

Università degli Studi di Padova

Corso di Laurea in Ingegneria per l'Ambiente e il Territorio

**Modellazione idraulica per la ricostruzione
della scala delle portate in una condotta
circolare a regime variabile**

A.A. 2023/2024

Relatore: Gianluca Botter

Correlatori: Paolo Peruzzo, Nicola Durighetto

Candidato: Davide Ischia

Sommario

Abstract	2
Introduzione	4
Metodi.....	8
Configurazione della condotta	8
Teoria del moto a pelo libero all'interno di un condotto circolare.....	10
Moto laminare.....	13
Moto turbolento	22
Risultati.....	26
Parametri di base	26
Costruzione del modello.....	33
Discussione	38
Bibliografia	42

Abstract

La seguente tesi presenta l'analisi idraulica finalizzata alla ricostruzione della scala delle portate in una condotta circolare operante a regime variabile. In particolare, è proposta una relazione che lega le larghezze dello specchio d'acqua all'interno della sezione tubolare, ricavate in modo indiretto mediante l'uso di fototrappole, con la portata fluente. A questo scopo è stato sviluppato un modello matematico che permette di descrivere accuratamente il comportamento del flusso all'interno della condotta, considerando le variazioni di portata e le condizioni di regime non stazionario. Abbinando l'utilizzo di metodi numerici avanzati con modelli idraulici è stato possibile analizzare le dinamiche del flusso e identificare le caratteristiche principali. Abbiamo definito specifici intervalli per i diversi regimi idraulici (laminare e turbolento) ed è stata infine costruita e rappresentata graficamente la funzione in grado di associare ad ogni valore di larghezza dello specchio d'acqua la rispettiva stima della portata.

Introduzione

La modellazione idraulica è un processo che utilizza modelli matematici e numerici per simulare e prevedere il comportamento dell'acqua in sistemi idrici come fiumi, canali, reti fognarie e condotte di distribuzione. La possibilità di avere oggi strumenti che permettono di sapere con largo anticipo come un sistema reagirà a diverse condizioni di portata è fondamentale per garantire una gestione più efficiente delle risorse a disposizione. Inoltre, dato l'aumento drammatico negli ultimi anni della frequenza di eventi di pioggia estremi, appare sempre più evidente la necessità di prevedere i livelli idrici in modo da attuare misure di adattamento e di protezione del territorio tali da mitigare i danni dovuti agli eventi eccezionali. In particolar modo la ricostruzione della scala delle portate, specie in presenza di canali o condotte di geometria nota, è una procedura di particolare rilevanza in molte applicazioni pratiche come la gestione delle risorse idriche e il trasporto di acqua potabile. Con una buona modellazione idraulica, siamo infatti in grado di conoscere in tempo reale il volume d'acqua che

attraversa una determinata sezione nell'unità di tempo a partire da grandezze più facilmente misurabili.

Il caso analizzato in questo lavoro riguarda il moto all'interno di una condotta circolare a superficie libera, posta a chiusura di un sottobacino del rio Valfredda, un piccolo affluente incontaminato del Piave, situato nelle Dolomiti nel nord-Italia.

Come illustrato in Figura 1, il rio Valfredda scorre nei pressi del confine tra il Veneto e il Trentino-Alto Adige, ad est rispetto al Passo San Pellegrino, non lontano dalla località di Falcade (BL).



Figura 1: Locazione geografica del bacino del Valfredda

Scopo della trattazione è la caratterizzazione del flusso e la successiva costruzione di un modello idraulico che sia coerente con i dati sperimentali e che permetta di stimare la portata attraverso la condotta per qualsiasi valore della larghezza dello specchio d'acqua.

Metodi

Configurazione della condotta

Cominciamo l'analisi del caso in esame descrivendo l'apparato sperimentale. La canaletta ha diametro $D=0.49$ m e lunghezza $L=3.97$ m.



Figura 2: Condotta cilindrica in esame con appesa una fototrappola

Come mostrato in Figura 2 all'interno della condotta sono poste delle fototrappole che permettono visivamente la misura della larghezza dello specchio

d'acqua mediante conversione del numero di pixel in centimetri. Punto di partenza per questo lavoro sono state cinque misure di portata misurate sperimentalmente, ciascuna associata alla rispettiva larghezza W della superficie libera nel tubo. Le portate sono state ottenute misurando il volume d'acqua uscente dalla condotta e dividendolo per il tempo intercorso durante la misurazione. Per la stima del volume si sono utilizzati dei contenitori graduati posti all'uscita della canaletta in modo che tutta l'acqua confluisse in essi. Come si nota dalla foto in Figura 3, la presenza di un salto di fondo all'uscita del tubo ha agevolato la procedura. Per la stima del tempo si sono utilizzati dei cronometri manuali.



Figura 3: sezione d'uscita del flusso dalla condotta

Teoria del moto a pelo libero all'interno di un condotto circolare

In questa fase abbiamo ricavato alcuni parametri che consentono di individuare le proprietà del moto allo scopo di caratterizzarlo. La Figura 4 schematizza la condizione all'interno della condotta.

