

Motore in corrente continua,  
servomeccanismo di posizione e di velocità

Tesina di Laurea triennale di: Nicola Belli  
Relatore: prof. Mauro Bisiacco  
Corso di laurea in ingegneria dell'informazione

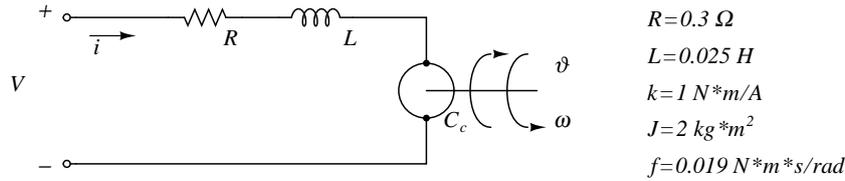
Padova  
Anno Accademico 2009/2010

# Indice

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Controllo di posizione (<math>C_c</math> disturbo variabile)</b>	<b>3</b>
2.1	Retroazione e compensatore . . . . .	4
2.2	Progetto del compensatore . . . . .	5
2.3	Analisi dell'incidenza del disturbo . . . . .	8
2.4	Simulazioni e considerazioni . . . . .	9
<b>3</b>	<b>Controllo di posizione (<math>C_c</math> parametro nominale)</b>	<b>13</b>
3.1	Progetto del compensatore . . . . .	14
3.2	Simulazioni e considerazioni . . . . .	15
<b>4</b>	<b>Controllo di velocità (<math>C_c</math> disturbo variabile)</b>	<b>17</b>
4.1	Retroazione e compensatore . . . . .	18
4.2	Progetto del compensatore . . . . .	18
4.3	Analisi dell'incidenza del disturbo . . . . .	20
4.4	Simulazioni e considerazioni . . . . .	21
<b>5</b>	<b>Controllo di velocità con il modello di stato</b>	<b>23</b>
5.1	Derivazione del modello di stato . . . . .	23
5.2	Retroazione statica dallo stato . . . . .	24
5.3	Osservazioni sul valore a regime dell'uscita . . . . .	24
5.4	Progetto del controllore statico dallo stato . . . . .	25

# 1 Introduzione

Si considera un motore in corrente continua alimentato da un generatore di tensione  $V$ . Sull'asse del motore agisce una coppia di carico  $C_c$ , il carico inerziale del motore e un'ulteriore coppia resistente imputata all'attrito (proporzionale alla velocità di rotazione  $\omega$ ) delle parti in movimento. In figura si riporta un semplice schema riassuntivo con il valore dei parametri.



Si assumono come ingressi del sistema:

- i1) La tensione di alimentazione delle armature del motore  $V$
- i2) La coppia assorbita dal carico  $C_c$

e come uscite

- o1) La rotazione dell'asse del motore  $\vartheta$
- o2) La velocità angolare di rotazione  $\omega$

Le due uscite sono legate per derivazione, secondo la formula:

$$\frac{d\vartheta(t)}{dt} = \omega(t)$$

Ora sorge il problema di gestire i due ingressi  $V$  e  $C_c$  che rappresentano rispettivamente la tensione di alimentazione delle spazzole e la coppia che viene assorbita dal carico. Si riassumono i punti che saranno sviluppati nel seguito.

Per il controllo di posizione si adottano due diversi approcci, entrambi caratterizzati da una relazione ingresso-uscita e da un controllo dinamico, mentre per quello di velocità si sviluppa un approccio dinamico simile ai precedenti e in seguito si ricava un modello di stato con un controllore statico, in dettaglio:

- si considera la coppia  $C_c$  come un disturbo variabile o costante nel tempo  $n(t)$  che si somma all'ingresso  $V$  che agisce sul sistema, l'uscita  $y(t)$  è rappresentata dalla posizione angolare dell'albero del motore  $\vartheta$ ;
- si assegna un valore nominale costante a  $C_c$  che quindi assume il ruolo di un parametro numerico nella FDT e si osserva come risponde il sistema se  $C_c$  si discosta dal valore nominale, l'uscita  $y(t)$  è rappresentata dalla posizione angolare dell'albero del motore  $\vartheta$ ;

- si considera la coppia  $C_c$  come un disturbo variabile o costante nel tempo  $n(t)$  che si somma all'ingresso  $V$  che agisce sul sistema, l'uscita  $y(t)$  è rappresentata dalla velocità angolare dell'albero del motore  $\omega$ ;
- si ricava il modello di stato a tempo continuo dalla funzione di trasferimento del punto precedente senza considerare la presenza del disturbo della coppia  $C_c$ , l'uscita  $y(t)$  è rappresentata dalla velocità angolare dell'albero del motore  $\omega$ .

Nei primi tre casi si retroaziona il sistema con un feedback negativo e si introduce un compensatore dinamico  $C(s)$  liberamente progettabile al fine di ridurre la dipendenza del sistema dalle variazioni di  $C_c$ , nell'ultimo approccio si progetta un controllore statico  $K$  con l'obiettivo iniziale di ottenere un andamento simile a quello fornito dal controllore dinamico del punto precedente in assenza della coppia di disturbo. Assieme alle considerazioni teoriche si forniscono delle simulazioni eseguite col calcolatore per verificare il corretto funzionamento dei modelli.

## 2 Controllo di posizione ( $C_c$ disturbo variabile)

Si considerano come ingressi variabili nel tempo la tensione  $V$  e il disturbo che agisce in forma del tutto casuale e sconosciuta  $C_c$ , sarà compito del compensatore attenuare l'influenza del disturbo (almeno in una banda di frequenze prestabilita), l'uscita è rappresentata da  $\vartheta$  e si assume la seguente simbologia:

$$u(t) = V \quad n(t) = C_c \quad y(t) = \vartheta$$

Si può scrivere ora l'equazione per il circuito d'armatura che esprime l'equilibrio tra la tensione di alimentazione e le cadute di tensione sulla resistenza, l'induttanza e sul motore:

$$u(t) = L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + k\omega(t)$$

Per quanto riguarda la parte meccanica è presente una coppia motrice  $C_m$  proporzionale alla corrente  $i(t)$  che equilibra una coppia resistente  $C_r$  data dal carico  $C_c$ , dall'attrito, proporzionale alla velocità angolare  $\omega$  e dall'inerzia, proporzionale all'accelerazione angolare, in simboli:

$$C_m = ki(t) \quad C_r = J \frac{d\omega(t)}{dt} + f\omega(t) + n(t) \quad C_m = C_r$$

Riunendo le equazioni si ottiene un sistema lineare:

$$\begin{cases} u(t) = L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + k\dot{y}(t) \\ C_m = ki(t) \\ C_r = J\ddot{y}(t) + f\dot{y}(t) + n(t) \\ C_m = C_r \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} u(t) = L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + k\dot{y}(t) \\ i(t) = \frac{J}{k}\ddot{y}(t) + \frac{f}{k}\dot{y}(t) + \frac{n(t)}{k} \end{cases}$$

Si può ora scrivere la relazione SISO sostituendo l'espressione di  $i(t)$  nella prima equazione:

$$\frac{LJ}{k}\ddot{y}(t) + \left(\frac{Lf + RJ}{k}\right)\dot{y}(t) + \left(\frac{Rf + k^2}{k}\right)y(t) = u(t) - \frac{L}{k}\dot{n}(t) - \frac{R}{k}n(t) \quad (1)$$

nella precedente espressione si sono riuniti gli ingressi del sistema a destra dell'uguaglianza. Si considera ora il segnale  $m(t)$  che costituisce l'ingresso complessivo che agisce sul sistema:

$$m(t) = u(t) - \frac{L}{k}\dot{n}(t) - \frac{R}{k}n(t)$$

e passando alle trasformate di Laplace, considerando condizioni iniziali nulle:

$$M(s) = U(s) - \frac{Ls}{k}N(s) - \frac{R}{k}N(s) = U(s) + H(s)N(s) \quad \text{con} \quad H(s) = -\left(\frac{Ls + R}{k}\right)$$

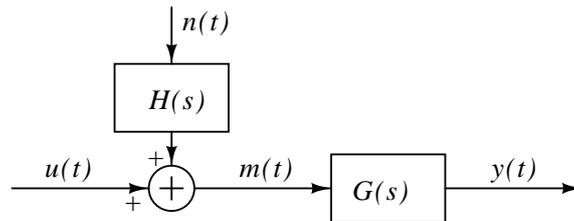
si riscrive ora la (1) con l'ingresso complessivo  $m(t)$ :

$$\frac{LJ}{k}\ddot{y}(t) + \left(\frac{Lf + RJ}{k}\right)\dot{y}(t) + \left(\frac{Rf + k^2}{k}\right)y(t) = m(t)$$

dalla quale si ottiene la funzione di trasferimento che coinvolge l'uscita  $y(t)$ :

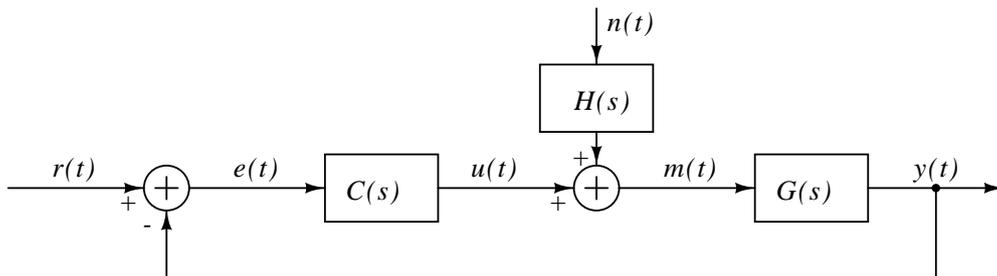
$$G(s) = \frac{Y(s)}{M(s)} = \frac{k}{s[LJs^2 + (Lf + RJ)s + (Rf + k^2)]} \quad (2)$$

Lo schema a blocchi seguente riassume la rappresentazione del sistema a catena aperta.



## 2.1 Retroazione e compensatore

Partendo dallo schema appena trovato si attua una retroazione negativa e si introduce un blocco compensatore  $C(s)$  liberamente progettabile ottenendo il nuovo schema a blocchi:



Sfruttando la linearità del sistema si fanno agire separatamente i due ingressi  $r(t)$  e  $n(t)$ , il primo determinato, il secondo incognito, e si calcola la funzione di trasferimento per ognuno.

Annullando il disturbo  $n(t)$  si ottiene la classica espressione per un sistema retroazionato:

$$Y_r(s) = \frac{G(s)C(s)}{1 + G(s)C(s)}R(s) = W(s)R(s)$$

mentre la risposta del sistema sollecitato esclusivamente da  $n(t)$  è la seguente:

$$Y_n(s) = \frac{G(s)H(s)}{1 + G(s)C(s)}N(s) = W(s)\frac{H(s)}{C(s)}N(s)$$

Sovrapponendo i due effetti si ottiene la risposta totale dipendente da entrambi gli ingressi:

$$Y(s) = Y_r(s) + Y_n(s) = W(s) \left[ R(s) + \frac{H(s)}{C(s)}N(s) \right] = W(s)R(s) + F(s)N(s) \quad (3)$$

Si osserva che l'azione del disturbo è "pesata" dalla FDT  $F(s) \stackrel{def}{=} W(s)\frac{H(s)}{C(s)}$ , sarà quindi compito del compensatore attenuare l'influenza di  $n(t)$ , almeno in una banda limitata di frequenze.

