OTTIMIZZAZIONE DI PORTAFOGLIO A TEMPO CONTINUO

Guerra Giovanni

Contents

I INTRODUZIONE **2**

1 Il tema della preferenza **6**
1.1 Elementi di teoria delle decisioni 6
1.2 Classi di funzioni di utilità 11

2 Tecniche di ottimizzazione di portafoglio in tempo discreto **15**
2.1 Nozioni di base 15
2.2 La programmazione dinamica 17
2.3 Il metodo martingala 20

3 Ottimizzazione di portafoglio a tempo continuo **25**
3.1 Nozioni di carattere generale sul calcolo stocastico 25
3.2 Completezza-Assenza di arbitraggio 30
3.3 Programmazione dinamica a tempo continuo ed equazione di HJB 31
3.4 Problema di selezione di portafoglio di Merton 36
3.5 Metodo martingala applicato all'ottimizzazione di portafoglio a tempo continuo 39
3.6 Esempi metodo martingala 43
3.6.1 Esempio con funzione di utilità logaritmica 43
3.6.2 Esempio con funzione di utilità potenza 44

4 Conclusioni **46**

Part I

INTRODUZIONE

INTRODUZIONE

Il problema di selezione di portafoglio è un tema che dal 1952, anno in cui Henry Markowitz pubblicò il suo primo articolo riguardante questo tema [9], ha visto concentrarsi gli sforzi di numerosi studiosi di Economia. Tuttora, per la sua importanza, trova applicazione nella gestione del rischio presso gli istituti di credito.

Il modello di Markowitz si caraterizza essenzialmente per la scelta di un orizzonte temporale uniperiodale e dal fatto che la funzione di utilità dell'agente sia di tipo quadratico o in alternativa, che i rendimenti seguano una distribuzione di tipo normale. I suoi punti di forza sono la semplicità di implementazione dell'algoritmo e la necessità di possedere soltanto i concetti basilari della probabilità, come media e covarianza di variabili casuali.

Un ulteriore miglioramento fu apportato da J. Tobin nel 1958, introducendo la possibilità di investire non solo in titoli rischiosi ma anche in titoli non rischiosi o risk-free.

Il maggior difetto di tale modello consiste nel fatto che, una volta scelto il portafoglio iniziale, non c'è alcuna possibilità di intervento fino alla fine del periodo. Si comprende dunque che si tratta di una semplificazione ecessiva della realtà, che ignora la naturale dinamica dei prezzi.

Successivamente gli aspetti matematici sono diventati via via più consistenti, soprattutto dal momento in cui nella teoria economica si è passati da modelli uniperiodali a tempo discreto, a modelli intertemporali a tempo continuo

I più recenti modelli a tempo continuo permettono a chi investe la possibilità di intervenire ad ogni istante. Vari studiosi, tra cui Pham, hanno cercato di trasportare il criterio media-varianza in un contesto di tempo continuo.

Tuttavia, nel corso degli anni, l'approccio di Markowitz ha subito anche numerose critiche, la più nota è quella di R.Roll (1977) il quale argomenta come il Capital Asset Pricing Model (CAPM) non possa essere oggetto di una verifica empirica per via delle approssimazioni fatte nel portafoglio di mercato. Uno dei punti più contrastati consiste nel fatto che nel criterio media-varianza il rischio viene misurato soltanto in termini di varianza di rendimento del portafoglio. Inoltre la natura simmetrica della varianza ha come conseguenza di contenere non solo le possibili perdite ma anche i possibili guadagni. Per questo si sono presi in considerazione criteri di scelta alternativi in accordo con la teoria dell'utilità attesa di Von Neumann-Morgenstern.

Nell'ambito dell'ottimizzazione di portafoglio a tempo continuo una nuova generazione di studiosi si servì degli strumenti del controllo stocastico, che portarono all'utilizzo del cosidetto metodo della programmazione dinamica. In particolare si distinse il lavoro di R.Merton [6], che ottenne il premio Nobel per l'economia nel 1997. Esso utilizza modelli a tempo continuo, i quali si collegano ai modelli sull'evoluzione di prezzi che erano stati sviluppati nel frattempo (un modello tuttora usato è quello lognormale, secondo il quale il prezzo dell'azione soddisfa un'opportuna equazione differenziale stocastica). L'approccio di Merton si basa appunto sui metodi di controllo stocastico ed egli arriva ad esprimere la condizione di ottimalità di un protafoglio come soluzione di un'equazione alle derivate parziali di second'ordine. Inoltre per garantire il legame intertemporale della soluzione, viene introdotto il concetto di portafoglio autofinanziante, che è un portafoglio in cui le posizioni vengono ribilanciate nel corso del tempo senza aggiungere capitale nè consumare.

L'approccio di Merton, basato sul controllo stocastico, è un approccio che continua ad essere valido anche se è stato affiancato da una tecnica alternativa, il metodo martingala, dovuto in particolare a I.Karatzas negli anni '80 e basato sulla teoria delle martingale e sull'ottimizzazione convessa.

In questa trattazione, che fa riferimento principalmente al lavoro di Pham [3], vengono presentati sia il metodo della programmazione dinamica, sia il metodo martingala.

In dettaglio:

- Nel capitolo 1 si affronterà il tema dei criteri di preferenza e viene richiamata la teoria dell'utilità attesa di Von Neumann-Morgenstern per cui vale il principio secondo il quale la scelta del decisore risulta quella che massimizza l'utilità attesa. Tale principio si applica anche nella scelta ottimale di portafoglio: si cerca di massimizzare l'utilità attesa del rendimento del portafoglio. Vedremo poi che uno dei concetti economico-matematici chiave legati alla teoria delle decisioni è quello di funzione di utilità, che rappresenta un indicatore del grado di soddisfazione di un individuo in conseguenza della disponibilità di un capitale o di un consumo

- Nel capitolo 2 vengono illustrate le caratteristiche principali della programmazione dinamica e del metodo martingala, il tutto chiarito con degli esempi in cui si cerca di massimizzare l'utilità attesa del rendimento del portafoglio.

- Nel capitolo 3 vengono richiamate le nozioni principali relative al calcolo stocastico nel contesto della programmazione dinamica a tempo continuo e ne viene mostrata l'applicazione al problema di Merton [6]: gestire un portafoglio in modo da rendere massima la speranza matematica dell'utilità finale di questo portafoglio. Infine, viene presentato l'approccio al problema secondo il metodo martingala, metodo che trae le sue origini dal problema della replicazione di un derivato e si fonda sulla constatazione che, in assenza di arbitraggio, esistono delle misure di probabilità equivalenti rispetto alle quali i prezzi dei vari titoli rischiosi scontati rispetto al titolo localmente non rischioso, costituiscono delle martingale.

Chapter 1

Il tema della preferenza

1.1 Elementi di teoria delle decisioni

In questo capitolo viene descritto il comportamento di un investitore in condizioni di incertezza infatti, lo studio delle decisioni ha una lunga tradizione soprattutto in economia, dove le scelte degli agenti economici sono state studiate con una molteplicità di modelli teorici e di metodologie. La teoria economica che ha rappresentato per lungo tempo il modello centrale di analisi delle decisioni in condizioni di incertezza è la teoria dell' Utilità Attesa proposta da Von Neumann e Morgenstern.

In questa parte viene affrontato il tema dei criteri di preferenza e viene richiamata la teoria sopra citata (per tale trattazione si farà riferimento agli appunti di A. Nicolò [1]).

In un mercato finanziario gli investitori si trovano ad operare in condizioni di incertezza, ovvero in situazioni nelle quali le conseguenze delle decisioni da prendere non sono certe. Queste decisioni riguardano in generale forme alternative di impiego del risparmio che si caratterizzano per la diversità di rendimento e di rischio. La teoria dell'utilità attesa descrive e studia le preferenze individuali sottostanti il comportamento dell'investitore, che devono essere esplicitate per l'individuazione della strategia ottimale. Una delle ipotesi alla base del modello consiste nell'assunzione che l'investitore conosca la distribuzione di probabilità che accompagna il verificarsi di un evento incerto e conosca di conseguenza anche la distribuzione di probabilità che caraterizza il rendimento associato al verificarsi di un evento incerto (d'ora in poi indicheremo con X la $v.a.$ indicante il rendimento) in un qualche spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Si assume inoltre che la relazione $\succcurlyeq$, che indica le preferenze dell'investitore, rispetti i seguenti assiomi:

- Totalità: $\forall\ X_1, X_2,\ X_1 \succcurlyeq X_2 \vee X_2 \succcurlyeq X_1$;
- Transitività: $\forall\ X_1, X_2, X_3,\ (X_1 \succcurlyeq X_2 \wedge X_2 \succcurlyeq X_3) \Longrightarrow X_1 \succcurlyeq X_3$;
- Riflessività: $X_1 \succcurlyeq X_1$
- Continuità: $\forall\, X_1, X_2, X_3$, gli insiemi $\{\alpha \in [0,1] \mid \alpha X_1 + (1-\alpha)X_2 \succcurlyeq X_3\}$ e $\{\alpha \in [0,1] \mid X_3 \succcurlyeq\ \alpha X_1 + (1-\alpha)X_2\}$ sono chiusi;
- Indipendenza: $\forall\ X_1, X_2, X_3$ e $\forall \alpha \in (0,1)$, $X_1 \succcurlyeq X_2 \Longleftrightarrow \alpha X_1 + (1-\alpha)X_3 \succcurlyeq \alpha X_1 + (1-\alpha)X_3$

In particolare, l'assioma di continuità, implica che un soggetto posto difronte ad un' alternativa in cui può ottenere con certezza un dato risultato oppure avere una distribuzione di probabilità che dia con probabilità α l'evento migliore e con $1-\alpha$ l'evento peggiore, sia sempre in grado di indicare la probabilità α che lo renda indifferente tra le due alternative; Mentre l'assioma di indipendenza chiede che un soggetto basi le sue scelte solo sulle parti diverse di due lotterie.

I primi tre assiomi garantirebbero, da soli, l'esistenza di una funzione che rappresenta le preferenze; tuttavia essa potrebbe risultare intrattabile, per cui viene aggiunto anche l'assioma di indipendenza. Una siffatta funzione viene detta funzione di utilità

Definition 1 *Sia I intervallo reale $]a, +\infty[$ dove $a \leq 0$ costante fissata, eventualmente $a = -\infty$. Una funzione di utilità è una funzione di classe C^1*

$$U : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

che è strettamente concava e strettamente crescente.

Per convenzione si usa estendere il dominio di una funzione d'utilità U a tutto $\mathbb{R}$ ponendo

$$U(v) = -\infty \text{ per } v \leq a$$

nel seguito assumeremo anche la seguente ipotesi di carattere tecnico:

$$\begin{aligned} \text{nel caso } a &> -\infty, \text{ vale } \lim_{v \longrightarrow a^+} U^{'}(v) = +\infty \\ \text{nel caso } a &= -\infty, U \text{ è superiormente limitata} \end{aligned}$$

In particolare, una relazione di preferenza $\succcurlyeq$ che sia un preordine totale (riflessiva, transitiva e totale) soddisfa gli assiomi di continuità e indipendenza se e solo se esiste una funzione di utilità U tale che

$$X_1 \succcurlyeq X_2 \Longleftrightarrow \mathbb{E}\left[U(X_1)\right] \geqslant \mathbb{E}\left[U(X_2)\right]$$

Dove $\mathbb{E}\left[U(X)\right]$ rappresenta l'utilità della lotteria X.

In tal caso la relazione $\succcurlyeq$ si dice coerente con la teoria di Von Neumann Morgestern. La crescenza della funzione di utilità equivale all'assunzione che gli individui preferiscono sempre avere una ricchezza maggiore che una minore.