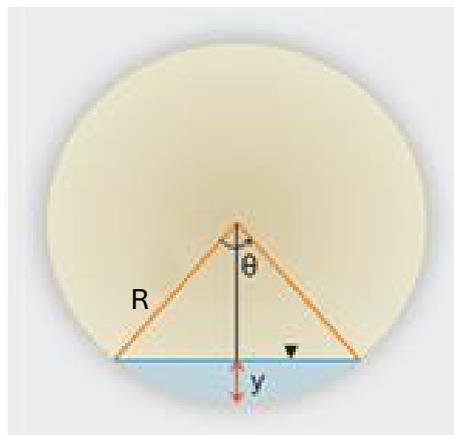


Figura 4: Rappresentazione semplificata del caso in esame

Conoscendo il raggio R del tubo si può facilmente calcolare il tirante dell'acqua y utilizzando semplici considerazioni geometriche. Nello specifico, abbiamo applicato il teorema di pitagora tra il raggio e la larghezza dello specchio d'acqua per determinare y , ottenendo

$$y = R \cdot \left(1 - \sqrt{1 - W^2/4R^2}\right) \quad (1)$$

Noto il tirante massimo, abbiamo calcolato anche l'angolo al centro della condotta formato dai raggi aventi come intersezione gli estremi dello specchio d'acqua, θ , sfruttando la seguente relazione

$$\theta = 2 \cdot \cos^{-1}((R - y)/R) \quad (2)$$

Successivamente dal tirante si sono calcolati il perimetro bagnato, P_b ,

$$P_B = \theta \cdot D \quad (3)$$

l'area occupata dall'acqua, A ,

$$A = \frac{(\theta - \sin \theta)}{8} \cdot D^2 \quad (4)$$

e il raggio idraulico, R_h .

$$R_h = A/P_b \quad (5)$$

Quest'ultimo è un parametro fondamentale in idraulica in quanto è strettamente legato alle perdite di carico continue dovute agli sforzi tangenziali a parete. Infine, si è calcolata avvalendosi dei valori di portata misurati, Q , la velocità media u con la seguente relazione

$$u = Q/A \quad (6)$$

e il numero di Reynolds, Re , lungo la condotta, pari a

$$Re = \frac{u \cdot R_h}{\nu} \quad (7)$$

dove $\nu = 1 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ è la viscosità cinematica dell'acqua. Mediante il calcolo del numero di Reynolds per ciascuna delle misure di portata stimate sperimentalmente si è determinato il regime di moto (laminare o turbolento) del problema. Si assume infatti che per $Re < 2000$ il moto è laminare mentre per valori di $Re > 4000$ il moto è turbolento. Per valori intermedi si è in regime di transizione. Come vedremo, le caratteristiche della corrente cambiano in modo sostanziale con il regime idraulico, obbligandoci ad utilizzare due modelli differenti per stimare le portate nel tubo.

Moto laminare

Nell'idraulica classica, in regime laminare, il moto in pressione all'interno di un condotto circolare è ben rappresentato dalla soluzione di Poiseuille. Tuttavia, questo modello non può essere applicato in una condotta parzialmente bagnata dall'acqua (anche se il moto all'interno è laminare). In questo caso, la stima della portata è decisamente più complesso e il modello di riferimento utilizzato è quello proposto da Junke Guo & Robert N. Meroney (2013), in cui è sviluppata una soluzione teorica per la stima della portata applicabile al caso in esame.

Nelle ipotesi di flusso stazionario, uniforme, di fluido incomprimibile e di moto laminare all'interno di un tubo parzialmente riempito con pendenza " ι " e altezza dello specchio d'acqua $h < R$ il sistema può essere descritto usando coordinate cilindriche o polari come rappresentato da Figura 5.

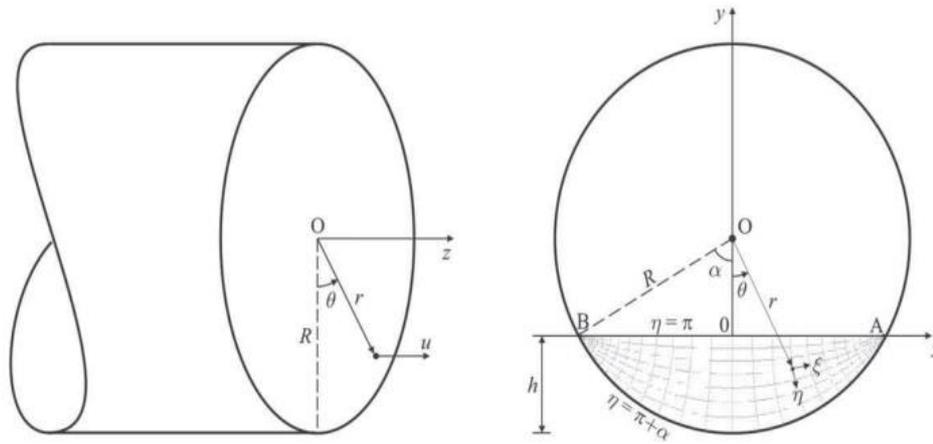


Figura 5: Rappresentazione del sistema in esame con coordinate cilindriche (a) e polari (b)

In condizioni di moto monodimensionale, l'equazione di continuità si riduce a $\partial u / \partial z = 0$, dove z è l'asse perpendicolare alla sezione circolare.

