



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA DELL'INFORMAZIONE
CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA DELL'INFORMAZIONE

Controllo di un Esoscheletro per la gamba

Control of a Leg Exoskeleton

Laureando:

Baccan Giovanni

Relatrice:

Prof. M. E. Valcher

Anno Accademico 2021/2022

20 Settembre 2022

Abstract

La tesi propone lo studio di una gamba dotata di esoscheletro in grado di aumentare la coppia disponibile al ginocchio e quindi agevolare movimento e comfort. Si affronteranno l'analisi del sistema fisico e di un suo equilibrio, la sua trasposizione in equazioni di stato con relativa funzione di trasferimento, ed infine la progettazione di un controllore in grado di far soddisfare al risultante sistema controllato determinate specifiche.

Indice

| | |
|---|-----------|
| 1 Studio modello fisico Gamba ed Esoscheletro..... | 4 |
| 1.1 Descrizione Modello Fisico | 4 |
| 1.2 Modello di stato e punto di equilibrio..... | 6 |
| 1.3 Sistema Linearizzato | 8 |
| 1.4 Funzione di Trasferimento | 10 |
| 1.4.1 Autovalori A..... | 10 |
| 2 Progettazione del controllore | 14 |
| 2.1 Premesse | 14 |
| 2.2 Specifiche sul sistema controllato | 18 |
| 2.2.1 Variazioni parametriche..... | 20 |
| 2.3 Proposta di un primo controllore | 21 |
| 2.4 Proposta di un secondo controllore | 27 |
| 3 Conclusioni | 31 |

1 Studio modello fisico Gamba ed Esoscheletro

1.1 Descrizione modello fisico

Viene esaminato un modello fisico il cui sistema dinamico è costituito da una gamba cui è applicato l'esoscheletro, un dispositivo generalmente composto da motori e attuatori che fungono da muscoli artificiali. Il suo scopo è quello di agevolare il movimento riducendo lo sforzo richiesto da parte dell'utente.

In particolare, quello che andremo ad analizzare riguarda un dispositivo in grado di aumentare la coppia disponibile nell'articolazione del ginocchio.

Il suo schema è illustrato nella figura seguente:

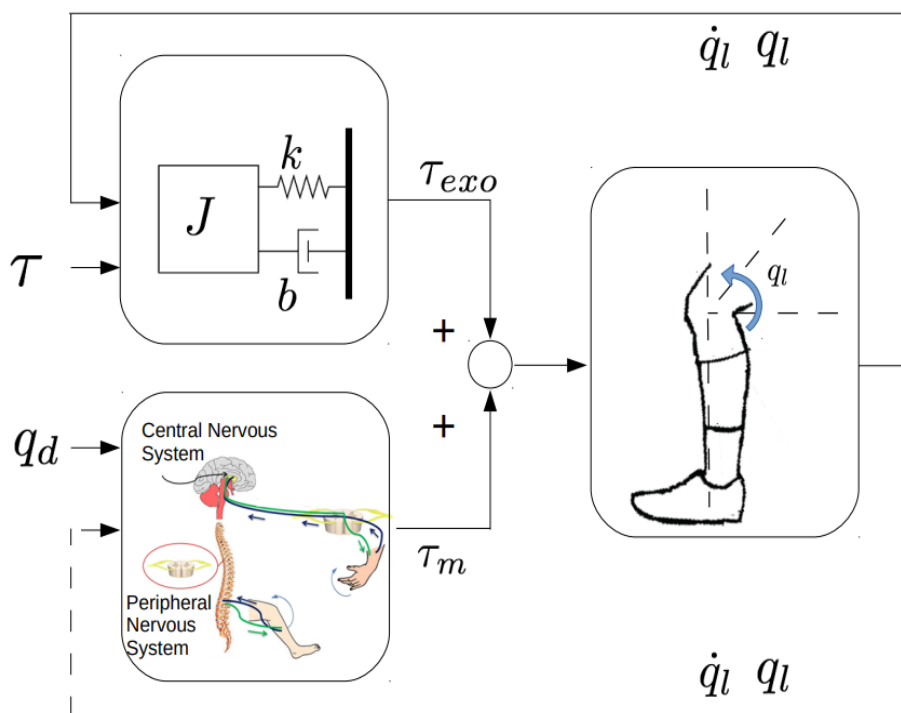


Figura 1: Sistema dinamico gamba con esoscheletro.

L'attuazione muscolare è controllata dal sistema nervoso centrale e periferico, mentre il contributo artificiale è dovuto al motore, controllato in coppia.

Il motore viene modellato come un sistema massa-molla-smorzatore per tenere conto dei momenti visco-elastici che ostacolano il movimento della gamba.

Le equazioni che regolano la dinamica del nostro sistema sono quindi:

$$\begin{cases} ml^2 \ddot{q}_l + k(q_l - q_m) + b(\dot{q}_l - \dot{q}_m) = -mgl \cos(q_l) + \tau_m \\ J_m \ddot{q}_m + k(q_m - q_l) - b(\dot{q}_l - \dot{q}_m) = \tau \end{cases}$$

dove m rappresenta la massa della coscia, l è la distanza dal baricentro della coscia al giunto del ginocchio, q_m la posizione angolare del motore, q_l la posizione angolare della coscia rispetto al polpaccio, τ_m il momento risultante esercitato dai gruppi muscolari, τ la coppia motrice di controllo.

Infine, J_m è l'inerzia del motore mentre k e b sono le costanti che rappresentano la rigidità della trasmissione del motore e il suo smorzamento, rispettivamente.

Inoltre, facendo fede alla *Servo-Hypotesis* assumiamo che il movimento della gamba, regolato dal sistema nervoso, eserciti un'azione sui muscoli simile a quella di un controllore in retroazione per ottenere la posizione desiderata.

Si ottiene quindi un'ulteriore equazione:

$$\tau_m = k_p(q_d - q_l) - k_d \dot{q}_l$$

Ossia una semplice legge che simula un controllore con azione proporzionale-derivativa, dove q_d è la posizione desiderata della coscia.

1.2 Modello di stato e Punto di equilibrio

Al fine di analizzare il sistema più facilmente, introduciamo una rappresentazione equivalente in forma di stato. Procediamo dunque isolando i termini di ordine maggiore dai loro coefficienti con semplici passaggi algebrici.

In questo modo il sistema

$$\begin{cases} ml^2 \ddot{q}_l + k(q_l - q_m) + b(\dot{q}_l - \dot{q}_m) = -mgl \cos(q_l) + \tau_m \\ J_m \ddot{q}_m + k(q_m - q_l) - b(\dot{q}_l - \dot{q}_m) = \tau \end{cases}$$

$$\tau_m = k_p(q_d - q_l) - k_d \dot{q}_l$$

Può essere riscritto come:

$$\begin{cases} \ddot{q}_l + \frac{k(q_l - q_m)}{ml^2} + \frac{b(\dot{q}_l - \dot{q}_m)}{ml^2} = \frac{-mgl \cos(q_l)}{ml^2} + \frac{\tau_m}{ml^2} \\ \ddot{q}_m + \frac{k(q_m - q_l)}{J_m} - \frac{b(\dot{q}_l - \dot{q}_m)}{J_m} = \frac{\tau}{J_m} \end{cases}$$

$$\tau_m = k_p(q_d - q_l) - k_d \dot{q}_l$$

Successivamente introduciamo le variabili di stato $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (q_l, q_m, \dot{q}_l, \dot{q}_m)$ e lasciamo a primo membro delle varie equazioni del sistema solo le derivate delle variabili:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_3 \\ \dot{x}_2 = x_4 \\ \dot{x}_3 = \frac{-mgl \cos(x_1) - k(x_1 - x_2) - b(x_3 - x_4) + k_p(q_d - x_1) - k_d x_3}{ml^2} \\ \dot{x}_4 = \frac{\tau - k(x_2 - x_1) + b(x_3 - x_4)}{J_m} \end{cases}$$

$$y = \tau_m = k_p(q_d - x_1) - k_d x_3$$

Determiniamo ora le condizioni di equilibrio ad ingresso costante volendo determinare il valore di q_d affinché la coscia sia parallela al suolo ($q_l = 0$), assumendo di avere a disposizione la misura di τ_m , fornita da appositi sensori elettromiografici posizionati sui gruppi muscolari che effettuano l'attuazione, e la coppia motrice τ .

Si suppone inoltre che l'esoscheletro sia spento, quindi nelle condizioni in cui l'ingresso del motore controllato in coppia abbia $\tau = 0$ costante.

Grazie a queste condizioni possiamo quindi scrivere $\dot{q}_l = \ddot{q}_l = 0$ dato che la posizione angolare della coscia non deve cambiare nel tempo. Le stesse condizioni vengono applicate anche a q_m , portandoci ad avere $\ddot{q}_l = \ddot{q}_m = \dot{q}_l = \dot{q}_m = q_l = \tau = 0$.

Questo equivale di fatto a cercare gli equilibri del sistema, avendo assunto l'ingresso τ costante e ponendo tutte le derivate delle variabili di stato nulle.

Le equazioni si riducono a:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = 0 \\ \dot{x}_2 = 0 \\ \dot{x}_3 = \frac{-mgl - k(-x_2) + k_p(q_d)}{ml^2} = 0 \\ \dot{x}_4 = \frac{-k(x_2)}{J_m} = 0 \\ \tau_m = k_p(q_d) \end{array} \right.$$

Che mi portano a

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = 0 \\ \dot{x}_2 = 0 \\ \dot{x}_3 = -mgl + k_p(q_d) = 0 \\ x_2 = 0 \\ q_d = \tau_m/k_p \end{array} \right.$$

E infine a

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = 0 \\ \dot{x}_2 = 0 \\ \dot{x}_3 = 0 \\ x_2 = 0 \\ q_d = \frac{mgl}{k_p} \end{array} \right.$$

Ricordandoci il significato delle variabili di stato, l'equilibrio relativo all'ingresso costante $\tau = 0$ risulta quindi essere:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (q_l, q_m, \dot{q}_l, \dot{q}_m) = (0, 0, 0, 0)$$

1.3 Sistema Linearizzato

Per lo studio del sistema ricorriamo alla sua rappresentazione in forma di stato e, dato che le equazioni trovate descrivono un sistema chiaramente non lineare, dovremo linearizzare attorno alla configurazione di equilibrio trovata precedentemente.