Avendo definito una funzione di utilità possiamo definire alcuni concetti relativi al rischio:

- **Avversione al rischio**

  Un agente economico può assumere diversi atteggiamenti difronte al rischio: avversione, neutralità o propensione. Nella nostra trattazione prenderemo in considerazione solamente soggetti avversi al rischio. Si parla di avversione al rischio se un investitore preferisce sempre ottenere con certezza il valore atteso di una data quantità aletoria rispetto alla quantità aletoria stessa. Matematicamente tale atteggiamento si esprime come

  $$U(\mathbb{E}\left[X\right]) \geqslant \mathbb{E}\left[U(X)\right]$$

  ciò accade se e solo se U è una funzione concava (allo stesso modo, la propensione e la neutralità al rischio risulteranno equivalenti rispettivamente alla convessità e alla linearità della funzione di utilità). Tale proprietà di concavità implica che, una volta scelta una variabile casuale rendimento X che assuma il valore x con probabilità $\lambda \in (0, 1)$ e x' con probabilità $1 - \lambda$, sia verificata la disuguaglianza

  $$U(\lambda x + (1 - \lambda)x') \geqslant \lambda U(x) + (1 - \lambda)U(x')$$

  Per quanto detto sopra, il grado di avversione al rischio di un agente economico può essere facilmente quantificato mediante il coefficiente assoluto di avversione al rischio di Arrow-Pratt

  $$\alpha(x) = -\frac{U''(x)}{U'(x)}$$

Con una piccola modifica, si ottiene invece il coefficiente relativo di avversione al rischio, dato da

$$\beta(x) = -x\frac{U''(x)}{U'(x)}$$

Mentre nel primo caso il valore risulta indipendente dall'unità di misura adottata, il secondo coefficiente, a causa della presenza del fattore x, risente dell'unità di misura scelta. Le proprietà di tali indici sono alla base di una famosa classificazione delle funzioni di utilità che vedremo più in dettaglio nella prossima sezione 1.2.

- **Premio per il rischio**

  Si definisce premio per il rischio associato alla variabile casuale rendimento X l'importo $\pi = \pi(X)$ che un individuo è disposto a versare per guadagnare con certezza $\mathbb{E}[X]$ anzichè X. In altri termini, il premio per il rischio misura quanto l'individuo è disposto a pagare per eliminare il rischio della scelta. Esso è definito dall'equazione

  $$U(\mathbb{E}[X] - \pi) = \mathbb{E}[U(X)]$$

  dove la quantità $\mathcal{E}(X) = \mathbb{E}[X] - \pi$ è chiamata equivalente certo di X in quanto rappresenta il guadagno certo che l'individuo considera equivalente alla variabile X. Il premio per il rischio è dato quindi dalla differenza tra il valore atteso di X e l'equivalente certo. Com'è facilmente intuibile, il valore del premio per il rischio dipende dalla forma della funzione di utilità, maggiore è il premio per il rischio e più avverso al rischio risulta essere l'individuo.

Si supponga che il rendimento del portafoglio X sia soggetto ad un rischio non molto elevato tale per cui sia giustificata la seguente approssimazione (poniamo $\mu := \mathbb{E}[X]$ per semplificare la notazione):

$$U(X) \approx U(\mu) + (X-\mu)U'(\mu) + \frac{1}{2}(X-\mu)^2 U''(\mu)$$

Passando al valor medio otteniamo:

$$\mathbb{E}[U(X)] \approx U(\mu) + \frac{1}{2}\mathbb{V}(X)U''(\mu)$$

Dall'ulteriore approssimazione

$$U(\mathcal{E}(X)) \approx U(\mu) + (\mathcal{E}(X) - \mu)U'(\mu)$$

ricaviamo che

$$\pi(X) \approx -\frac{1}{2}\mathbb{V}(X)\frac{U''(\mu)}{U'(\mu)}$$

$$\mathcal{E}(X) \approx \mu - \frac{1}{2}\alpha(\mu)\mathbb{V}(X)$$

dove $\alpha(x)$ è il coefficiente assoluto di avversione al rischio di Arrow-Pratt al livello di ricchezza x. Ne deriva quindi che in prima approssimazione la varianza del rendimento si può considerare un indice della rischiosità dell'investimento e il coefficiente $\alpha(x)$ una misura dell'importanza del rischio per un agente economico con funzione di utilità U.

Scriviamo ora il rendimento casuale X come $X = \mu(1+\epsilon)$, dove ϵ rappresenta l'utile relativo di X rispetto μ (che a priori può anche essere negativo) e definiamo ρ, ovvero il premio relativo per il rischio di X, tramite l'equazione

$$U(\mu(1-\rho)) = \mathbb{E}[U(X)] = \mathbb{E}[U(\mu(1-\rho))]$$

Esso può essere interpretato come la proporzione di $\mathbb{E}[X]$ che l'investitore è disposto a pagare per ottenere un guadagno certo. Analogamente a prima, otteniamo le seguenti approssimazioni:

$$U(X) \approx U(\mu) + (X-\mu)U'(\mu) + \frac{1}{2}(X-\mu)^2U''(\mu);$$

$$\mathbb{E}[U(X)] \approx U(\mu) + \frac{1}{2}\mathbb{V}(X)U''(\mu)$$

$$U(\mu(1-\rho) \approx U(\mu) - \mathbb{E}[X]\rho U'(\mu)$$

Dall'uguaglianza $U(\mu(1-\rho) = \mathbb{E}[U(X)]$ e dal fatto che $\mathbb{V}(X)= \mathbb{V}(\mu(1+\epsilon)) = \mu^2\mathbb{V}(\epsilon)$ in definitiva risulta quindi che

$$\rho \approx \frac{1}{2}\beta(\mu)\mathbb{V}(\epsilon)$$

dove $\beta(x)$ è il coefficiente relativo di avversione al rischio.

1.2 Classi di funzioni di utilità

Come già anticipato, le funzioni di utilità vengono spesso classificate in base ai loro coefficienti di avversione al rischio assoluti e relativi. Nel caso di avversione assoluta al rischio possiamo suddividere le funzioni di utilità nelle seguenti categorie:

- Funzioni di utilità con avversione assoluta al rischio costante o CARA (costant Absolute Risk Aversion), se $\alpha(x)$ risulta essere costante rispetto a x;
- Funzioni di utilità con avversione al rischio decrescente o DARA (Decreasing Absolute Risk Aversion), se $\alpha(x)$ è funzione decrescente in x;
- Funzioni di utilità con avversione al rischio crescente o IARA (Increasing Absolute Risk Aversion), se $\alpha(x)$ è funzione crescente in x;

Nel caso di funzioni di utilità CARA, dall'osservazione che il coefficiente assoluto di avversione al rischio si possa esprimere come $\alpha(x) = -(\ln(U'(x)))'$ discende che

$$U(x) = a - be^{-\alpha x}$$

e tramite una trasformazione affine si può giungere alla forma

$$U(x) = 1 - e^{-\alpha x}$$

L'ipotesi di DARA è di norma giustificata dal riscontro di un attegiamento più spregiudicato da parte degli individui che dispongono di una maggiore ricchezza.

Una classe di funzioni di utilità, di notevole rilevanza in ambito teorico è la classe HARA (Hyperbolic Absolute Risk Aversion), ovvero funzioni di utilità con avversione al rischio iperbolica, di cui la forma generale è la seguente:

$$U(x) = \frac{1-\gamma}{\gamma}\left[\frac{ax}{1-\gamma} + b\right]^{\gamma},\ b > 0$$

Per quanto riguarda il coefficiente relativo di avversione al rischio, particolare importanza rivestono le funzioni CRRA (Costant Relative Risk Aversion) con avversione al rischio costante. Analogamente a quanto fatto per le funzioni CARA, è possibile risalire ad una formula per la funzine di utilità:

$$U(x) = \begin{cases} \ln x & \text{se } \beta = 1 \\ \frac{x^{1-\beta}}{1-\beta} & \text{se } \beta \in (0,1) \end{cases}$$

Nel contesto appena descritto si inserisce un importante risualtato, noto come teorema di Arrow-Pratt, il quale consente di paragonare il grado di avversione al rischio di due agenti economici:

Theorem 2 *(Si veda[3]) Si considerino due investitori caraterizzati da funzioni di utilità U e V allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

1. *Esiste una funzione $f(\cdot)$ tale che $f'(x) > 0\ \forall x$, $f''(x) < 0\ \forall x$ e $V(x) = f(U(x))\ \forall x$.*
2. *Per ogni variabile casuale rendimento X, $\pi_U > \pi_V$, dove π_U, π_V denotano i premi per il rischio rischiesti rispettivamente dagli investitori dotati di utilità U e V;*
3. *Il coefficiente assoluto di avversione al rischio associato a U è strettamente maggiore di quello associato a V :*

$$-\frac{U''(x)}{U'(x)} > -\frac{V''(x)}{V'(x)}$$

Nelle ipotesi sopra, si afferma che l'investitore dotato di utilità U è più avverso al rischio di quello dotato di utilità V.

Finora abbiamo presentato il tema della preferenza secondo l'ottica della teoria dell'utilità attesa di Von Neumann-Morgenstern. Il famoso paradosso di Allais apre una falla in questa teoria, illustarndo come nella realtà la logica comportamentale sia spesso diversa. Prima di entrare nei dettagli del problema ricordiamo delle nozioni di carattere matematico tratte da [2]

Definition 3 *(distribuzione di Dirac). Se $X \sim \delta_{x_0}$ allora*

$$\mathbb{E}[X] = \int_{\mathbb{R}} y\delta_{x_0}(dy) = \int_{\{x_0\}} y\delta_{x_0}(dy) = x_0\delta(\{x_0\}) = x_0$$

Corollary 4 *Considero* $X \sim p\delta_u + (1-p)\delta_d$ *dove* $p \in (0,1)$, $u, d \in \mathbb{R}$, $d < u$ *allora si ha che*

$$\mathbb{E}[X] = pu + (1-p)d$$

Riprendendo quanto stavamo dicendo, sia X_1 un rendimento casuale con distribuzine data da (per semplicità di notazione scrivo P_X e δ in luogo di $P_X(x)$ e $\delta(x)$)

$$P_{X_1} = 0.33\delta_{2500} + 0.66\delta_{2400} + 0.01\delta_0$$

ovvero l'investimento renda 2500 con probabilità 0.33, 2400 dollari con probabilità 0.66 e non produca alcun profitto con probabilità 0.01

Analogamente, sia X_2 un ulteriore variabile casuale con distribuzione di probabilità

$$P_{X_2} = \delta_{2400}$$

ovvero l'investimento renda con certezza 2400.

Si considerino poi due rendimenti casuali Y_1, Y_2 con distribuzioni rispettivamente date da

$$\begin{aligned} P_{Y_1} &= 0.34\delta_{2400} + 0.66\delta_0 \\ P_{Y_2} &= 0.33\delta_{2500} + 0.67\delta_0 \end{aligned}$$

Secondo le congetture avanzate da M.Allais, nel primo caso si propende per X_2, nonostante X_1 abbia valore atteso superiore, mentre nella seconda situazione si tende a preferire la situazione più rischiosa, ovvero Y_2, che in effetti ha valor medio maggiore di Y_1. Queste ipotesi comportamentali furono confermate da test statistici sulla popolazione condotti da Kahnemann e Tversky (anni 70). Dalle loro analisi risultò che nel primo caso l'82% degli intervistati preferiva X_2 a X_1, mentre nel secondo caso si registrò un risultato analogo a favore di Y_2.In conclusione, almeno il 65% degli individui interpellati sceglieva contemporaneamente X_2 e Y_2. Il paradosso riscontrato da Allais consiste appunto nell'incompatibilità di tali risultati con la teoria di V.N.morgenstern. Inafatti se un agente economico è caraterizzato da una funzione di utilità U e, come riportato sopra, $X_2 \succ X_1$ e $Y_2 \succ Y_1$,introducendo i rendimenti casuali Z_1 Z_2 con distribuzioni di probabilità rispettivamente

$$\begin{aligned} P_{Z_1} &= \frac{1}{2}(P_{X_1} + P_{Y_1}) = 0.165\delta_{2500} + 0.5\delta_{2400} + 0.335\delta_0 \\ P_{Z_2} &= \frac{1}{2}(P_{X_2} + P_{Y_2}) = 0.165\delta_{2500} + 0.5\delta_{2400} + 0.335\delta_0 \end{aligned}$$

dovremmo ottenere

$$\mathbb{E}[U(Z_2)] = \frac{1}{2}(\mathbb{E}[U(X_2)] + \mathbb{E}[U(Y_2)]) > \frac{1}{2}(\mathbb{E}[U(X_1)] + \mathbb{E}[U(Y_1)]) = \mathbb{E}[U(Z_1)]$$

cioè $Z_2 \succ Z_1$ assurdo in quanto contrasta con $P_{Z_1} = P_{Z_2}$.

Chapter 2

Tecniche di ottimizzazione di portafoglio in tempo discreto

2.1 Nozioni di base

Iniziamo la trattazione con il dare le nozioni base per affrontare l'argomento in esame, a tal proposito ci si riferisce a [8].