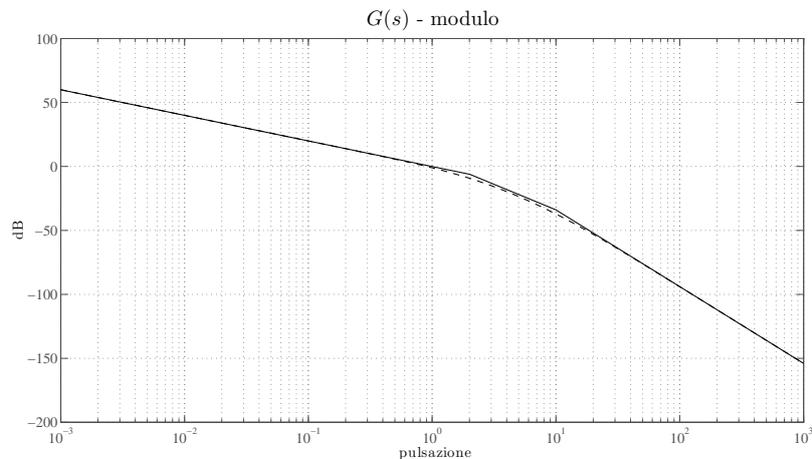
## 2.2 Progetto del compensatore

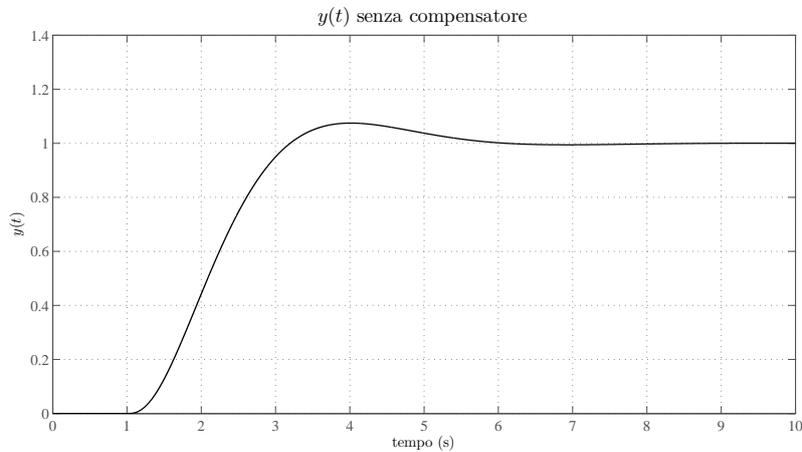
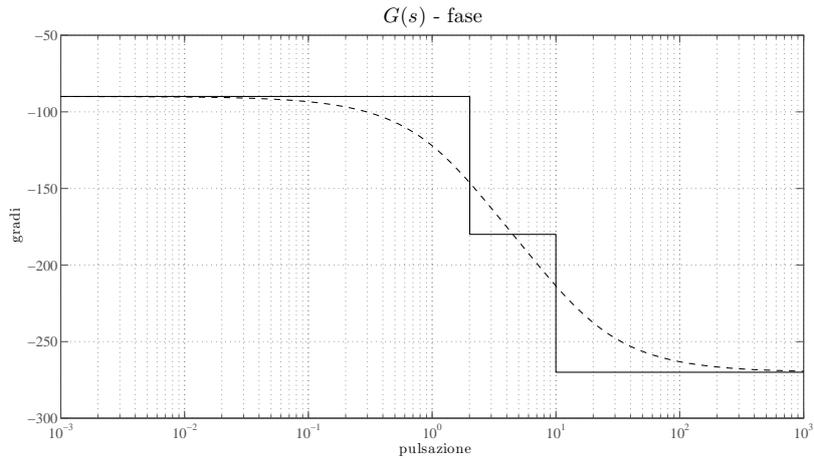
Si procede, in prima battuta, cercando di progettare un compensatore  $C(s)$  che dia una "buona"  $W(s)$  in termini di velocità di risposta, sovralongazioni e tempi di assestamento, all'ingresso  $r(t)$  che corrisponde al gradino causale. In seconda analisi si osserva se tale compensatore soddisfa anche la proprietà di attenuazione del disturbo e in tal caso entro quale banda di frequenze.

Si riporta ora un'espressione numerica della  $G(s)$ , sostituendo i valori dei parametri nella (2) e applicando un arrotondamento alla terza cifra decimale:

$$G(s) = \frac{1}{0.05s^3 + 0.6s^2 + 1.006s} = \frac{1}{s \left( \frac{s}{2.015} + 1 \right) \left( \frac{s}{9.985} + 1 \right)}$$

Dagli andamenti di Bode del modulo e della fase di  $G(s)$  si evince che la pulsazione di attraversamento  $\omega_a \approx 1 \text{ rad/sec}$  e il margine di fase  $\varphi \approx 55^\circ$ , per cui ragionando in modo qualitativo ci si aspetta, dal sistema in retroazione, una risposta al gradino con delle sovralongazioni non particolarmente accentuate. Di seguito si plottano i diagrammi di Bode e la risposta al gradino che conferma le previsioni fatte.





Si può osservare che la  $G(s)$  presenta un polo nell'origine, quindi se la chiudiamo in retroazione, l'errore a regime della risposta al gradino è nullo. Si propongono di seguito due possibili compensatori  $C_1(s)$  e  $C_2(s)$ . Il primo è costituito solo da una coppia zero-polo semplice, il secondo invece si prefigge il compito più ambizioso di introdurre un ulteriore polo nell'origine, al fine di ottenere maggior robustezza ai disturbi costanti<sup>1</sup>, però l'inevitabile peggioramento del margine di fase causato da tale polo deve essere arginato necessariamente da uno zero doppio. Infine entrambi i controllori introducono il medesimo guadagno  $K = 10$ .

$$C_1(s) = 10 \frac{(s+1)}{\left(\frac{s}{1000} + 1\right)} \quad C_2(s) = 10 \frac{(s+1)^2}{s \left(\frac{s}{1000} + 1\right)}$$

Effettuando un'analisi più accurata si nota che lo zero dei controllori è posizionato a pulsazione unitaria in modo da indurre una quasi cancellazione del polo a pulsazione inferiore della  $G(s)$ , mentre il polo ad alta frequenza ha lo scopo di dare una forma propria all'espressione dei compensatori.

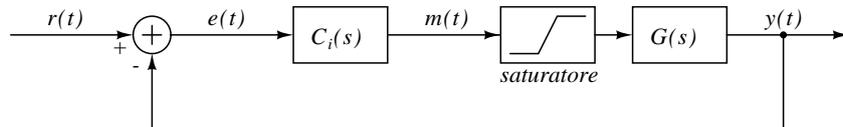
Per evitare di appesantire la trattazione non si riportano i diagrammi di Bode delle

<sup>1</sup>L'integratore nel compensatore  $C_2(s)$  è necessario per annullare gli effetti dei disturbi costanti, in assenza di disturbo basterebbe l'integratore già presente in  $G(s)$

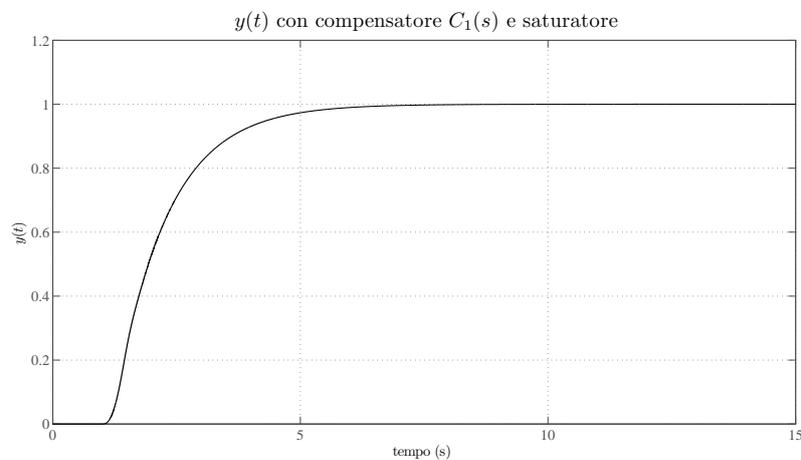
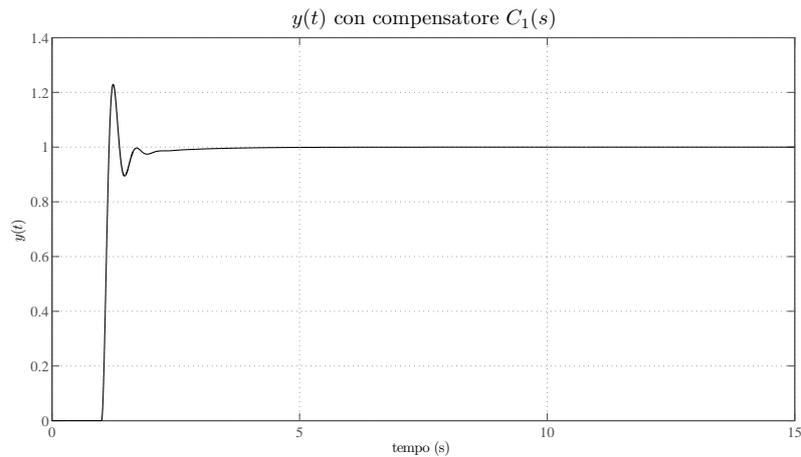
funzioni di trasferimento  $G(s) \cdot C_i(s)$ , ma soltanto i parametri di interesse che se ne possono dedurre, ovvero pulsazione di attraversamento e margine di fase:

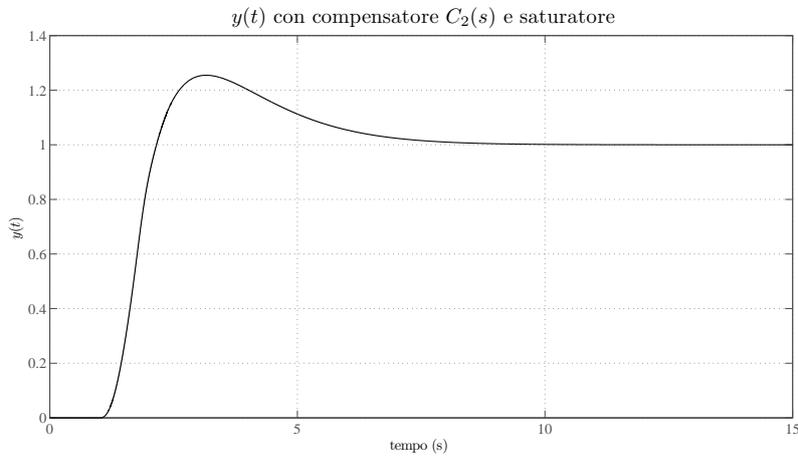
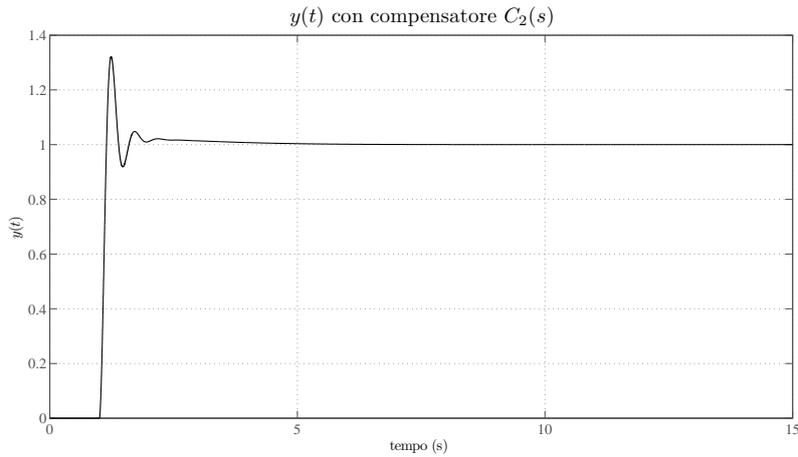
$$\begin{aligned} G(s) \cdot C_1(s) &\implies \omega_{a1} \approx 12.4 \text{ rad/sec} & \varphi_1 &\approx 43^\circ \\ G(s) \cdot C_2(s) &\implies \omega_{a2} \approx 12.3 \text{ rad/sec} & \varphi_2 &\approx 39^\circ \end{aligned}$$