Considerando $u = \tau$ come ingresso di controllo e $y = \tau_m$ come uscita del sistema, riscriviamo il sistema non lineare

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_3 \\ \dot{x}_2 = x_4 \\ \dot{x}_3 = \frac{-mgl\cos(x_1) - k(x_1 - x_2) - b(x_3 - x_4) + k_p(q_d - x_1) - k_d x_3}{ml^2} \\ \dot{x}_4 = \frac{u - k(x_2 - x_1) + b(x_3 - x_4)}{J_m} \end{cases}$$

$$y = \tau_m = k_p(q_d - x_1) - k_d x_3$$

Nella forma:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, x_3, x_4, u) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, x_3, x_4, u) \\ \dot{x}_3 = f_3(x_1, x_2, x_3, x_4, u) \\ \dot{x}_4 = f_4(x_1, x_2, x_3, x_4, u) \\ y = k_p q_d - k_d x_1 - k_p x_3 \end{cases}$$

Da questa scrittura ricaviamo la matrice Jacobiana, calcolando le derivate delle varie funzioni nel punto di equilibrio $(x_{1eq}, x_{2eq}, x_{3eq}, x_{4eq}) = (0,0,0,0)$, $u = \tau = 0$.

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} & \frac{\partial f_1}{\partial x_4} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} & \frac{\partial f_2}{\partial x_4} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} & \frac{\partial f_3}{\partial x_4} \\ \frac{\partial f_4}{\partial x_1} & \frac{\partial f_4}{\partial x_2} & \frac{\partial f_4}{\partial x_3} & \frac{\partial f_4}{\partial x_4} \end{bmatrix}_{(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_{1eq}, x_{2eq}, x_{3eq}, x_{4eq}), u=0}$$

Di seguito sono riportati i risultati di ogni derivata parziale presente nella matrice J:

$$\begin{array}{llll}
\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = 0 & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} = 0 & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} = 1 & \frac{\partial f_1}{\partial x_4} = 0 \\
\frac{\partial f_2}{\partial x_1} = 0 & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = 0 & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} = 0 & \frac{\partial f_2}{\partial x_4} = 1 \\
\frac{\partial f_3}{\partial x_1} = -\frac{k_p+k-mgl\sin(x_1)}{ml^2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} = \frac{k}{ml^2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} = -\frac{k_d+b}{ml^2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_4} = \frac{b}{ml^2} \\
\frac{\partial f_4}{\partial x_1} = \frac{k}{J_m} & \frac{\partial f_4}{\partial x_2} = -\frac{k}{J_m} & \frac{\partial f_4}{\partial x_3} = \frac{b}{J_m} & \frac{\partial f_4}{\partial x_4} = -\frac{b}{J_m}
\end{array}$$

Sostituendo ora i valori di (x_1, x_2, x_3, x_4) con quelli del punto di equilibrio

$$(x_{1eq}, x_{2eq}, x_{3eq}, x_{4eq}) = (0,0,0,0), \tau = 0$$

Otengo la matrice del sistema linearizzato

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k_p+k}{ml^2} & \frac{k}{ml^2} & -\frac{k_d+b}{ml^2} & \frac{b}{ml^2} \\ \frac{k}{J_m} & -\frac{k}{J_m} & \frac{b}{J_m} & -\frac{b}{J_m} \end{bmatrix}$$

Successivamente, al fine di ottenere un sistema del tipo:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$$

Ricavo la matrice B dal sistema del modello di stato non lineare, derivando il modello non lineare rispetto all'ingresso u e calcolando lo iacobiano risultante in corrispondenza alla specifica condizione di equilibrio:

$$B = \left[0 \quad 0 \quad 0 \quad \frac{1}{J_m} \right]^T$$

Mentre la matrice C può essere ricavata in modo del tutto simile considerando l'equazione dell'uscita $y = k_p q_d - k_d x_1 - k_p x_3$ e derivando rispetto a (x_1, x_2, x_3, x_4) :

$$C = [-k_p \quad 0 \quad -k_d \quad 0]$$

Otteniamo così il sistema linearizzato scritto in forma matriciale, dove con x si intende il vettore (x_1, x_2, x_3, x_4) e con \dot{x} il vettore $(\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3, \dot{x}_4)$.

$$\dot{x} = Ax + Bu = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k_p+k}{ml^2} & \frac{k}{ml^2} & -\frac{k_d+b}{ml^2} & \frac{b}{ml^2} \\ \frac{k}{J_m} & -\frac{k}{J_m} & \frac{b}{J_m} & -\frac{b}{J_m} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{J_m} \end{bmatrix} u$$

$$y = Cx = [-k_p \quad 0 \quad -k_d \quad 0] x$$

1.4 Funzione di Trasferimento

Iniziamo introducendo i valori numerici dei parametri fisici del nostro sistema:

$$k = 0.80 \text{ Nm/rad}, \quad b = 2.0 \times 10^{-2} \text{ Nm/rad/s}, \quad m = 1.2 \text{ Kg}, \quad l = 0.40 \text{ m}, \\ J_m = 0.5 \times 10^{-3} \text{ Kgm}^2, \quad K_p = 40 \text{ Nm/rad}, \quad k_d = 15 \text{ Nm/rad/s}$$

Le matrici diventano dunque

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -212.5 & 4.2 & -78.2 & 0.1 \\ 1600 & -1600 & 40 & -40 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2000 \end{bmatrix} \quad C = [-40 \quad 0 \quad -15 \quad 0]$$

1.4.1 Autovalori di A

Per ricavare gli autovalori di A dobbiamo calcolare il polinomio caratteristico e gli autovalori tramite la formula $\det(sI - A) = 0$

$$\det(sI - A) = \begin{vmatrix} s & 0 & -1 & 0 \\ 0 & s & 0 & -1 \\ 212.5 & -4.2 & s + 78.2 & -0.1 \\ -1600 & 1600 & -40 & s + 40 \end{vmatrix} = 0$$

Che si riduce a

$$\begin{aligned} \det(sI - A) &= s \begin{vmatrix} s & 0 & -1 \\ -4.2 & s + 78.2 & -0.1 \\ 1600 & -40 & s + 40 \end{vmatrix} + 212.5 \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ s & 0 & -1 \\ 1600 & -40 & s + 40 \end{vmatrix} + \\ &+ 1600 \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ s & 0 & -1 \\ -4.2 & s + 78.2 & -0.1 \end{vmatrix} \approx (s^2 + 40.04s + 1598)(s + 2.765)(s + 75.43) \end{aligned}$$

Che porta a identificare gli autovalori

$$\lambda_1 = -2.765 \quad \lambda_2 = -75.43 \quad \lambda_{3,4} = -20,019 \pm 34,609j$$

La funzione di trasferimento può essere facilmente calcolata grazie a

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B$$

Risolvendo la formula abbiamo dunque

$$G(s) = \frac{-3125(s + 40)(s + 2.667)}{(s + 75.43)(s + 2.765)(s^2 + 40.04s + 1598)}$$

Che presenta gli autovalori della matrice A come poli (si notano due poli complessi coniugati) e ha a numeratore due zeri entrambi stabili (in quanto entrambi a parte reale negativa). La funzione presenta inoltre un guadagno (sia di Evans che di Bode) negativo.

Possiamo dire che il sistema è BIBO stabile visto che tutti i poli della sua funzione di trasferimento hanno parte reale negativa.

La risposta al gradino, data la BIBO stabilità del sistema, non divergerà:

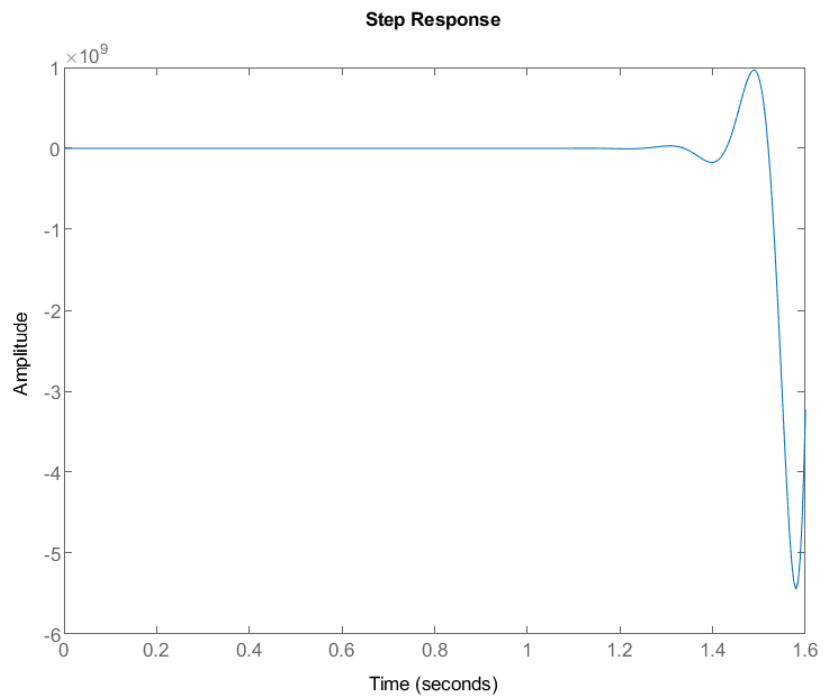


Figura 2: Risposta al gradino di $G(s)$

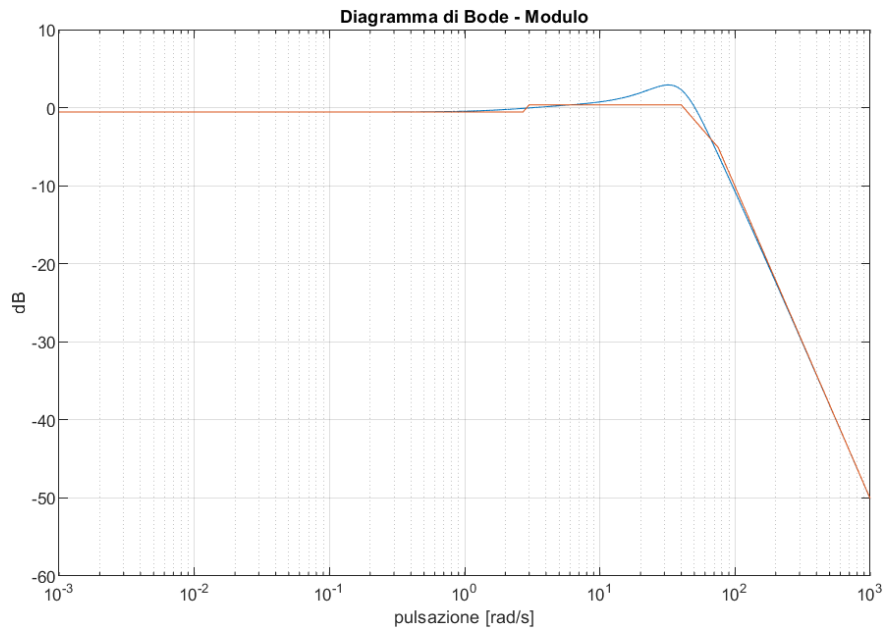


Figura 3: Diagramma di Bode del modulo di $G(s)$

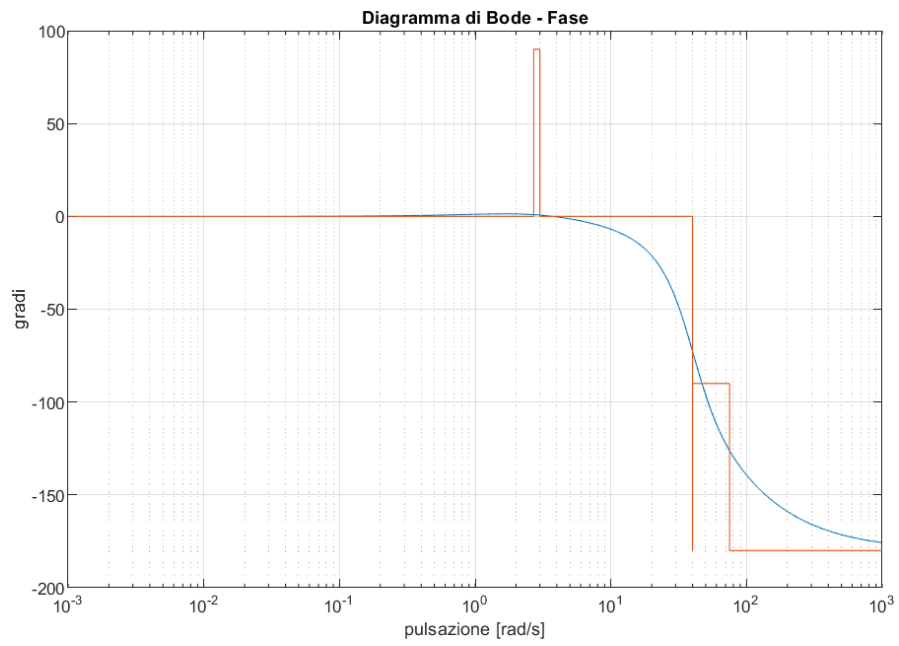


Figura 3: Diagramma di Bode delle fasi di $G(s)$

2 Progettazione del Controllore

2.1 Premesse

Prima di iniziare con la progettazione vera e propria del controllore, vale la pena spendere qualche parola sui parametri che andremo ad impiegare.

Se la funzione di trasferimento del nostro sistema $W(s)$ rispetta le ipotesi di essere:

- 1) Strettamente Propria
- 2) Bibo Stabile
- 3) $W(0) \neq 0$

Allora possiamo dimostrare che la risposta al gradino del sistema $w_{-1}(t)$ permanente y_{rp} ottenuta come uscita limitata (grazie alla seconda ipotesi) del sistema all'ingresso $u(t) = \delta_{-1}(t)$, ha componente di regime permanente:

$$y_{rp}(t) = W(j\omega)e^{j\omega t}|_{\omega=0} = W(0)$$

Questo risultato, unito alla terza ipotesi porta ad avere

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y_{rp}(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} w_{-1}(t) = W(0) \neq 0$$

Introduciamo il **tempo di salita** al 5% come:

$$t_r := \min\{t \geq 0: |w_{-1}(t) - W(0)| \leq 0,05 \cdot |W(0)|\}$$

ossia il tempo impiegato dalla risposta al gradino del sistema affinché entri per la prima volta in un intervallo fissato attorno al valore finale.

Il **tempo di assestamento (settling time)** al 5% è definito in modo simile:

$$t_s := \min\{\hat{t} > 0: \forall t \geq \hat{t} \quad |w_{-1}(t) - W(0)| \leq 0,05 \cdot |W(0)|\}$$

e indica il tempo impiegato dalla risposta al gradino del sistema per entrare nell'intervallo fissato attorno al valore finale senza più uscirne.

La **sovraelongazione percentuale** è invece definita come:

$$s := \max_{t \geq 0} \frac{w_{-1}(t) - W(0)}{W(0)} \cdot 100\%$$

Ricordiamo inoltre la definizione di **tipo del sistema**: un sistema I/O lineare, tempo invariante, BIBO stabile e causale a tempo continuo con funzione di trasferimento $W(s)$ propria e con $W(0) \neq 0$, è definito **di tipo k** se la differenza fra il segnale canonico $\delta_{-(k+1)}(t)$ e la risposta forzata del sistema a tale segnale $w_{-(k+1)}(t)$ a regime è costante e non nulla, con il segnale canonico definito come:

$$\delta_{-(k+1)}(t) = \frac{t^k}{k!} \delta_{-1}(t)$$

In questo caso si dice che il sistema è in grado di inseguire il segnale canonico con errore di regime permanente costante ma non nullo.

$$e_{rp}^{k+1} := \lim_{t \rightarrow +\infty} [\delta_{-(k+1)}(t) - w_{-(k+1)}(t)] \neq 0$$

Tale errore risulta essere costante e diverso da zero per un solo $k \in \mathbb{Z}_+$, per valori di k più piccoli di quest'ultimo si otterranno errori nulli (il sistema è in grado di inseguire tutti i segnali canonici di tipo $\hat{k} < k$) mentre per i valori di k più grandi l'errore risulterà essere infinito.

Si ricava quindi che un modello I/O BIBO stabile è di tipo 0 se vale

$$e_{rp}^1 := \lim_{t \rightarrow +\infty} [\delta_{-1}(t) - w_{-1}(t)] = \lim_{t \rightarrow +\infty} [1 - W(0)] \neq 0$$

che corrisponde ad avere

$$W(0) \neq 1$$

Per essere di tipo $k > 0$, ricorriamo al teorema del valor finale e allo sviluppo di McLaurin per $W(s)$ per scrivere:

$$e_{rp}^{k+1} := \lim_{s \rightarrow 0} \left[s \cdot \frac{1 - W(s)}{s^{k+1}} \right] = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1 - \left[W(0) + \sum_{i=1}^{\infty} \left[\frac{1}{i!} \cdot \frac{d^i W}{ds^i} \right]_{s=0} \cdot s^i \right]}{s^k} = \text{cost} \neq 0$$

Che porta alle condizioni:

$$W(0) = 1, \quad \left[\frac{d^i W}{ds^i} \right]_{s=0} = 0 \text{ per } i = 1, 2 \dots k - 1, \quad \left[\frac{d^k W}{ds^k} \right]_{s=0} \neq 0$$

Che si traducono di fatto nei segnali canonici che il sistema è in grado di inseguire con errore nullo.

D'ora in avanti si adotterà uno schema di controllo in retroazione unitaria negativa con funzione di trasferimento del sistema ad anello chiuso $W(s)$.

In catena aperta la funzione di trasferimento è quindi $C(s)G(s)$, con $C(s)$ che rappresenta la FDT del controllore e $G(s)$ la FDT del processo, entrambe funzioni proprie.

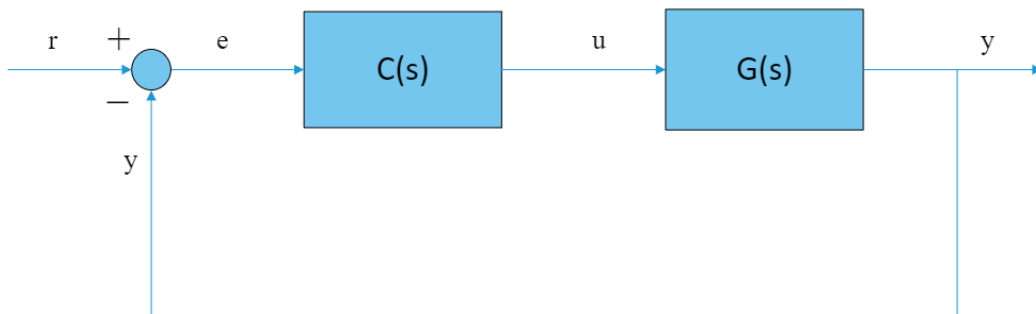


Figura 4: Schema a blocchi controllore

La risultante FDT del sistema in catena chiusa $W(s)$ può quindi essere ottenuta operando nel dominio delle trasformate:

$$Y(s) = \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)} R(s)$$

Da cui si può facilmente evincere:

$$W(s) = \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)}$$

Per fare in modo che tale funzione rispetti le ipotesi viste precedentemente, in particolare che $W(s)$ sia strettamente propria (condizione verificata se $C(s)G(s)$ lo è) e che $W(0) \neq 0$. In questo caso si dovrà avere $C(0)G(0) \neq 0$.

Viene definita **pulsazione di attraversamento** ω_T (se esiste) quell'unica pulsazione positiva per la quale il diagramma di Bode delle ampiezze di $C(s)G(s)$ incrocia l'asse delle ascisse:

$$|C(j\omega_T)G(j\omega_T)| = 1$$

Se la pulsazione di attraversamento è ben definita, introduciamo il **margin di fase** m_ψ come:

$$m_\psi := \arg(C(j\omega_T)G(j\omega_T)) + 180^\circ$$

Con $\arg(C(j\omega_T)G(j\omega_T))$ che è detta **fase di attraversamento**.

Per determinare il tipo del sistema, ricordiamo che $W(s)$ è di tipo 0 se $W(0) \neq 1$, che equivale a dire $\lim_{s \rightarrow +0} C(s)G(s) \neq \infty$, ossia $C(s)G(s)$ non presenta poli nell'origine.

Per il caso $k > 0$, si dimostra che:

$$e_{rp}^{k+1} = \begin{cases} 0, & \gamma > k \\ \frac{1}{k_B}, & \gamma = k \\ \infty, & \gamma < k \end{cases}$$

Con k_B che corrisponde al guadagno di Bode e γ che rappresenta il numero di poli nell'origine di $C(s)G(s)$.

Da tali condizioni si deduce facilmente che il sistema è di tipo $k \geq 1$ quando $C(s)G(s)$ presenta un polo nell'origine della stessa molteplicità k .

2.1 Specifiche sul sistema controllato

Il nostro obiettivo è quello di progettare un controllore in grado di attribuire al sistema controllato determinate specifiche. In particolare, deve essere in grado di annullare completamente lo sforzo richiesto all'utente (quindi deve valere $y = 0$) a partire dalla condizione iniziale di coscia parallela al suolo.

Per massimizzare il confort nell'utilizzo dell'esoscheletro imponiamo ulteriori condizioni da rispettare: la coppia muscolare τ_m (che corrisponde all'uscita) non dovrebbe mai essere soggetta a inversioni di segno, e dovrebbe entrare nell'intervallo $\pm 0.2354 Nm$, posizionato intorno al valore finale desiderato, senza più uscirne in un tempo non superiore a $2 \times 10^{-3}s$.

Per avere un errore di inseguimento nullo al segnale costante di riferimento (ossia il gradino unitario moltiplicato per $-4,71 Nm$), dobbiamo imporre che il sistema sia almeno di tipo 1, che viste le considerazioni fatte precedentemente corrisponde ad avere (almeno) un polo posizionato nell'origine.

Dato che la funzione di trasferimento del sistema in catena aperta $G(s)$ non presenta né poli né zeri nell'origine, sarà compito del controllore introdurre nella funzione di trasferimento $W(s)$ in catena chiusa.

Dalla prima specifica ricaviamo quindi che le condizioni iniziali del sistema corrispondono a:

$$\tau_m(0) = mgl = 4,71Nm$$

In ingresso al controllore avremo quindi il segnale $e(t)$ calcolato come differenza fra segnale di riferimento $r(t) = \tau_{mREF} = 0$:

$$e(t) = \tau_m(0) - \tau_{mREF} = -4,71 Nm$$

Dalle altre specifiche ricaviamo che la non-inversione di segno dell'uscita corrisponde alla richiesta di avere una sovraelongazione nulla, ossia una sovraelongazione massima percentuale dello 0%.

Questo ci porta a scrivere:

$$S = \frac{|\tau_{mMax} - \tau_{mREF}|}{|\tau_{mREF} - \tau_m(0)|} = 0$$

e quindi:

$$\tau_{mMax} = \tau_{mREF}$$

Dato che le specifiche richiedono che la massima sovralongazione sia nulla, è opportuno approssimare il sistema come del primo ordine a un polo dominante (ossia con un polo reale molto più lento e quindi con costante di tempo maggiore rispetto agli altri poli) che ci porta a chiedere $arg(C(j\omega_T)G(j\omega_T))$ di circa $-\pi/2$. Da qui si ricava che il margine di fase del sistema in anello aperto sia pari circa a 90 gradi, ossia $\pi/2$.

Per quanto riguarda il tempo di assestamento t_a , fissando il limite superiore di 2×10^{-3} s e ricorrendo alla formula valida per i sistemi a 1 polo dominante:

$$\omega_T > \frac{3}{t_a}$$

Ottenendo quindi la condizione sulla pulsazione di taglio della $C(s)G(s)$ (anche detta di attraversamento):

$$\omega_T \geq 1500 \text{ rad/s}$$

2.2.1 Variazioni Parametriche

Per progettare un controllore più efficiente, è necessario tenere conto delle variazioni parametriche delle costanti utilizzate nel modello fisico, che possono portare il sistema ad avere comportamenti difforni rispetto a quanto progettato facendo fede alle componenti nominali.

Modelleremo quindi tali variazioni (che supporremo piccole) come piccoli scostamenti nei parametri m , l , k_p e k_d .

Nel caso di un sistema ad anello chiuso in retroazione, possiamo introdurre la funzione **sensibilità dell'anello** $S(s)$:

$$S(s) = \frac{1}{1 + C(s)G(s)}$$

Per annullare quasi completamente le variazioni parametriche all'uscita, è necessario che per le frequenze nelle quali lavora il sistema sia rispettata la relazione $|S(j\omega)| \ll 1$.

Questa specifica è soddisfatta imponendo dunque:

$$|C(j\omega)G(j\omega)| \gg 2$$

ossia

$$|C(j\omega)G(j\omega)|_{dB} \gg 6dB$$

Questo si traduce in un'ulteriore richiesta sul nostro controllore, in particolare è una condizione sull'ampiezza della funzione $C(j\omega)G(j\omega)$.

Riassumendo i risultati ottenuti, il controllore che andremo ad utilizzare al fine di soddisfare tutte le specifiche elencate precedentemente dovrà essere del tipo:

$$C(s) = \frac{K}{s^t} C_0(s) \quad \text{con } C_0(s) \geq 1 \text{ e } t \geq 1.$$

2.1 Proposta di un primo Controllore

Procediamo quindi proponendo un primo controllore, ricavato tramite la sintesi per tentativi: ad ogni passaggio cercheremo di soddisfare le specifiche di regime e di transitorio aggiungendo costanti di guadagno, poli e zeri con lo scopo di adeguare man mano il controllore alle nostre esigenze.

Come prima cosa, siccome la funzione di trasferimento $G(s)$ ha un guadagno (unitario) negativo e non presenta poli nell'origine, abbozziamo un primo controllore del tipo:

$$C(s) = -\frac{1}{s}$$

In questo modo rispettiamo le ipotesi del criterio di Bode e rendiamo il nostro sistema retroazionato in grado di inseguire il gradino in ingresso a $W(s)$ con errore nullo, rendendolo di fatto un sistema di tipo 1.

Riportiamo ora i diagrammi di Bode di modulo e fase per fare le prossime considerazioni sul controllore:

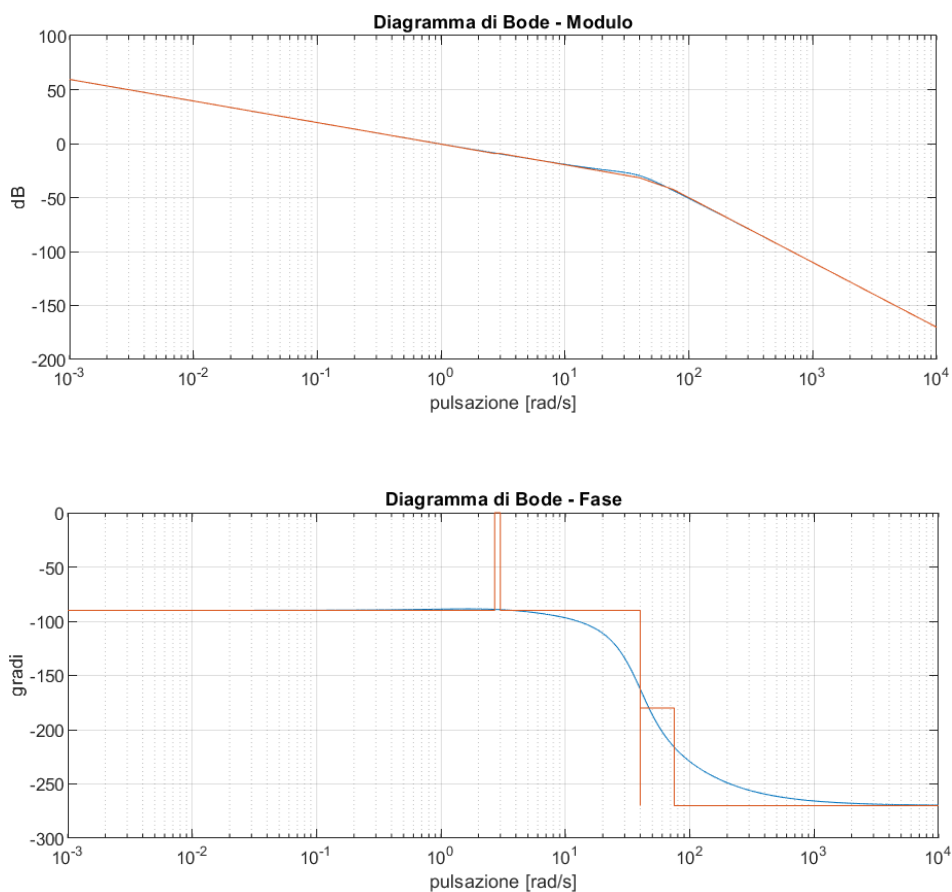


Figura 5: Diagrammi di Bode della FDT ad anello aperto con $C(s) = -\frac{1}{s}$

Dal diagramma del modulo di $C(s)G(s)$ notiamo subito che la condizione sulla pulsazione di attraversamento non è soddisfatta: per fare attraversare il grafico a una pulsazione di almeno 1500 rad/s introduciamo dunque un guadagno (che sarà utile anche per irrobustire il sistema alle variazioni parametriche) e uno zero posizionato ad esempio alla pulsazione $\omega = 10^0$. Il controllore diventa quindi:

$$C(s) = -1000 \frac{(1 + s)}{s}$$

I relativi grafici sono di seguito riportati:

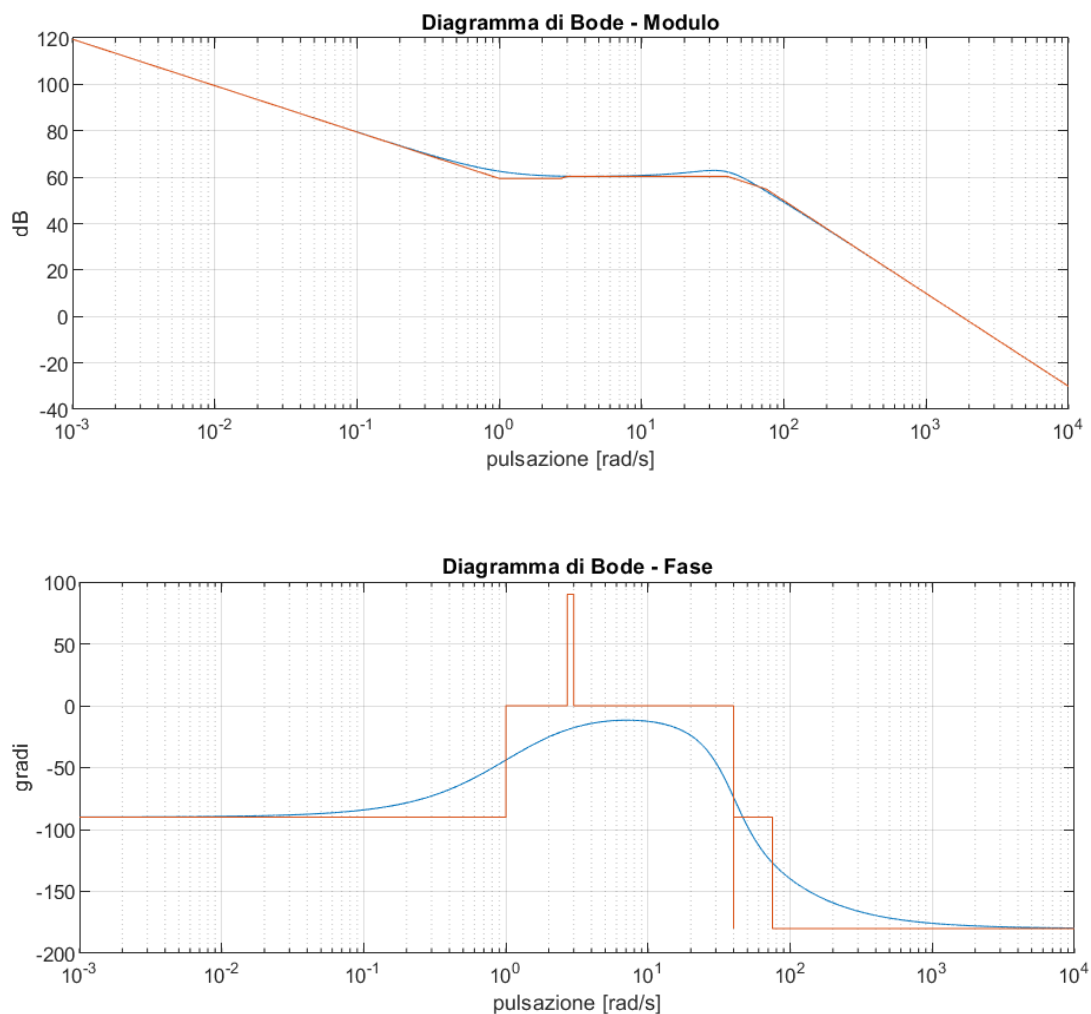


Figura 6: Diagrammi di Bode della FDT ad anello aperto con $C(s) = -1000 \frac{(1+s)}{s}$

Il problema ora insorge nel diagramma delle fasi: alla pulsazione di attraversamento abbiamo una fase di circa -180° , che chiaramente corrisponde ad avere un margine di fase nullo a queste frequenze. Una soluzione consiste nell'inserire una rete anticipatrice a cavallo della pulsazione di taglio: porremo uno zero in -25 e il polo in -10^5 . Portiamo inoltre il guadagno a -18 per rispettare le restrizioni sulla pulsazione di attraversamento, che altrimenti risulterebbe troppo elevata.

Il controllore finale risulta quindi:

$$C(s) = -18 \frac{(1+s)(1+0.04s)}{s(1+10^{-5}s)}$$

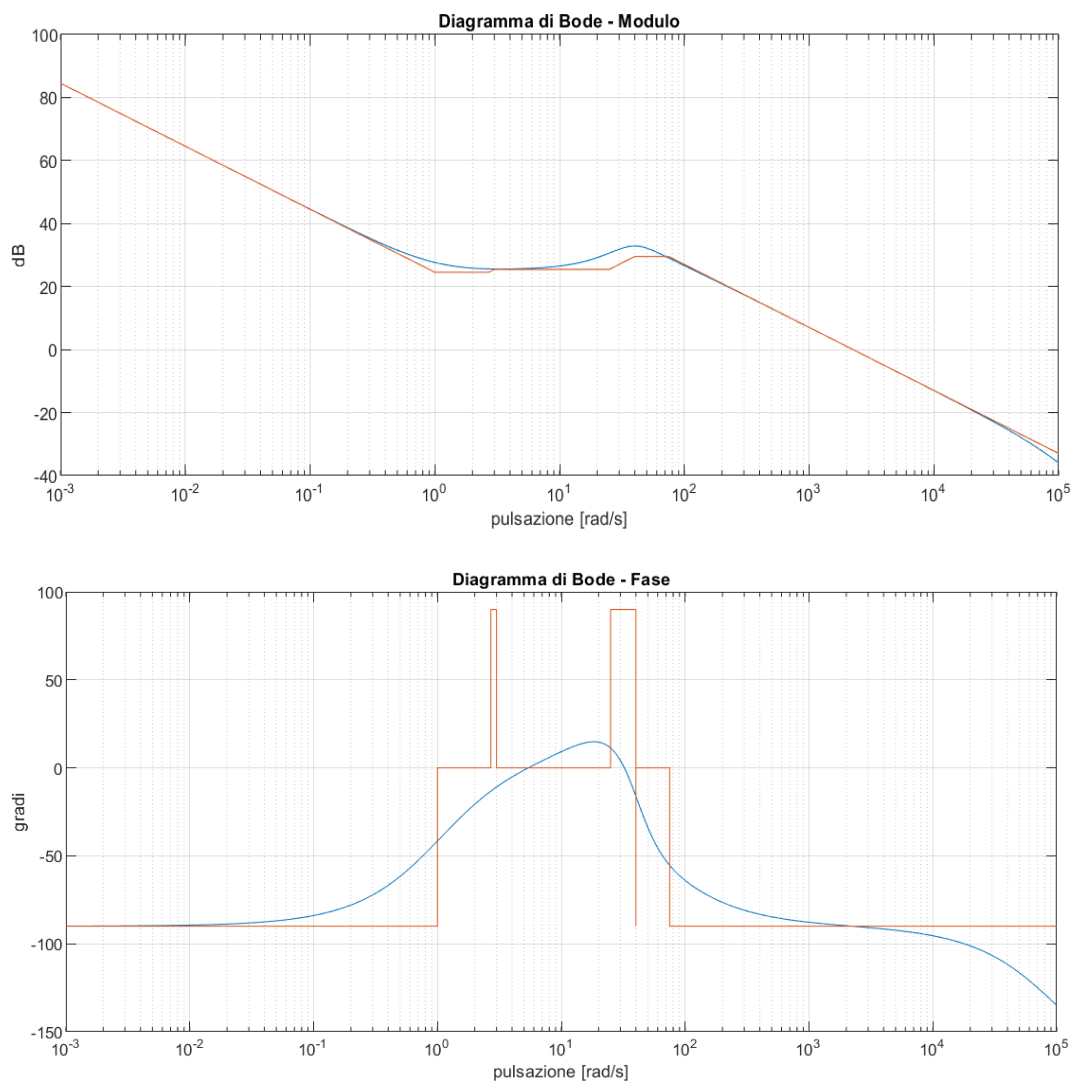


Figura 7: Diagrammi della FDT ad anello aperto con $C(s) = -18 \frac{(1+s)(1+0.04s)}{s(1+10^{-5}s)}$

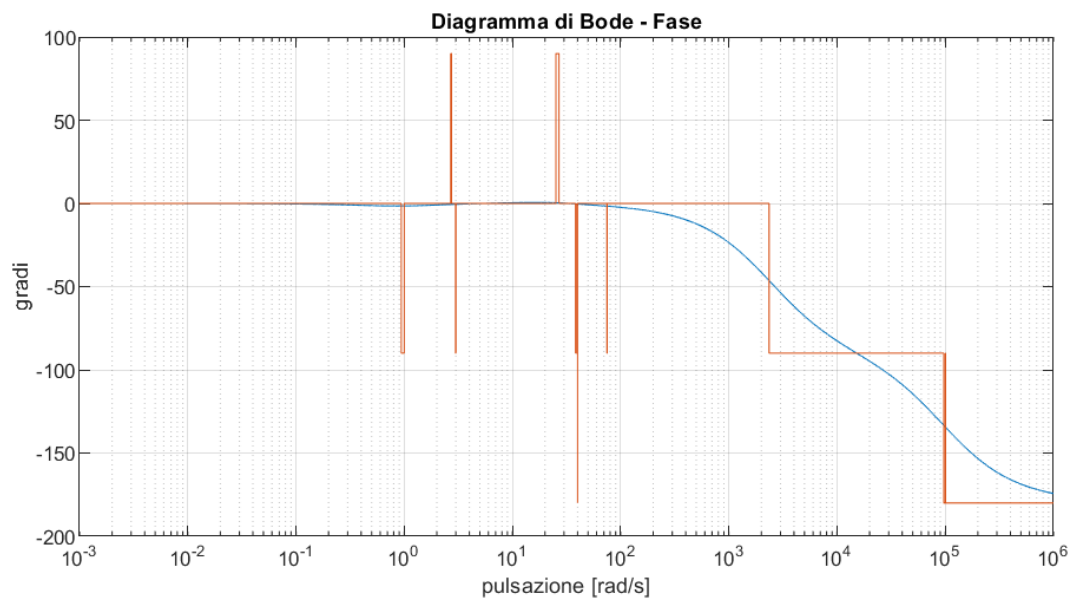
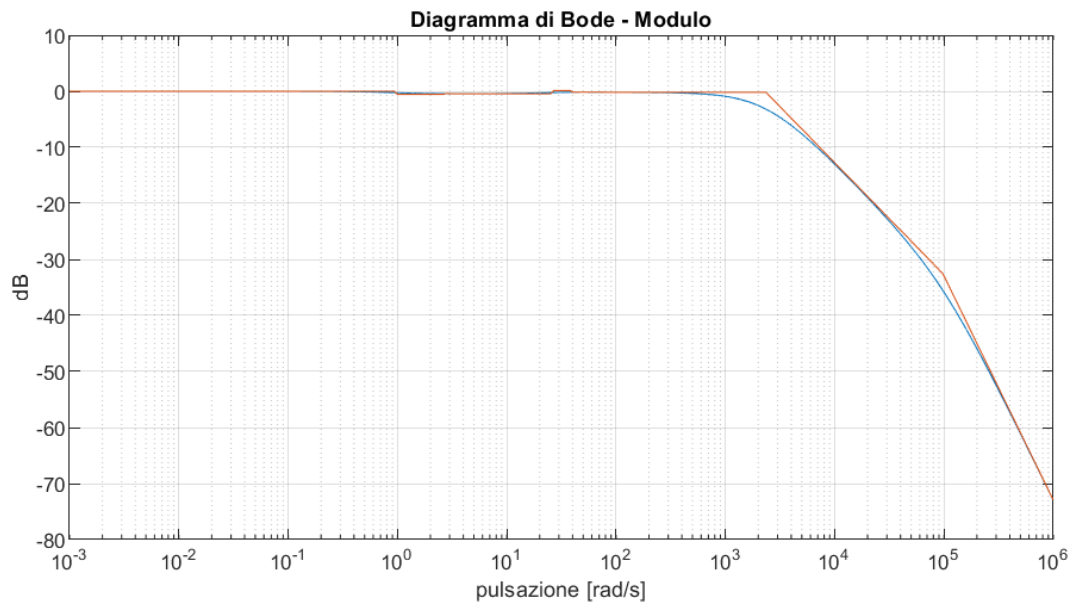


Figura 8: Diagrammi della FDT ad anello chiuso con $C(s) = -18 \frac{(1+s)(1+0.04s)}{s(1+10^{-5}s)}$

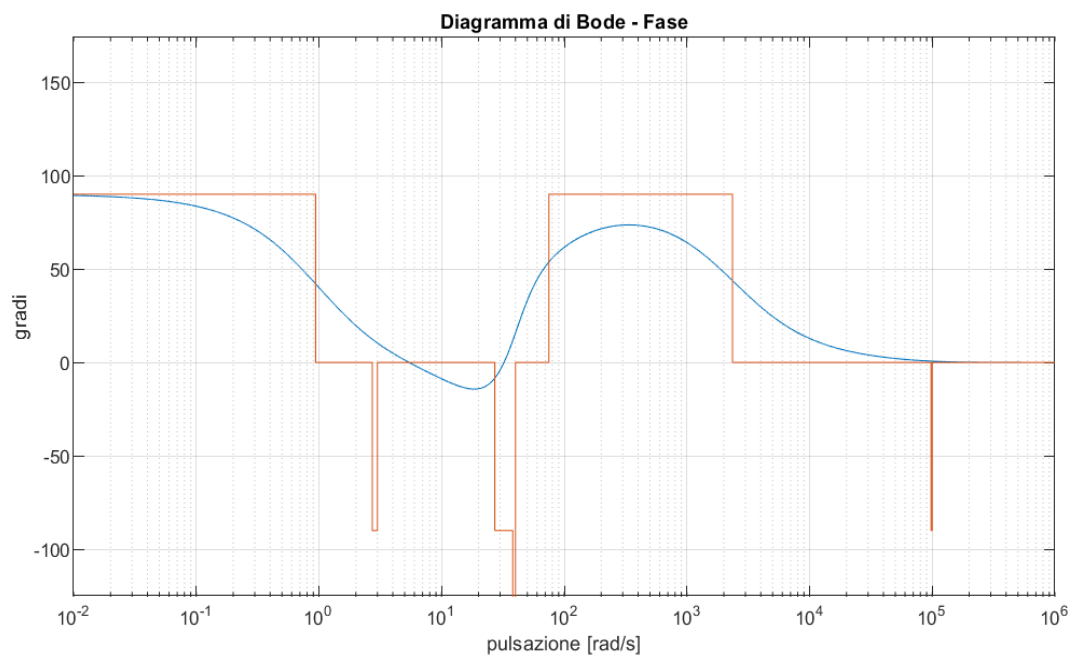
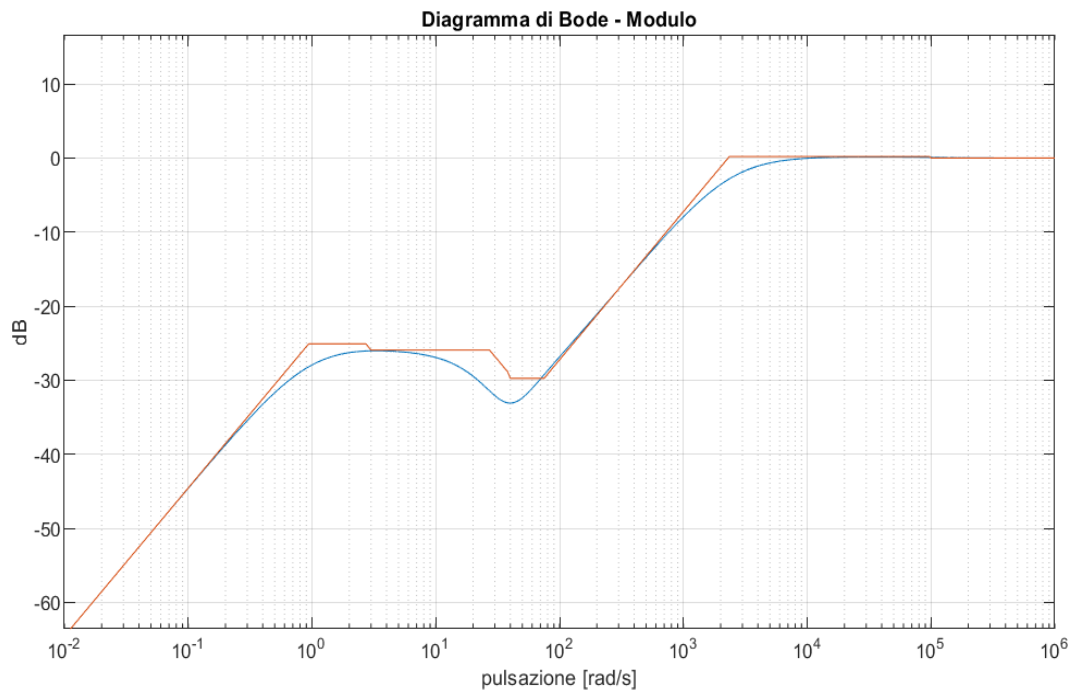


Figura 9: Diagrammi di Bode della funzione sensibilità $S(s)$ con il controllore $C(s)$

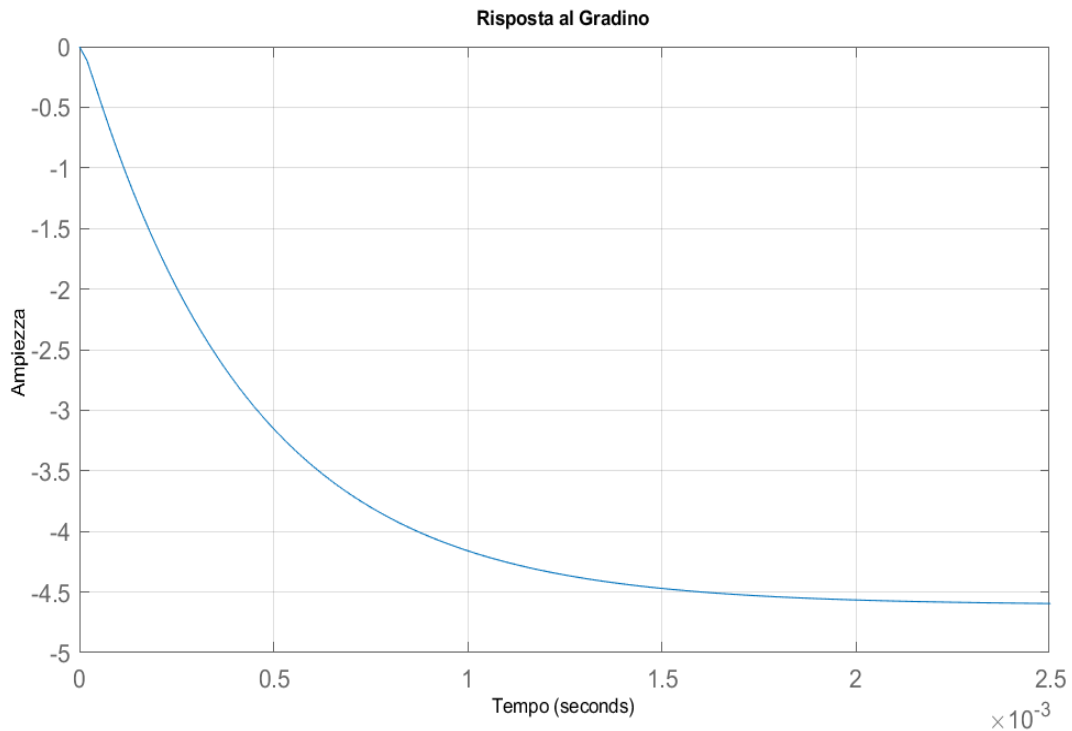


Figura 10: Diagramma della risposta al gradino della FDT ad anello chiuso con

$$\text{controllore } C(s) = -18 \frac{(1+s)(1+0.04s)}{s(1+10^{-5}s)}$$

Come possiamo osservare dal grafico della risposta al gradino del sistema in catena chiusa $W(s) = \frac{C(s)G(s)}{1+C(s)G(s)}$, la risposta al gradino raggiunge il valore $-4.71 \pm 0.235 \text{ Nm}$ in un tempo pari a circa $t = 2 \times 10^{-3} \text{ sec}$ mentre la sovralongazione è nulla. Inoltre il sistema controllato risulta robusto alle variazioni parametriche in quanto è rispettata la condizione $|C(j\omega)G(j\omega)|_{dB} \gg 6dB$ nel range di pulsazioni $[1.0 \times 10^{-3}, 1.0 \times 10^3] \text{ rad/s}$, come si può vedere dal grafico del sistema in catena aperta.

2.4 Proposta di un secondo Controllore

Proponiamo ora un secondo controllore, basato sempre sulla sintesi per tentativi, ottenuto rimaneggiando leggermente il controllore precedente. In particolare cambieremo il guadagno, la posizione del polo e dello zero della rete anticipatrice che vengono spostati verso sinistra lungo l'asse delle pulsazioni. Assumiamo

$$C_2(s) = -20 \frac{(1+s)(1+0.02s)}{s(1+10^{-6}s)}$$

La funzione di trasferimento in catena aperta che ne consegue ha come principali differenze dalla precedente la pulsazione di attraversamento, che risulta ora molto più distante da quella minima $\omega_T = 1500 \text{ rad/s}$, mentre la fase a tale pulsazione resta pressoché invariata rispetto a caso precedente portando ancora una volta ad un margine di fase di circa $\pi/2$.

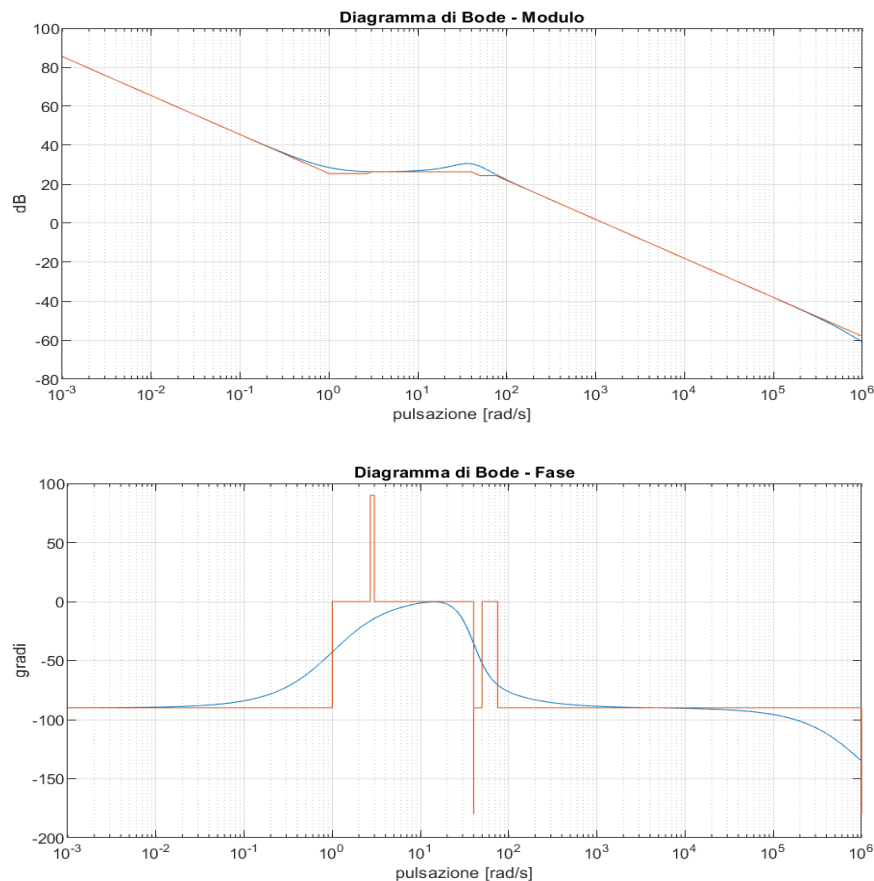


Figura 11: Diagrammi di Bode della FTD ad anello aperto con $C_2(s)$

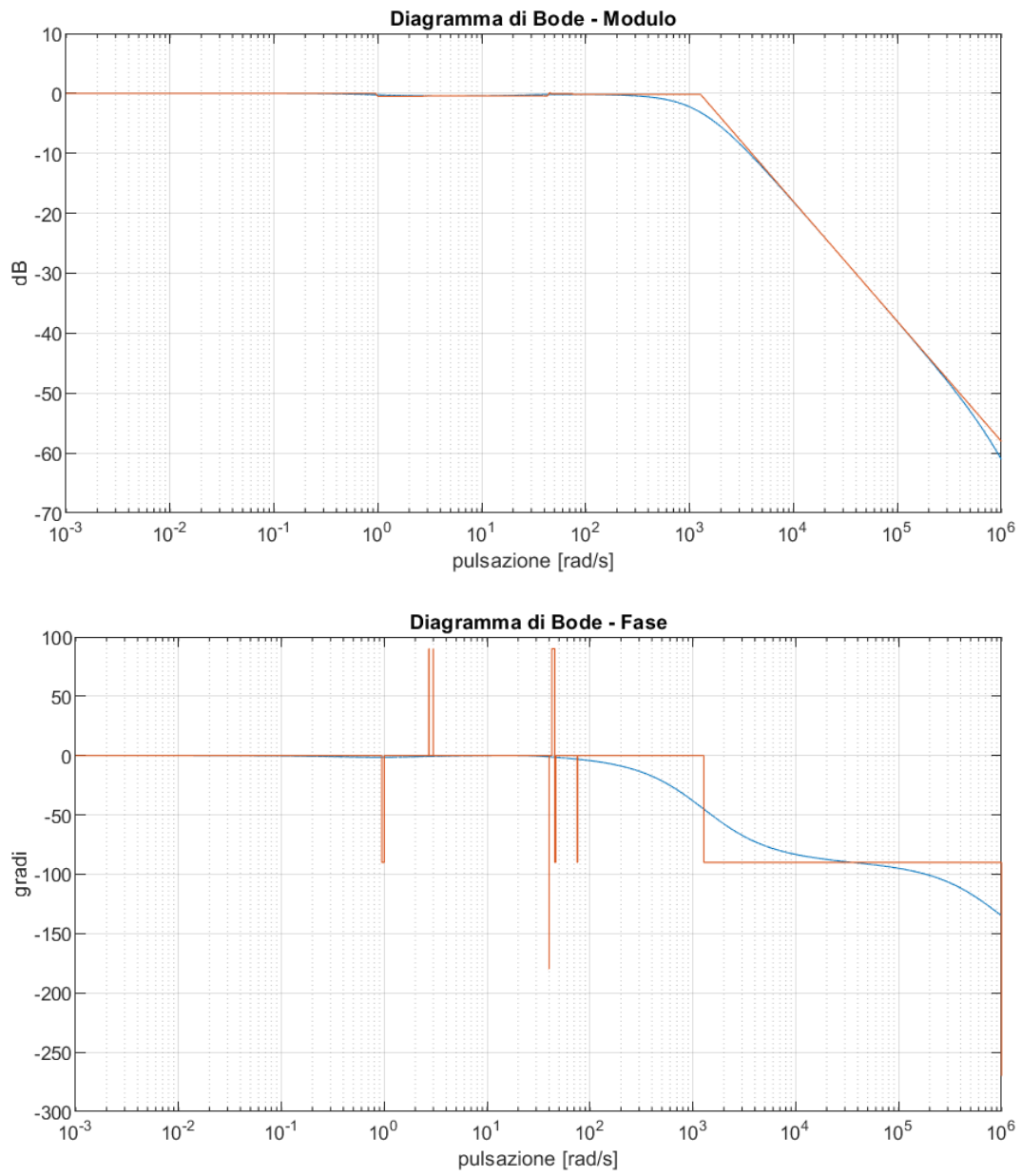


Figura 12: Diagrammi di Bode della FTD ad anello chiuso con $C_2(s)$

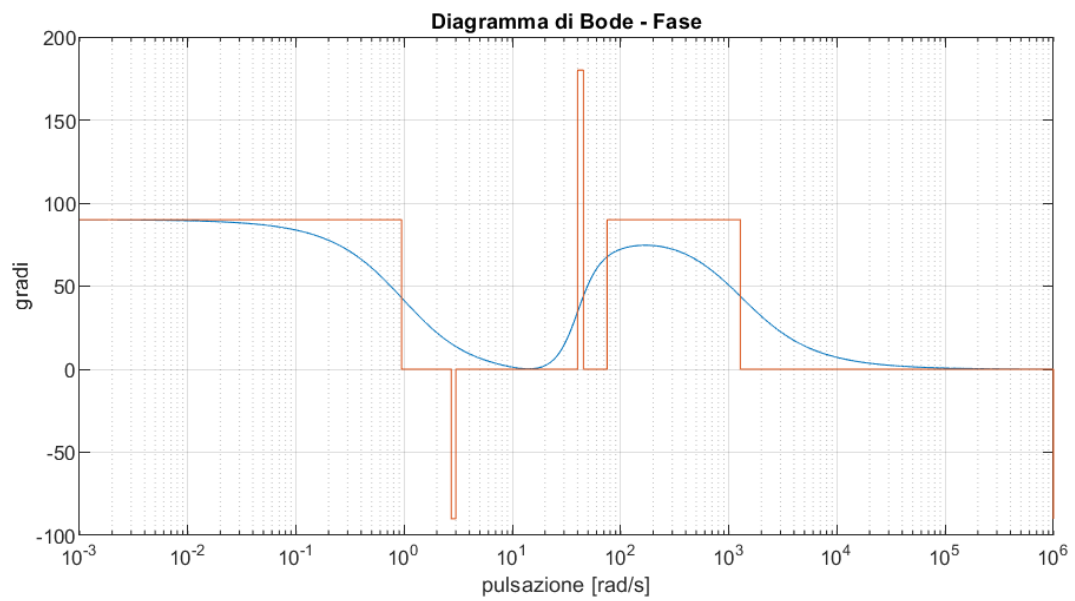
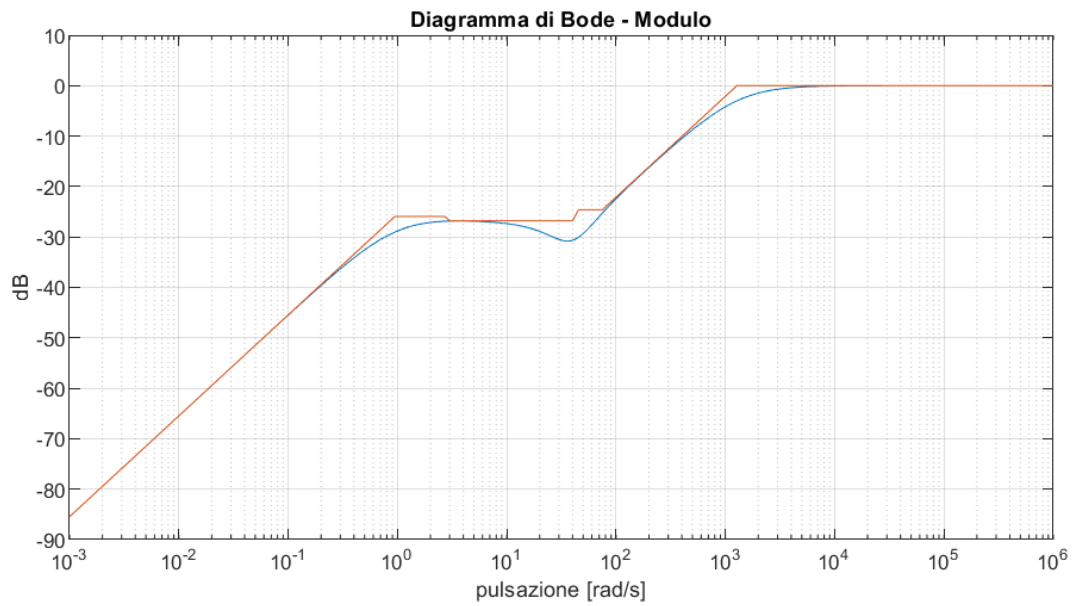


Figura 13: Diagrammi di Bode della funzione sensibilità $S(s)$ con il controllore $C_2(s)$

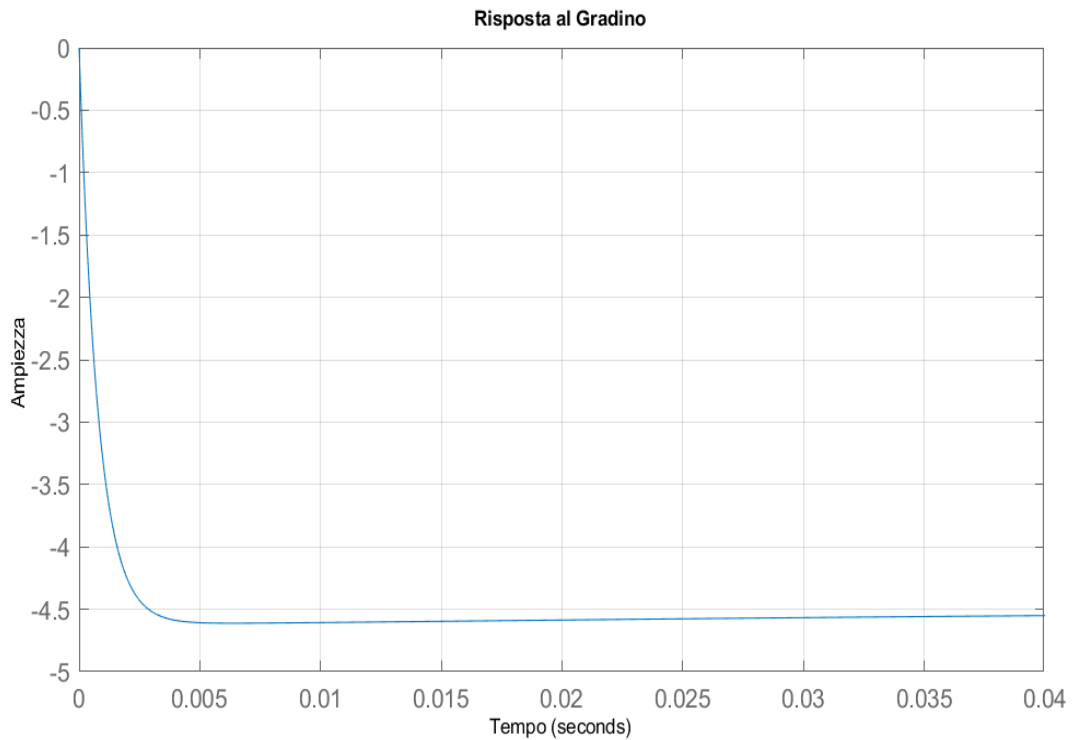


Figura 14: Diagramma della risposta al gradino della FDT ad anello chiuso con
 controllore $C_2(s) = -20 \frac{(1+s)(1+0.02s)}{s(1+10^{-6}s)}$

Anche in questo caso risultano soddisfatte tutte le nostre richieste sul sistema controllato: l'uscita entra nel range centrato attorno al valore finale nel tempo $t = 2 \times 10^{-3} \text{sec}$ e la funzione sensibilità dell'anello risulta essere molto più ridotta nelle frequenze di interesse rispetto al caso precedente.

Tuttavia, dal grafico della risposta al gradino possiamo notare una sovralongazione molto ridotta, ma comunque non nulla. Questo è dovuto molto probabilmente al fatto che il sistema controllato non è propriamente del primo ordine, bensì è una sua approssimazione.

3 Conclusioni

In questa tesi dato il sistema fisico descrittivo del funzionamento di un esoscheletro per la movimentazione di una gamba, sono state ricavate le equazioni che ne governano la dinamica, successivamente abbiamo linearizzato il sistema attorno ad un suo punto di equilibrio ad ingresso costante e lo abbiamo portato in forma di stato al fine di dedurne la funzione di trasferimento $G(s)$.

Per rispettare le specifiche riguardanti tempo di risposta, sovraelongazione percentuale e sensibilità alle variazioni parametriche, siamo riusciti a sintetizzare dei controllori funzionanti in retroazione unitaria negativa, ottenuti tramite sintesi per tentativi.

Dei due controllori proposti è da privilegiare il primo qualora la priorità sia data alla sovraelongazione percentuale, che risulta molto più ridotta rispetto al secondo. Quest'ultimo è invece da preferire se si vuole realizzare un sistema molto più robusto alle variazioni parametriche dei valori fisici misurati, dato che presenta una funzione di sensibilità d'anello più piccola del primo controllore.

Bibliografia

- [1] Bisiacco M.; Braghetto S., *Teoria dei sistemi dinamici*, Esculapio, 2010
- [2] Bisiacco M.; Valcher M.E., *Controlli Automatici*, Libreria Progetto, 2008
- [3] Bicchi A., *Fondamenti di Automatica - I Parte*, Università di Pisa, 2019
<https://www.centropiaggio.unipi.it/course/fondamenti-di-automatica>
- [4] Zotto P.; Lo Russo S.; Sartori P., *Fisica Generale Meccanica-Termodinamica*, LaDotta, 2018
- [5] I diagrammi di Bode riportati sono stati realizzati grazie alla funzione Matlab *bodeasint3*