xi_I &= \mathrm{Hom}_R(N, \alpha_a) \circ q_I \\ &= \mathrm{Hom}_R(N, \alpha_a) \circ \mathrm{Chom}_R(N, j_I)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \mathrm{Chom}_R(N, \alpha_a \circ j_I) \\
&= \mathrm{Chom}_R(N, j_{(I:a)} \circ \delta_{a,I}) \\
&= \mathrm{Chom}_R(N, j_{(I:a)}) \circ \mathrm{Chom}_R(N, \delta_{a,I}) \\
&= q_{(I:a)} \circ (\delta_{a,I})_* \\
&= q \circ \xi_{(I:a)} \circ (\delta_{a,I})_* \\
&= [q \circ \varepsilon_a] \circ \xi_I
\end{aligned}
$$

e dunque il morfismo q è un morfismo di A-moduli. È evidente inoltre che se $f : N' \to N$,

$$q(\xi_I(\varphi_I \circ f)) = q_I(\varphi_I \circ f) = j_I \circ \varphi_I \circ f = q_I(\varphi_I) \circ f$$

e, dunque, che q è un isomorfismo naturale.

3.5. Corollario. *Il funtore D_2 è equivalente al funtore* $\mathrm{Bchom}_R(-, K_A)$, *e K_A è un cogeneratore di* $\mathrm{Mod}\text{-}A_\sigma$.

Dimostrazione. Basta comporre tra loro gli isomorfismi naturali q, l e ϑ di cui si è parlato, rispettivamente, in 3.4, 3.2 – 3.3 e 1.7. Da questo segue immediatamente la seconda parte della tesi, come mostrato in I, 1.2.

3.6. Osservazione. Vale la pena di notare che fino a questo punto non è ancora stata utilizzata l'ipotesi di chiusura di ${}_R\mathscr{B}$ per prodotti topologici, in perfetta analogia con il caso esaminato nel capitolo I.

4. Rappresentazione del funtore D_1

4.1. Lemma. *Definendo il funtore* $\mathrm{Hom}_A^p(-, {}_RK)$ *come in I, 3.2, si ha che i due funtori* $\mathrm{Bchom}_R(-, K_A) : R_\tau\text{-LT} \longrightarrow \mathrm{Mod}\text{-}A_\sigma$ *e* $\mathrm{Hom}_A^p(-, {}_RK) : \mathrm{Mod}\text{-}A_\sigma \longrightarrow R_\tau\text{-LT}$ *sono vicendevolmente aggiunti sulla destra. In dettaglio: se $M \in \mathrm{Mod}\text{-}A_\sigma$ e $N \in {}_R\mathscr{B}$, le posizioni*

$$
\begin{aligned}
&\vartheta : \mathrm{Hom}_A(M, \mathrm{Bchom}_R(N, K)) \longrightarrow \mathrm{Chom}_R(N, \mathrm{Hom}_A^p(M, K)), \quad ((n)f^\vartheta)(m) = (n)(f(m)) \\
&\delta : \mathrm{Chom}_R(N, \mathrm{Hom}_A^p(M, K)) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(M, \mathrm{Bchom}_R(N, K)), \quad (n)(g^\delta(m)) = ((n)g)(m)
\end{aligned}
$$

definiscono due isomorfismi naturali di gruppi abeliani inversi l'uno dell'altro.

Dimostrazione. Evidentemente i due morfismi sono naturali e vicendevolmente inversi. Altrettanto ovviamente tutte le linearità del caso sono rispettate, e cioè f^{ϑ} è R-lineare, $(n)f^{\vartheta}$ è A-lineare per ogni $n \in N$, eccetera.

Per ogni g e per ogni $m \in M$, $g^{\delta}(m)$ è limitata e continua: infatti si vede che

$$\ker(g^{\delta}(m)) = \{n \in N \mid 0 = (n)(g^{\delta}(m)) = ((n)g)(m)\} = g^{-1}(\mathrm{W}(\{m\}))$$

e dunque è aperto, e che lo è anche

$$\mathrm{Ann}_A(\mathrm{Im}(g^{\delta}(m))) = \{a \in A \mid \forall n \in N,\ 0 = (n)(g^{\delta}(m))a = ((n)g)(ma)\} \supseteq \mathrm{Ann}_A(m) \in \mathscr{F}_{\sigma}.$$

Allora, ricordando la 2.7, si conclude.

Inoltre, per ogni f, f^{ϑ} è continua: se F è un sottoinsieme finito di M,

$$\begin{aligned}(f^{\vartheta})^{-1}(\mathrm{W}(F)) &= \{n \in N \mid 0 = ((n)f^{\vartheta})(F) = (n)(f(F))\}\\ &= \{n \in N \mid \forall m \in F,\ (n)(f(m)) = 0\}\\ &= \textstyle\bigcap_{m \in F}\ker(f(m))\end{aligned}$$

che è intersezione finita di aperti, e dunque aperto.

4.2. Lemma. *Siano* $(M_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ *e* K *moduli di* Mod-A_σ. *Allora l'isomorfismo canonico*

$$\Psi : \mathrm{Hom}_A^p(\oplus_\lambda M_\lambda, K) \longrightarrow \prod_{\lambda\in\Lambda}\mathrm{Hom}_A^p(M_\lambda, K), \qquad \Psi(\varphi) = (\varphi \circ i_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$$

è un isomorfismo topologico.

Dimostrazione. Si noti subito che l'inverso dell'isomorfismo Ψ è il morfismo che porta una famiglia di morfismi nel loro morfismo codiagonale. Esprimiamo ora due prebasi di intorni di zero per i due gruppi abeliani in questione: esse sono date dai

$$\mathrm{W}'((x_\lambda)_\lambda) = \{\alpha \in \mathrm{Hom}_A(\oplus_\lambda M_\lambda, K) \mid \alpha((x_\lambda)_\lambda) = 0\}$$
$$\mathrm{W}''(x, \bar{\lambda}) = \{(\beta_\lambda)_\lambda \in \prod_{\lambda\in\Lambda}\mathrm{Hom}_A^p(M_\lambda, K) \mid \beta_{\bar{\lambda}}(x) = 0\}$$

al variare rispettivamente di $(x_\lambda)_\lambda$ in $\oplus_\lambda M_\lambda$, di $\bar{\lambda}$ in Λ e di x in $M_{\bar{\lambda}}$.

Si definisca $(x_\lambda)_\lambda = i_{\bar{\lambda}}(x)$; allora se $\alpha \in \mathrm{W}'((x_\lambda)_\lambda)$,

$$(\Psi(\alpha))_{\bar{\lambda}}(x) = [\alpha \circ i_{\bar{\lambda}}](x) = \alpha((x_\lambda)_\lambda) = 0$$

cioè $\Psi(\alpha) \in \mathrm{W}''(x, \bar{\lambda})$: allora Ψ è continua. Sia viceversa $(x_\lambda)_\lambda \in \oplus_\lambda M_\lambda$, e si supponga che $\mathrm{supp}((x_\lambda)_\lambda) = \{\lambda_1, \dots \lambda_n\}$. Per ogni i esistono (e sono unici) gli $x_i \in M_{\lambda_i}$ per cui $(x_\lambda)_\lambda = \Sigma_i[i_{\lambda_i}(x_i)]$; prendendo $(\beta_\lambda)_\lambda \in \cap_i \mathrm{W}''(x_i, \lambda_i)$, si ha

$$[\mathrm{codiag}(\beta_\lambda)]((x_\lambda)_\lambda) = [\mathrm{codiag}(\beta_\lambda)](\Sigma_i[i_{\lambda_i}(x_i)]) = \Sigma_i[\beta_{\lambda_i}(x_i)] = 0$$

cioè $\mathrm{codiag}(\beta_\lambda) \in \mathrm{W}'((x_\lambda)_\lambda)$. Allora Ψ è un isomorfismo topologico.