Con lo scopo di avere maggior aderenza con il modello reale del sistema si effettuano le simulazioni introducendo un blocco saturatore in ingresso alla  $G(s)$  che interpreta il comportamento non lineare del sistema in risposta a sollecitazioni troppo elevate. Si adotta la scelta di far intervenire la saturazione quando l'ingresso della  $G(s)$  supera il doppio del riferimento  $r(t)$ , nel caso analizzato quindi il sistema si comporta linearmente solo nell'intervallo di valori  $m(t) \in [-2; 2]$ .



Di seguito si riportano le risposte all'ingresso di riferimento  $r(t)$  pari al gradino causale per entrambi i compensatori  $C_1(s)$  e  $C_2(s)$ . Può essere interessante osservare come il blocco saturatore modifichi l'andamento delle risposte e per tale motivo si riporta il diagramma dell'uscita in presenza e in assenza di saturazione, in seguito, però, tutte le analisi saranno condotte utilizzando il modello con saturazione.





Dagli andamenti si osserva che, in generale, la presenza della saturazione aumenta il tempo che l'uscita impiega per raggiungere il riferimento, ma migliora decisamente il transitorio iniziale. La risposta del sistema con il controllore  $C_2(s)$  presenta una sovraelongazione e un tempo di assestamento maggiore rispetto a quella ottenuta con  $C_1(s)$  che tra l'altro presenta una struttura più semplice, tuttavia si potrà osservare nelle successive analisi la maggior solidità, in risposta ai disturbi, del secondo approccio.

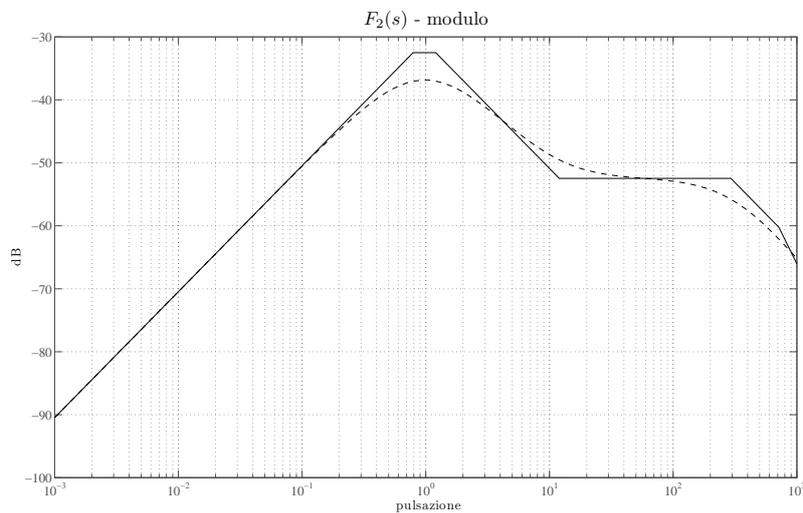
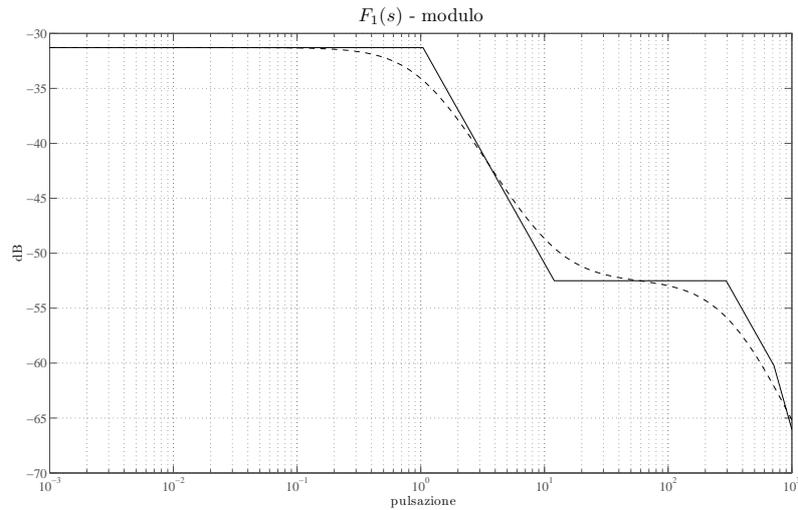
### 2.3 Analisi dell'incidenza del disturbo

Si è raggiunto l'obiettivo di progettare un compensatore che induca un transitorio accettabile nella risposta al gradino. Si analizza ora l'incidenza del disturbo  $n(t)$  sul sistema. Dalla (3) si ottengono le seguenti espressioni numeriche per la FDT  $F_i(s)$ :

$$F_1(s) \stackrel{def}{=} W(s) \frac{H(s)}{C_1(s)} = \frac{-1.25 \cdot 10^{-6} s^4 - 0.00128 s^3 - 0.03021 s^2 - 0.2055 s - 0.3018}{2.5 \cdot 10^{-6} s^5 + 0.00256 s^4 + 0.5605 s^3 + 6.962 s^2 + 17.27 s + 11.07}$$

$$F_2(s) \stackrel{def}{=} W(s) \frac{H(s)}{C_2(s)} = \frac{s(-1.25 \cdot 10^{-6} s^4 - 0.00128 s^3 - 0.03021 s^2 - 0.2055 s - 0.3018)}{2.5 \cdot 10^{-6} s^6 + 0.00256 s^5 + 0.5605 s^4 + 7.462 s^3 + 23.77 s^2 + 27.13 s + 10.06}$$

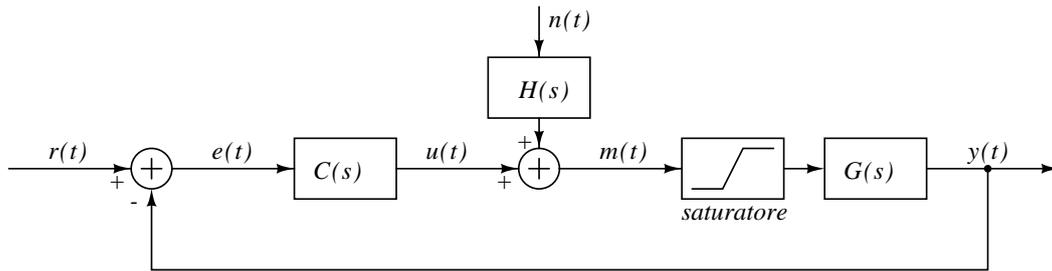
si riporta il modulo del diagramma di Bode per entrambe le espressioni:



Ricordando che  $F_i(s) \stackrel{def}{=} W(s) \frac{H(s)}{C_i(s)}$  è la FDT che pesa il segnale di disturbo  $n(t)$ , si può osservare la netta differenza dei due andamenti. Infatti ora risulta chiara l'importanza del polo nell'origine di  $C_2(s)$  il quale permette di ottenere uno zero nell'origine di  $F_2(s)$ , assicurando così l'insensibilità del sistema ai disturbi a bassa frequenza e al limite costanti, proprietà che non gode il sistema dotato del primo compensatore, anche se comunque l'attenuazione, superiore a 30 dB in bassa frequenza, è certamente ottima.

## 2.4 Simulazioni e considerazioni

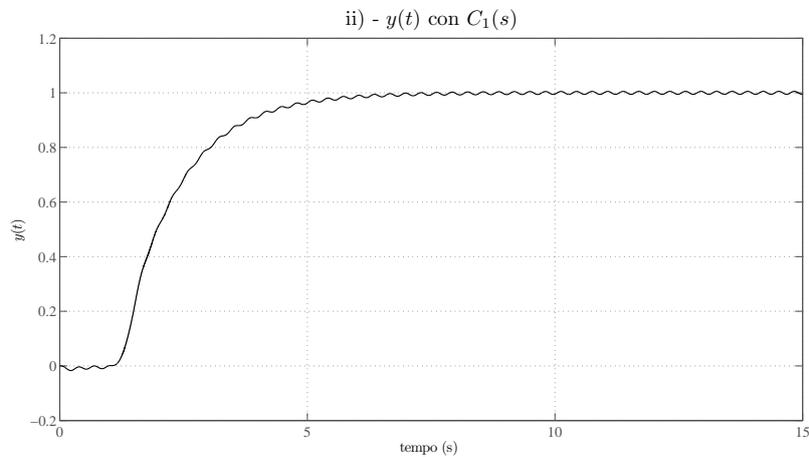
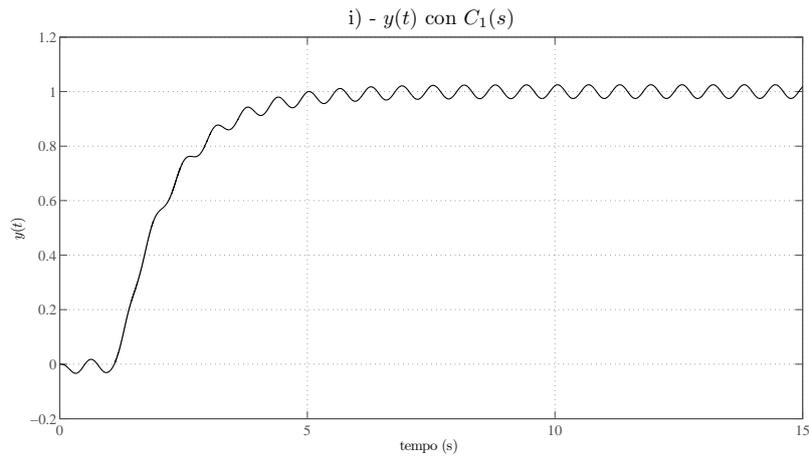
Si eseguono ora delle simulazioni per verificare la veridicità delle deduzioni teoriche. Si considera lo schema a blocchi a catena chiusa già introdotto in precedenza, dotato di saturatore e si assume che il segnale di riferimento  $r(t)$  sia il gradino unitario causale.