Consideriamo uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$, con Ω insieme di cardinalità finita, $\mathcal{F}$=$\mathcal{P}$ (Ω) una σ-algebra su Ω ed $\mathcal{F}_t$ $t = 0, ..., T$ una generica filtrazione. Fissato $d \in \mathbb{N}$, un modello di mercato discreto è costituito da un titolo non rischioso B (bond) e da d titoli rischiosi (stocks) $S^1, ..., S^d$. Il bond ha la seguente dinamica deterministica: se B_n indica il valore del bond all'istante t_n, vale

$$\begin{cases} B_0 = 1 \\ B_n = B_{n-1}(1 + r_n) \quad n = 1, ..., N \end{cases}$$

dove r_n indica il tasso privo di rischio nel periodo n-esimo $[t_{n-1}, t_n]$.

Dall'altro lato abbiamo che i titoli rischiosi hanno la seguente dinamica stocastica: se S^i_n indica il prezzo all'istante t_n dell' i-esimo titolo, allora vale

$$\begin{cases} S^i_0 \in \mathbb{R}^+ \\ S^i_n = S^i_{n-1}(1 + \mu^i_n) \; n = 1, ..., N \end{cases}$$

dove μ^i_n è una variabile aletoria reale che rappresenta il tasso di rendimento dell'i-esimo titolo nel periodo n-esimo $[t_{n-1}, t_n]$ poniamo

$$\mu_n = \left(\mu^1_n, ..., \mu^d_n\right)$$

e supponiamo che il processo μ_n sia adattato alla filtrazione generica $(\mathcal{F}_n)$ (d'ora in poi esprimeremo tale fatto scrivendo $\mu_n \sim \mathcal{F}_n$). Siccome nei modelli di mercato considerati, almeno per ora, la successione di v.a μ_n è l'unica sorgente di aleatorietà, una possibile filtrazione sia dunque

$$\mathcal{F}_n = \mathcal{F}_n^{\mu} := \sigma \left\{ \mu_k \mid k \leq n \right\}$$

Example 5 *Nel caso di un modello trinomiale per l' $i-$esimo titolo abbiamo che:*

$$1 + \mu_n^i (h) = \begin{cases} u_i & se \ h = 1 \\ m_i & se \ h = 2 \\ d_i & se \ h = 3 \end{cases}$$

dove la terna (u_i, m_i, d_i) definisce gli stati di natura

Notation 6 *$\mathcal{F}_n^{\mu}$ stabilisce una corrispondenza biunivoca tra i processi μ_n ed S_n quindi in questo contesto abbiamo che $\mathcal{F}_n = \mathcal{F}_n^{\mu} = \mathcal{F}_n^S$ in una situazione più generale si ha che $\mathcal{F}_n^S \subset \mathcal{F}_n$.*

Nel seguito supponiamo che esista almeno un titolo che assume sempre valori strettamente positivi: per semplicità supponiamo sia $B_n > 0 \ \forall n$. Ponendo

$$\tilde{S}_n^k = \frac{S_n^k}{B_n}$$

definiamo il mercato normalizzato (o scontato) rispetto a B, in tale mercato si ha ovviamente che $\tilde{B}_n = 1 \ \forall n$ e i prezzi dei titoli sono espressi in unità del tiolo non rischioso B, che viene chiamato numeraire.

Definition 7 *Un portafoglio (o startegia) è un processo stocastico in $\mathbb{R}^{d+1}$*

$$(\alpha, \beta) = (\alpha_n^1, ..., \alpha_n^d, \beta_n)_{n=1,...,N}$$

ove α_n^i (risp. β_n) rappresenta la quantità del titolo S^i (risp. bond) detenuta nel portafoglio durante il periodo n-esimo $[t_{n-1}, t_n]$,denotiamo inoltre con $(C_n) \backsim \mathcal{F}_n$ il processo che rappresenta il consumo.

Definition 8 *Un portafoglio α è predicibile se $\alpha_n \sim \mathcal{F}_{n-1} \forall n = 1, ..., N$*

Indichiamo quindi il valore del portafoglio (α, β) nel periodo n-esimo con

$$V_n = \beta_n B_n + \sum_{i=1}^{d} \alpha_n^i S_n^i$$

Un portafoglio si dice autofinanziante se soddisfa all'ulteriore uguaglianza

$$V_{n-1} = \beta_n B_{n-1} + \sum_{i=1}^{d} \alpha_n^i S_{n-1}^i + C_n$$

A volte risulta utile esprimere un portafoglio in termini relativi, indicando le proporzioni del valore totale investite nei singoli titoli, indichiamo quindi con

$$\pi_n^i = \frac{\alpha_n^i S_{n-1}^i}{V_{n-1}} \;\; i = 1, ..., d \tag{2.1}$$

$$\pi_n^i = \frac{\beta_n B_{n-1}}{V_{n-1}} \;\; i = 1, ..., d \tag{2.2}$$

le proporzioni investite nel periodio $n - esimo$ $[t_{n-1}, t_n]$.

Proposition 9 *Il valore di una strategia autofinanziante con consumo* (α, β, C) *è determinato dal valore iniziale* $V_0 \in \mathbb{R}$ *e dai processi* $\pi^1, ..., \pi^d$ *e* C *mediante la relazione ricorsiva*

$$V_n = (V_{n-1} - C_{n-1})(1 + r_n) + V_{n-1} \sum_{i=1}^{d} \pi_n^i (\mu_n^i - r_n) \tag{2.3}$$

2.2 La programmazione dinamica

Descriviamo ora un metodo che ci permette di risolvere problemi di ottimizzazione dinamica in un contesto stocastico. Nella realtà ci sono dei sistemi che evolvono nel tempo sotto influenza del caso, però noi possiamo, in qualche modo, intervenire lo stesso. Con "intervenire" si intende che bisogna stabilire un criterio che valuti l'evoluzione di tale sistema, in modo tale che tale criterio venga massimizzato\minimizzato.

Concretizzando, supponiamo di avere un processo (nel nostro caso sarà il valore del portafoglio) tale che il suo valore all'istante $n+1$ è una funzione del suo valore all'istante n, e di come noi interveniamo all'istante n (nel nostro caso investiamo e consumiamo) e una perturbazione aleatoria (nel nostro caso μ_n) cioè:

$$V_{n+1} = G_{n+1}(V_n,\ \mu_{n+1},\ \eta_n) \qquad n = 0, ..., N \tag{2.4}$$

Notiamo che V rappresenta lo stato di un sistema che evolve e noi possiamo influenzare tale evoluzione.

Example 10 *Consideriamo un mercato discreto e una strategia autofinanziante, indichiamo con $\pi^1, ..., \pi^d$ le proporzioni investite sui titoli rischiosi definite in (2.1) - (2.2), abbiamo che la relazione (2.3), senza consumo, verifica la relazione ricorsiva (2.4) dove:*

$$G_n(v,\ \mu_n,\ \eta_{n-1}) = v\left(1 + r_n + \sum_{i=1}^{d} \eta_{n-1}^i(\mu_n^i - r_n)\right)$$

e

$$\eta_n = \begin{cases} (\pi_{n+1}^1, ..., \pi_{n+1}^d) & n = 0, ..., N-1 \\ 0 & n = N \end{cases}$$

nel nostro caso quindi gli η rappresentano i controlli cioè le proporzioni di capitale investite nei singoli titoli, nel caso in cui mettavamo anche il consumo avevamo che $\eta = (\pi, C)$, per come è stata definito il processo η, risulta essere un processo adattato ($\eta_n \sim \mathcal{F}_n$).

Si supponga ora di dover risolvere il seguente problema di ottimizzazione:

$$\max_{\eta_0,\dots,\eta_N} \mathbb{E}\left[\sum_{n=0}^{N} U\left(V_n, \eta_n\right)\right] \tag{2.5}$$

con U funzione di utilità e V_n portafoglio autofinanziante.

Abbiamo visto che un primo metodo per la risoluzione del problema di ottimizzazione proposto è costituito dalla cosidetta programmazione dinamica. Gli elementi chiave di questa tecnica sono:

- **Markovianità** di V_n

  In generale la sequenza dei V_n non è un processo di Markov in quanto sono presenti i controlli (π, C). A riguardo abbiamo un risultato: tra le sequenze (π_n, C_n) che massimizzano il valore atteso del problema generale (2.5) ce n'è sempre una dove (π_n, C_n) dipende solo dal valore presente di V_n, i controlli che soddisfano tale requisito sono detti controlli Markoviani. In questo caso abbiamo che la sequenza dei valori del portafoglio costituisce un processo di Markov, in quanto ad ogni dato intervallo $[n, n+1)$ la legge di transizione che fornisce V_{n+1} dipende solo dallo stato corrente del sistema V_n e dal controllo corrente η_n e non da come si è pervenuti a tali valori (gli μ_n sono infatti indipendenti).

- **Principio della programmazione dinamica**

  Tale principio afferma che se un controllo è ottimale su un'intera successione di periodi, allora deve essere ottimale su ogni singolo periodo. Quindi è possibile, tramite un'opportuna decomposizione del problema, pervenire al controllo ottimo globale $\eta_0, ..., \eta_N$ attraverso la risoluzione del problema su ciascun singolo sottoperiodo.

In virtù di quanto detto sopra, possiamo riscrivere il problema iniziale (2.5) nel seguente modo (consideriamo per semplicità il caso $N = 2$):

$$
\begin{aligned}
& \max_{\eta_0,\eta_1,\eta_2} \mathbb{E}\left[\sum_{n=0}^{2} U\left(V_n,\eta_n\right)\right] \\
= & \max_{\eta_0,\eta_1,\eta_2} \mathbb{E}\left[U\left(V_0,\eta_0\right)+U\left(V_1,\eta_1\right)+U\left(V_2,\eta_2\right)\right] \\
=^{P.D} & \max_{\eta_0,\eta_1} \mathbb{E}\left[U\left(V_0,\eta_0\right)+U\left(V_1,\eta_1\right)+\max_{\eta_2} U\left(V_2,\eta_2\right)\right] \\
=^{M.K} & \max_{\eta_0,\eta_1} \mathbb{E}\left[U\left(V_0,\eta_0\right)+U\left(V_1,\eta_1\right)+\mathbb{E}\left[\max_{\eta_2} U\left(V_2,\eta_2\right) \mid \left(V_1,\eta_1\right)\right]\right] \\
=^{P.D} & \max_{\eta_0} \mathbb{E}\left[U\left(V_0,\eta_0\right)+\max_{\eta_1} U\left(V_1,\eta_1\right)+\mathbb{E}\left[\max_{\eta_2} U\left(V_2,\eta_2\right) \mid \left(V_1,\eta_1\right)\right]\right] \\
=^{M.K} & \max_{\eta_0} \mathbb{E}\left[U\left(V_0,\eta_0\right)+\mathbb{E}\left[\max_{\eta_1} U\left(V_1,\eta_1\right)+\mathbb{E}\left[\max_{\eta_2} U\left(V_2,\eta_2\right) \mid \left(V_1,\eta_1\right)\right] \mid \left(V_0,\eta_0\right)\right]\right]
\end{aligned}
$$

Dopo aver definito la tecnica della programmazione dinamica possiamo sintetizzarla nel seguente teorema:

Theorem 11 *(Si veda [8])Definiamo* $W_n\left(v\right) := \max_{\eta_n,\dots,\eta_N} \mathbb{E}\left[\sum_{k=n}^{N} U\left(V_k,\eta_k\right) | V_n = v\right]$ *allora si ha che per ogni* $n = 0, ..., N$ *vale:*

$$
\begin{cases}
W_N\left(v\right) = \max_{\eta_N} U_N(v,\eta_N) \\
W_{n-1}(v) = \max_{\eta_{n-1}} \left\{U_{n-1}(v,\eta_{n-1}) + \mathbb{E}\left[W_n\left(G_n(v,\ \mu_n,\eta_{n-1})\right)\right]\right\}
\end{cases}
$$

La dimostrazione del teorema avviene tramite il metodo di induzione su n. Per maggiori dettagli si veda[8].

2.3 Il metodo martingala

Prima di inoltrarci nel metodo per la risoluzione del problema (2.5), diamo delle nozioni base in ambito finanziario:

Definition 12 *Un arbitraggio è una strategia autofinanziante* (α, β) *che verifica le seguenti condizioni:*

1. $V_0^{(\alpha,\beta)} \geq 0$;
2. $V_N^{(\alpha,\beta)} \geq 0$;
3. $P\left(V_N^{(\alpha,\beta)} > 0\right) > 0$;

Si dice che un modello di mercato è libero da arbitraggi se la famiglia delle startegie autofinanzianti e predicibili, non contiene arbitraggi. L'assenza di opportunità di arbitraggio consiste nella non realizzabilità di un arbitraggio ed è equivalente all'impossibilità di conseguire un guadagno certo senza rischio.