Si noti che nel caso in cui ${}_RK_A$ sia un bimodulo, le topologie in gioco sono di R-moduli sinistri, allora Ψ, essendo R-lineare, risulta in questo caso un isomorfismo topologico di R-moduli.

In modo analogo a questa proposizione se ne dimostra un'altra, più nota, per cui se si ha un epimorfismo di moduli topologici $f : M \to N$, il morfismo $\mathrm{Chom}(f, K)$ è un'immersione topologica di $\mathrm{Chom}(N, K)$ in $\mathrm{Chom}(M, K)$. Anche in questo caso, se K è un bimodulo, l'immersione topologica rispetta le strutture di moduli dedotte da K. Questi due fatti ci permettono di dimostrare che:

4.3. Lemma. *Qualsiasi sia* $M \in \mathrm{Mod}\text{-}A_\sigma$, $\mathrm{Hom}^p_A(M, K) \in {}_R\mathscr{B}$.

Dimostrazione. Sia $(m_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ un sistema di generatori per M; per ogni $\lambda \in \Lambda$ si definisca $I_\lambda = \mathrm{Ann}_A(m_\lambda)$. Allora esiste un epimorfismo $f : \oplus_\lambda(A / I_\lambda) \to M$; di conseguenza $\mathrm{Hom}^p_A(M, K)$ risulta essere un sottomodulo di $\mathrm{Hom}^p_A(\oplus_\lambda(A / I_\lambda), K)$, ed è chiuso in quanto sottoinsieme completo di uno spazio di Hausdorff.

Si noti ora che, qualsiasi sia $I \in \mathscr{F}_\sigma$, $\mathrm{Hom}^p_A(A / I, K)$ è discreto perché A / I è ciclico; allora l'isomorfismo canonico astratto tra A / I e $\mathrm{Ann}_K(I)$ risulta essere un isomorfismo topologico: in particolare si può concludere che per ogni $I \in \mathscr{F}_\sigma$, esiste un isomorfismo topologico tra $\mathrm{Hom}^p_A(A / I, K)$ e V_I. Applicando anche il precedente lemma, si ha che esiste un isomorfismo topologico

$$\mathrm{Hom}^p_A(\oplus_\lambda(A / I_\lambda), K) \cong \prod_{\lambda\in\Lambda}\mathrm{Hom}^p_A(A / I_\lambda, K) \cong \prod_{\lambda\in\Lambda} V_{I_\lambda};$$

allora $\mathrm{Hom}^p_A(M, K)$, in quanto sottomodulo chiuso di un prodotto topologico dei $V_{I_\lambda} \in {}_R\mathscr{B}$, è un elemento di ${}_R\mathscr{B}$ in base alle ipotesi di chiusura.

Si noti che, analogamente a quanto visto nel capitolo I, sarebbe sufficiente supporre che ${}_R\mathscr{B}$ contenga tutti i prodotti topologici dei V_I; anche in questo caso, però, tale condizione è equivalente alla nostra perché, dal momento che $\oplus_I(A / I)$ è evidentemente un generatore di $\mathrm{Mod}\text{-}A_\sigma$ (o, equivalentemente, in base alla 2.10), il prodotto topologico dei V_I deve essere un cogeneratore di ${}_R\mathscr{B}$.

4.4. Lemma. *Il funtore* D_1 *è naturalmente isomorfo a* $\mathrm{Hom}^p_A(-, {}_RK)$.

Dimostrazione. Segue immediatamente dalla 4.1, dalla 4.3 e dall'unicità dell'aggiunto.

Possiamo ora riassumere i risultati delle prime quattro sezioni nel seguente

4.5. Teorema. *Siano* A_σ, R_τ *anelli topologici; siano* $\mathrm{Mod}\text{-}A_\sigma$ *la categoria degli A-moduli destri discreti topologici, e* ${}_R\mathscr{B}$ *una sottocategoria (piena) di* R_τ-LT *chiusa per sottomoduli topologici chiusi e prodotti topologici (cfr. I, 2.1 e I, 3.1). Supponiamo che sia data una dualità*

$D = (D_1, D_2)$: $\qquad \text{Mod-}A_\sigma \underset{D_2}{\overset{D_1}{\rightleftarrows}} {}_R\mathscr{B}$.

Esistono allora allora un bimodulo ${}_RK_A$ *e una cotopologia* $\mathscr{C}$ *su* ${}_RK$ *tali che:*

a) ${}_RK$ *è un* R_τ*-modulo topologico discreto, b-autocogeneratore e dotato della E.P.*
b) K_A *è fedele su A e cogeneratore di* Mod-A

e la dualità D è naturalmente isomorfa alla dualità

$D_K = (\mathrm{Hom}_A^p(-, K), \mathrm{Bchom}_R(-, K))$: $\qquad \text{Mod-}A_\sigma \underset{\mathrm{Bchom}_R(-,K)}{\overset{\mathrm{Hom}_A^p(-,K)}{\rightleftarrows}} {}_R\mathscr{B}$.

5. Complementi

5.1. Definizione. Un modulo $N \in R_\tau$-LT si dirà $\mathscr{C}$*-compatto* se esistono una famiglia $(V_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ di sottomoduli limitati di K (cioè tali che $V_\lambda \in \mathscr{C}$ per ogni $\lambda \in \Lambda$) e un isomorfismo topologico tra N e $\prod_{\lambda\in\Lambda} V_\lambda$, dove quest'ultimo sarà dotato della topologia prodotto delle topologie discrete.

Indicheremo inoltre con $\mathscr{C}(\mathscr{C})$ la sottocategoria piena di R_τ-LT i cui oggetti sono tutti e soli i moduli $\mathscr{C}$-compatti.

5.2. Lemma. ${}_R\mathscr{B} = \mathscr{C}(\mathscr{C})$.

Dimostrazione. Poiché in virtù di 2.5 tutti i K-compatti limitati sono elementi di ${}_R\mathscr{B}$, le ipotesi di chiusura permettono di concludere che ${}_R\mathscr{B} \supseteq \mathscr{C}(\mathscr{C})$.

Sia dunque $N \in {}_R\mathscr{B}$; dal momento che D è una dualità e che vale 4.4, esiste un modulo $M \in$ Mod-A_σ tale che $N \cong \mathrm{Hom}_A^p(M, K)$. Ripetendo ora lo stesso ragionamento seguito nella dimostrazione di 4.3, segue che $\mathrm{Hom}_A^p(M, K) \in \mathscr{C}(\mathscr{C})$, cioè che ${}_R\mathscr{B} \subseteq \mathscr{C}(\mathscr{C})$.