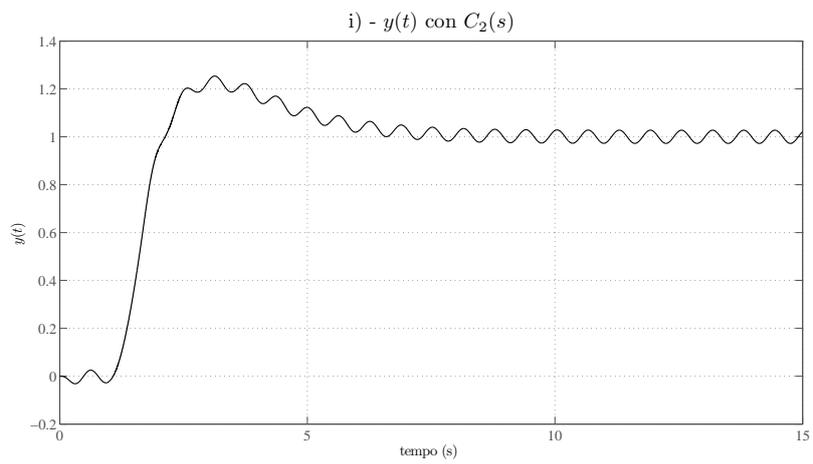
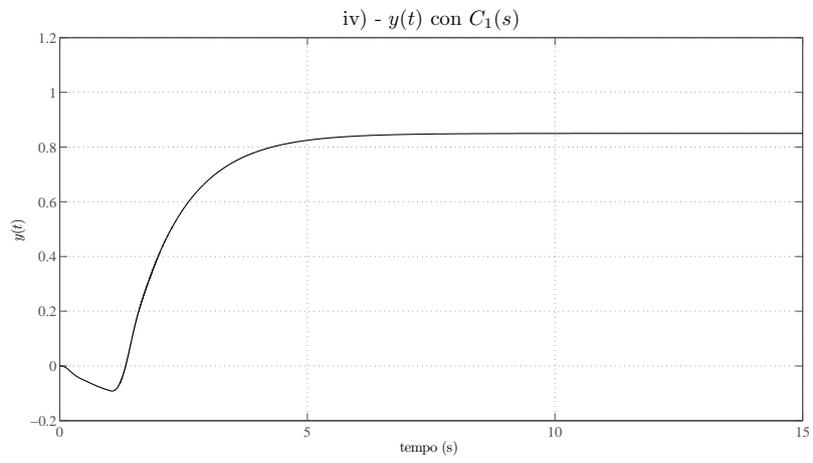
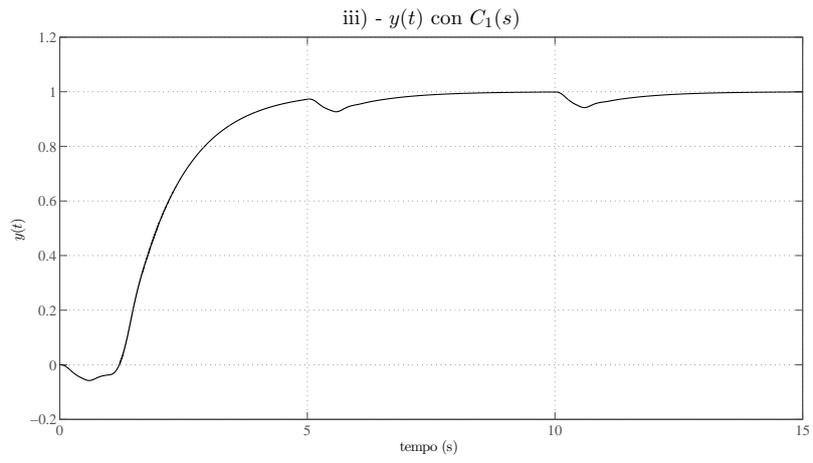


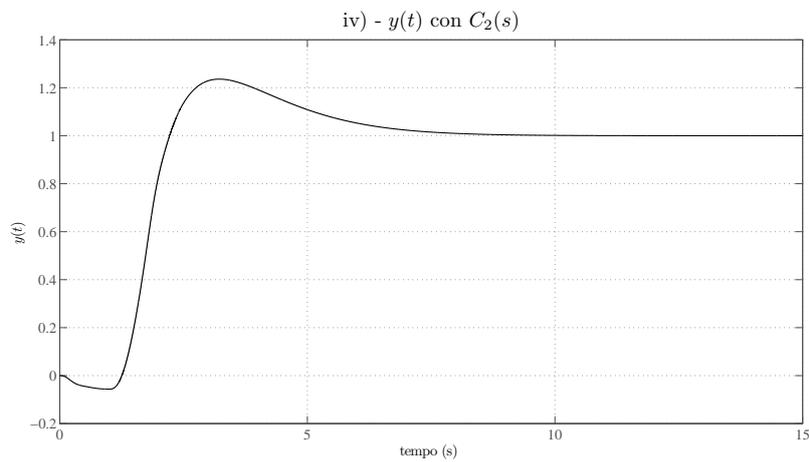
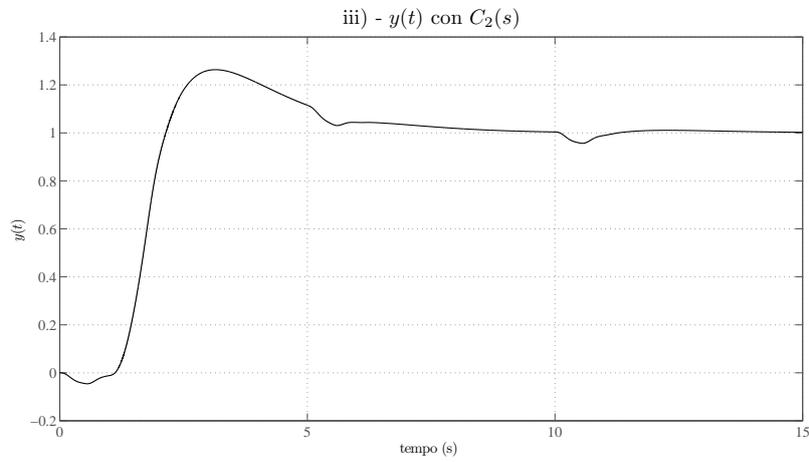
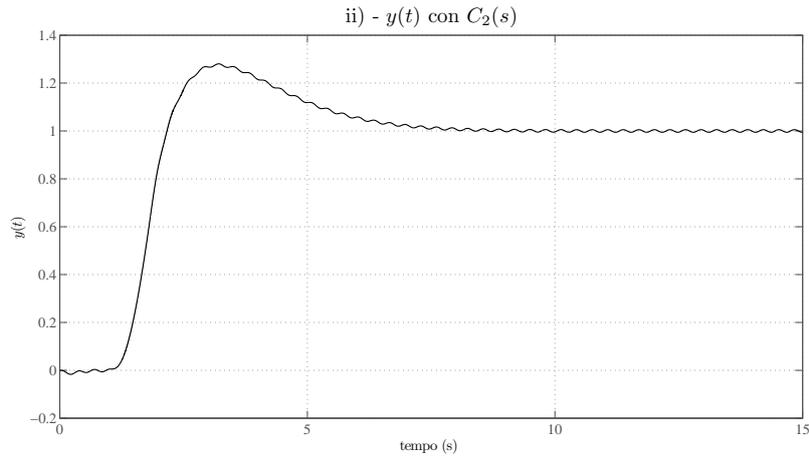
Per entrambi i sistemi, dotati dei due diversi compensatori, si effettuano le seguenti simulazioni al variare del segnale di disturbo  $n(t)$ , nell'ordine:

- i)  $n(t) = 5 \sin(10t)$
- ii)  $n(t) = 5 \sin(20t)$
- iii)  $n(t)$  serie di impulsi di ampiezza 5 con periodo  $T = 5$  secondi e larghezza temporale di ogni impulso pari a  $\frac{T}{10}$
- iv)  $n(t)$  segnale costante ( $\omega = 0 \text{ rad/sec}$ ) di ampiezza 5.

Si simulano di seguito le prestazioni del sistema controllato con  $C_1(s)$  e quelle con  $C_2(s)$  al variare del disturbo  $n(t)$  seguendo, per entrambi, il precedente elenco.







Per il sistema controllato da  $C_1(s)$  è evidente, come era prevedibile, che i disturbi più problematici sono quelli a bassa frequenza, o peggio ancora quelli costanti che non permettono al sistema di raggiungere il valore del gradino a regime. Anche il sistema con  $C_2(s)$  soffre i disturbi con pulsazione vicina all'unità, tale osservazione è confermata dal massimo che presenta l'andamento del modulo di  $F_2(s)$  in prossimità della pulsazione unitaria. Tuttavia è importante notare che il secondo sistema è di

gran lunga più robusto ai disturbi in bassissima frequenza e del tutto insensibile ai disturbi costanti, qualità attribuibile al polo nell'origine di  $C_2(s)$ .

Il sistema complessivo analizzato si presta bene per applicazioni dove il carico sul motore è sconosciuto e variabile (anche repentinamente) nel tempo.

### 3 Controllo di posizione ( $C_c$ parametro nominale)

Si affronta ora il problema di stabilire una relazione SISO, assumendo che la coppia assorbita dal carico  $C_c$  sia un parametro costante e noto. Il progetto del compensatore verrà eseguito considerando un valore nominale di  $C_c$  e in seguito si analizzerà il comportamento del sistema se  $C_c$  si scosta dal valore nominale adottato.

Si indica  $C_c$  attraverso il parametro costante  $\alpha$  e si considera come valore nominale una coppia di carico di  $5 \text{ N} \cdot \text{m}$ :

$$C_c = \alpha \quad C_c \text{ nominale} = \alpha_0 = 5$$

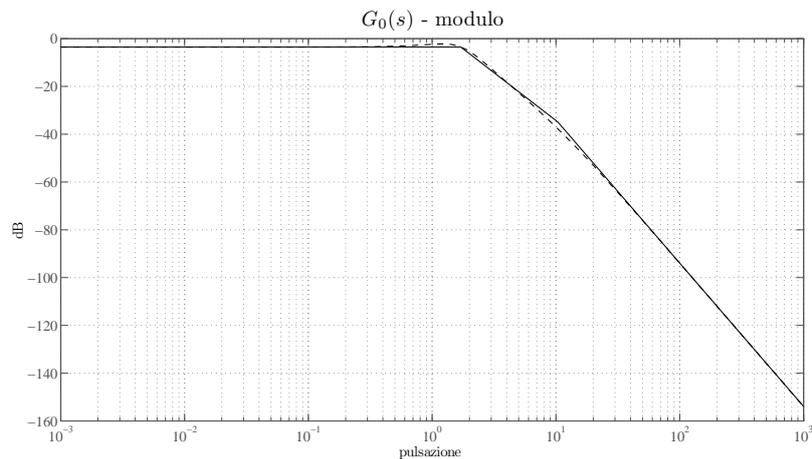
Dalla (1), sostituendo a  $n(t)$  il parametro  $\alpha$ , si può ricavare la funzione di trasferimento a catena aperta dipendente da  $\alpha$ :