Altro concetto importante è quello di completezza del mercato.

- Un mercato finanziario si dice completo se dato un qualsiasi claim (valore alla scadenza) H_T, esistono sempre un capitale iniziale V_0 e una strategia autofinanziante tali che $V_T = H_T$ *q.c.* e la loro determinazione equivale alla risoluzione del problema di copertura di H_T. In un modello a tempo discreto un mercato risulta completo quando il numero dei titoli, rischiosi e non, disponibili sul mercato $(d + 1)$ è pari al numero degli stati di natura, ovvero al numero dei possibili valori assunti da μ_n.

Anche il metodo martingala come quello della programmazione dinamica viene utilizzato per la soluzione di problemi di ottimizzazione stocastica, ma trae le sue origini dal problema della replicazione di un derivato. Si fonda sulla constatazione che, in assenza di arbitraggio, esistono delle misure di probabilità equivalenti a $\mathbb{P}$ rispetto alle quali i prezzi dei vari titoli rischiosi

S_n^i (nonchè del portafoglio V_n), scontati rispetto al titolo localmente non rischioso B_n, costituiscono delle martingale. Tali misure martingala sono dette appunto misure martingala equivalenti indicate con MME. Nel caso di mercati completi enunciamo i seguenti teoremi vedi[8]:

Theorem 13 *Un mercato libero da arbitraggi è completo sse esiste un'unica misura martingala (con numeraire B)*

Theorem 14 *Nel modello binomiale la condizione $d < 1 + r < u$ è equivalente all'esistenza e all'unicita della misura martingala $\mathbb{Q}$.*

Per allegerire la notazione, la tecnica del metodo martingala non verrà applicata ad un generico problema di ottimizzazione, ma ne verrà presentato l'approcio risolutivo al caso particolare di un problema di massimizzazione dell'utilità finale attesa in assenza di consumo, ovvero

$$\max_{\alpha} \mathbb{E}\left[U\left(V_N^{(\alpha)}\right)\right] \tag{2.6}$$

In questo caso i controlli sono le quantità, ma questo non risulta essere un problema, in quanto c'è una corrspondenza biunivoca tra quantità e proporzioni, si vedano le relazioni (2.1) - (2.2).

Il metodo martingala consiste di tre passi:

1. Determinazione dell'insieme dei valori finali raggiungibili
$$\mathcal{V}_v = \left\{V \mid V = V_N^{(\alpha)}, \alpha \text{ predicibile}, V_0^{(\alpha)} = v\right\}$$
2. Determinazione del valore finale raggiungibile $\bar{V}_N$ che realizza il massimo in (2.6);
3. Determinazione di una strategia autofinanziante $\bar{\alpha}$ tale che $V_N^{(\alpha)} = \bar{V}_N$;

Il primo problema è usualmente risolto utilizzando la condizione di martingalità:

$$\mathcal{V}_v = \left\{V \mid \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[B_N^{-1}V_N\right] = B_0^{-1}V_0^{(\alpha)} = v\right\}$$

relazione che stabilisce la relazione che intercorre tra valore atteso finale e iniziale; il secondo passo consiste invece in un problema di massimizzazione che può essere risolto utilizzando gli usuali strumenti di ottimizzazione vincolata come ad esempio il Teorema dei Moltiplicatori di Lagrange. Enunciamo a riguardo un teorema, si veda[8]:

Theorem 15 *In un mercato completo e libero da arbitraggi si consideri il problema di massimizzazione dell'utilità attesa della ricchezza finale (2.6) a partire dal capitale iniziale $v \in \mathbb{R}$. Se vale la condizione*

$$U'(I) \in \mathbb{R}^+$$

dove I è l'insieme di definizione della U, allora il valore finale ottimale è pari a

$$\bar{V}_N = \mathcal{I}\left(\lambda \tilde{L}\right)$$

dove $\mathcal{I}$ è l'inversa di U, $\tilde{L} = B_N^{-1} L$ con $L = \frac{d\mathbb{Q}}{dP}$ (derivata di Radon-Nikodym) con $\mathbb{Q}$ MME, $\lambda \in \mathbb{R}$ determinato dall'equazione

$$\mathbb{E}^P\left[\mathcal{I}\left(\lambda \tilde{L}\right)\tilde{L}\right] = v \tag{2.7}$$

l'equazione (2.7) viene detta budget equation.

Vediamo ora due esempi come applicazione dei metodi della programmazione dinamica e del metodo martingala descritti sopra. Considereremo un arco temporale biperiodale ($n = 0, 1, 2$) e un modello di mercato binomiale, ovvero caraterizzato dalla presenza di un titolo localmente non rischioso B_n e di un unico titolo rischioso S_n^1, con μ_n sequenza di varibili casuali $i.i.d$ binomiali che assumono i valori $u = 2$ e $d = \frac{1}{2}$ con probabilità rispettivamente di $\frac{4}{9}$ e $\frac{5}{9}$. Si assuma inoltre $r_n = r = 0$ e $B_0 = 1$. Si consideri il problema della massimizzazione dell" utilità attesa finale in assenza di consumo, nell' ipotesi che la funzione di utilità sia $U(\cdot) = \ln(\cdot)$ nel caso della programmazione dinamica e $U(\cdot) = \sqrt{\cdot}$ nel caso del metodo martingala.

Example 16 ***(Risoluzione con il metodo della programmazione dinamica)***

la dinamica del portafoglio è data da

$$V_n = G_n(V_{n-1},\ \mu_n,\ \pi_n) = V_{n-1}(1 + \mu_n \pi_n) = \begin{cases} V_{n-1}(1 + \pi_n) \\ V_{n-1}(1 - \frac{\pi_n}{2}) \end{cases}$$

ricordando che π_n indica la proporzione di titolo rischioso investita nel periodo $[t_{n-1}, t_n]$. In base all'all'algoritmo della programmazionedinamica abbi-

amo

$$\begin{aligned} W_2(v) &= \log v \\ W_1(v) &= \max_{\pi_2} \mathbb{E}\left[\log G_2(v,\ \mu_2,\ \pi_2)\right] \\ &= \log v + \max_{\pi_2}\left[\frac{4}{9}\log(1+\pi_2) + \frac{5}{9}\log\left(1-\frac{\pi_2}{2}\right)\right] = \log v + M \\ W_0(v) &= \max_{\pi_1} \mathbb{E}\left[W_1\left(G_1(v,\ \mu_1,\ \pi_1)\right)\right] \\ &= \log v + M + \max_{\pi_1}\left[\frac{4}{9}\log(1+\pi_1) + \frac{5}{9}\log\left(1-\frac{\pi_1}{2}\right)\right] \\ &= \log v + 2M \end{aligned}$$

dove $\pi_n \in D =]a, b[$ *dove* $a = -\frac{1+r}{u-1-r} = -1$ *e* $b = \frac{1+r}{1+r-d} = 2$ *(insieme di definizione della funzione), derivando otteniamo che il massimo risulta raggiunto per* $\pi_n = \pi = \frac{1}{3}$ $\forall n$ *si ha quindi che in ogni periodo si investe sempre la stessa proporzione di titolo.*

Example 17 ***(Risoluzione con il metodo martingala)***

Ricordando che la $\mathbb{Q}$ *nel modello binomiale è unica (in quanto il modello di mercato binomiale è completo), abbiamo che nel caso particolare qui trattato, essa è tale che* μ_n *assuma il valore più alto* $u = 2$ *e* $d = \frac{1}{2}$ *con probabilità rispettivamente* $q = \frac{1+r-d}{u-d} = \frac{1}{3}$ *(condizione per cui i valori scontati del portafoglio di un modello binomiale siano delle martingale). Trattandosi di un modello biperiodale, ogni variabile casuale* V_2 *è adattata a* $\mathcal{F}_2$ *quindi assume quattro valori, siano essi* $(h_1, h_2, h_3, h_4) \in \mathbb{R}^{\geq}$*, corrispondente alle quattro possibili evoluzioni del prezzo dello stock. Seguendo i passi descritti in precedenza si deduce che l'insieme* $\mathcal{V}_v$ *delle variabili* V_2 *raggiungibili a partire da un dato capitale iniziale* $V_0 = v$ *è composto da tutte e sole le soluzioni della budget equation:*

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[V_2] = v$$

si ricordi infatti che $r = 0$ *e* $B_0 = 1$*, quindi i prezzi dei titoli coincidono con i prezzi scontati. Si vuole massimizzare il valore atteso dell'utilità finale all'interno di* $\mathcal{V}_v$*. Il problema da risolvere è dunque il seguente:*

$$\max_{h_i} \mathbb{E}^P\left[\sqrt{V_2}\right] = \max_{h_i} \frac{4}{9}\frac{4}{9}\sqrt{h_1} + \frac{4}{9}\frac{5}{9}\sqrt{h_2} + \frac{4}{9}\frac{5}{9}\sqrt{h_3} + \frac{5}{9}\frac{5}{9}\sqrt{h_4}$$

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[V_2] = \frac{1}{9}h_1 + \frac{2}{9}h_2 + \frac{2}{9}h_3 + \frac{4}{9}h_4 = v$$

$$h_i \geq 0$$

Con il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, si ha che il massimo viene raggiunto nei punti :

$$h_1^* = \left(\frac{32}{19}\right)^2 v,\ h_2^* = h_3^* = \left(\frac{20}{19}\right)^2 v,\ \ h_4^* = \left(\frac{25}{38}\right)^2 v$$

Ora si tratta semplicemente di risolvere un problema di copertura. Denotate con θ_1^u *e* θ_1^d *le strategie in* $t = 1$ *quando* S^1 *vale rispettivamente* 2 *e* $\frac{1}{2}$*, si ha*

$$\begin{aligned}
(2\theta_1^u + (1-\theta_1^u))\,(2\theta_0 + (1-\theta_0)) &= h_1^* = \left(\frac{32}{19}\right)^2 x \\
\left(\frac{1}{2}\theta_1^u + (1-\theta_1^u)\right)(2\theta_0 + (1-\theta_0)) &= h_1^* = \left(\frac{20}{19}\right)^2 x \\
(2\theta_1^u + (1-\theta_1^u))\left(\frac{1}{2}\theta_0 + (1-\theta_0)\right) &= h_1^* = \left(\frac{20}{19}\right)^2 x \\
\left(\frac{1}{2}\theta_1^u + (1-\theta_1^u)\right)\left(\frac{1}{2}\theta_0 + (1-\theta_0)\right) &= h_1^* = \left(\frac{25}{38}\right)^2 x
\end{aligned}$$

Dalla risoluzione di questo sistema si ricava $\theta_0^* = \frac{13}{19}$ *e* $\theta_1^* = \theta_1^u = \theta_1^d = \frac{13}{19}$

Chapter 3

Ottimizzazione di portafoglio a tempo continuo

3.1 Nozioni di carattere generale sul calcolo stocastico

Iniziamo ora a definire gli elementi di teoria dei processi stocastici che utilizzeremo nei modelli finanziari a tempo continuo (maggiori dettagli si possono trovare ad esempio in [2]). In particolare vederemo cosa significa "derivare" in ambito aletorio, diamo a riguardo una prima definizione:

Definition 18 *Sia* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$ *uno spazio di probabilità con filtrazione. Un processo di Wiener reale è un qualsiasi processo stocastico* $W = (W_t)_{t\in[0,+\infty[}$ *in* $\mathbb{R}$ *tale che*

1. $W_0 = 0$ *q.c.*;
2. $W_t \sim \mathcal{F}_t$;
3. *per* $t > s \geq 0$, *la variabile aletoria* $W_t - W_s \sim N(0, t-s)$ *ed è indipendente da* $\mathcal{F}_s$.

Consideriamo ora un processo stocastico X e supponiamo che esista un numero reale x_0 e due processi μ_t e σ_t adattati tali che valga la seguente relazione:

$$X_t = a + \int_0^t \mu(s)ds + \int_0^t \sigma(s)dW(s) \tag{3.1}$$

dove a è un numero reale dato e W_t processo di Wiener. Spesso scriveremo la (3.1) nella forma

$$\begin{cases} dX_t = \mu(s)ds + \sigma(s)dW(s) \\ X_0 = a \end{cases} \tag{3.2}$$

Se X si riesce a scrivere in una forma del tipo (3.1) o (3.2) diremo che ammette differenziale stocastico.

$\mu(s)$ e $\sigma(s)$ vengono detti rispettivamente il drift e il coefficiente di diffusione, in ambito finanziario il drift rappresenta sostanzialmente il trend con cui evolve il prezzo del titolo, mentre il coefficiente di diffusione rappresenta le oscillazioni del prezzo.