La velocità in qualsiasi punto della sezione può essere descritta applicando alla legge di Poiseuille un fattore correttivo, χ . Definito quindi un sistema di coordinate cartesiane (x, y) avente l'origine in corrispondenza del pelo libero a metà della larghezza W , per tubi parzialmente riempiti in modo arbitrario, si assume che la distribuzione della velocità locale segua la seguente legge:

$$U = \frac{1}{4} \left\{ 1 - \left[\left(\frac{x}{R} \right)^2 + \left(\frac{y}{R} - \cos \alpha \right)^2 \right] \right\} + \chi \quad (8)$$

dove α è l'angolo al centro dato dall'intersezione tra l'asse delle ordinate e il raggio, mentre U è la velocità adimensionale data da:

$$U = \mu u / (\gamma R^2 R_h) \quad (9)$$

in cui γ è il peso specifico dell'acqua e μ è la viscosità dinamica.

Secondo il modello proposto da Junke Guo & Robert N. Meroney il coefficiente correttivo χ deve rispettare la condizione:

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} = 0 \quad (10)$$

con $\chi = 0$ in corrispondenza delle pareti (condizione di non scorrimento), e sulla superficie libera

$$\frac{\partial \chi}{\partial y} \Big|_{y=0} = - \frac{\cos \alpha}{2R} \quad (11)$$

il valore di χ può essere espresso a livello teorico implementando un sistema di coordinate bipolari (ξ, η) e avvalendosi della trasformata di Fourier del coseno secondo la seguente equazione:

$$\chi(\xi, \eta) = -\frac{\sin 2\alpha}{2} \int_0^{\infty} \frac{\sinh k(\pi + \alpha - \eta) \cos k\xi}{\sinh k\pi \cosh k\alpha} dk \quad (12)$$

Qui k è la variabile di trasformazione per ξ .

In questo studio, l'integrale dell'Equazione (12) verrà risolto applicando alcuni metodi numerici implementati nella libreria di Matlab.

Le coordinate bipolari sono un sistema di coordinate ortogonali bidimensionali usato principalmente per risolvere problemi di fisica e ingegneria che presentano simmetria rispetto a due punti focali distinti. Questo sistema di coordinate è particolarmente utile per problemi legati al flusso di fluidi.

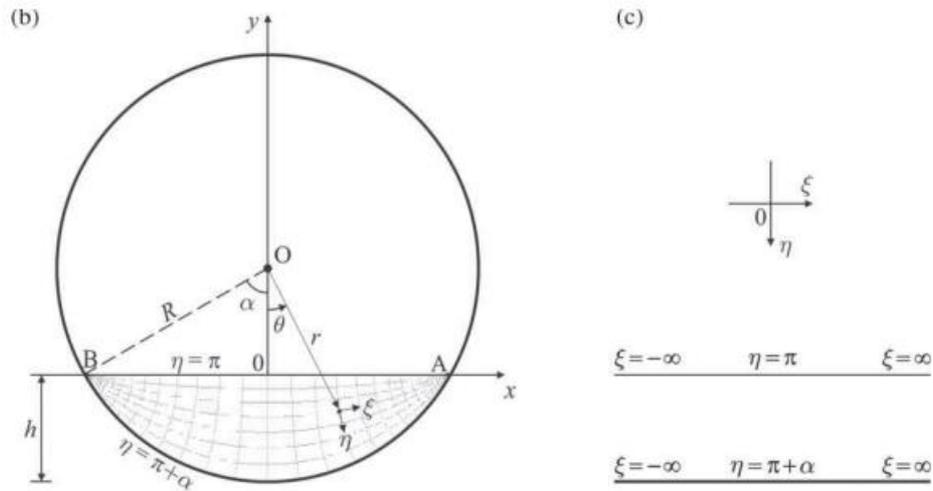


Figura 6: Rappresentazione del sistema in esame con coordinate polari (b) e bipolari (c)

Con riferimento alla Figura 6, facendo coincidere i fuochi con i punti A e B e indicando con " ψ " la semidistanza focale, cioè la metà della distanza tra i due fuochi, la relazione tra le coordinate bipolari e quelle cartesiane classiche porge

$$x = \frac{\psi \cdot \sinh \xi}{\cosh \xi - \cos \eta} \quad (13)$$

$$y = \frac{\psi \cdot \sin \eta}{\cosh \xi - \cos \eta} \quad (14)$$

Tuttavia, siccome l'integrale viene presentato in funzione delle coordinate bipolari è decisamente più utile ricorrere alle formule inverse delle Equazioni (13) e (14) in modo da ottenere i valori di (ξ, η) in funzione di (x, y) , i.e.,

$$\xi = \frac{1}{2} \ln \frac{(x + \psi)^2 + y^2}{(x - \psi)^2 + y^2} \quad (15)$$

$$\eta = \pi - 2 \tanh^{-1} \frac{2\psi y}{\psi^2 - x^2 - y^2 + \sqrt{(\psi^2 - x^2 - y^2)^2 + 4\psi^2 y^2}} \quad (16)$$