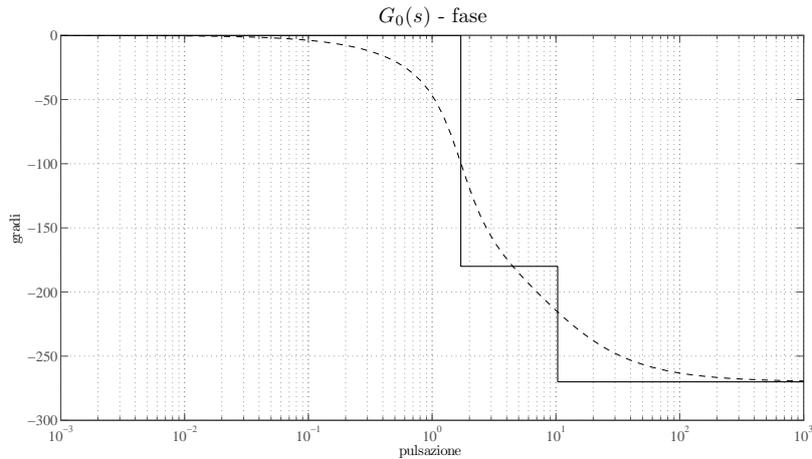
$$G(s, \alpha) = \frac{k}{LJs^3 + (Lf + RJ)s^2 + (Rf + k^2)s + R\alpha}$$

sostituendo i valori numerici e il valore nominale  $\alpha_0$  si ottiene la FDT nominale  $G_0(s)$ :

$$G(s, \alpha_0) \stackrel{\text{def}}{=} G_0(s) \approx \frac{1}{0.05s^3 + 0.6s^2 + 1.006s + 1.5}$$

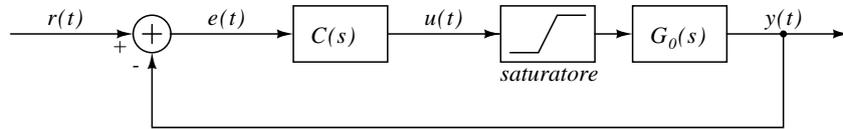
per la quale vengono tracciati i diagrammi di Bode di modulo e fase.





### 3.1 Progetto del compensatore

La retroazione del sistema a catena aperta e l'introduzione di un compensatore risultano essenziali al fine di avere un sistema affidabile e veloce. Si utilizza il classico modello del sistema a blocchi riportato di seguito, dove  $C(s)$  rappresenta il compensatore liberamente progettabile. Anche in questo caso si introduce un blocco che simula la saturazione del sistema per ingressi che superano (in modulo) il doppio del valore del riferimento  $r(t)$ , nel modello analizzato si avrà quindi un comportamento lineare solo nell'intervallo:  $u(t) \in [-2; 2]$ .



Si vuole raggiungere l'obiettivo che il sistema nominale risponda al gradino con errore nullo a regime, tale caratteristica corrisponde necessariamente ad avere un integratore<sup>2</sup> nell'espressione di  $C(s)$ . Si adotta la scelta di posizionare uno zero doppio in corrispondenza della pulsazione unitaria per compensare l'inevitabile peggioramento della fase introdotto dal polo nell'origine. Per il guadagno si adotta  $K = 2$ . Infine viene introdotto un polo in alta frequenza al fine di ottenere un'espressione propria per il compensatore.

$$C(s) = 2 \frac{(s + 1)^2}{s \left( \frac{s}{1000} + 1 \right)}$$

Si riportano i valori approssimati per la pulsazione di taglio  $\omega_a$  e per il margine di fase  $\varphi$  dedotti dall'andamento di Bode di  $G_0(s) \cdot C(s)$ :

$$G_0(s) \cdot C(s) \quad [\alpha = 5] \quad \implies \quad \omega_{a0} \approx 4.1 \text{ rad/sec} \quad \varphi_0 \approx 67^\circ$$

Grazie allo zero doppio che caratterizza il compensatore si riesce ad ottenere un discreto margine di fase, molto superiore a quelli dell'approccio precedente.

<sup>2</sup>A differenza del primo approccio, ora, la funzione di trasferimento introduce il disturbo attraverso il parametro  $R\alpha$  ed è per tale motivo che scompare il termine  $\frac{1}{s}$  nell'espressione di  $G(s, \alpha)$  e quindi obbliga l'inserzione dell'integratore nel controllore  $C(s)$ .

Ora può essere interessante osservare i precedenti valori alla luce dello scostamento del parametro  $\alpha$  dal valore nominale. Dall'analisi delle simulazioni, che saranno mostrate successivamente, si osserva che la coppia di carico  $\alpha$  può variare nell'intervallo  $\alpha \in [0; 6]$ . Si riportano quindi i valori approssimativi della pulsazione di taglio e del margine di fase per i valori limite di  $\alpha$ :

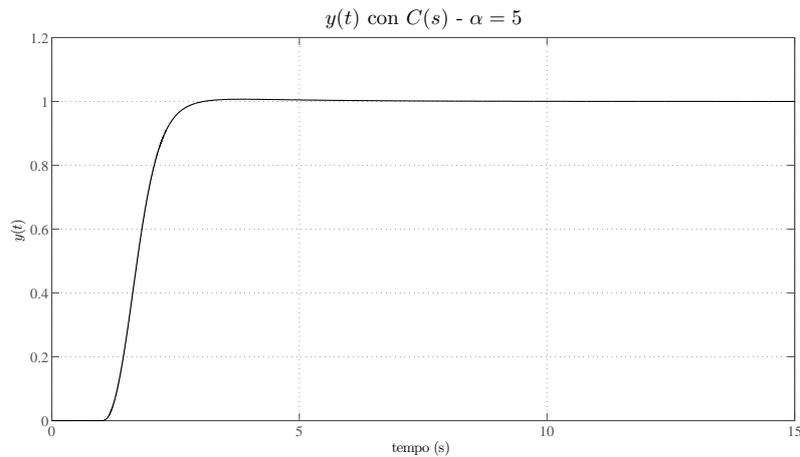
$$\begin{aligned} G(s, \alpha_{min}) \cdot C(s) \quad [\alpha_{min} = 0] &\implies \omega_a \approx 3.53 \text{ rad/sec} & \varphi \approx 68^\circ \\ G(s, \alpha_{max}) \cdot C(s) \quad [\alpha_{max} = 6] &\implies \omega_a \approx 4.25 \text{ rad/sec} & \varphi \approx 66^\circ \end{aligned}$$

Dal momento che i valori dedotti dall'analisi di Bode non si discostano molto da quelli ottenuti col parametro nominale, sembrerebbe che  $\alpha$  possa variare in un intervallo più ampio, tale affermazione però non tiene conto della saturazione all'ingresso del sistema che come si avrà modo di osservare attraverso le simulazioni, non permette il raggiungimento del riferimento per  $\alpha > 6$ .

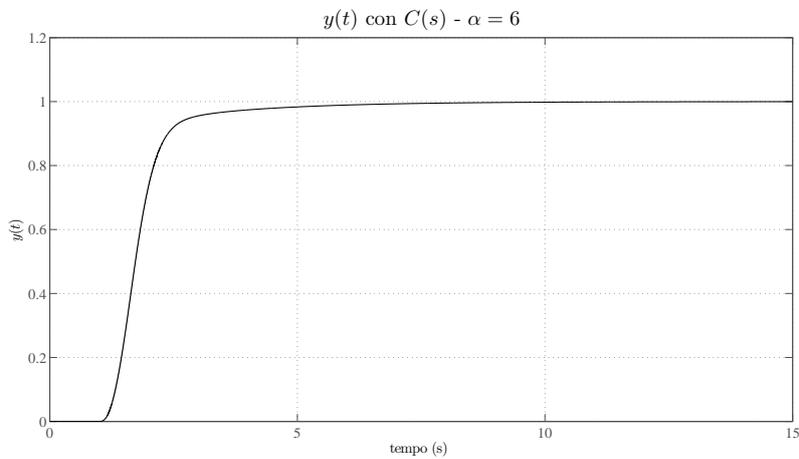
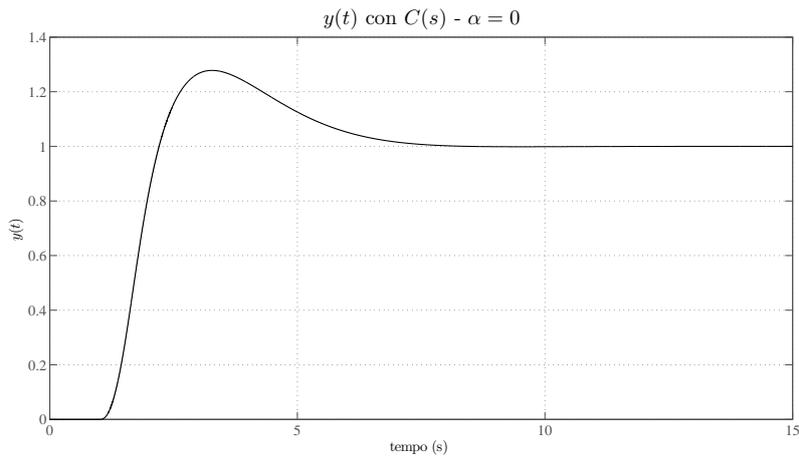
### 3.2 Simulazioni e considerazioni

Si riportano ora gli andamenti delle simulazioni eseguite con il compensatore  $C(s)$  e come ingresso di riferimento il gradino causale,  $r(t) = \delta_{-1}(t)$ .

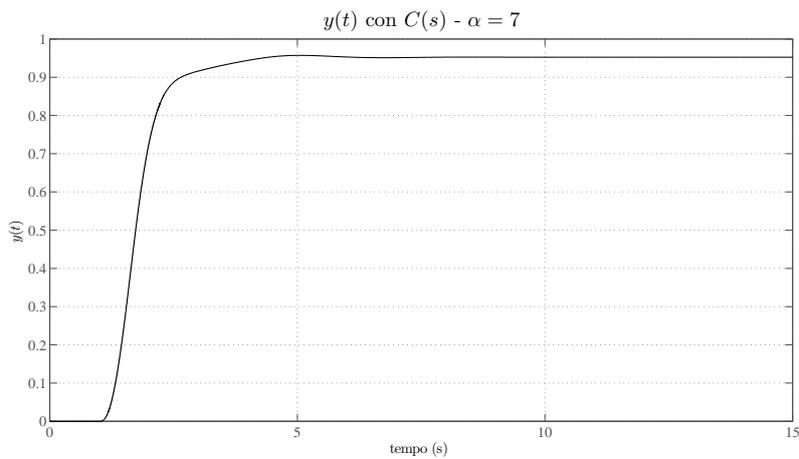
Innanzitutto si analizza la risposta per il valore nominale sul quale è stato ottimizzato il controllore  $C(s)$ :



Con il medesimo sistema, controllato dal compensatore  $C(s)$ , si riportano le simulazioni fatte con i valori  $\alpha_{min} = 0$  e  $\alpha_{max} = 6$  che costituiscono gli estremi dell'intervallo in cui può variare il parametro  $\alpha$ :



Si può osservare che il sistema riesce a raggiungere il riferimento in entrambi i casi limite, si riporta ora la simulazione effettuata con  $\alpha = 7$  ovvero con un valore all'infuori dell'intervallo indicato:



Risulta evidente che l'uscita non riesce a raggiungere il riferimento nel caso  $\alpha = 7$  e in generale con altre simulazioni si vede che la situazione peggiora al crescere di  $\alpha > 6$ .