L'integrale $\int\limits_0^t \sigma(s)dW(s)$ viene detto integrale stocastico.

Proposition 19 *(si veda [7]proposizione 4.7.3) E" possibile definire l'integrale stocastico per un processo u che soddisfa solo la condizione debole*

$$\mathbb{P}\left(\int_a^b u_s\ ds < +\infty\right) = 1 \qquad q.c.$$

Nel seguito supporremmo che sia sempre ben definito, per maggiori dettagli si veda[2]

Vediamo ora un teorema che ci permette di calcolare differenziali stocastici.

Theorem 20 ***(formula di Ito)*** *(si veda[7])sia $X = (X_1, ..., X_n)$ processo stocastico $n-dim$ che ammette differenziale stocastico dato da*

$$dX_t = \mu_t dt + \sigma_t dW_t$$

ove anche W è un processo di Wiener n-dim, inoltre $f \in C^{1,2}$ allora si ha che:

- *il processo $f(t, X_t)$ ha differenziale stocastico dato da*

$$df = \left\{\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \mu_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} C_{i,j}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right\} dt + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\sigma_i dW_i$$

  con $\sigma_i = [\sigma_{i1}, ..., \sigma_{in}]$ e $C = \sigma\sigma'$

- *Alternativamente si può usare la seguente formula più schematica*

$$df = \left\{ \frac{\partial f}{\partial t} + [\nabla_x f]\,\mu + \frac{1}{2} tr\,[\sigma' H \sigma] \right\} dt + [\nabla_x f]\,\sigma dW$$

dove H denota la matrice hessiana

$$H_{i,j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$$

e $tr\,(\cdot)$ indica la traccia di una matrice.

Example 21 *calcolo del differenziale del processo $Y_t = \exp\{\mu t + \sigma W_t\}$ caso 1-dim*

Applicando la formula di Ito otteniamo

$$dY_t = df\,(t, W_t) = \exp\{\mu t + \sigma W_t\}$$

ricordando lo sviluppo di taylor di una funzione di due variabili e passando successivamente ai differenziali otteniamo

$$\begin{aligned} df &= \exp\{\mu t + \sigma W_t\}\,\mu dt + \exp\{\mu t + \sigma W_t\}\,\sigma dW_t + \frac{1}{2}\exp\{\mu t + \sigma W_t\}\,\sigma^2 dt \\ &= \left\{ Y_t \mu + \frac{1}{2} Y_t \sigma^2 \right\} dt + Y_t \sigma dW_t \end{aligned}$$

dove si è tenuto conto che:

$$\begin{cases} [dt]^2 = 0 \\ dt \cdot dW_t = 0 \end{cases}$$

Dopo aver introdotto il differenziale di un processo stocastico introduciamo il concetto equazione differenziale stocastica (EDS) che ci servirà come descrizione della dinamica del prezzo di un titolo. Nel caso scalare, facilmente generalizzabile al caso n-dim, abbiamo che un' EDS assume la forma

$$\begin{cases} dX_t = \mu\,(t, X_t)\,dt + \sigma(t, X_t) dW_t \\ X\,(0) = x_0 \end{cases} \tag{3.3}$$

Un operatore che ci servirà in seguito per descrivere il metodo della programmazione dinamica a tempo continuo è l'operatore di Kolmogorov, a riguardo diamo quindi la seguente definizione:

Definition 22 *(**Kolmogorov backward operator**) Data l'EDS (3.3) L'opertaore di K. $\mathcal{A}$ è definito, per ogni funzione $h(x)$ con $h \in C^2(\mathbb{R}^n)$, da*

$$\mathcal{A}h(t,x) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \frac{\partial h}{\partial x_i}(x) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} C_{i,j} \frac{\partial^2 h}{\partial x_i \partial x_j}(x)$$

dove

$$C(t,x) = \sigma(t,x) \cdot \sigma'(t,x)$$

Possiamo riscrivere la formula di Itô in termini dell'operatore di Kolmogorov ottenendo:

$$df = \left\{ \frac{\partial f}{\partial t} + \mathcal{A}f \right\} dt + [\nabla_x f] \, \sigma dW$$

Definition 23 *Un processo stocastico X viene detto una $\mathcal{F}_t-$ **martingala** se soddisfa le seguenti condizioni:*

- *X è adattato alla filtrazione $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$.*
- *$\forall t$*
$$\mathbb{E}[|X(t)|] < \infty$$
- *$\forall s < t$ si ha che*
$$\mathbb{E}[X(t)|\mathcal{F}_s] = X(s)$$

Proposition 24 *(martingalità si veda [2]osservazione (5.48)) Sotto l'ipotesi di esistenza dell'integrale stocastico abbiamo che il processo*

$$X_t = \int_0^t \sigma(s) \; dW(s)$$

risulta essere una martinagala rispetto alla filtrazione generata da W_s

Diamo ora un risultato che ci permetterà di sostituire "in modo arbitrario" il drift di un processo di Itô, modificando opportunamente la misura di probabilità e il moto Browniano considerati. Tale risultato è noto come teorema di Girsanov

Theorem 25 *(si veda [2] Teorema (10.5)) Sia W_t un $\mathbb{P}-$Moto Browniano, $\gamma_t = \gamma(t, \omega)$ processo, consideriamo*

$$\zeta_T = \exp\left(-\int_0^T \gamma_s dW_s - \frac{1}{2}\int_0^T (\gamma_t)^2 ds\right)$$

assumendo che ζ_T sia derivata di Radon Nycodym allora vale che

$$W_t^* = W_t + \int_0^t \gamma_s ds$$

è un moto Browniano su $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \mathbb{Q})$

Generalizziamo ora i concetti base di matematica finanziaria nel caso in cui il tempo sia continuo:

Definition 26 *Sia $\{S(t) \mid t \geq 0\}$ un processo N-dim dato (dinamica dei prezzi) si ha che:*

- *Una strategia di portafoglio (spesso chiamata semplicemente portafoglio) è rappresentata da ogni processo $N-$dim $\{h(t) \mid t \geq 0\}$ adattato alla filtrazione $\mathcal{F}_t$*
- *Il poratafoglio h è detto Markoviano se è della forma*

  $$h(t) = h(t, S(t))$$

  per ogni funzione $h : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$
- *Il valore del portafoglio V^h corrispondente al portafoglio h è dato da*

  $$V^h(t) = \sum_{i=1}^N h_i(t) S_i(t)$$
- *Un processo di consumo è un processo $\mathcal{F}_t-$adattato $\{h(t) \mid t \geq 0\}$*
- Un portafoglio con consumo (h, c) viene detto autofinanziante se V^h soddisfa la condizione

  $$dV^h(t) = \sum_{i=1}^N h_i(t) dS_i(t) - c(t)dt = h(t)dS(t) - c(t)dt$$

  Per semplicità di calcolo è spesso conveninte definire il portafoglio in termini relativi:

Per un prtafoglio h Il corrispondente **portafoglio relativo** u è dato da:

$$u_i(t) = \frac{h_i(t)S_i(t)}{V^h(t)}$$

dove abbiamo che

$$\sum_{i=1}^{N} u_i(t) = 1$$

Possiamo quindi riscrivere la condizione di autofinanziamento nel seguente modo:

$$dV^h(t) = V^h(t) \sum_{i=1}^{N} u_i(t) \frac{dS_i(t)}{S_i(t)} - c(t)dt \tag{3.4}$$

3.2 Completezza-Assenza di arbitraggio

In questo paragrafo daremo delle regole generali per determinare se un certo modello è completo e/o privo di arbitraggio.

Consideriamo M titoli rischiosi più il titolo privo di rischio (cioè in totale $M+1$ titoli). Assumiamo che i processi di prezzo dei titoli sottostanti siano guidati da R "sorgenti random". Non riusciamo a dare una definizione precisa di cosa costituisce una "sorgente random", diciamo soltanto che il tipico esempio è un processo di Wiener. Se, per esempio abbiamo 5 processi di Wiener indipendenti, che guidano i nostri prezzi, allora $R = 5$.

Sia R il numero di sorgenti random fissato, allora ogni titolo sottostante aggiunto al modello ci darà una potenziale opportunità di creare un portafoglio di arbitraggio, così per avere un mercato privo di opportunità di arbitraggio, così per avere un mercato privo, il numero M di titoli sottostanti dovrà essere piccolo rispetto al numero R di sorgenti random. D'altra parte vediamo che ogni nuovo titolo sottostante aggiunto al modello ci fornisce la possibilità di replicare il clai, così la completezza richiede che M sia grande rispetto a R.

Non possiamo formulare un risultato preciso, tuttavia la seguente regola empirica è estremamente utile per capire se un modello di mercato ha opportunità di arbitraggio o meno.

Criterion 27 *Denotiamo con M il numero dei titoli sottostanti il modello escluso il titolo privo di rischio e denotiamo con R il numero di sorgenti random. Allora abbiamo le seguenti relazioni:*

- *Il modello è prvo di arbitraggio* $\Leftrightarrow M \leq R$
- *Il modello è completo* $\Leftrightarrow M \geq R$
- *Il modello è completo e privo di arbitraggio* $\Leftrightarrow M = R$

In seguido useremo come modello di mercato il modello di Black & Scholes, dove abbiamo un titolo sottostante S più il titolo privo di rischio, $M = 1$, e un processo di Wiener, $R = 1$, quindi $M = R$. Usando l'osservazione sopra, otteniamo che il modello di Black & Scholes è privo di arbitraggio e completo.

3.3 Programmazione dinamica a tempo continuo ed equazione di HJB

Abbiamo visto che lo scopo di questa esposizione è presentare un classico problema della finanza matematica: gestire un portafoglio in modo da rendere massima la speranza matematica del valore finale di questo portafoglio, rispetto ad una opportuna funzione di utilità. Questo problema è anche noto come il *problema di Merton,* dal nome dello studioso che per primo lo ha formalizzato e studiato, ottenendo risultati significativi (si veda ad esempio[6]).

R.Merton fu uno tra i primi a introdurre il controllo stocastico e il metodo della programmazione dinamica per risolvere problemi nati in ambito economico-finanziario.

Nella seguente trattazione, ispirata in particolar modo ai lavori di Pham[3], Touzi[4] e Sass[5], verrà illustrato l'uso della programmazione dinamica nella risoluzione di un generico problema di ottimizzazione in tempo continuo, secondo l'approccio di Bellman. In seguito ne verrà presentata l'applicazione al problema di selezione di portafoglio di Merton.

Si consideri un sistema dinamico che evolve in un contesto di incertezza e si denoti con $X_t(\omega) \in \mathbb{R}^d$ la variabile di stato al tempo t corrispondente allo scenario $\omega \in \Omega$, spazio dotato della misura di probabilità $\mathbb{P}$. Si supponga che lo stato del sistema sia influenzato da un controllo $\alpha = (\alpha_s)_s$ a valori in $A \subset \mathbb{R}^n$.

Il sistema sia caratterizzato dalla seguente dinamica:

$$dX_s = \mu(\alpha_s, X_s)\, ds + \sigma(\alpha_s, X_s) dW_s \tag{3.5}$$

dove W rappresenta un moto browniano n-dimensionale nello spazio di probabilità filtrato $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$,$\mu$ e σ sono funzioni misurabili definite su $\mathbb{R}^d \times A$ mentre α risulta essere un processo adattato a $\mathcal{F}_t$.

Fissato un orizzonte temporale $T < \infty$, l'obiettivo sia quello di massimizzare, sull'insieme dei controlli $\alpha \in A$, un funzionale obiettivo del tipo

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T f\left(X_s, \alpha_s\right) ds + g\left(X_T\right)\right] \tag{3.6}$$

con f e g funzioni misurabili, definite su $\mathbb{R}^d \times A$ dotate di opportuni requisiti di integrabilità (in modo tale che il valore atteso sia ben definito).

Si denoti con $\{X_s^{t,x}, s \geq t\}$ la soluzione dell'equazione (3.5) che ha condizioni iniziali $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^d$ (i.e $X_t = x$).

L'approccio di Bellman consiste nel definire la **funzione valore** associata a (3.5) al tempo t come

$$\mathcal{J}(t, x) = \sup_{\alpha \in A} \mathbb{E}\left[\int_t^T f\left(X_s^{t,x}, \alpha_s\right) ds + g\left(X_T^{t,x}\right)\right] \tag{3.7}$$

Possiamo quindi riscrivere il problema iniziale (3.5) in termini del funzionale (3.6) come $\mathcal{J}(0, V_0)$, dove V_0 è il valore iniziale. Come abbiamo già avuto modo di vedere a tempo discreto, la tecnica della programmazione dinamica si basa sul principio secondo il quale se un processo è ottimale sull'intero arco temporale, esso è ottimale anche su ogni singolo sottoperiodo. Nel caso discreto avevamo visto che il metodo si basava essenzialmente nell'esprimere una funzione in termini di se stessa (si veda Teorema 11); si procede allo stesso modo con il metodo della programmazione dinamica a tempo continuo.