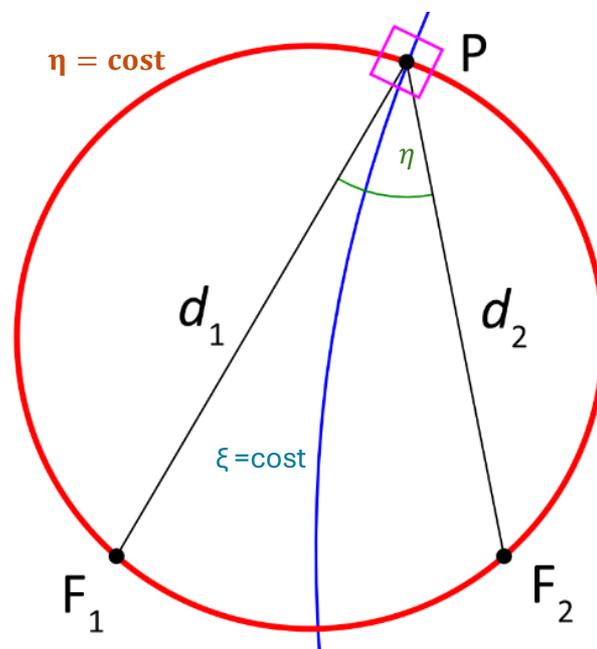


Figura 7: Interpretazione geometrica delle coordinate bipolari

Un'interpretazione più intuitiva delle coordinate bipolari è riportata in Figura 7. Sia P un punto generico nello spazio e d_1 e d_2 le rispettive distanze dei fuochi F_1 e F_2 da P. I corrispondenti cerchi di costante η e ξ sono mostrati rispettivamente in rosso e blu e si incontrano formando un angolo retto indicato dal quadrato rosa. La coordinata η equivale all'angolo $F_1\hat{P}F_2$ mentre la coordinata ξ è data dal logaritmo naturale del rapporto tra le distanze focali:

$$\xi = \ln \frac{d_1}{d_2} \quad (17)$$

Si capisce quindi come ξ sia definita nell'intervallo tra $-\infty$ (per punti vicini a F_1) e $+\infty$ (per punti vicini a F_2) mentre in genere η varia da $-\pi$ a $+\pi$.

Riprendendo il caso in esame, il flusso viene quindi trasformato in un canale poco profondo in cui a $\eta = \pi$ corrisponde il pelo libero dell'acqua, a $\eta = \pi + \alpha$ corrisponde il perimetro bagnato. Analogamente, con $\xi = 0$ si indica la linea centrale del tubo ($x=0$) e infine con $\xi = \pm\infty$ ci si riferisce ai punti estremi A e B. È chiaro quindi come il valore del coefficiente correttivo dipenda

fortemente dal punto che si esamina. In questa trattazione ai fini esemplificativi si è considerata unicamente l'origine del sistema di riferimento cartesiano.

Definito il coefficiente correttivo si può abbastanza comodamente calcolare la velocità adimensionale puntuale applicando la seguente formula:

$$U = \frac{\sin \alpha \sin(\eta - \alpha)}{2(\cosh \xi - \cos \eta)} + \chi \quad (18)$$

per poi ottenere utilizzando l'equazione (9) la velocità effettiva.

Una volta definiti tutti i parametri necessari per l'applicazione delle formule si vanno a ripetere i passaggi per ciascuna misura dello specchio d'acqua.

Per il calcolo della portata sarà necessario risolvere nuovamente un integrale mediante metodi numerici. La formula da applicare è la seguente:

$$Q = \frac{\gamma R^4 i}{8\mu} \left\{ (\alpha - \sin 2\alpha + 0.25 \cdot \sin 4\alpha) + 2\pi \sin^2 2\alpha \int_0^\infty \frac{k \cdot \tanh k\alpha}{\sinh^2 k\pi} dk \right\} \quad (19)$$

Il flusso totale chiaramente non è influenzato dalle coordinate che si considerano ma dipenderà fortemente dalla geometria del sistema, in particolar modo dal livello raggiunto dallo specchio d'acqua e quindi da α . La portata non poteva essere banalmente calcolata come il prodotto tra l'area della sezione bagnata e la velocità definita precedentemente in quanto quest'ultima dipende fortemente dal punto che si considera. La relazione non fornisce una misura della velocità media lungo la condotta ma ne esprime il valore puntuale.

Moto turbolento

Per quanto riguarda il tratto turbolento si è applicata la formula di Gauckler-Strickler. Nell'ipotesi di moto turbolento, uniforme in regime di parete scabra la portata d'acqua per le correnti a pelo libero è proporzionale alla pendenza del fondo secondo la seguente relazione:

$$Q = A \cdot K_s \cdot R_h^{2/3} \cdot \sqrt{i} \quad (20)$$

dove K_s è il coefficiente di Strickler. Poiché sia K_s che i sono incognite si è stimata Q utilizzando una combinazione verosimile di questi parametri. Si sono considerate solo le portate corrispondenti alle tre misure di larghezza dello specchio d'acqua maggiore dove il moto è stato ragionevolmente assunto turbolento. Si è quindi riscritta l'equazione (20) come segue:

$$\frac{Q}{A \cdot R_h^{2/3}} = K_s \cdot \sqrt{i} = \text{cost} \quad (21)$$

utilizzando i valori di portata calcolati sperimentalmente al fine di ottenere il valore che deve assumere il prodotto $k_S\sqrt{i}$. Si è successivamente eseguita la media.

Non essendo nota la pendenza del tubo si è deciso di stimare inizialmente il coefficiente di Strickler sulla base dei valori forniti dalla letteratura, e successivamente ricavare la pendenza i . Dato che i valori di K_S sono tabellati in funzione del materiale di cui è costituita la condotta e allo stato di usura della stessa abbiamo stimato un valore di $K_S=90 \text{ m}^{1/3} \cdot \text{s}^{-1}$. Questo valore si riferisce ai criteri con la quale viene classificata la tipologia di superficie (vedi Tabella 1). Nel caso in esame il tubo è fatto di plastica e non risulta essere degradato. Il calcolo della pendenza risulta immediato.