Tale anomalia non va ricercata nella struttura del compensatore, dal momento che si è visto che i parametri dedotti con l'analisi di Bode variano pochissimo al crescere di  $\alpha$ , invece il problema è sicuramente dovuto alla saturazione<sup>3</sup>. Si osserva infatti che se si aumentano i limiti in cui il sistema opera in modo lineare, il sistema riesce a raggiungere il riferimento anche per valori di  $\alpha$  più elevati, mentre con il limite  $u(t) \in [-2; 2]$  non si riesce ad ottenere il valore a regime richiesto per  $\alpha > 6$ .

## 4 Controllo di velocità ( $C_c$ disturbo variabile)

A differenza del controllo di posizione che è stato affrontato da due punti di vista differenti, per il controllo di velocità si sceglie di riunire l'analisi e di effettuare il progetto sul sistema che ha come ingressi la tensione  $V$  che alimenta il motore e la coppia  $C_c$  che viene considerata come un disturbo in ingresso variabile nel tempo. L'uscita del sistema è ora rappresentata dalla velocità angolare del motore  $\omega$  e si assume la notazione:

$$u(t) = V \quad n(t) = C_c \quad y(t) = \omega$$

Si ripercorrono le stesse considerazioni, fatte nel controllo di posizione, per ricavare le equazioni che regolano il funzionamento del sistema, con l'unico accorgimento che l'uscita  $y(t)$  presenta un grado di derivazione inferiore. Alla luce di questa osservazione si può scrivere subito l'equazione ingresso-uscita facendo riferimento alla (1):

$$\frac{LJ}{k}\ddot{y}(t) + \left(\frac{Lf + RJ}{k}\right)\dot{y}(t) + \left(\frac{Rf + k^2}{k}\right)y(t) = u(t) - \frac{L}{k}\dot{n}(t) - \frac{R}{k}n(t) \quad (4)$$

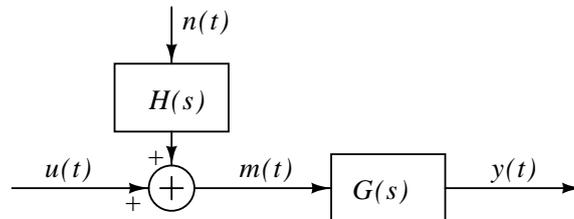
In modo del tutto analogo si definisce il segnale  $m(t)$  come l'ingresso complessivo del sistema che compare al secondo membro della (4) e passando alle Laplace trasformate si riscrivono le relazioni già viste:

$$M(s) = U(s) - \frac{Ls}{k}N(s) - \frac{R}{k}N(s) = U(s) + H(s)N(s) \quad \text{con} \quad H(s) = -\left(\frac{Ls + R}{k}\right)$$

A questo punto, dalla (4) si ottiene la funzione di trasferimento a catena aperta che lega l'ingresso complessivo  $m(t)$  all'uscita  $y(t)$ :

$$G(s) = \frac{Y(s)}{M(s)} = \frac{k}{LJs^2 + (Lf + RJ)s + (Rf + k^2)} \quad (5)$$

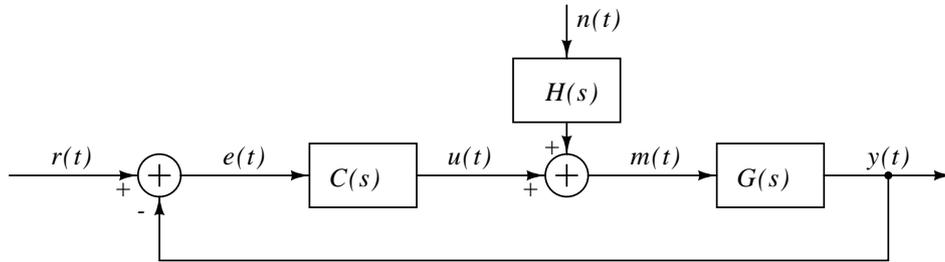
Lo schema a blocchi seguente riassume la rappresentazione del sistema in catena aperta.



<sup>3</sup>Infatti se  $\alpha$  cresce, diminuisce il guadagno di Bode di  $G(s, \alpha)$  che essendo pilotato da un segnale che al massimo in modulo vale 2, non può fornire in uscita valori arbitrariamente grandi.

## 4.1 Retroazione e compensatore

Si procede integrando il sistema con un blocco controllore  $C(s)$  liberamente progettabile e chiudendolo in retroazione negativa.



Per ottenere l'espressione che lega l'uscita  $y(t)$  agli ingressi  $r(t)$  e  $n(t)$ , si opera nel dominio delle trasformate sfruttando la sovrapposizione degli effetti in modo identico a quanto già visto nel controllo di posizione, si riporta quindi solo il risultato finale:

$$Y(s) = W(s)R(s) + F(s)N(s) \quad W(s) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{G(s)C(s)}{1 + G(s)C(s)} \quad F(s) \stackrel{\text{def}}{=} W(s) \frac{H(s)}{C(s)}$$

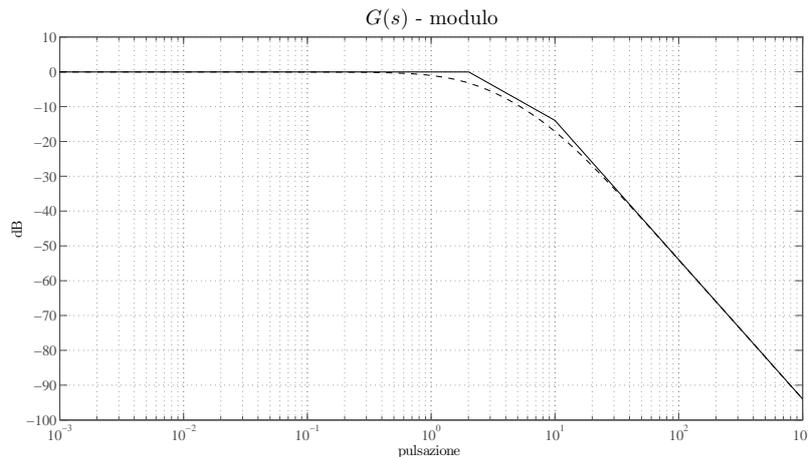
Si sottolinea ancora una volta che  $F(s)$  è la FDT che “pesa” l'azione del disturbo  $n(t)$ .

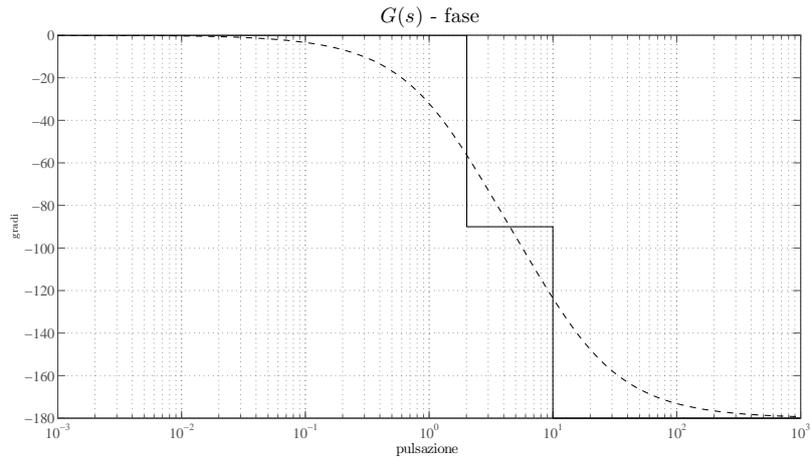
## 4.2 Progetto del compensatore

Si riporta l'espressione numerica della (5) operando un arrotondamento alla terza cifra decimale:

$$G(s) = \frac{1}{0.05s^2 + 0.6s + 1.006} = \frac{1}{\left(\frac{s}{2.015} + 1\right) \left(\frac{s}{9.985} + 1\right)}$$

della quale vengono tracciati i diagrammi di Bode di modulo e fase.





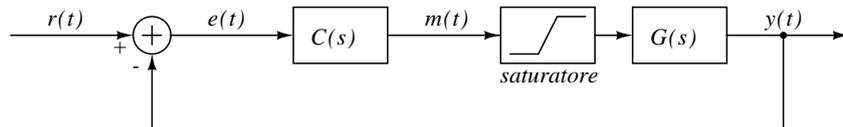
Prima di fare delle considerazioni sulla struttura del compensatore si può affermare che il controllo di velocità del motore risulterà senza dubbio più semplice di quello di posizione dal momento che il grado del denominatore di  $G(s)$  è inferiore rispetto a quello della funzione di trasferimento che lega l'ingresso alla posizione angolare. Alla luce della considerazione precedente ci si pone l'obiettivo di progettare un compensatore semplice, ma allo stesso tempo con buone caratteristiche, tra le quali l'errore nullo a regime e un guadagno adeguato che possa far fronte all'azione del disturbo  $n(t)$ . Viene di seguito proposto un compensatore con un'unica coppia zero-polo, lo zero è posto a frequenza unitaria in modo da ottenere una quasi cancellazione con il primo polo della  $G(s)$ , il polo viene posizionato nell'origine per avere errore nullo a regime, mentre per il guadagno si adotta il valore  $K = 10$ .

$$C(s) = 10 \frac{(s + 1)}{s} \quad (6)$$

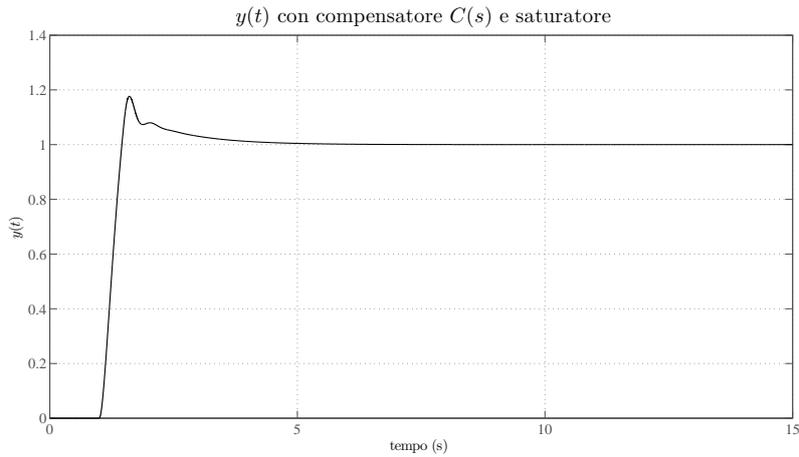
Per tale espressione del compensatore si riportano i parametri di interesse (pulsazione di attraversamento e margine di fase) del tracciamento di Bode della funzione  $G(s) \cdot C(s)$ :

$$G(s) \cdot C(s) \quad \Rightarrow \quad \omega_a \approx 12.4 \text{ rad/sec} \quad \varphi \approx 44^\circ$$

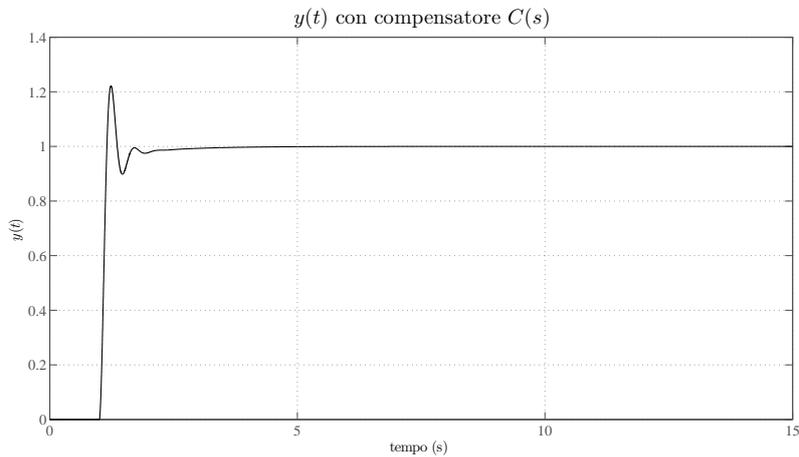
Anche in questo caso si effettua l'analisi introducendo un blocco saturatore all'ingresso di  $G(s)$  che simula l'effetto della saturazione del sistema per ingressi maggiori in modulo al doppio del riferimento, nel caso del gradino unitario quindi se  $m(t) \in [-2; 2]$  il sistema ha un comportamento lineare.