Il passaggio successivo quindi, è quello di esprimere $\mathcal{J}(t, x)$ in funzione di se stessa come segue:

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}(t, x) &= \sup_{\alpha \in A} \mathbb{E}\left[\int_t^\theta f\left(X_s^{t,x}, \alpha_s\right) ds + \int_\theta^T f\left(X_s^{t,x}, \alpha_s\right) ds + g\left(X_T^{t,x}\right)\right] \qquad (3.8)\\
&= \sup_{\alpha \in A} \mathbb{E}\left[\int_t^\theta f\left(X_s^{t,x}, \alpha_s\right) ds + \sup_{\alpha \in A}\left[\mathbb{E}\int_\theta^T f\left(X_s^{t,x}, \alpha_s\right) ds + g\left(X_T^{t,x}\right)\right]\right]\\
&= \sup_{\alpha \in A} \mathbb{E}\left[\int_t^\theta f\left(X_s^{t,x}, \alpha_s\right) ds + \mathcal{J}\left(\theta, X_\theta^{t,x}\right)\right]
\end{aligned}$$

con $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^d$ e $\theta \in [t, T]$ inoltre $X_\theta^{t,x}$ rappresenta la ricchezza di partenza. Assumendo $\theta = t + h$ e portando tutti i termini a destra dell uguaglianza, si ottiene

$$\begin{aligned} 0 &= \sup_{\alpha\in A} \mathbb{E}\left[\int_t^{t+h} f\left(X_s^{t,x}, \alpha_s\right) ds + \mathcal{J}\left(t+h, X_{t+h}^{t,x}\right) - \mathcal{J}\left(t, X_t^{t,x}\right)\right] \\ &= \sup_{\alpha\in A} \mathbb{E}\left[\int_t^{t+h} f\left(X_s^{t,x}, \alpha_s\right) ds + \int_t^{t+h} d\mathcal{J}\left(s, X_s^{t,x}\right)\right] \end{aligned}$$

Supponendo che la funzione valore sia di classe C^2 e applicando la formula di Itô (si veda teorema19) a $\mathcal{J}\left(s, X_s^{t,x}\right)$, si ricava:

$$\begin{aligned} 0 = \sup_{\alpha\in A} \mathbb{E}\Bigg[&\int_t^{t+h} \left(f\left(X_s^{t,x}, \alpha_s\right) + \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial t}\left(s, X_s^{t,x}\right) + \mathcal{A}^\alpha \mathcal{J}\left(s, X_s^{t,x}\right)\right) ds + \\ &+ \int_t^{t+h} \nabla_x \mathcal{J}\left(s, X_s^{t,x}\right)' \sigma\left(X_s^{t,x}, \alpha_s\right) dW_s\Bigg] \end{aligned} \tag{3.9}$$

dove $\mathcal{A}^\alpha$ è l'operatore di Kolmogorov definito in precedenza.

Diamo ora un risultato che ci permetterà di semplificare la (3.9).

Theorem 28 *(si veda[7]) Sia g un processo tale che*

$$\int_a^b \mathbb{E}\left[g_s^2\right] ds < \infty \qquad g_s \sim \mathcal{F}_t^W$$

dove $\mathcal{F}_t^W := \sigma\left\{W_k \mid k \leq t\right\}$ *allora si ha che*

$$\mathbb{E}\left[\int_a^b g^2(s)\, dW_s\right] = 0$$

Assumendo le ipotesi del teorema scritto sopra possiamo quindi semplificare la (3.8) e ottenere:

$$0 = \sup_{\alpha\in A} \mathbb{E}\left[\int_t^{t+h} f\left(X_s^{t,x}, \alpha_s\right) + \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial t}\left(s, X_s^{t,x}\right) + \mathcal{A}^\alpha \mathcal{J}\left(s, X_s^{t,x}\right) ds\right]$$

dividendo per $h > 0$ l'argomento del valor medio, si ottiene:

$$0 = \sup_{\alpha\in A} \mathbb{E}\left[\frac{1}{h}\int_t^{t+h} f\left(X_s^{t,x}, \alpha_s\right) + \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial t}\left(s, X_s^{t,x}\right) + \mathcal{A}^\alpha \mathcal{J}\left(s, X_s^{t,x}\right) ds\right]$$

Facendo poi tendere h a 0 ed applicando il teorema fondamentale del calcolo integrale (nell'Hp che sia valido un teorema di passaggio al limite sotto il segno di integrale quale ad esempio il teorema di convergenza dominata o monotona), si giunge all'equazione di Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB)

$$0=\sup_{\alpha\in A}\left[f(x,\alpha)+\frac{\partial\mathcal{J}}{\partial t}(t,x)+\mathcal{A}^{\alpha}\mathcal{J}(t,x)\right],\ \text{con}\quad (t,x)\in[0,T)\times\mathbb{R}^{d} \tag{3.10}$$

Questa equazione alle derivate parziali (PDE) è completata dalla seguente condizione al contorno:

$$\mathcal{J}(T,x)=g(x),\qquad x\in\mathbb{R}^{d} \tag{3.11}$$

che deriva direttamente dalla definizione di funzione valore infatti :

$$\mathcal{J}(T,x)=g\left(X_{T}^{T,x}\right)=g(x)$$

L'equazione di HJB costituisce la versione infinitesimale del principio della programmazione dinamica o principio di Bellman. E' importante notare che se $\mathcal{J}$ è la funzione valore e α il controllo ottimo, allora $\mathcal{J}$ soddifa l'equazione di HJB, In tal modo l'equazione di HJB dà delle condizioni necessarie per l'ottimo. Ora ci chiediamo se è vero il vice versa: cioè se la soluzione dell'equazione di HJB fornisce la soluzione ottima, in modo tale da avere delle condizioni necessarie e sufficienti per l'ottimo. A tal proposito enunciamo un teorema classico nell'ambito della teporia del controllo stocastico, noto come teorema di verifica

Una derivazione alternativa di tale equazione può essere euristicamente condotta a partire dal caso discreto.

Theorem 29 ***(Teorema di verifica)*** *(si veda [4] e [5]) Sia V funzione di classe $C^{1,2}([0,T)\times\mathbb{R}^{d})\cap C^{0}([0,T]\times\mathbb{R}^{d})$.Si assuma che σ sia una funzione continua e V ed f abbiano crescita quadratica, ovvero esista una costante C tale che*

$$|f(x,\alpha)|+|V(t,x)|\leq C\left(1+|x|^{2}\right)\qquad\forall(t,x,\alpha)\in[0,T)\times\mathbb{R}^{d}\times A$$

si supponga che:

1. *$V(T,\cdot)\geq g$ e*

   $$\frac{\partial V}{\partial t}(t,x)+\sup_{\alpha\in A}\left[f(x,\alpha)+\mathcal{A}^{\alpha}V(t,x)\right]\leq 0\qquad \textit{in }(t,x)\in[0,T)\times\mathbb{R}^{d}$$

   allora $V\geq\mathcal{J}$ in $(t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}^{d}$.

2. *Si supponga inoltre che* $V(T,\cdot) = g$ *ed esista* $\hat{\alpha}(t,x) : [0,T] \times \mathbb{R}^d \longrightarrow A$ *che soddisfa*

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial V}{\partial t}(t,x) + \sup_{\alpha \in A} \left[f\left(x, \alpha(t,x)\right) + \mathcal{A}^{\alpha(t,x)} V(t,x) \right] \\ &= \frac{\partial V}{\partial t}(t,x) + f\left(x, \hat{\alpha}(t,x)\right) + \mathcal{A}^{\hat{\alpha}(t,x)} V(t,x) \end{aligned} \tag{3.12}$$

   tale che l'equazione differenziale stocastica

$$dX_s = b\left(X_s, \hat{\alpha}(s, X_s)\right) ds + \sigma(X_s, \hat{\alpha}(s, X_s)) dW_s$$

   ammetta un'unica soluzione per ogni stato iniziale (t,x)*, denotata con* $\{X_s^{t,x}, s \geq t\}$ *.*

allora $V = \mathcal{J}$ e $\hat{\alpha}_s = \hat{\alpha}(s, \hat{X}_s^{t,x})$ è un conrollo ottimale markoviano.

Proof. Siano $\alpha \in A$ un controllo arbitrario e (t,x) lo stato iniziale di X. Si definisca il tempo di arresto

$$\tau_n := T \wedge \inf\left\{s > t \mid |X_s - x| \geq n\right\}, \qquad n \in \mathbb{N}$$

il lemma di Itô ci consente di scrivere

$$V(t,x) = V(\tau_n, X_{\tau_n}) - \int_t^{\tau_n} \frac{\partial V}{\partial t}(s, X_s) + \mathcal{A}^{\alpha} V(s, X_s)\, ds - \int_t^{\tau_n} \nabla_x V(s, X_s)' \sigma(s, X_s)\, dW_s$$

ricordando che $\frac{\partial V}{\partial t}(t,x) + \sup_{\alpha \in A}\left[f(x,\alpha) + \mathcal{A}^{\alpha} V(t,x)\right] \leq 0$ e la prop 24 inoltre osservando che l'integrando dell'integrale stocastico risulta limitato in $[t, \tau_n]$, per la continuità di $\nabla_x V(s, X_s)$ e di σ, si ottiene

$$V(t,x) \geq \mathbb{E}\left[V(\tau_n, X_{\tau_n}) + \int_t^{\tau_n} f(X_s, \alpha)\, ds\right] \tag{3.13}$$

Facendo tendere $n \to \infty$, $\tau_n \to T$ e le condizioni di crescita quadratica implicano

$$\left| V(\tau_n, X_{\tau_n}) + \int_t^{\tau_n} f(X_s, \alpha)\, ds \right| \leq C\left(1 + |X_{\tau_n}|^2 + T + \int_t^T |X_{\tau_n}|^2\, ds\right) \in \mathcal{L}^1$$

per il teorema di convergenza dominata abbiamo che

$$V(t,x) \geq \mathbb{E}\left[V(T, X_T) + \int_t^T f(X_s, \alpha_s)\, ds\right] \geq \mathbb{E}\left[g(X_T) + \int_t^T f(X_s, \alpha_s)\, ds\right]$$

dove l'ultima disuguaglianza deriva dalla condizione $V(T, \cdot) \geq g$. Essendo

il controllo α arbitrario (quindi la disuguaglianza è vera anche se considero l'estremo superiore), il punto 1 risulta provato.

Il punto (2) si dimostra con gli stessi argomenti finora usati osservano che il controllo $\hat{\alpha}$ soddisfa l'equazione (3.13) ad uguaglianza. ■

Vediamo ora di sintetizzare come si procede per il calcolo della funzione e del controllo ottimi e come viene usato il teorema enunciato pocanzi:

1. Consideriamo l'equazione di HJB per una funzione $\mathcal{J}$

2. Si fissi un punto arbitrario $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^d$ e si risolva il seguente problema di ottimizzazione:

$$\sup_{\alpha \in A} \left[f(x, \alpha) + \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial t}(t, x) + \mathcal{A}^{\alpha} \mathcal{J}(t, x) \right]$$

   si noti che l'incognita è rappresentata dalla variabile α.

3. Denotiamo con $\hat{\alpha}$ l'ottimo trovato, esso dipendera dalla scelta di t e x, ma anche da $\mathcal{J}$ e dalle sue derivate parziali.

4. Il controllo $\hat{\alpha}$ è il nostro candidato ad essere il controllo ottimo, il problema è che non conosciamo il valore di $\mathcal{J}$. Ciò che si fa è sostiture l'espressione di $\hat{\alpha}$ nell'equazione di HJB.

5. Come ultimo passo si risolve l'HBJ trovata nel punto precedente e usando il teorema di verifica si ha che $\mathcal{J}$ è la funzione valore e $\hat{\alpha}$ il controllo ottimo.

3.4 Problema di selezione di portafoglio di Merton

Il seguente problema, noto come problema di selezione di portafoglio di Merton, costituisce una delle più famose applicazioni dei risultati fin qui ottenuti.

Un agente economico investa in ogni istante di tempo t una proporzione α_t della propria ricchezza in un titolo rischioso e la rimanente proporzione

$1-\alpha_t$ in un titolo localmente non rischioso. Si assuma che il tasso di interesse risk-free sia costantemente pari a r cosicchè il bond B_t sia tale che:

$$dB_t = B_t r dt$$

mentre lo stock evolva secondo il modello di Black-Scholes, in cui la dinamica è data da

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t$$

dove il drift μ e la volatilità σ sono costanti e positive e W rappresenta un processo di Wiener. Definita X_t la ricchezza disponibile al tempo t, deriviamo la dinamica usando la condizione di autofinanziamento (3.4) ottenendo:

$$\begin{aligned} dX_t &= X_t \left\{ \alpha_t \frac{dS_t}{S_t} + (1-\alpha_t) \frac{dB_t}{B_t} \right\} = \\ &= (\alpha_t(\mu - r) + r) X_t dt + \alpha_t \sigma X_t dW_t \end{aligned}$$

L'obiettivo dell'investitore sia quello di massimizzare (sulla strategia α) l'utilità attesa del portafoglio all'istante finale T, partendo da una ricchezza pari a x all'isatnte t (x e t sono le nostre condizioni iniziali).

Per risolvere il problema definiamo per prima cosa la funzione valore, ricordo che l'obiettivo è rendere massima la speranza matematica del valore finale, quindi risulta definita da:

$$\mathcal{J}(t,x) = \sup_{\alpha \in A} \mathbb{E}\left[U(X_T^{t,x})\right] \qquad (t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}_{\geq} \tag{3.14}$$

con U funzione di utilità (fa le veci della $g(\cdot)$ nel problema generale definito inizialmente, si veda (3.7)).

Ricordando l'espressione dell'operatroe di kolmogorov, l'equazione di HJB associata alla dinamica della ricchezza dX_t è:

$$\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial t}(t,x) + \sup_{\alpha \in \mathbb{R}} \left[(\alpha_t(\mu - r) + r) x \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial x}(t,x) + \frac{1}{2}\alpha^2 \sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 \mathcal{J}}{\partial x^2}(t,x) \right] = 0 \tag{3.15}$$

con $(t,x) \in [0,T) \times \mathbb{R}_{\geq}$ e con la condizione al contorno

$$\mathcal{J}(T,x) = U(x), \qquad x \in \mathbb{R}_{\geq} \tag{3.16}$$

Seguiamo ora il procedimento, composto dai 5 passi, scritto in precedenza:

Annullando la derivata prima dell'espressione da massimizzare in (3.14), si ottiene una soluzione candidata ad essere quella ottimale

$$\hat{\alpha} = -\frac{\mu - r}{\sigma^2} \frac{\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial x}}{x \frac{\partial^2 \mathcal{J}}{\partial x^2}} (t, x) \tag{3.17}$$

Il problema (3.15) - (3.16) non ha una soluzione esplicita per una generica funzione di utilità $U(\cdot)$ qualsiasi. Tuttavia, nel caso particolare di una funzione di utilità della classe CRRA del tipo

$$U(x) = x^\gamma \qquad 0 < \gamma < 1,$$

tale problema è risolvibile in modo esplicito.

Ipotizziamo una soluzione della forma

$$\mathcal{J}(t, x) = \varphi(t)\, x^\gamma, \tag{3.18}$$

con $\varphi(\cdot)$ funzione deterministica. Sostituendo in (3.15)-(3.16), si ottiene il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{aligned} \varphi'(t) + \lambda \varphi(t) &= 0 \\ \varphi(T) &= 1 \end{aligned}$$

con

$$\lambda = \sup_{\alpha \in \mathbb{R}} \left[(\alpha_t(\mu - r) + r)\, \gamma - \frac{1}{2} \alpha_t^2 \sigma^2 \gamma (1 - \gamma) \right] = \frac{\mu - r}{2\sigma^2} \frac{\gamma}{1 - \gamma} + r\gamma$$

dove l'ultima uguaglianza è stata ottenuta sostituendo il valore di α determinato dalla (3.17)

$$\hat{\alpha} = -\frac{\mu - r}{\sigma^2 (1 - \gamma)}$$

che risulta essere una costante.

Risolvendo il problema di Cauchy (ad esempio con il metodo delle variabili separabili e tenendo conto della condizione iniziale) si ottiene $\varphi(t) = e^{\lambda(T-t)}$ e quindi $\mathcal{J}(t, x) = e^{\lambda(T-t)} x^\gamma$ soddisfa al problema di Cauchy più generale (3.15) - (3.16).

Il teorema di Verifica ci permette di concludere che $\mathcal{J}(t, x)$ e $\hat{\alpha}$ risultano essere rispettivamente la funzione valore e la strategia ottimale del problema di selezione di portafoglio considerato.

3.5 Metodo martingala applicato all'ottimizzazione di portafoglio a tempo continuo

Si consideri un mercato in cui il valore del tiolo localmente non rischioso sia $B_t = 1\ \forall t$, ovvero il tasso di interesse r sia pari a 0, e il valore del titolo rischioso evolva secondo la dinamica

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu_t dt + \sigma_t dW_t, \qquad 0 \leq t \leq T \tag{3.19}$$

con W processo di Wiener nello spazio di probabilità filtrato $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$ e μ e σ processi adattati a $\mathcal{F}_t$ non necessariamente costanti (si tratta quindi di un modello meno restrittivo di quello fornito dalla teoria di Black-Scholes). Una strategia di portafoglio è costituita da un processo adattato $\alpha = (\alpha_t)_t$ che rappresenta il numero di stock presenti nel portafoglio all'stante t. Dato un capitale iniziale fissato $x \geq 0$, un portafoglio si dice autofinanziante se la ricchezza in un generico istante t è data dall'equazione

$$X_t^{x,\alpha} = x + \int_0^t \alpha_s dS_s, \qquad 0 \leq t \leq T \tag{3.20}$$

Sia

$$A(x) = \{\alpha \mid X_t^{x,\alpha} \geq 0,\ 0 \leq t \leq T\}$$

l'insieme dei controlli (ovvero delle startegie di portafoglio) ammissibili. Data una funzione di utilità strettamente crescente $U(\cdot)$, definita in $\mathbb{R}_{\geq}$, appartenente almeno a C^1 e strettamente concava in $(0, +\infty)$, tale che

$$\begin{aligned} U'(0) &:= \lim_{x \to 0^+} U'(x) = +\infty \\ U'(+\infty) &:= \lim_{x \to +\infty} U'(x) = 0 \end{aligned} \tag{3.21}$$

si voglia massimizzare l'utilità attesa finale

$$\mathcal{J}(x) = \sup_{\alpha \in A(x)} \mathbb{E}\left[U(X_T^{\alpha,x})\right], \qquad x \geq 0 \tag{3.22}$$

Dal caso discreto è emerso che l'idea base del metodo martingala consiste nello scomporre il problema in un problema di ottimizzazione statica, il quale permette di determinare la ricchezza finale ottimale, e in un problema di copertura, che consente di trovare la strategia per raggiungere tale valore della ricchezza.

Trattandosi di un mercato completo, abbiamo visto che esiste un' unica MME $\mathbb{Q}$, la cui derivata di Radon-Nikodym (trasformazione di misura) rispetto a $\mathbb{P}$ si suppone tale che la seguente equazione, convenzionalmente vera, sia soddisfatta:

$$Z_t = \mathbb{E}\left[\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} | \ \mathcal{F}_t\right] = \exp\left(-\int_0^t \frac{\mu_s}{\sigma_s} dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t \left(\frac{\mu_s}{\sigma_s}\right)^2 ds\right), \qquad 0 \leq t \leq T \tag{3.23}$$

ricordando il lemma di Itô, risulta equivalente a:

$$dZ_t = -Z_t \frac{\mu_s}{\sigma_s} dW_t$$

dove

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = \exp\left(-\int_0^T \frac{\mu_s}{\sigma_s} dW_s - \frac{1}{2}\int_0^T \left(\frac{\mu_s}{\sigma_s}\right)^2 ds\right)$$

Dall'equazione (3.20) si deduce (scrivendo l'espressione in forma differenziale) che:

$$dX_t^{x,\alpha} = \alpha_t dS_t$$

e di conseguenza si ottiene

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[dX_t^{x,\alpha} | \ \mathcal{F}_t\right] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\alpha_t dS_t | \ \mathcal{F}_t\right] = \alpha_t \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[dS_t | \ \mathcal{F}_t\right] = 0$$

ovvero anche il valore di un portafoglio autofinanziante è una martingala nella MME $\mathbb{Q}$. Un valore alla scadenza H risulta quindi raggiungibile da un portafoglio autofinanziante X_t in $t = T$ sse il suo valore atteso nella MME $\mathbb{Q}$ è pari al valore del capitale iniziale x, ovvero dato $x \geq 0$ e $H \in \mathcal{L}_+^0(\mathcal{F}_T)$, ove $\mathcal{L}_+^0(\mathcal{F}_T)$ è l'insieme delle variabili casuali non negative $\mathcal{F}_T-$misurabili, si ha

$$H = X_T^{x,\alpha} \quad \exists \alpha \in A(x) \Longleftrightarrow \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[H] = \mathbb{E}[HZ_T] = x$$

Suddividiamo quindi il problema (3.22) in due fasi:

1. Calcoliamo la soluzione di

$$\mathcal{J}(x) = \sup_{H \in \mathcal{H}(x)} \mathbb{E}[U(H)]$$

con

$$\mathcal{H}(x) := \left\{H \in \mathcal{L}_+^0(\mathcal{F}_T) \ | \ \mathbb{E}[HZ_T] = x\right\}$$

Determinazione della strategia $\alpha^* \in A(x)$ tale che $X_T^{x,\alpha^*} = H^*$, dove H^* è la soluzione trovata al punto precedente.

Analizziamo ora più dettagliatamente queste fasi:

1. **Problema di ottimizzazione statica**: si tratta di risolvere un problema di ottimizzazione con vincolo lineare e, come nel caso discreto, si può usare il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, consideriamo quindi la lagrangiana :

$$\mathcal{L}(H,\lambda) = \{\mathbb{E}[U(H)] - \lambda(\mathbb{E}[HZ_T] - x)\}, \qquad \lambda \geq 0$$

per le proprietà del valor medio possiamo scrivere

$$\mathcal{L}(H,\lambda) = \mathbb{E}[U(H) - \lambda(HZ_T - x)]$$

dove la funzione da massimizzare (lagrangiano), eredita la concavità della funzione di utilità. Poichè condizione sufficiente per massimizzare un valor atteso è massimizzare il suo argomento per ogni possibile scenario $\omega \in \Omega$ o equivalentemente, annularne la derivata prima (essendo la funzione concava) risulta

$$U'(H) - \lambda Z_T = 0 \tag{3.24}$$

con il vicolo $\mathbb{E}[HZ_T] = x$. Dalle proprietà di $U(\cdot)$ deriva l'esistenza dell'inversa della sua derivata $I(\cdot) = (U')^{-1}$, strettamente decrescente in $(0, +\infty)$. La (3.24) risulta quindi equivalente a

$$H = (U')^{-1}(\lambda Z_T) = I(\lambda Z_T),$$

con $\mathbb{E}[I(\lambda Z_T)Z_T] = x$. Si assuma inoltre che $\mathbb{E}[I(\lambda Z_T)Z_T] < \infty \; \forall \lambda \geq 0$. Dal momento che (3.21) implica $I(0) = +\infty$ e $I(+\infty) = 0$, esiste un unico valore $\lambda^* = \lambda^*(x) > 0$ tale che

$$\mathbb{E}[I(\lambda^* Z_T)Z_T] = x$$

pertanto, il valore alla scadenza

$$H^* = I(\lambda^* Z_T) \in \mathcal{H}(x)$$

rappresenta la soluzione cercata.

2. **Problema di copertura**: Si vuole ora determinare la strategia ottimale, ovvero $\alpha^* \in A(x)$ tale che il corrispondente valore finale del portafoglio $X_T^{\alpha,x}$ coincida con la soluzione $H \in \mathcal{H}(x)$ trovata al punto 1 (si noti che l'esistenza di una tale strategia è garantita per il procedimento usato per determinare H^*). Sapendo che il valore di un portafoglio autofinanziante è una martingala nella misura di probabilità $\mathbb{Q}$, si può ricavare il valore del portafoglio ottimale ad ogni istante t, definito come

$$X_t^{x,\alpha^*} = M_t^* := \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[I(\lambda^* Z_T)|\mathcal{F}_t\right], \qquad 0 \leq t \leq T$$

e nel caso particolare $t = 0$ si ottiene $x = M_0^* := \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[I(\lambda^* Z_T)\right]$.

Il procedimento generale per risolvere questo problema (per maggiori dettagli si veda [2]) consiste nel calcolare la $\mathbb{Q}-$martingala M_t^* (processo che ammette differenziale stocastico e affinchè sia una Martingala dev'essere che il drift sia uguale a zero) e nello stabilirne una relazione con il $\mathbb{Q}-$moto browniano

$$W_t^* = W_t + \int_0^t \frac{\mu}{\sigma} dt$$

(si veda il teorema Girsanov). Ciò fa si che la martingala M_t^* possa essere espressa in forma differenziale come

$$dM_t^* = \varphi_t dW_t^* \tag{3.25}$$

E' vero inoltre che $dM_t^* = dX_t^{x,\alpha^*}$, dove

$$dX_t^{x,\alpha^*} = \alpha_t^* dS_t = \alpha_t^* S_t \sigma_t dW_t^* \tag{3.26}$$

da (3.19)-(3.20) infatti possiamo scrivere che

$$\frac{dS_t}{\sigma_t S_t} = \frac{\mu_t}{\sigma_t} dt + dW_t = dW_t^*$$

Pertanto la strategia ottimale risulta essere

$$\alpha_t^* = \frac{\varphi_t}{\sigma_t S_t}, \qquad 0 \leq t \leq T \tag{3.27}$$

In alcuni casi (tra cui gli esempi che seguono) la relazione (3.25) può essere esplicitata attraverso la formula di Itô, altrimenti si rende necessario l'uso della cosiddetta formula di Clark-Ocone (si veda [2]13.2.1)

3.6 Esempi metodo martingala

3.6.1 Esempio con funzione di utilità logaritmica

Si consideri una funzione di utilità del tipo $U(x) = \ln x$, la cui derivata risulta essere $U'(x) = \frac{1}{x}$. L'inversa della derivata coincide dunque con $I(y) = \frac{1}{y}$, $y > 0$ e il valore del portafoglio ottimale ad ogni istante t è dato da:

$$X_t^{x,\alpha^*} = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\frac{1}{\lambda^* Z_T}|\mathcal{F}_t\right] = \mathbb{E}\left[\frac{Z_T}{Z_t}\frac{1}{\lambda^* Z_T}|\mathcal{F}_t\right] = \frac{1}{\lambda^* Z_t} =: M_t^*, \qquad 0 \leq t \leq T$$

ove per passare dalla misura $\mathbb{Q}$ alla misura $\mathbb{P}$ nel valor atteso condizionato si è usata la formula di Bayes (a tal proposito si veda Teorema 2.108 in [2]). Si ha inoltre che λ^* è tale che $X_0^{x,\alpha^*} = x$, ovvero $\lambda^* = \frac{1}{x}$ e $X_t^{x,\alpha^*} = \frac{x}{Z_t}$ ($Z_0 = 1$ in quanto derivata di R.Nycodym si veda[2]). Si ottiene quindi:

$$dM_t^* = d\left(\frac{x}{Z_t}\right) = d\left(x\exp\left(\int_0^t \frac{\mu_s}{\sigma_s}dW_s + \frac{1}{2}\int_0^t\left(\frac{\mu_s}{\sigma_s}\right)^2 ds\right)\right)$$

Applicando la formula di Itô a $M_t^* = \frac{x}{Z_t}$ si ricava la relazione

$$\begin{aligned}
dM_t^* &= M_t^*\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\mu_t}{\sigma_t}\right)^2 dt + \frac{\mu_t}{\sigma_t}dW_t + \frac{1}{2}\left(\frac{\mu_t}{\sigma_t}\right)^2 dt\right) \\
&= M_t^*\frac{\mu_t}{\sigma_t}\left(\frac{\mu_t}{\sigma_t}dt + dW_t\right) \\
&= M_t^*\frac{\mu_t}{\sigma_t}dW_t^* = \varphi_t dW_t^*
\end{aligned}$$

Dall'equazione (3.27) si ottiene il numero di stock presenti nel portafoglio ottimale:

$$\alpha_t^* = \frac{\mu_t}{\sigma_t^2}\frac{X_t^{x,\alpha^*}}{S_t}, \qquad 0 \leq t \leq T$$

che rappresenta la strategia ottimale cercata. Consideriamo la frazione della ricchezza totale investita nello stock, ovvero

$$\theta_t^* = \frac{\alpha_t S_t}{X_t^{x,\alpha^*}} = \frac{\mu_t}{\sigma_t^2}\frac{X_t^{x,\alpha^*}}{S_t}\frac{S_t}{X_t^{x,\alpha^*}} = \frac{\mu_t}{\sigma_t^2}, \qquad 0 \leq t \leq T$$

quindi tale proporzione è indipendente dal valore corrente di X_t^{x,α^*}.

3.6.2 Esempio con funzione di utilità potenza

Consideriamo un'altro esempio, in cui la funzione di utilità è del tipo:

$$U(x) = \frac{x^\gamma}{\gamma}, \qquad 0 < \gamma < 1$$

da cui risulta $I(y) = y^{\frac{1}{\gamma-1}} = y^{-\delta}$ e si suppone che il rapporto $\zeta_t := \frac{\mu_t}{\sigma_t}$ sia deterministico. Il valore del portafoglio all'istante t è dato da

$$\begin{aligned}
X_t^{x,\alpha} &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[(\lambda^*)^{-\delta} Z_T^{-\delta} | \mathcal{F}_t\right] = (\lambda^*)^{-\delta}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\exp\left(-\int_0^T \zeta_t \delta dW_s + \frac{1}{2}\int_0^T \zeta_t^2 \delta ds\right) | \mathcal{F}_t\right] \\
&= (\lambda^*)^{-\delta}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\exp\left(\int_0^T \zeta_t \delta dW_s^* - \frac{1}{2}\int_0^T \zeta_t^2 \delta ds\right) | \mathcal{F}_t\right] \\
&= (\lambda^*)^{-\delta}\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^T \zeta_t^2 \delta(\delta-1) ds\right)\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\exp\left(\int_0^T \zeta_t \delta dW_s^* - \frac{1}{2}\int_0^T \zeta_t^2 \delta^2 ds\right) | \mathcal{F}_t\right] \\
&= (\lambda^*)^{-\delta}\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^T \zeta_t^2 \delta(\delta-1) ds\right)\exp\left(\int_0^t \zeta_t \delta dW_s^* - \frac{1}{2}\int_0^t \zeta_t^2 \delta^2 ds\right)
\end{aligned}$$

dove la terza uguaglianza è stata ottenuta esprimendo il valore atteso in termini di W_t^* ricordando che $W_t^* = W_t + \int_0^t \frac{\mu}{\sigma} dt$. Sia ha quindi che $0 \leq t \leq T$ e λ^* è tale che $X_0^{x,\alpha^*} = x$, ossia $(\lambda^*)^{-\delta}\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^T \zeta_t^2 \delta(\delta-1) ds\right) = x$.

Si ottiene inoltre l'uguaglianza

$$M_t^* = X_t^{x,\alpha^*} = x\exp\left(\int_0^t \zeta_t \delta dW_s^* - \frac{1}{2}\int_0^t \zeta_t^2 \delta^2 ds\right)$$

applicando la formula di Itô si ricava

$$\begin{aligned}
dM_t^* &= d\left(x\exp\left(\int_0^t \zeta_t \delta dW_s^* - \frac{1}{2}\int_0^t \zeta_t^2 \delta^2 ds\right)\right) \\
&= M_t^*\left(-\frac{1}{2}\zeta_t^2\delta^2 dt + \zeta_t \delta dW_t^* + \frac{1}{2}\zeta_t^2 \delta^2 dt\right) \\
&= M_t^* \zeta_t \delta dW_t^*.
\end{aligned}$$

Dalle equazione (3.26) si ottiene che la strategia ottimale risulta essere

$$\alpha_t^* = \frac{\delta \lambda_t}{\sigma_t}\frac{X_t^{x,\alpha^*}}{S_t} = \frac{\mu_t}{\sigma_t^2(1-\gamma)}\frac{X_t^{x,\alpha^*}}{S_t}$$

e passando alla proporzione investita nello stock, si ottiene

$$\theta_t^* = \frac{\alpha_t S_t}{X_t^{x,\alpha^*}} = \frac{\mu_t}{\sigma_t^2 (1-\gamma)} \frac{X_t^{x,\alpha^*}}{S_t} \frac{S_t}{X_t^{x,\alpha^*}} = \frac{\mu_t}{\sigma_t^2 (1-\gamma)}$$

che anche in questo caso non dipende dal valore corrente di X_t^{x,α^*}.

Chapter 4

Conclusioni

Nello sviluppo di questa tesi si è analizzato il problema di selezione del portafoglio in un'ottica di tipo continuo seguendo due approcci, il metodo della programmazione dinamica e il metodo martingala. Prima di introdurre gli approcci a tempo continuo, abbiamo presentato, da un punto di vista generale, il tema dei criteri di preferenza e richiamata la teoria dell'utilità attesa di Von Neumann-Morgenstern la quale ci permette di descrivere l'atteggiamento di un soggetto (agente) che opera in condizioni di incertezza. Infatti è ragionevole supporre che agenti diversi abbiano una diversa attitudine di fronte al rischio e questo viene modellizzato prendendo in considerazione funzioni di utilità diverse, che però tutte soddisfano le seguenti proprietà: monotonia, continuità, strettamente concava e l' utilità marginale tende a zero quando il capitale tende all'infinito.

Successivamente abbiamo analizzato l'ottimizzazione di portafoglio a tempo discreto, spiegando nel dettaglio i due metodi che ci permettono di fare l'allocazione ottima, metodo martinagala e metodo della programmazione dinamica, e facendo degli esempi per chiarire il tutto, esempi basati sulla massimizzazione dell'utilità attesa.

Dopo aver dato le nozioni di calcolo stocastico, utili a estendere le tecniche a tempo discreto e a un tempo continuo, abbiamo visto come il processo che rappresenta l'evoluzione aletaoria dei prezzi degli attivi è supposto essere un processo diffusivo: in tale ipotesi il problema può essere affrontato come un problema di controllo stocastico. Questo è stato l'approccio iniziale di Merton, il cui obiettivo ultimo è quello di gestire un portafoglio in modo da rendere massima la speranza matematica del valore finale del portafoglio, e lo fa andando a trovare la soluzione di un'oportuna equazione alle derivate parziali del secondo ordine. Ci siamo poi concentrati sulla soluzione del problema di allocazione ottima del portafoiglio attraverso un altro metodo basato essenzialmete sulla teoria delle martingale, il metodo martingala.

Oltre a dare una descrizione dettagliata dei due metodi abbiamo fatto degli esempi, per capire dal punto di vista pratico come si applicano.

Concludendo abbiamo visto come la maggior parte dei problemi a tempo continuo qui trattati sono stati considerati nell'ambito del modello di mercato di Black-Scholes. Tuttavia, si tratta di un modello semplicistico, che non considera molti aspetti e imperfezioni dei mercati reali (mediante test statistici ci si è accorti che il modello log-normale non rappresenta molto fedelmente i prezzi effettivamente osservati). Allo scopo di una trattazione più realistica dei problemi considerati questo modello è stato recentemente rielaborato in forme più generali. Per quanto riguarda il metodo martingala, invece, è stata concentrata l'attenzione sulla sua applicazione nei mercati incompleti specie in presenza di vincoli di portafoglio o di costi di transazione.

Bibliography

[1] A. Nicolò, *Appunti delle lezioni di economia dell'informazione:* incertezza e informazione, Università di Padova, 2006.

[2] A. Pascucci, *Calcolo stocastico per la finanza,* Springer, Bologna, 2007.

[3] H. Pham, *On some recent aspects of stochastic control and their applications*, Probability Surveys, vol 2, pp.506-549, 2005.

[4] N. Touzi, *Stochastic control and application to Finance*, Appunti dallo Special Semester on financial markets, Pisa, Aprile-Luglio 2002, pp.6-20.

[5] J. Sass, *Stochastic control with applications to financial Mathematics*, Appunti delle lezioni, RICAM-JKU Linz, 2006.

[6] R. Merton, *Continuos Time Finance,* Basil Blackwell, Oxford, 1990.

[7] T. Björk, *Arbitrage Theory in Continuos Time,* Oxford University Press, 1998.

[8] W. Runggaldier, A. Pascucci, *Finanza Matematica,* Teoria e problemi per mercati multiperiodali, Springer, Bologna\Padova, 2009.

[9] H. Markowitz, Portfolio selection, *Journal of Finance,* **7** (1952), pp.77-91.