5.3. Teorema. *Nelle stesse ipotesi di 4.5, i seguenti asserti sono equivalenti:*

a) *Ogni epimorfismo di* ${}_R\mathscr{B}$ *è suriettivo*
b) K_A *è iniettivo in* Mod-A_σ
c) *Ogni* V_I *è linearmente compatto discreto*
d) ${}_R\mathscr{B} \subseteq R_\tau$-$\mathrm{LC}_*$

Dimostrazione. (a) $\Rightarrow$ (b): siano $M, N \in$ Mod-A_σ, e sia dato un monomorfismo $j : M \to N$. L'epimorfismo duale di j è proprio $\mathrm{Hom}_A(j, K)$ ed è suriettivo per ipotesi: allora K_A è iniettivo in Mod-A_σ.

(b) $\Rightarrow$ (c): si fissi $I \in \mathscr{F}_\sigma$, e sia $\mathscr{V} = (k_\lambda + V_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ una famiglia di varietà lineari di V_I dotate della proprietà dell'intersezione finita. Confondendo V_I con la sua immagine

$(V_I)j_I \leqslant {}_RK$, per ogni $\lambda \in \Lambda$ si ha che $V_\lambda \leqslant (V_I)j_I$ è limitato, e dunque che l'ideale $I_\lambda = \mathrm{Ann}_A(V_\lambda)$ è aperto. Allora si può definire in Mod-A_σ il morfismo

$$f : \Sigma_{\lambda\in\Lambda}(I_\lambda / I) \longrightarrow K_A, \qquad f(\Sigma_{\lambda\in F}(i_\lambda + I)) = \Sigma_{\lambda\in F}(k_\lambda i_\lambda).$$

Il morfismo f è ben definito: supponendo che $\Sigma_{\lambda\in F} i_\lambda = \Sigma_{\mu\in F} j_\mu$ (come in I, 2.10 non è restrittivo supporre che si sommi sullo stesso insieme di indici), scelto un elemento $k \in \cap_{\lambda\in F}(k_\lambda + V_\lambda)$,

$$f(\Sigma_{\lambda\in F} i_\lambda) = \Sigma_{\lambda\in F}(k_\lambda i_\lambda) = k(\Sigma_{\lambda\in F} i_\lambda) = k(\Sigma_{\mu\in F} j_\mu) = \Sigma_{\mu\in F}(k_\mu j_\mu) = f(\Sigma_{\mu\in F} j_\mu);$$

inoltre se $i_\lambda \equiv j_\lambda \pmod{I_\lambda}$ e $k_\lambda \equiv h_\lambda \pmod{V_\lambda}$ si ha

$$k_\lambda i_\lambda - h_\lambda j_\lambda = k_\lambda(i_\lambda - j_\lambda) + (k_\lambda - h_\lambda)j_\lambda \subseteq V_\lambda I_\lambda = 0.$$

Ma se K_A è iniettivo in Mod-A_σ, f si estende a un morfismo $\varphi \in \mathrm{Hom}_A(A / I, K) \cong V_I$, e allora detto $k_0 = \varphi(1 + I)$ e scelti comunque $\lambda \in \Lambda$, $i_\lambda \in I_\lambda$, si ha

$$k_\lambda i_\lambda = f(i_\lambda) = \varphi(i_\lambda) = k_0 i_\lambda$$

cioè $k_0 \equiv k_\lambda$ modulo $\mathrm{Ann}_K(I_\lambda) = \mathrm{Ann}_K(\mathrm{Ann}_A(V_\lambda)) = V_\lambda$, cioè $k_0 \in \cap_{\lambda\in\Lambda}(k_\lambda + V_\lambda)$.

(c) $\Rightarrow$ (d): segue direttamente dalla 5.1.

(d) $\Rightarrow$ (c): ogni V_I è discreto come dimostrato in 2.5.

(c) $\Rightarrow$ (b) (criterio di Baer): siano $A \neq I \in \mathscr{F}_\sigma$, $f \in \mathrm{Chom}_A(I, K)$. Poiché f è continua e K è discreto, $J = \ker(f) \in \mathscr{F}_\sigma$, e il morfismo $g : A / J \to K$ indotto da f sta in Mod-A_σ. Si noti che, dal momento che il caso $I = J$ è banale, si può supporre $J < I$.

Siano $V = \mathrm{Ann}_K(I)$, $W = \mathrm{Ann}_K(J)$; nel caso a cui ci siamo ristretti si ha $V < W$. Dal momento che $\mathrm{Ann}_A\mathrm{Ann}_K(J) = J$, $\forall x \in W \setminus V$ esiste un $a_x \in I \setminus J$ tale che $xa_x \neq 0 = Va_x$; in questo modo a_x subordina un morfismo $\varphi_x : W / V \to Wa_x \leqslant K$. Ovviamente, poiché A agisce su K per endomorfismi limitati, Wa_x è un sottomodulo limitato di K e come tale è (isomorfo a) un elemento di ${}_R\mathscr{B}$; allora il morfismo diagonale delle φ_x dà un'iniezione

$$\varphi : W / V \longrightarrow \prod_{x\in W\setminus V} Wa_x.$$

Dal momento che W è linearmente compatto discreto, anche W / V lo è; si indichi con Z il modulo W / V dotato della topologia debole delle φ_x. Evidentemente Z è di Hausdorff e linearmente compatto: allora risulta un sottomodulo chiuso del prodotto topologico dei Wa_x, e di conseguenza $Z \in {}_R\mathscr{B}$. Allora la successione esatta

$$0 \to V \xrightarrow{i_V} W \xrightarrow{\pi_V} Z \to 0$$

sta in ${}_R\mathscr{B}$, con π_V evidentemente suriettiva; la sua successione duale in Mod-A_σ è

$$0 \to \mathrm{Bchom}_R(V, K) \longrightarrow \mathrm{Bchom}_R(W, K) \longrightarrow \mathrm{Bchom}_R(Z, K) \to 0.$$

Del resto, dal momento che $A \cong \mathrm{Bend}_R(K)$ e che vale la 2.11, esistono degli isomorfismi canonici $\mathrm{Bchom}_R(V, K) \cong A / I$, $\mathrm{Bchom}_R(W, K) \cong A / J$. Di conseguenza deve essere $\mathrm{Bchom}_R(Z, K) \cong I / J$, e la successione esatta π_V, i_V deve essere isomorfa a

$$0 \to \mathrm{Hom}_A^p(A / I, K) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_A(\pi_I^J, K)} \mathrm{Hom}_A^p(A / J, K) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_A(i_{I/J}, K)} \mathrm{Hom}_A^p(I / J, K) \to 0$$

In particolare si ha che $\mathrm{Hom}_A(i_{I/J}, K)$ deve essere suriettivo in quanto isomorfo a π_V; ma allora g si estende tramite $i_{I/J}$ a un morfismo $\psi \in \mathrm{Hom}_A(A / J, K)$, e dunque f si estende a $\psi \circ \pi_J$.