Si riporta ora la simulazione dell'andamento dell'uscita  $y(t)$  del sistema chiuso in retroazione, dotato del compensatore  $C(s)$  e saturatore.



Si traccia anche l'andamento dell'uscita senza il blocco saturatore e si osserva, come era prevedibile, che il tempo di assestamento risulta minore.

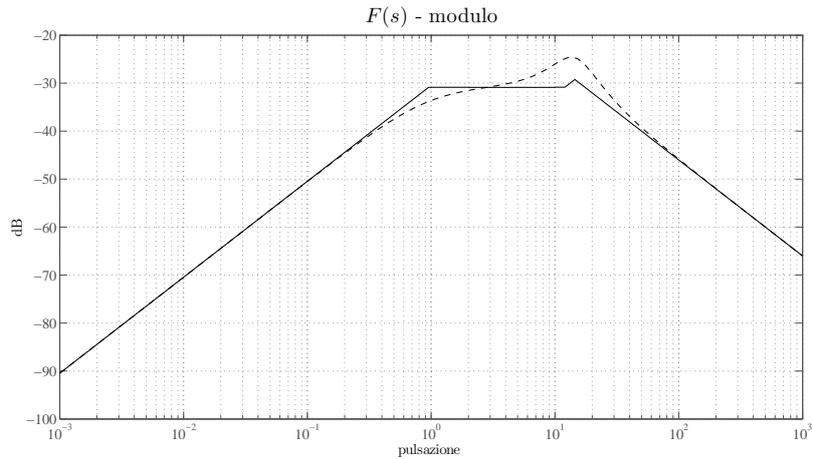


### 4.3 Analisi dell'incidenza del disturbo

Analogamente per come è già stato fatto nel controllo di posizione, si prende ora in considerazione l'incidenza del disturbo  $n(t)$  sul sistema e per fare ciò si analizzano le caratteristiche della funzione di trasferimento  $F(s)$ . Sostituendo i valori numerici si ottiene l'espressione:

$$F(s) \stackrel{def}{=} W(s) \frac{H(s)}{C(s)} = \frac{s(-0.00125s^4 - 0.03s^3 - 0.2051s^2 - 0.3018)}{0.0025s^5 + 0.06s^4 + 0.9606s^3 + 7.707s^2 + 17.07s + 10.06}$$

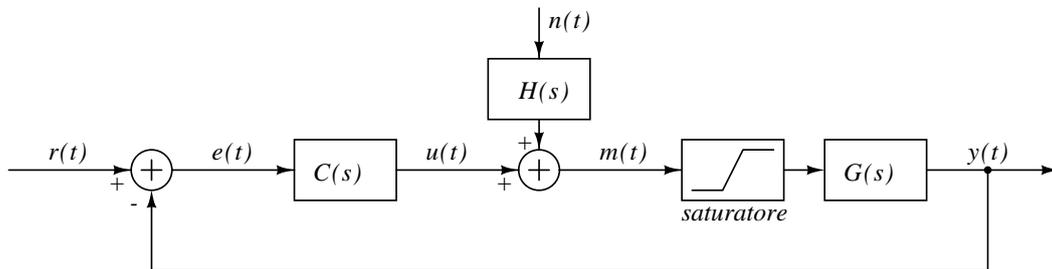
per la quale se ne traccia il modulo di Bode.



Dall'osservazione del diagramma si deduce che il sistema sarà particolarmente sensibile ai disturbi con frequenze in un intorno di  $\omega \approx 10 \text{ rad/sec}$ , mentre per disturbi a basse frequenze e al limite costanti il sistema offre una buona robustezza grazie al polo nell'origine di  $C(s)$  che comporta la presenza dello zero nell'origine di  $F(s)$ .

#### 4.4 Simulazioni e considerazioni

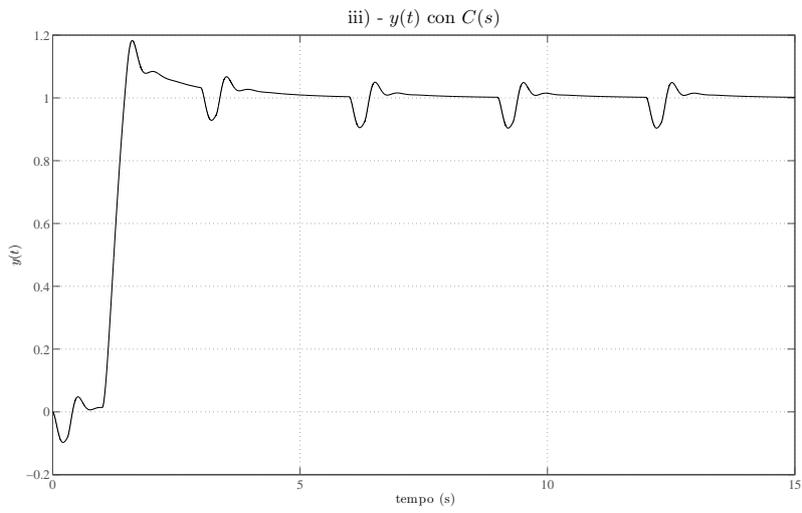
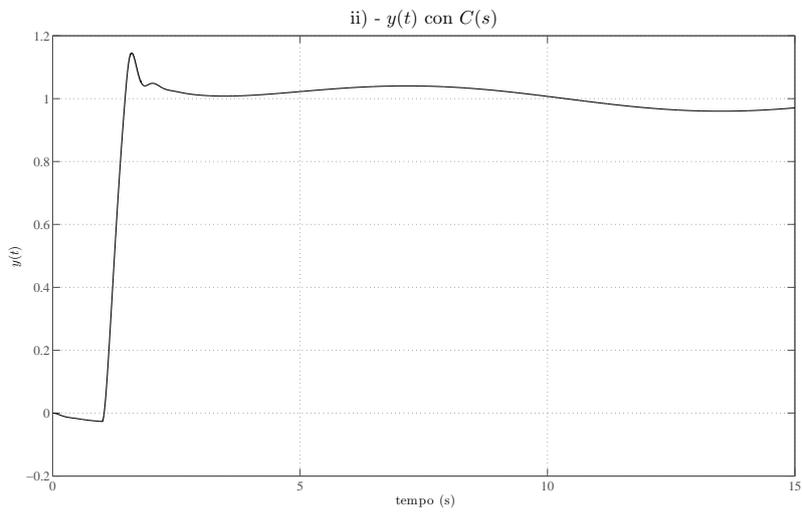
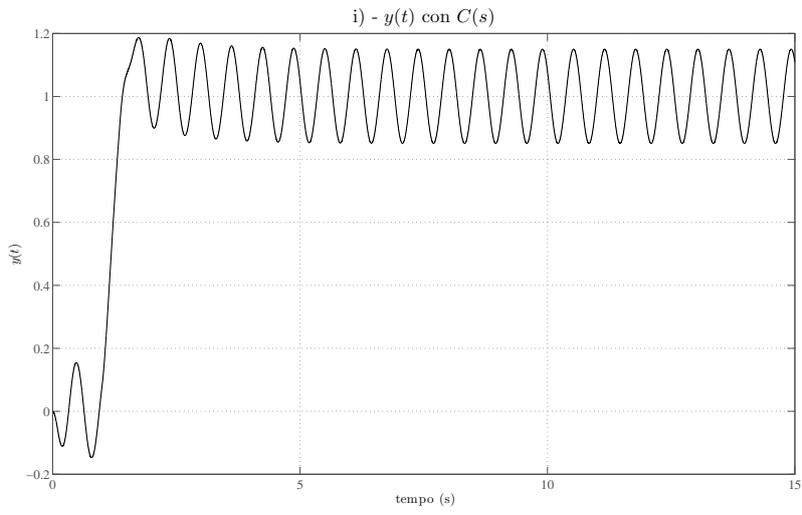
Si conclude l'analisi eseguendo alcune simulazioni del sistema sul quale agisce il disturbo  $n(t)$  come mostra lo schema a blocchi seguente.

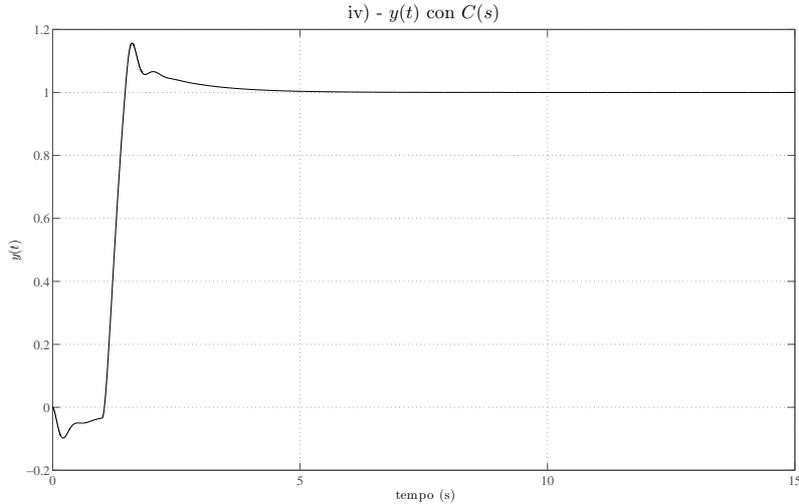


Si effettuano le seguenti simulazioni al variare del segnale di disturbo  $n(t)$ , nell'ordine:

- i)  $n(t) = 3 \sin(10t)$
- ii)  $n(t) = 3 \sin(0.5t)$
- iii)  $n(t)$  serie di impulsi di ampiezza 3 con periodo  $T = 3$  secondi e larghezza temporale di ogni impulso pari a  $\frac{T}{10}$
- iv)  $n(t)$  segnale costante ( $\omega = 0 \text{ rad/sec}$ ) di ampiezza 3.

Di seguito si riportano gli andamenti dell'uscita  $y(t)$  al variare del disturbo  $n(t)$  seguendo il precedente elenco.





Le simulazioni confermano le previsioni fatte, il sistema risulta molto sensibile alla perturbazione con frequenza pari a  $10 \text{ rad/sec}$ , mentre per frequenze più basse la sensibilità è ridotta ed infine disturbi a carattere costante non alterano le prestazioni.