Tipo di superficie	$k_s [m^{1/3} \cdot s^{-1}]$
Tecnicamente liscio	110
Plastica	85+90
Tubi nuovi lisci	80+90
Tubi degradati	50+60
Metallo	70
Cemento	65
Cemento usurato	60
Canale	30+40

Tabella 1: valori di K_s in funzione del tipo di superficie

Risultati

Parametri di base

In questa sezione verranno presentati e commentati i risultati derivati dall'applicazione delle equazioni descritte nel paragrafo precedente. Nella Tabella 2 sono esposti i dati di partenza che costituiscono la base di tutta la trattazione.

Tabella 2

	Data	Q[L/s]	W[px]	W[m]
Misura 1	06/10/2023	0.395	41.8	0.150
Misura 2	12/10/2023	0.268	39.1	0.140
Misura 3	27/10/2023	11.60	78.6	0.281
Misura 4	14/11/2023	1.56	52.1	0.187
Misura 5	10/11/2023	1.50	50.6	0.181

Si è quindi ricavato il tirante, il perimetro bagnato, l'area bagnata e il raggio idraulico rispettivamente applicando le equazioni (1), (3), (4), (5). La Tabella 3 mostra i risultati ottenuti.

Tabella 3

W[m]	y[m]	P _b [m]	A[m ²]	R _h [m]
0.150	0.012	0.152	1.17 × 10 ⁻³	0.008
0.140	0.010	0.142	0.96 × 10 ⁻³	0.007
0.281	0.044	0.300	8.50 × 10 ⁻³	0.038
0.187	0.018	0.191	2.31 × 10 ⁻³	0.012
0.181	0.013	0.186	2.11 × 10 ⁻³	0.011

A seguire si è ottenuta una stima della velocità media dell'acqua all'interno della condotta e del numero di Reynolds. I valori sono presentati dalla Tabella 4.

Tabella 4

W[m]	U[m/s]	Re
0.150	0.336	2597
0.140	0.300	1887
0.281	1.364	38694
0.187	0.675	8151
0.181	0.709	8079

Si è proceduto all'implementazione del modello laminare calcolando in primo luogo il coefficiente correttivo e la velocità U in corrispondenza del centro del pelo libero. La Tabella 5 mostra i risultati ottenuti.

Tabella 5

L[m]	χ	U	u[m/s]
0.150	-0.023	0.001	0.726
0.140	-0.020	0.001	0.550
0.281	-0.068	0.014	9.268
0.187	-0.034	0.003	1.762
0.181	-0.032	0.002	1.545

Nonostante si sia considerata solo l'origine per lo svolgimento dei calcoli si ritiene necessario andare a esaminare anche se non in modo approfondito come i valori del coefficiente cambiano in funzione della posizione.

Le Figura 8 e Figura 9 mostrano rispettivamente come varia χ lungo l'asse delle ascisse e delle ordinate.

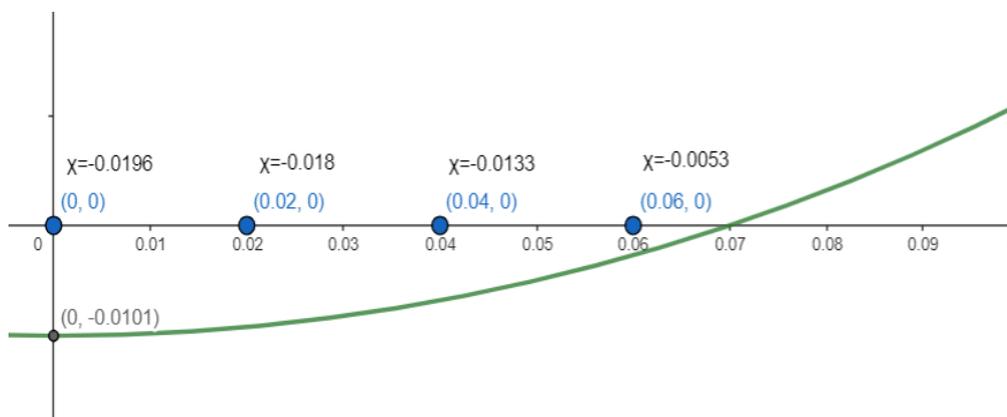


Figura 8: andamento di χ lungo l'asse delle ascisse

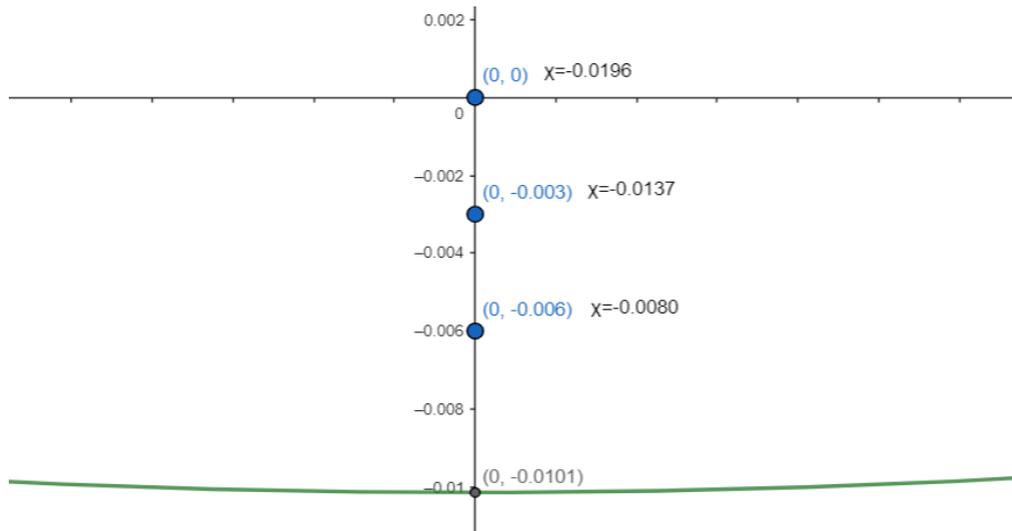


Figura 9: andamento di χ lungo l'asse delle ordinate

Quello che si nota è che più ci si allontana dall'origine più il coefficiente correttivo diminuisce in modulo per assumere valore nullo in corrispondenza del bordo. Questo perché nel flusso laminare la velocità del fluido varia in modo parabolico rispetto alla distanza dal centro del tubo risultando massima al centro e nulla in corrispondenza della parete. E così anche il coefficiente correttivo ha un andamento simile. Da notare come oltre ad avere distribuzione simmetrica rispetto all'asse delle ordinate, χ assume sempre valori negativi. Ciò fa intuire che, quando il moto è a pelo libero, in ogni punto, la velocità nel caso di flusso parzializzato è sempre inferiore rispetto a quella definita dal moto alla Poiseuille.

Si è infine calcolata la portata derivante dall'applicazione del modello, Q_T , e messa a confronto con quella ottenuta per via sperimentale, Q_S . La Tabella 6 riassume questo confronto.

Tabella 6

W[m]	Q_T [l/s]	Q_S [l/s]
0.150	0.393	0.395
0.140	0.268	0.244
0.281	37.512	11.600
0.187	1.889	1.560
0.181	1.537	1.500

Quello che si nota è che più si considerano lunghezze dello specchio d'acqua piccole più il modello proposto da Junke Guo & Robert N. Meroney concorda con le misure sperimentali. Al contrario per la Misura 3 dove il valore di W è massimo e il moto è turbolento ($Re=38694$), l'errore di stima della portata supera addirittura il 300%. Risulta perciò ovvia l'inapplicabilità del seguente modello in condizioni di moto non laminare. Per questo motivo si è deciso di definire un intervallo di

applicabilità; il modello fornisce soluzioni sensate esclusivamente per $W \leq 0.181m$.

Per quanto riguarda il moto turbolento dopo aver assegnato al coefficiente di Strickler il valore di $90 \text{ m}^{1/3} \text{ s}^{-1}$ si è ottenuta una stima della pendenza pari a 0.0236. La Tabella 7 riporta i risultati ottenuti. Si è anche svolta una breve analisi degli errori per evidenziare come la procedura utilizzata trovi conferma. In particolare, si sono calcolati gli errori assoluti, E_A ,

$$E_A = |Q_S - Q_T| \quad (22)$$

E gli errori relativi, E_R , mediante l'equazione seguente:

$$E_R = \frac{E_A}{Q_S} \quad (23)$$

Tabella 7

W[m]	Q _s [L/s]	Q _T [L/s]	E _A [L/s]	E _R
0.281	11.600	10.935	0.665	0.057
0.187	1.560	1.684	0.124	0.079
0.181	1.500	1.481	0.019	0.013

La media degli errori relativi risulta essere inferiore al 5%, evidenziando una capacità del modello di rappresentare i dati sperimentali più che soddisfacente.

Costruzione del modello

La parte conclusiva della trattazione è dedicata alla ricostruzione della scala delle portate mediante implementazione di un modello unico in grado di fornire a seconda della larghezza dello specchio d'acqua rilevato dalle fototrappole, il valore della portata fluente nella sezione tubolare. Come anticipato all'inizio della tesi, questo modello sarà costruito sull'unione di due modelli che prendono in considerazione due tipologie di moto differenti. La Tabella 8 mostra una panoramica dei risultati ottenuti finora.

Tabella 8

W[m]	Q _S [L/s]	Q _{T-LAM} [L/s]	Q _{T-TURB} [L/s]
0.140	0.268	0.244	/
0.150	0.395	0.393	/
0.181	1.500	1.537	1.481
0.187	1.560	/	1.684
0.281	11.600	/	10.935

Per $W=0.181\text{m}$ ci sono due valori di portata validi in quanto valore soglia per il passaggio dal modello laminare a quello turbolento. Per larghezze maggiori la

portata potrà essere calcolata adoperando unicamente il modello turbolento. La Figura 10 mostra per punti i valori riportati nella tabella sovrastante:

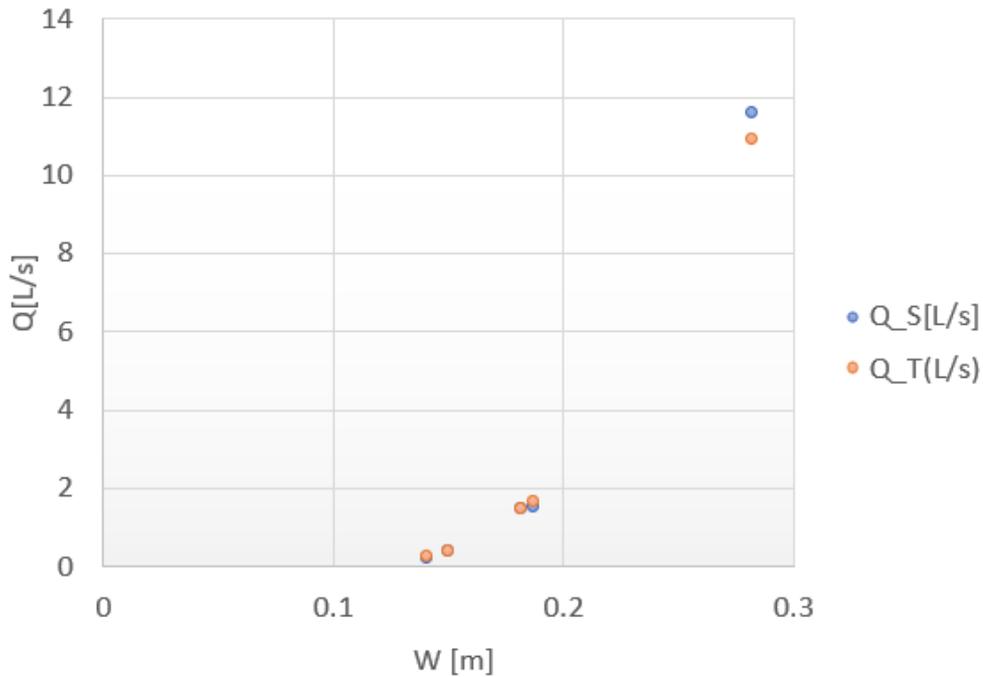


Figura 10: Grafico a punti raffigurante la portata teorica e sperimentale

Si è in grado ora di creare la funzione a tratti che definisce il modello idraulico da utilizzare nel caso in esame.

$$Q(W) = \begin{cases} \frac{\gamma R^{4i}}{8\mu} \left\{ (\alpha - \sin 2\alpha + 0.25 \cdot \sin 4\alpha) + 2\pi \sin^2 2\alpha \int_0^\infty \frac{k \cdot \tanh k\alpha}{\sinh^2 k\pi} dk \right\} & \text{se } W \leq 0.181m \\ \frac{2\alpha - \sin(2\alpha)}{8} \cdot 4R^2 \cdot \left(\frac{2\alpha - \sin 2\alpha}{8\alpha} \cdot 2R \right)^{2/3} \cdot K_S \cdot \sqrt{i} & \text{se } W \geq 0.181m \end{cases} \quad (24)$$

con $\alpha = \sin^{-1} \left(\frac{W}{2R} \right)$.

Purtroppo, la funzione è difficile da rappresentare graficamente specie a causa dell'integrale improprio risolvibile solo mediante metodi numerici. Quindi come alternativa si può pensare di sostituire il primo tratto di funzione con un'espressione semplificata che preveda l'utilizzo delle linee di tendenza. Queste non sono altro che strumenti statistici utilizzati per mostrare l'andamento generale di una serie di dati in funzione di una variabile. Siccome ne esistono di diverse tipologie, si userà quella che meglio si adatta alla distribuzione dei dati. In particolar modo si è cercato di implementare una funzione con codominio nei numeri positivi avente andamento sempre crescente e che a larghezze dello specchio d'acqua nulle associasse portate nulle. Si è quindi deciso di utilizzare il modello a legge di potenza e tramite alcune funzioni di Excel si è riusciti a ricavarne l'equazione e il grafico rappresentati in Figura 11.

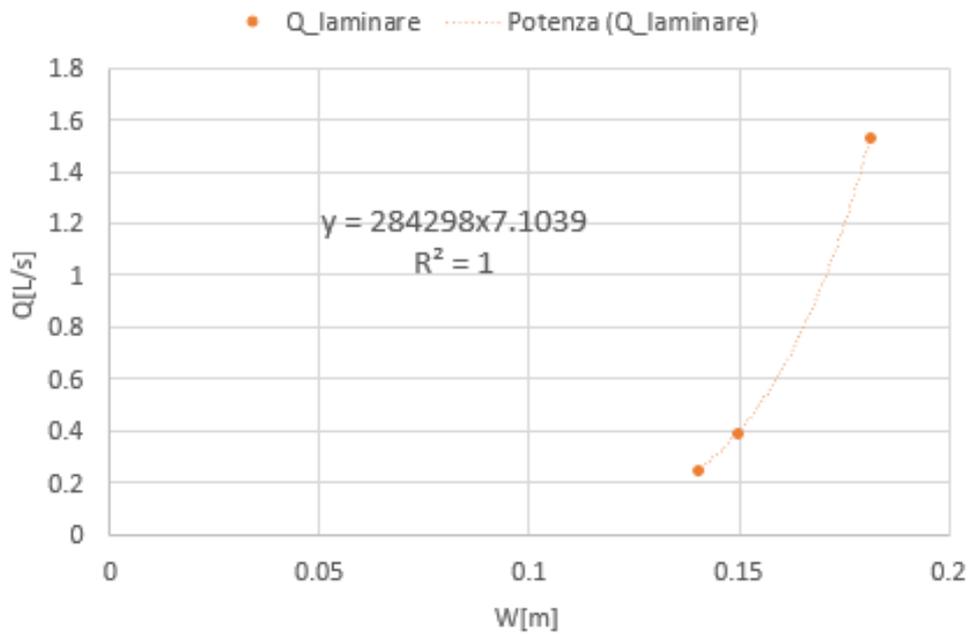


Figura 11: Linea di tendenza del tratto laminare con rispettiva equazione e coefficiente di determinazione

L'equazione che segue

$$y = 284298 \cdot W^{7.1039} \quad (25)$$

interpola in modo eccellente i dati ottenuti e rispetta tutte le condizioni citate precedentemente.

Si è ora in grado di costruire graficamente la funzione a tratti che permette di costruire la scala delle portate per qualsiasi valore della larghezza dello specchio d'acqua.

La Figura 12 mostra il risultato finale.

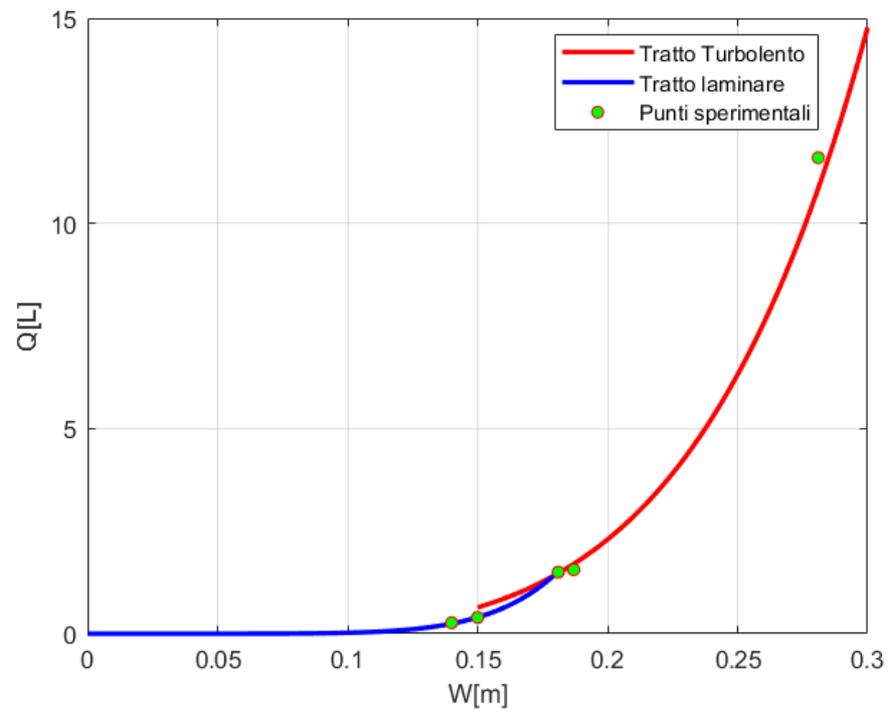


Figura 12: Grafico combinato di Q in funzione di W

Discussione

Entrambe le curve sembrano avere un andamento a legge di potenza, tuttavia, la curva blu che delinea il tratto laminare, nonostante risulti essere molto appiattita nell'intervallo $[0,0.1]$, cresce più rapidamente della curva rossa che invece descrive il tratto turbolento. Ciò lo si poteva intuire analizzando i risultati riportati in Tabella 6. A grandi valori di W corrispondono portate teoriche decisamente maggiori rispetto a quelle sperimentali. Quindi il modello laminare se applicato nel tratto turbolento porta a sovrastime importanti di Q . Gli estremi del dominio non sono stati scelti in modo casuale. È ovvio che la larghezza dello specchio d'acqua debba essere sempre positiva e non possa superare la misura del diametro. Quindi, avendo a disposizione dati fino ad $W = 0.281m$, si è scelto come estremo destro il valore di $0.3m$ in quanto permette di rimanere nel dominio di confidenza evitando anche alla portata di raggiungere valori eccessivi che non avrebbero fatto apprezzare l'andamento generale del grafico. La discontinuità tra il flusso laminare e turbolento che corrisponde nel caso analizzato all'intervallo in cui $0.15m \leq W \leq 0.181m$, è modesta a sottolineare la

possibilità di intercambiabilità tra i due modelli. Tuttavia, per valori prossimi a 0.15m si consiglia di applicare il modello laminare in quanto fornisce risultati leggermente più accurati. Infine, il punto utilizzato per definire i due tratti della funzione ($L = 0.181m$) è solo leggermente superiore al punto di intersezione tra le due curve ($L \simeq 0.173m$) e quindi il salto di valore che viene a crearsi cambiando il modello in uso è decisamente modesto. L'applicazione di questo modello dovrebbe facilitare la stima in campo della portata fluente nella tubazione, in quanto da una semplice immagine della fototrappola si riesce da remoto a stimarne un valore. I concetti sono applicabili per qualsiasi condotta circolare con flusso parzializzato ma il modello deve essere modificato in funzione della geometria del sistema e in particolar modo della pendenza. I risultati che fornisce sono buoni, tuttavia per una calibrazione più robusta sono necessari dataset con un numero maggiore di misure. In particolar modo delle cinque misure di larghezza dello specchio d'acqua fornite sono presenti due coppie di valori molto simili. Sarebbe opportuno quindi svolgere delle ulteriori indagini sul

campo e verificare se effettivamente il modello creato
trovi riscontri pratici per qualsiasi valore di W .

Bibliografia

- ❖ Junke Guo & Robert N. Meroney (2013) Theoretical solution for laminar flow in partially-filled pipes, *Journal of Hydraulic Research*, 51:4, 408-416, DOI: 10.1080/00221686.2013.784881

- ❖ *J. Fluid Mech.* (2018), Partially filled pipes: experiments in laminar and turbulent flow, Vol. 848, pp. 467–507, Cambridge University, doi:10.1017/jfm.2018.345