(b) $\Rightarrow$ (a): siano dati due moduli ${}_RM$, ${}_RN \in {}_R\mathscr{B}$, e un epimorfismo $f : M \to N$; il morfismo $D_2(f)$, duale di f, è allora un monomorfismo di Mod-A_σ, cioè un morfismo iniettivo. Dal momento che $\mathrm{Hom}_A(-, K)$ è esatto per ipotesi, allora, il morfismo $\mathrm{Hom}_A(D_2(f), K)$ risulta un morfismo suriettivo; del resto per 4.4 $\mathrm{Hom}_A(D_2(f), K)$ è naturalmente isomorfo a $D_1D_2(f)$ e, poiché D è una dualità, $D_1D_2(f)$ è naturalmente isomorfo a f. Allora f deve essere suriettivo.

5.4. Osservazioni. Non è restrittivo supporre che K sia fedele su R: infatti, in virtù del lemma 5.2, $\mathrm{Ann}_R(K)$ annulla tutti i moduli di ${}_R\mathscr{B}$.

Non è nemmeno restrittivo supporre che la topologia di R coincida con la *K-topologia* τ_K, cioè la topologia che ha per base di intorni gli annullatori dei sottoinsiemi finiti di K. Infatti, dal momento che la K-topologia è la meno fine che rende K modulo topologico discreto su R, τ deve evidentemente essere più fine di τ_K; del resto, ancora per 5.2, la K-topologia rende topologici tutti i moduli di ${}_R\mathscr{B}$. In particolare, dal momento che abbiamo supposto che ${}_RK$ sia fedele, R_τ risulta essere di Hausdorff.

Infine non è restrittivo supporre che R sia completo, perché essendo K discreto, evidentemente $\mathscr{C}(\mathscr{A})$ risulta composta di moduli completi.

5.5. Proposizione. *Nelle ipotesi di 4.5 e con le convenzioni stabilite in 5.4, $R_\tau \in {}_R\mathscr{B}$. In particolare, se K_A è iniettivo, R_τ è linearmente compatto.*

Dimostrazione. La seconda parte della tesi segue immediatamente dalla prima e dal teorema 5.3; la prima parte seguirà se dimostreremo che R_τ è topologicamente isomorfo a $\mathrm{End}_A^p(K)$, che è il duale di $K_A \in$ Mod-A_σ. In virtù della precedente, supporremo che R_τ sia completo, che sia $\tau = \tau_K$ e che ${}_RK$ sia fedele.

Sia dunque $\omega : R_\tau \to \mathrm{End}_A^p(K)$ il morfismo canonico dato dalla struttura di bimodulo di K (cioè: $[(r)\omega](k) = rk$). ω è iniettiva perché

$$\ker(\omega) = \{r \in R \mid 0 = [(r)\omega](K) = rK\} = \mathrm{Ann}_R(K)$$

e K è fedele. Inoltre, ω è continua e aperta sull'immagine, perché per ogni sottoinsieme finito $F \subseteq K$ si ha che $(\mathrm{Ann}_R(F))\omega \subseteq \mathrm{W}(F)$, e per ogni $\varphi = (r)\omega \in \mathrm{W}(F) \cap \mathrm{Im}(\omega)$ si ha che $rF = [(r)\omega](F) = 0$, e dunque $(\mathrm{Ann}_R(F))\omega = \mathrm{W}(F) \cap \mathrm{Im}(\omega)$.

Poiché R_τ è completo, inoltre, $\mathrm{Im}(\omega)$ è chiusa; rimane allora solo da verificare che $\mathrm{Im}(\omega)$ è densa in $\mathrm{End}_A^p(K)$. Siano dunque $\varphi \in \mathrm{End}_A(K)$ e $F = \{x_1, ..., x_n\}$ un qualsiasi sottoinsieme finito di K; si definisca

$$V = R(x_1, ..., x_n) \leqslant {}_RK^n.$$

V risulta un sottomodulo limitato di ${}_RK^n$, perché $\mathrm{Ann}_A((V)\pi_i) = \mathrm{Ann}_A(Rx_i) = \mathrm{Ann}_A(x_i) \in \mathscr{E}$ qualsiasi sia i; supponiamo che l'n-upla $(\varphi(x_1), ..., \varphi(x_n))$ non appartenga a V. Allora per la 2.13 esiste un morfismo limitato $\alpha : {}_RK^n \to {}_RK$ tale che

$$(x_1, ..., x_n)\alpha = 0 \neq (\varphi(x_1), ..., \varphi(x_n))\alpha.$$

Del resto, per la proprietà universale della somma diretta e per la 2.8, esistono $a_1, ..., a_n \in A$ tali che per ogni $(y_1, ..., y_n) \in K^n$ sia $(y_1, ..., y_n)\alpha = \Sigma_i(y_i a_i)$; ma allora

$$0 \neq (\varphi(x_1), ..., \varphi(x_n))\alpha = \Sigma_i(\varphi(x_i)a_i) = \varphi(\Sigma_i x_i a_i) = \varphi[(x_1, ..., x_n)\alpha] = \varphi(0) = 0,$$

assurdo. Allora $(\varphi(x_1), ..., \varphi(x_n)) \in V$, cioè esiste un $r \in R$ tale che per ogni $i = 1, ..., n$ sia $\varphi(x_i) = rx_i$. Ma allora $(r)\omega \in \varphi + \mathrm{W}(F)$.

5.6. Osservazioni e definizioni. Si ricordi che una delle condizioni equivalenti della compattezza lineare è la seguente: un modulo M_μ è linearmente compatto se, e solo se, per ogni famiglia filtrante decrescente $(L_\delta)_{\delta\in\Delta}$ di sottomoduli aperti di M, il morfismo canonico

$$M \longrightarrow \lim_{\delta\in\Delta} M/L_\delta$$

è suriettivo (infatti, questo equivale a chiedere che M sia completo per ogni topologia meno fine di μ: cfr. [4], V, 2.1). Cercando di adattare queste considerazioni alla categoria Mod-A_σ, si nota immediatamente che è possibile trovare un modulo M e una famiglia $(L_\delta)_\delta$ di suoi sottomoduli aperti tali che ognuno dei quozienti M / L_δ appartenga a Mod-A_σ senza tuttavia che il loro limite inverso sia un modulo discreto: si pensi ad esempio ad A stesso.

Tuttavia, ogni modulo astratto M_A contiene sottomoduli che risultano A_σ-moduli discreti topologici, come per esempio il sottomodulo nullo. Viste le proprietà di chiusura di Mod-A_σ, ha dunque senso parlare del *massimo* di questi sottomoduli, ed è facile rendersi conto che esso coincide con il *sottomodulo di σ-torsione* di M, definito da

$$t_\sigma(M) = \{m \in M \mid \mathrm{Ann}_A(m) \in \mathscr{F}_\sigma\}.$$

Evidentemente un modulo discreto è un elemento di Mod-A_σ se, e solo se, $M = t_\sigma(M)$. In particolare, dato un sistema inverso $(M_\delta)_{\delta\in\Delta}$ di A-moduli discreti topologici, è possibile definire il loro *σ-limite inverso* ponendo

$$\lim{}^\sigma(M_\delta) = t_\sigma(\lim(M_\delta));$$

si noti che $\lim^{\sigma}(M_\delta)$ è proprio il limite inverso calcolato nella categoria Mod-A_σ. Motivati da questo, diremo che un modulo $M \in$ Mod-A_σ è *σ-linearmente compatto* se per ogni famiglia filtrante decrescente $(L_\delta)_{\delta\in\Delta}$ di suoi sottomoduli, il morfismo canonico

$$M \longrightarrow \lim^{\sigma}(M / L_\delta) = t_\sigma(\lim(M / L_\delta))$$

(che è ben definito perché Mod-A_σ è chiusa per immagini omomorfe) risulta suriettivo. Evidentemente ogni modulo linearmente compatto è anche σ-linearmente compatto e dunque quest'ultima è una proprietà più debole della prima.

Si noti ora che, in base alle proprietà di chiusura della classe dei moduli linearmente compatti, un anello completo A_σ è linearmente compatto se e solo se lo sono tutti i quozienti A / I con I ideale aperto di A. In base a questa considerazione, diremo che l'anello completo A_σ è *auto-linearmente compatto* se ogni A / I è σ-linearmente compatto.

5.7. Proposizione. *Se la categoria* Mod-A_σ *ammette una dualità come nelle ipotesi dei Teorema 4.5, allora A_σ è auto-linearmente compatto.*

Dimostrazione. Sia $I \in \mathscr{F}_\sigma$, e $(I_\delta)_{\delta\in\Delta}$ una famuiglia filtrante decrescente di ideali $I \leqslant I_\delta \leqslant A_A$. Si definiscano $V = \mathrm{Ann}_K(I)$ e, per ogni $\delta \in \Delta$, $V_\delta = \mathrm{Ann}_K(I_\delta)$. I V_δ costituiscono una famiglia filtrante crescente di R-sottomoduli limitati di K, e $V_\delta \leqslant V$ per tutti i $\delta \in \Delta$; allora

$$W = \mathrm{colim}(V_\delta) = \Sigma_{\delta\in\Delta}(V_\delta) \leqslant V,$$

cioè anche W è un sottomodulo limitato di K (cfr. 2.7) e dunque (per la 2.5 e ancora per la 2.7) $W = \mathrm{Ann}_K(J)$ dove $J = \mathrm{Ann}_K(W) \in \mathscr{F}_\sigma$. Indichiamo con $j_\delta : V_\delta \to W$ le inclusioni canoniche, che svolgono anche il ruolo di morfismi canonici del limte diretto. Inoltre, in modo del tutto analogo a quanto visto in 1.6, i $\mathrm{Bhom}_R(V_\delta, K)$ costituiscono un sistema inverso di A-moduli discreti topologici.

Si definisca ora il morfismo naturale (e canonico)

$$\Psi : \mathrm{Bhom}_R(W, K) \longrightarrow \lim(\mathrm{Bhom}_R(V_\delta, K)), \qquad \Psi(\varphi) = (\varphi \circ j_\delta)_{\delta\in\Delta};$$

in pratica Ψ è il limite inverso della famiglia di morfismi $(\varphi \circ j_\delta)_{\delta\in\Delta}$, che costituiscono un sistema inverso perché i j_δ sono i morfismi canonici del limite diretto.

Il fatto che Ψ sia ben definita segue dal fatto che $\mathrm{Im}(\varphi \circ j_\delta) \subseteq \mathrm{Im}(\varphi)$, e dunque i morfismi $\varphi \circ j_\delta$ sono in effetti limitati; inoltre Ψ è iniettiva, perché essendo $W = \Sigma_\delta(V_\delta)$, se tutte le composizioni $\varphi \circ j_\delta$ sono nulle deve essere $\varphi = 0$.

Studiamo ora l'immagine di Ψ. Se $(\varphi_\delta)_{\delta\in\Delta}$ appartiene a $\mathrm{Im}(\Psi)$, allora esiste una $\varphi : W \to K$ limitata tale che $\forall \delta \in \Delta$, $\varphi_\delta = \varphi \circ j_\delta$; ma allora si ha $\mathrm{Im}(\varphi_\delta) \subseteq \mathrm{Im}(\varphi)$ e allora

$$\bigcap_{\delta\in\Delta} \mathrm{Ann}_A(\mathrm{Im}(\varphi_\delta)) \supseteq \mathrm{Ann}_A(\mathrm{Im}(\varphi));$$

ma φ è limitata, dunque $\mathrm{Ann}_A(\mathrm{Im}(\varphi))$ è aperto, e allora l'intersezione degli annullatori in A delle immagini delle φ_δ è un ideale aperto di A. Viceversa, supponiamo che $(\varphi_\delta)_{\delta\in\Delta} \in \lim(\mathrm{Bhom}_R(V_\delta, K))$ sia tale che $\bigcap_{\delta\in\Delta} \mathrm{Ann}_A(\mathrm{Im}(\varphi_\delta)) \in \mathscr{F}_\sigma$; allora il morfismo $\varphi = \mathrm{colim}(\varphi_\delta)$ (che esiste per la proprietà universale del limite diretto e perché $\mathrm{Bhom}_R(V_\delta, K) \leqslant \mathrm{Hom}_R(V_\delta, K)$) è tale che

$$\mathrm{Ann}_A(\mathrm{Im}(\varphi)) = \mathrm{Ann}_A(\Sigma_\delta \mathrm{Im}(\varphi_\delta)) = \bigcap_{\delta\in\Delta} \mathrm{Ann}_A(\mathrm{Im}(\varphi_\delta)) \in \mathscr{F}_\sigma.$$

Questo permette di concludere che

$$\mathrm{Im}(\Psi) = \{(\varphi_\delta)_{\delta\in\Delta} \in \lim(\mathrm{Bhom}_R(V_\delta, K)) \mid \bigcap_{\delta\in\Delta} \mathrm{Ann}_A(\mathrm{Im}(\varphi_\delta)) \in \mathscr{F}_\sigma\}.$$

Si noti ora che tramite gli isomorfismi canonici di A-moduli $\mathrm{Bhom}_R(V, K) \cong A / I$, $\mathrm{Bhom}_R(V_\delta, K) \cong A / I_\delta$, $\mathrm{Bhom}_R(W, K) \cong A / J$, che esistono in base a 2.8 e 2.11, il morfismo Ψ può essere letto come un monomorfismo $\Phi : A / J \to \lim(A / I_\delta)$. Si noti inoltre che se un morfismo $V_\delta \to K$ corrisponde alla restrizione di un $a_\delta \in A$ (che resta individuato a meno di $\mathrm{Ann}_A(V_\delta)$), allora

$$\begin{aligned}\mathrm{Ann}_A(\mathrm{Im}(\varphi_\delta)) &= \mathrm{Ann}_A(V_\delta a_\delta) = \{x \in A \mid V_\delta a_\delta x = 0\} = \{x \in A \mid a_\delta x \in \mathrm{Ann}_A(V_\delta)\} \\ &= (I_\delta : a_\delta).\end{aligned}$$

Del resto, vedendo $a_\delta + I_\delta$ come elemento di A / I_δ, $(I_\delta : a_\delta)$ è evidentemente proprio l'annullatore in A di $a_\delta + I_\delta$; di conseguenza,

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}(\Phi) &= \{(a_\delta + I_\delta)_\delta \in \lim(A / I_\delta) \mid \bigcap_{\delta\in\Delta} \mathrm{Ann}_A((a_\delta + I_\delta)_\delta) = \bigcap_{\delta\in\Delta} (I_\delta : a_\delta) \in \mathscr{F}_\sigma\} \\ &= \lim^\sigma(A / I_\delta).\end{aligned}$$

Questo, poiché Φ è iniettivo, dice che A / J è isomorfo a $\lim^\sigma(A / I_\delta)$: ma allora, componendo tale isomorfismo con la proiezione canonica π_J^I (che esiste, perché ovviamente è $I \leqslant J$) si ottiene un epimorfismo $A / I \to \lim^\sigma(A / I_\delta)$. Per l'arbitrarietà di $(I_\delta)_\delta$, allora, A / I risulta essere σ-linearmente compatto, e per l'arbitrarietà di I si conclude che A_σ è auto-linearmente compatto.

5.8. Proposizione. *Nelle ipotesi del Teorema 4.5, se A_σ è linearmente compatto allora per ogni sottomodulo limitato V di K, risulta* $\mathrm{Bhom}_R(V, K) = \mathrm{Hom}_R(V, K)$. *In particolare,* $A \cong \mathrm{End}({}_RK)$ *canonicamente.*

Dimostrazione. Se A_σ è linearmente compatto, allora ogni A / I risulta linearmente compatto: per ogni famiglia filtrante decrescente $(I_\delta)_{\delta\in\Delta}$ di ideali $I \leqslant I_\delta \leqslant A_A$, il morfismo canonico

$$A / I \longrightarrow \lim(A / I_\delta)$$

risulta suriettivo. Del resto, questo morfismo è definito nello stesso modo del morfismo canonico verso il σ-limite inverso $\lim^\sigma(A / I_\delta)$: risulta allora evidente che deve essere $\lim^\sigma(A / I_\delta) = \lim(A / I_\delta)$, cioè che deve essere $\lim(A / I_\delta) \in \mathrm{Mod}\text{-}A_\sigma$.

Sia $V \in \mathscr{C}$, e indichiamo con $(F_\delta)_{\delta\in\Delta}$ la famiglia filtrante crescente dei suoi sottomoduli finitamente generati; evidentemente si ha $V = \Sigma_{\delta\in\Delta}(F_\delta) = \mathrm{colim}(F_\delta)$. Per ogni $\delta \in \Delta$ si definisca $I_\delta = \mathrm{Ann}_A(F_\delta)$; dal momento che $K_A \in$ Mod-A_σ, deve essere $I_\delta \in \mathscr{F}_\sigma$, dunque in particolare (cfr. 2.7) ogni F_δ è limitato. Inoltre, dal momento che la classe dei moduli finitamente generati è chiusa per immagini omomorfe, per ogni $\delta \in \Delta$ si ha $\mathrm{Bhom}_R(F_\delta, K) = \mathrm{Hom}_R(F_\delta, K)$. Si ha dunque la catena di isomorfismi

$$\mathrm{Bhom}_R(V, K) \cong A / I \cong \lim(A / I_\delta) \cong \lim(\mathrm{Bhom}_R(F_\delta, K)) = \lim(\mathrm{Hom}_R(F_\delta, K)) \cong$$
$$\cong \mathrm{Hom}_R(\mathrm{colim}(F_\delta), K) \cong \mathrm{Hom}_R(V, K).$$

Del resto, poiché $\mathrm{Bhom}_R(V, K) \leqslant \mathrm{Hom}_R(V, K)$, tale isomorfismo è in realtà un uguaglianza.

È evidente che la seconda parte della tesi segue dalla prima e dalla 2.8: infatti, se ogni morfismo da un limitato di K in K è limitato, ogni endomorfismo di K risulta limitato sui limitati, e dunque $\mathrm{Bend}({}_RK) = \mathrm{End}({}_RK)$. Vale la pena di notare, comunque, che l'isomorfismo non è necessariamente topologico dotando $\mathrm{End}({}_RK)$ della topologia della convergenza puntuale. In effetti, come conseguenza della 2.7 si ha che la topologia che A_σ induce su $\mathrm{End}({}_RK)$ è quella della convergenza sui limitati, che (dal momento che ogni f.g. è limitato) risulta in generale più fine della K-topologia.

6. Esempi

Un esempio generale

Supponiamo che il bimodulo ${}_RK_A$ induca la dualità Δ_K tra le categorie Mod-A e ${}_R\mathscr{B} = \mathscr{C}({}_RK)$ (notazioni come in I, 3.5). In particolare, allora si hanno i funtori

$$D_1 = \mathrm{Hom}_A^p(-, {}_RK) : \text{Mod-}A \longrightarrow {}_R\mathscr{B}$$
$$D_2 = \mathrm{Chom}_R(-, K_A) : {}_R\mathscr{B} \longrightarrow \text{Mod-}A.$$

Indichiamo con P_A il modulo A^X dotato della topologia prodotto delle discrete: una base di intorni di zero per P è data allora al variare di F tra i sottoinsieme finiti di X dai sottomoduli $\mathrm{W}(F) = \cap_{x\in F}\ker(\pi_x)$, dove $\pi_x : A^X \to A$ indica l'x-esima proiezione.

Il modulo P_A ha una struttura naturale di bimodulo topologico sull'anello topologico $B_\beta = \mathrm{Cend}^u(P_A)$ degli endomorfismi continui di P_A dotato della topologia della convergenza uniforme. Una base di intorni di zero per B è data al variare di V tra i sottomoduli aperti di P dagli ideali destri $\mathscr{I}(V) = \{\varphi \in \mathrm{Cend}(P_A) \mid \mathrm{Im}(\varphi) \subseteq V\}$; in realtà, come è facile capire, la base di intorni formata dagli ideali $\mathscr{I}(\mathrm{W}(F))$, con F sottoinsieme finito di X, definisce su B la stessa topologia.

Nel caso in esame, dal momento che $P = A^X$, B risulta essere canonicamente isomorfo all'anello $\mathrm{RF}_X(A)$ della matrici a righe finite e coefficienti in A, in modo che l'azione di B su P è definita da

$$\cdot : B \times P \longrightarrow P, \qquad (\alpha_{xy})_{x,y\in X} \cdot (a_x)_{x\in X} = (\Sigma_{y\in X}\alpha_{xy}a_y)_{x\in X}$$

(l'ultima sommatoria esiste perché qualsiasi sia x, $\alpha_{xy} = 0$ per quasi tutti gli y). In queste notazioni, allora, per ogni sottoinsieme finito $F \subseteq X$, l'ideale $\mathscr{I}(\mathrm{W}(F))$ risulta essere costituito dalle matrici che hanno le x-esime righe nulle per tutti gli $x \in F$.

Evidentemente, la categoria Mod-A coincide con la categoria Mod-A_d dei moduli topologici discreti sull'anello A dotato della topologia discreta. Allora (cfr. [1], 6.2) il bimodulo ${}_BP_A$ induce un'equivalenza tra Mod-A e Mod-B_β data dai funtori

$$F = \mathrm{Chom}_A({}_BP, -) : \text{Mod-}A \longrightarrow \text{Mod-}B_\beta$$
$$G = - \hat{\otimes} P_A : \text{Mod-}B_\beta \longrightarrow \text{Mod-}A$$

(il simbolo $\hat{\otimes}$ indica il completamento di Hausdorff del prodotto tensoriale: per una definizione più rigorosa dei simboli si rimanda comunque a [1]). Inoltre il bimodulo ${}_BP_A$ gode delle seguenti proprietà:

a) al variare di I tra gli ideali aperti di B_B, la chiusura $\overline{IP}$ di IP in P costituisce una base di intorni di zero per P_A;
b) per ogni $I \leqslant B_B$ aperto, $G(B / I) = P / \overline{IP}$;
c) per ogni $L \leqslant P_A$ aperto, P / L è finitamente generato.

Componendo questa equivalenza con la dualità Δ_K si ottiene la dualità $E = (E_1, E_2)$, dove

$$E_1 = D_1 \circ G = \mathrm{Hom}^p_A((- \hat{\otimes} P_A), {}_RK) : \text{Mod-}B_\beta \longrightarrow {}_R\mathscr{B}$$
$$E_2 = F \circ D_2 = \mathrm{Chom}_A({}_BP, \mathrm{Chom}_R(-, K_A)) : {}_R\mathscr{B} \longrightarrow \text{Mod-}B_\beta.$$

Si definisca ora ${}_RH = \mathrm{colim}(E_1(B / I))$ (dove, ovviamente, si calcola il limite diretto al variare di I tra gli ideali aperti di B_B): H possiede una struttura canonica di modulo destro su B (cfr. 2.6) ed è possibile dotare ${}_RH_B$ della cotopologia in cui i sottomoduli limitati sono gli annullatori in H di ideali aperti di B (cfr. 2.7). Per il teorema 4.5, allora, H rappresenta la dualità E in modo tale che $E_1 = \mathrm{Hom}^p_A(-, {}_RH)$, $E_2 = \mathrm{Bchom}_R(-, H_B)$.

Si noti che per la proprietà (b) di P,

$$H = \mathrm{colim}(E_1(B / I)) = \mathrm{colim}(D_1G(B / I)) = \mathrm{colim}(\mathrm{Hom}^p_A(P / \overline{IP}, K)),$$

e che per la proprietà (a) di P, dal momento che ogni morfismo continuo ha nucleo aperto (si confrontino anche 1.5 - 1.7), è

$$\mathrm{colim}(\mathrm{Hom}^p_A(P / \overline{IP}, K)) \cong \mathrm{Chom}_A(P, K).$$

Del resto, dal momento che $P_A = A^X$ ha la topologia prodotto delle discrete e K è discreto, ogni morfismo continuo $P \to K$ deve annullare quasi tutte le componenti: allora esiste un isomorfismo canonico $\mathrm{Chom}_A(P, K) \cong K^{(X)}$.

Si noti che è definita in modo canonico l'azione di B su $K^{(X)}$ in questo modo:

$$\cdot : K^{(X)} \times B \longrightarrow K^{(X)}, \qquad (k_y)_{y \in X} \cdot (\alpha_{xy})_{x,y \in X} = (\Sigma_{x \in X} k_x \alpha_{xy})_{y \in X}$$

e che questa è una buona definizione: poiché il supporto di $(k_y)_{y \in X}$ è finito e ogni riga di $(\alpha_{xy})_{x,y \in X}$ è finita, il supporto dell'ultima sommatoria, che è contenuto nell'insieme definito da $\{y \in X \mid \alpha_{xy} \neq 0 \text{ per qualche } x \in \mathrm{supp}((k_y)_{y \in X})\}$, deve essere finito.

È possibile inoltre verificare che gli isomorfismi canonici appena visti rispettano le strutture di bimodulo, cioè che effettivamente ${}_RH_B \cong \mathrm{Chom}_A({}_BP, {}_RK) \cong ({}_RK^{(X)})_B$. Si noti allora che è possibile descrivere i sottomoduli limitati di H in questi due modi: se V è un sottomodulo aperto di P e F è un sottoinsieme finito di X,

$$\mathrm{Ann}_H(\mathscr{I}(V)) = \{\varphi \in \mathrm{Chom}_A(P, K) \mid 0 = \varphi(\mathscr{I}(V) \cdot P) = \varphi(V)\},$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Ann}_H(\mathscr{I}(\mathrm{W}(F))) &= \{(k_y)_{y\in X} \in K^{(X)} \mid 0 = (k_y)_y \cdot \mathscr{I}(\mathrm{W}(F))\}\\ &= \{(k_y)_{y\in X} \in K^{(X)} \mid k_y = 0 \ \ \forall y \notin F\}.\end{aligned}$$

Utilizzando l'isomorfismo di bimoduli tra ${}_RH_B$ e $\mathrm{Chom}_A({}_BP, {}_RK)$ vogliamo ora dimostrare che il bimodulo H rappresenta effettivamente il funtore E_2 (e quindi, per aggiunzione, la dualità E): scelto un qualsiasi $N \in {}_R\mathscr{B}$ si definiscano infatti

$$\begin{aligned}\vartheta &: \mathrm{Chom}_A(P, \mathrm{Chom}_R(N, K)) \longrightarrow \mathrm{Bchom}_R(N, \mathrm{Chom}_A(P, K)), \ \ ((n)f^{\vartheta})(p) = (n)(f(p)),\\ \delta &: \mathrm{Bchom}_R(N, \mathrm{Chom}_A(P, K)) \longrightarrow \mathrm{Chom}_A(P, \mathrm{Chom}_R(N, K)), \ \ (n)(g^{\delta}(p)) = ((n)g)(p).\end{aligned}$$

Dal momento che δ e ϑ sono evidentemente vicendevolmente inversi, e che risultano B-lineari seguendo un ragionamento del tutto simile a quelli svolti in precedenza (cfr. 1.7), per dimostrare che $E_2 = \mathrm{Bchom}_R(-, K)$ è sufficiente dimostrare che δ e ϑ sono ben definiti.

Vogliamo dunque vedere che f^{ϑ} e g^{δ} sono continue, che f^{ϑ} è limitata e che, per tutti gli $n \in N$ e $p \in P$, $g^{\delta}(p)$ e $(n)f^{\vartheta}$ sono continue. Si ha:

$$\ker(f^{\vartheta}) = \{n \in N \mid (n)(f(P)) = 0\} = \bigcap\nolimits_{p\in P} \ker(f(p));$$

del resto, dal momento che f è continua e che di conseguenza $\ker(f)$ è aperto, per la proprietà (c) di P il modulo quoziente $P / \ker(f)$ deve essere finitamente generato: esistono allora in P dei $p_1, ..., p_n$ tali che $P = \ker(f) + p_1A + \cdots + p_nA$. Ma da questo segue evidentemente

$$\bigcap\nolimits_{p\in P} \ker(f(p)) = \bigcap_{p=1}^{n} \ker(f(p_i))$$

perché l'inclusione "$\subseteq$" è ovvia, e se n appartiene all'intersezione finita a secondo membro, dal momento che esistono $q \in \ker(f)$ e $a_1, ..., a_n \in A$ tali che $p = q + \Sigma_i p_i a_i$, si ha

$$(n)(f(p)) = (n)(f(q + \Sigma_i p_i a_i)) = (n)(f(q)) + \Sigma_i (n)(f(p_i))a_i = 0.$$

Allora f^{ϑ} è effettivamente continua. In modo analogo,

$$\ker(g^{\delta}) = \{p \in P \mid ((N)g)(p) = 0\} = \bigcap\nolimits_{n\in N} \ker(g(n));$$

ma poiché g è limitata, per come è definita la cotopologia di H deve esistere un sottomodulo aperto V di P tale che per ogni $n \in N$, $(V)(g(n)) = 0$. Allora $\ker(g^{\delta})$ contiene V, e dunque è aperto. Inoltre si ha

$$\begin{aligned}\mathrm{Ann}_B(\mathrm{Im}(f^\vartheta)) &= \{b \in B \mid (N)(f(bP)) = 0\}\\ &= \{b \in B \mid bP \in \ker(f)\}\\ &= \mathscr{I}(\ker(f))\end{aligned}$$

e dunque f^ϑ è limitata. È infine evidente che

$$\begin{aligned}&\ker(g^\delta(p)) = \{n \in N \mid ((n)g)(p) = 0\} \supseteq \ker(g)\\ &\ker((n)f^\vartheta) = \{p \in P \mid (n)(f(p)) = 0\} \supseteq \ker(f)\end{aligned}$$

e cioè che $g^\delta(p)$ e $(n)f^\vartheta$ sono continue per ogni $n \in N$, $p \in P$.

Abbiamo allora mostrato che il bimodulo H definisce effettivamente una dualità D_H con il significato visto nel teorema 4.5. Nel seguito, studieremo un caso concreto di dualità come quelle appena esaminate, e ne ricaveremo altre interessanti informazioni.

Un caso particolare

Sia p un intero primo fissato; il gruppo abeliano $K = \mathbb{Z}(p^\infty)$ può essere visto come R-A-bimodulo sugli anelli $R_\tau = (J_p, p)$ e $A = J_p$ (il primo dotato della topologia p-adica, il secondo astratto) e come tale induce la "dualità di Lefschetz-Kaplansky-MacDonald" (cfr. [4], V, 4) che è una dualità Δ_K tra le categorie Mod-A e ${}_R\mathscr{B} = \mathscr{C}({}_RK)$ (cfr I, 3.5).

Utilizzando il procedimento appena descritto per $X = \mathbb{N}$, si ottengono l'anello $B = \mathrm{RF}_{\mathbb{N}}(J_p)$, dotato della topologia che ha per base di intorni di zero gli ideali $\mathscr{I}(\mathrm{W}(F))$ delle matrici con le F-esime righe nulle, e il bimodulo ${}_RH_B = \mathrm{Chom}_A(J_p^{\mathbb{N}}, \mathbb{Z}(p^\infty))$, con ${}_RH$ dotato della cotopologia generata dai sottomoduli $\mathrm{Ann}_H(\mathscr{I}(V))$ al variare di V tra i sottomoduli aperti di $J_p^{\mathbb{N}}$. Si noti che, come già detto sopra, poiché $J_p^{\mathbb{N}}$ è dotato della topologia prodotto delle discrete esiste un isomorfismo canonico di bimoduli tra ${}_RH_B$ e $({}_R\mathbb{Z}(p^\infty)^{(\mathbb{N})})_B$; una base per il cofiltro dei limitati di H è data allora al variare di F tra i sottoinsiemi finiti di $\mathbb{N}$ dai sottomoduli $\mathrm{B}(F) = \{(x_i)_i \in H \mid x_i = 0 \ \ \forall i \notin F\} = (\mathbb{Z}(p^\infty)^F)j_F$, dove j_F indica l'iniezione di K^F in $K^{\mathbb{N}}$ definita nel modo canonico.

Denotiamo con $(c^{(i)})_i$ per $i \in \mathbb{N}$ un sistema di generatori di $\mathbb{Z}(p^\infty)$ tali che $pc^{(i+1)} = c^{(i)}$e $pc^{(1)} = 0$; un sistema di generatori per H può essere allora scritto come $(c_n^{(i)})_{i,n}$, dove si è posto $c_n^{(i)} = (c^{(i)})j_n$ (e j_n è l'n-esima iniezione canonica). Per quanto appena detto, il sottomodulo $B_1 = (\mathbb{Z}(p^\infty))j_1 = \langle c_1^{(i)} \mid i \in \mathbb{N}\rangle$ è un sottomodulo limitato di H, e dunque appartiene alla categoria ${}_R\mathscr{B}$. Si definisca ora il morfismo $\varphi : B_1 \to H$ così:

$$\begin{aligned}&(c_1^{(1)})\varphi = c_1^{(1)}\\ &(c_1^{(2)})\varphi = c_1^{(2)} + c_2^{(1)}\\ &(c_1^{(3)})\varphi = c_1^{(3)} + c_2^{(2)} + c_3^{(1)}\\ &\quad\cdots\\ &(c_1^{(n)})\varphi = \sum_{i+j=n+1} c_j^{(i)} \ .\end{aligned}$$

Evidentemente φ è ben definito e, in quanto morfismo di p-gruppi abeliani, è un J_p-morfismo. Allora φ appartiene a $\mathrm{Chom}_R(B_1, H)$, ma è evidente che φ non è limitata.

Da questo esempio si ricavano allora due importanti conclusioni. La prima (dal momento che $B_1 \in {}_R\mathscr{B}$) è che esistono bimoduli H per cui il funtore $\mathrm{Bchom}_R(-, H_B)$ non coincide con il funtore $\mathrm{Chom}_R(-, H_B)$ e che dunque questo lavoro ha effettivamente generalizzato la teoria nota sulle dualità indotte da bimoduli. La seconda (come diretta conseguenza della proposizione 5.8) è che esistono anelli auto-linearmente compatti ma non linearmente compatti, e che dunque la nozione di auto-compattezza lineare è effettivamente più debole di quella di compattezza lineare.

Bibliografia

[1] E. Gregorio, *Generalized Morita equivalences for linearly topologized rings*, Rendiconti del Seminario Matematico dell'Università di Padova **79** (1988), 221-246

[2] C. Menini, A. Orsatti, *Good dualities and strongly quasi-injective modules*, Annali di matematica pura ed applicata (4) **127** (1981), 187-230

[3] C. Menini, A. Orsatti, *Dualities between categories of topological modules*, Communications in algebra **11** (1) (1983), 21-66

[4] A. Orsatti, *Un'introduzione alla teoria dei moduli*, Aracne, Roma, 1995

[5] A. Tonolo, *On a class of strongly quasi-injective modules*, Rendiconti del Seminario Matematico dell'Università di Padova **82** (1989), 115-131

[6] R. Wisbauer, *Foundations of module and ring theory*, Gordon & Breach, Philadelphia, 1991