## 5 Controllo di velocità con il modello di stato

In conclusione si implementa l'analisi del controllo di velocità utilizzando il modello di stato equivalente al sistema appena trattato. In particolare si deriva, dalla relazione SISO, la descrizione del modello di stato a tempo continuo, in seguito con una opportuna retroazione dallo stato con la matrice statica di controllo  $K$  si allocano gli autovalori che caratterizzano la risposta al gradino di riferimento.

### 5.1 Derivazione del modello di stato

Ci si pone l'obiettivo di costruire il modello di stato a tempo continuo  $\Sigma = (F, g, H, D)$  a partire dalla relazione SISO rappresentata dalla (4) che descrive il sistema legando la velocità angolare del motore  $y(t)$ , con l'ingresso complessivo  $m(t)$ , comprendente l'ingresso noto  $u(t)$  e il disturbo  $n(t)$  che viene considerato nullo in questa analisi. Partendo dalla funzione di trasferimento  $G(s)$  espressa nella (5) non c'è perdita di generalità se viene riscritta nella forma:

$$G(s) = \frac{\frac{k}{LJ}}{s^2 + \frac{(Lf+RJ)}{LJ}s + \frac{(Rf+k^2)}{LJ}} = \frac{20}{s^2 + 12.01s + 20.114}$$

in questo modo si ottiene una funzione di trasferimento aderente alla seguente forma simbolica caratterizzata dal polinomio al denominatore che presenta il coefficiente direttivo unitario:

$$G(s) = \frac{a}{s^2 + bs + c} \quad (7)$$

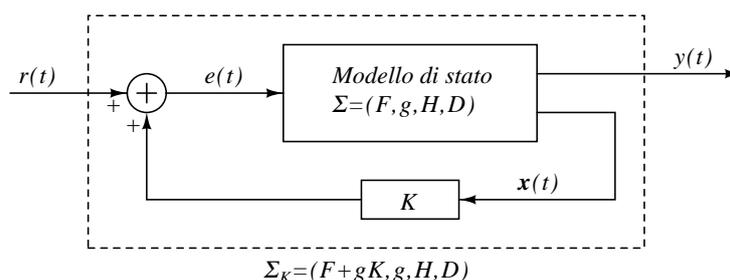
Dal momento che la  $G(s)$  non offre cancellazioni zero-polo, si può affermare che entrambi gli autovalori, ovvero le radici del polinomio al denominatore, sono raggiungibili e quindi il sistema risulta raggiungibile. Dalla precedente considerazione

e sfruttando la scalarità dell'ingresso si possono scrivere immediatamente le matrici che caratterizzano il sistema nella forma canonica di controllabilità:

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -c & -b \end{bmatrix} \quad g = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad H = [a \quad 0] \quad D = 0$$

## 5.2 Retroazione statica dallo stato

Ipotizzando di avere a disposizione il vettore di stato  $\mathbf{x}(t)$  ai morsetti del sistema ci si propone di progettare una matrice statica  $K \in \mathbb{R}^{1 \times 2}$  di controllo che retroaziona lo stato, come mostrato nello schema a blocchi.



Detto  $\Sigma_K$  il sistema retroazionato, scrivendo  $e(t) = r(t) + K\mathbf{x}(t)$  si trovano le equazioni di aggiornamento dello stato e dell'uscita:

$$\Sigma_K \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = (F + gK)\mathbf{x}(t) + gr(t) \\ y(t) = H\mathbf{x}(t) \end{cases}$$

dalla teoria di analisi dei sistemi se  $\Sigma$  è in forma canonica di controllo allora anche  $\Sigma_K$  lo è e si trova che:

$$K = [K_1 \quad K_2] \quad F + gK = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -(c - K_1) & -(b - K_2) \end{bmatrix}$$

e quindi il polinomio caratteristico di  $\Sigma_K = (F + gK, g, H, D)$  presenta la seguente struttura:

$$\Delta_{F+gK}(s) = s^2 + (b - K_2)s + (c - K_1).$$

Ciò dimostra che il polinomio caratteristico del sistema retroazionato può avere una forma dettata dalla scelta arbitraria delle costanti  $K_1$  e  $K_2$  che è equivalente a dire che esiste completa allocabilità degli autovalori.

## 5.3 Osservazioni sul valore a regime dell'uscita

Prima di progettare un possibile controllore statico  $K$  è importante fare alcune considerazioni sul valore a regime dell'uscita  $y(t)$ . Finora abbiamo preteso che  $r(t) - y(t) \approx 0$  per  $t$  abbastanza grande e tale requisito è stato tradotto nell'introduzione dell'integratore nei controllori dinamici proposti.

Con la retroazione statica dallo stato osserviamo che il requisito appena descritto non è soddisfabile. In particolare, scrivendo la funzione di trasferimento del sistema retroazionato sul modello della (7):

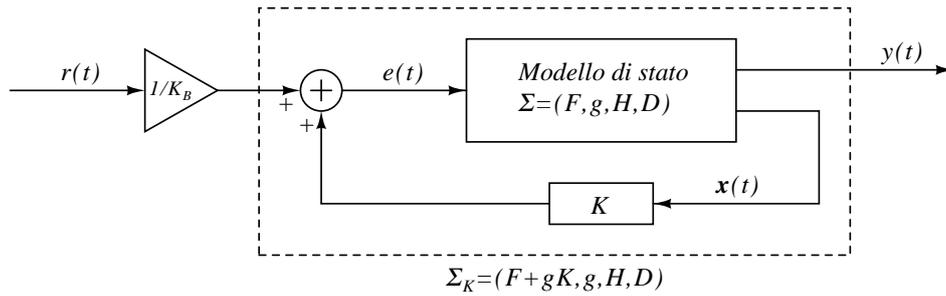
$$G_K(s) = \frac{a}{\Delta_{F+gK}(s)} = \frac{a}{s^2 + (b - K_2)s + (c - K_1)}$$

si osserva che, al termine del transitorio, l'uscita del sistema si assesta sul valore reale

$$K_B \stackrel{def}{=} G_K(0) = \frac{a}{c - K_1} \quad (8)$$

detto guadagno di Bode o guadagno in continua della FDT.

Dal momento che in generale  $K_B \neq 1$  risulta necessario introdurre un guadagno statico pari a  $\frac{1}{K_B}$  sul segnale di riferimento  $r(t) = \delta_{-1}(t)$  al fine di mettersi nella condizione di avere errore nullo nella risposta a regime. Alla luce di quanto detto lo schema a blocchi visto prima subisce la seguente variazione:



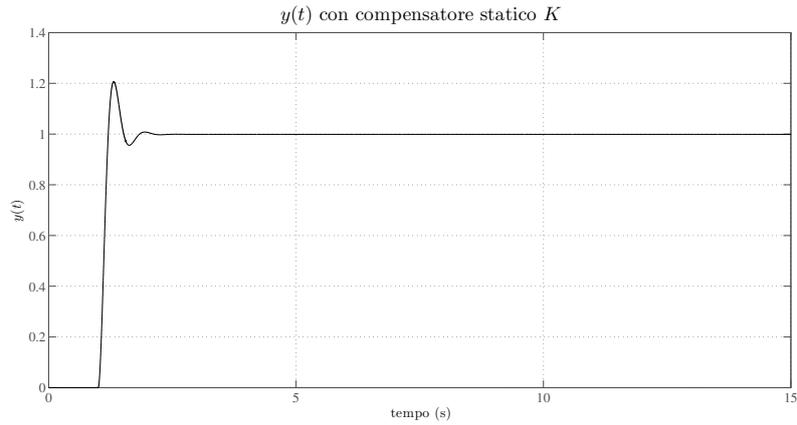
Dalla (8) risulta evidente che il valore di  $K_1$  e i parametri del sistema  $a$  e  $c$  condizionano la scelta del guadagno  $\frac{1}{K_B}$ , quindi se si verificano delle variazioni sensibili di  $a$  e  $c$  dai valori nominali assunti per il progetto il sistema a regime non riesce più a raggiungere il riferimento. Per questo motivo il compensatore dinamico dotato di integratore, seppur di più complicata realizzazione, risulta migliore per quanto riguarda la sensibilità del sistema ai disturbi parametrici.

#### 5.4 Progetto del controllore statico dallo stato

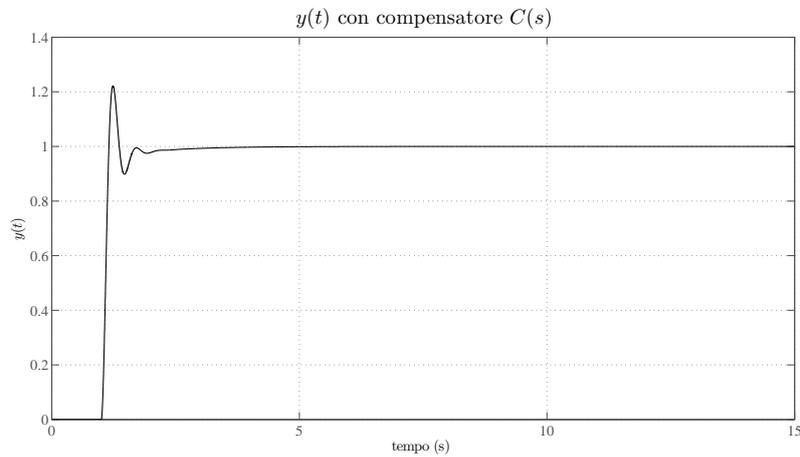
In prima battuta si cerca di ottenere un compensatore statico  $K$  che determina una risposta simile a quella prodotta dal controllore dinamico  $C(s)$  presentato nella (6) senza considerare gli effetti della saturazione. L'andamento ricercato presenta delle sovralongazioni e un tempo di assestamento piuttosto breve, tali considerazioni spingono verso la scelta di una coppia di poli complessi coniugati che, essendo gli autovalori del sistema retroazionato, ovvero le radici del polinomio  $\Delta_{F+gK}(s)$ , determinano immediatamente i parametri  $K_1$  e  $K_2$  che costituiscono il controllore  $K$ . Si assegnano i due autovalori complessi coniugati:

$$\begin{cases} \lambda_1 = -5 + j10 \\ \lambda_2 = -5 - j10 \end{cases} \implies \Delta_{F+gK}(s) = (s - \lambda_1)(s - \lambda_2) \implies \begin{cases} K_1 = -105 \\ K_2 = 2 \\ K_B = 0.16 \end{cases}$$

eseguendo la simulazione con il controllore indicato si ottiene il seguente andamento:



che non si discosta di molto da quello ottenuto col compensatore dinamico della (6) che viene riproposto di seguito:



A questo punto, sfruttando la completa allocabilità degli autovalori, si prova a progettare un secondo controllore  $K'$  che produce una risposta al riferimento senza sovraelongazioni e quindi più regolare. Ciò si traduce nell'allocare due autovalori reali e negativi che costituiscono i poli della FDT.

Similmente a quanto fatto per il primo controllore si assegnano i due autovalori:

$$\begin{cases} \lambda'_1 = -7 \\ \lambda'_2 = -8 \end{cases} \implies \Delta_{F+gK'}(s) = (s - \lambda'_1)(s - \lambda'_2) \implies \begin{cases} K'_1 = -36 \\ K'_2 = -3 \\ K'_B = 0.357 \end{cases}$$

l'andamento dell'uscita presenta un andamento esclusivamente esponenziale come dimostra il seguente diagramma:

