

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Facoltà di Ingegneria

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria delle Telecomunicazioni

Tesi di Laurea

TECNICHE DI BEAMFORMING IN CANALI MIMO AD ONDE MILLIMETRICHE

Relatore:
Prof. NEVIO BENVENUTO

Laureando:
LUCA PILLONI

Correlatore:
Dr. FEDERICO BOCCARDI

ANNO ACCADEMICO 2013-2014

Ai miei genitori
per non avermi tagliato i viveri

Indice

Elenco delle tabelle	iii
Elenco delle figure	v
1 Il canale radio per le onde mm	5
1.1 Risposta impulsiva del canale	5
1.1.1 Fattori di attenuazione	5
1.1.2 Modello per il canale MIMO	8
2 Beamforming ottimi e subottimi	13
2.1 SNR: varie definizioni	13
2.1.1 Canale AWGN	13
2.1.2 Canale MIMO	14
2.2 Approccio Singular Value Decomposition-Maximum Ratio Beamforming (SVD-MRB)	15
2.2.1 Composizione del problema	15
2.2.2 Soluzioni SVD (SVD-MRB)	17
2.2.3 Analisi prestazioni	18
2.3 Approccio iterativo (I-MRB)	18
2.3.1 Separazione e riformulazione del problema	18
2.3.2 Procedura iterativa	20
2.3.3 Analisi delle prestazioni	20
2.4 Approccio ADB	20
2.4.1 Algoritmo per il progetto dei beamformer	23
2.4.2 Analisi delle prestazioni	26
2.5 Approcci Digital Beamforming (DB)	26
2.5.1 SNR nel punto di decisione	27
2.5.2 Approccio Singular Value Decomposition-Digital Beamforming (SVD-DB)	28
2.5.3 Approccio Iterative-Digital Beamforming (I-DB)	31
3 Beamformer quantizzati	35
3.1 Quantizzazione vettoriale	35
3.1.1 Caratterizzazione della quantizzazione vettoriale	35
3.1.2 Algoritmo LBG	36
3.2 Selezione beamformers	38
3.3 Analisi delle prestazioni	40
3.4 Approccio alternativo	40

3.5	Q-DB	42
3.5.1	SNR nel punto di decisione	42
3.6	Q-SVD-DB	42
3.7	Q-I-DB	42
3.8	Prestazioni a confronto	43
4	Complessità algoritmi	45
A		51
B		67
B.1	SVD-MRB	67
B.2	I-MRB	67
B.3	ADB	68
B.4	Q-ADB	70
B.5	Q-SVD-DB	72
B.6	Q-I-DB	72
	Bibliografia	73
Bibliografia		75

Elenco delle tabelle

2.1	Algoritmo 1: progetto di \mathbf{F}_{RF} e \mathbf{f}_{BB}	24
2.2	Algoritmo 2: progetto combinato di \mathbf{F}_{RF} , \mathbf{U}_{RF} , \mathbf{f}_{BB} e \mathbf{u}_{BB}	25
3.1	Algoritmo 1: progetto di \mathbf{F}_{RF} (e di \mathbf{U}_{RF}).	40
A.1	$\bar{\gamma}_{ADB}$ al variare di N , M , N_{RF} , M_{RF} per diverse realizzazioni del canale con $D = \lambda/5$, utilizzando lo schema di Fig. 2.9 in cui i vari elementi sono stati progettati attraverso l'Algoritmo di Tab. 2.2 Tali prestazioni sono vicinissime al bound dato del SVD-MRB di Fig. 2.4.	52
A.2	$\bar{\gamma}_{ADB}$ al variare di N , M , N_{RF} , M_{RF} per diverse realizzazioni del canale con $D = 2\lambda$ utilizzando lo schema di Fig. 2.9 in cui i vari elementi sono stati progettati attraverso l'Algoritmo di Tab. 2.2. Tali prestazioni sono vicinissime al bound dato del SVD-MRB di Fig. 2.5.	53
A.3	$\bar{\gamma}_c$ di Q-ADB per diversi valori di M , M_{RF} , N , N_{RF} con $D = \lambda/5$: dizionari con $L_{TX} = 2$, $L_{RX} = 2$	54
A.4	$\bar{\gamma}_c$ di Q-ADB per diversi valori di M , M_{RF} , N , N_{RF} con $D = \lambda/5$: dizionari con $L_{TX} = 4$, $L_{RX} = 4$	55
A.5	$\bar{\gamma}_c$ di Q-ADB per diversi valori di M , M_{RF} , N , N_{RF} con $D = \lambda/5$: dizionari con $L_{TX} = 8$, $L_{RX} = 8$	56
A.6	$\bar{\gamma}_c$ di Q-ADB per diversi valori di M , M_{RF} , N , N_{RF} con $D = 2\lambda$: dizionari con $L_{TX} = 64$, $L_{RX} = 64$	57
A.7	$\bar{\gamma}_c$ di Q-ADB per diversi valori di M , M_{RF} , N , N_{RF} con $D = 2\lambda$: dizionari con $L_{TX} = 128$, $L_{RX} = 128$	58
A.8	$\bar{\gamma}_\phi$ di Q-ADB per diversi valori di M , M_{RF} , N , N_{RF} con $D = \lambda/5$: dizionari con $L_{TX} = 4$, $L_{RX} = 4$	59
A.9	$\bar{\gamma}_\phi$ di Q-ADB per diversi valori di M , M_{RF} , N , N_{RF} con $D = \lambda/5$: dizionari con $L_{TX} = 8$, $L_{RX} = 8$	60
A.10	$\bar{\gamma}_\phi$ di Q-ADB per diversi valori di M , M_{RF} , N , N_{RF} con $D = \lambda/5$: dizionari con $L_{TX} = 16$, $L_{RX} = 16$	61
A.11	$\bar{\gamma}_\phi$ di Q-ADB per diversi valori di M , M_{RF} , N , N_{RF} con $D = 2\lambda$: dizionari con $L_{TX} = 64$, $L_{RX} = 64$	62
A.12	$\bar{\gamma}_\phi$ di Q-ADB per diversi valori di M , M_{RF} , N , N_{RF} con $D = 2\lambda$: dizionari con $L_{TX} = 128$, $L_{RX} = 128$	63
A.13	$\bar{\gamma}_{Q-SVD-DB}$ al variare di N , M , N_{RF} , M_{RF} per diverse realizzazioni del canale con $D = \lambda/5$. $L_{TX} = 32$, $L_{RX} = 32$	64
A.14	$\bar{\gamma}_{Q-I-DB}$ al variare di N , M , N_{RF} , M_{RF} per diverse realizzazioni del canale con $D = \lambda/5$. $L_{TX} = 32$, $L_{RX} = 32$	65

B.1	Complessità per step dell'algoritmo I-MRB descritta nel Par. 2.3.2.	67
B.2	Complessità per step dell'algoritmo ADB di Tab. 2.1.	68
B.3	Complessità per step dell'algoritmo Q-ADB di Tab. 3.1.	71

Elenco delle figure

1.1	Modello a due raggi utilizzato per trovare il fattore $n = 4$.	7
1.2	Differenza relativa dei cammini in ULA.	8
2.1	Sistema AWGN.	14
2.2	Sistema MIMO.	15
2.3	Modello del sistema con beamformer ottimo in TX e RX.	15
2.4	$\bar{\gamma}_{SVD-MRB}$, dato dalla (2.28), al variare di M e N per diverse realizzazioni del canale con $D = \lambda/5$.	19
2.5	$\bar{\gamma}_{SVD-MRB}$, dato dalla (2.28), al variare di M e N per diverse realizzazioni del canale con $D = 2\lambda$.	19
2.6	$\bar{\gamma}_{I-MRB}$ al variare di N , M per diverse realizzazioni del canale con $D = \lambda/5$, utilizzando lo schema di Fig. 2.3 in cui \mathbf{f}_{BB} e \mathbf{u}_{BB} sono stati progettati attraverso la procedura iterativa del Par. 2.3.2.	21
2.7	$\bar{\gamma}_{I-MRB}$ al variare di N , M per diverse realizzazioni del canale con $D = 2\lambda$, utilizzando lo schema di Fig. 2.3 in cui \mathbf{f}_{BB} e \mathbf{u}_{BB} sono stati progettati attraverso la procedura iterativa del Par. 2.3.2.	21
2.8	Convergenza dell' approccio I-MRB con $M = 32$ e $N = 32$.	22
2.9	Architettura ADB: schema equivalente in BB.	23
2.10	$\bar{\gamma}_{ADB}$ per diverse configurazioni di M , N , M_{RF} e N_{RF} con $D = \lambda/5$.	27
2.11	$\bar{\gamma}_{ADB}$ per diverse configurazioni di M , N , M_{RF} e N_{RF} con $D = 2\lambda$.	27
2.12	Architettura SVD/I-DB.	28
2.13	$\bar{\gamma}_{SVD-DB}$ per diverse configurazioni di M , N , M_{RF} e N_{RF} con $D = \lambda/5$. \mathbf{F}_{RF} e \mathbf{U}_{RF} sono stati progettati con l'Algoritmo 2.1 mentre $\tilde{\mathbf{f}}_{SVD-DB}$ e $\tilde{\mathbf{u}}_{SVD-DB}$ sono ottenuti dalla SVD di $\tilde{\mathbf{H}}$.	29
2.14	$\bar{\gamma}_{SVD-DB}$ per diverse configurazioni di M , N , M_{RF} e N_{RF} con $D = 2\lambda$. \mathbf{F}_{RF} e \mathbf{U}_{RF} sono stati progettati con l'Algoritmo 2.1 mentre $\tilde{\mathbf{f}}_{SVD-DB}$ e $\tilde{\mathbf{u}}_{SVD-DB}$ sono ottenuti dalla SVD di $\tilde{\mathbf{H}}$.	29
2.15	$\bar{\gamma}_{I-DB}$ per diverse configurazioni di M , N , M_{RF} e N_{RF} con $D = \lambda/5$. \mathbf{F}_{RF} e \mathbf{U}_{RF} sono stati progettati con l'Algoritmo 2.1 mentre $\tilde{\mathbf{f}}_{I-DB}$ e $\tilde{\mathbf{u}}_{I-DB}$ sono ottenuti dalla procedura ciclica di Par. 2.3.2.	30
2.16	$\bar{\gamma}_{I-DB}$ per diverse configurazioni di M , N , M_{RF} e N_{RF} con $D = 2\lambda$. \mathbf{F}_{RF} e \mathbf{U}_{RF} sono stati progettati con l'Algoritmo 2.1 mentre $\tilde{\mathbf{f}}_{I-DB}$ e $\tilde{\mathbf{u}}_{I-DB}$ sono ottenuti dalla procedura ciclica di Par. 2.3.2.	30
2.17	Istogramma come stima della PDF degli elementi di \mathbf{F}_{RF} con $M = N = 4$ e $M_{RF} = N_{RF} = 2$.	32
2.18	(Continua)	33

2.19	Istogramma come stima della PDF della fase degli elementi di \mathbf{F}_{RF} con $M = N = 4$ e $M_{RF} = N_{RF} = 2$	34
3.1	Diagramma di flusso dell'algoritmo LBG.	37
3.2	D_c per \mathbf{F}_{RF} . $L_{TX} = 4$	39
3.3	D_c per \mathbf{U}_{RF} . $L_{RX} = 4$	39
3.4	D_ϕ per \mathbf{F}_{RF} . $L_{TX} = 4$	39
3.5	D_ϕ per \mathbf{U}_{RF} . $L_{RX} = 4$	39
3.6	$\bar{\gamma}_{Q_c-ADB}$ per diverse configurazioni di M , N , M_{RF} e N_{RF} con $D = \lambda/5$. $L_{TX} = L_{RX} = 8$	41
3.7	$\bar{\gamma}_{Q_\phi-ADB}$ per diverse configurazioni di M , N , M_{RF} e N_{RF} con $D = \lambda/5$. $L_{TX} = L_{RX} = 32$	41
3.8	Prestazioni a confronto $M_{RF} = N_{RF} = 4$	43
3.9	Prestazioni a confronto $M_{RF} = N_{RF} = 8$	43
3.10	Prestazioni a confronto $M_{RF} = N_{RF} = 16$	44
4.1	Complessità dell'algoritmo $SVD - MRB$ al variare di $M = N$	46
4.2	Complessità dell'algoritmo $I - MRB$ al variare di $M = N$	46
4.3	Complessità dell'algoritmo ADB al variare di $M = N$ e $M_{RF} = N_{RF}$, con $L_{TX} = L_{RX} = 8$	47
4.4	Complessità dell'algoritmo $Q - ADB$ al variare di $M = N$ e $M_{RF} = N_{RF}$, con $L_{TX} = L_{RX} = 8$	47
4.5	Complessità dell'algoritmo $Q - SVD - DB$ al variare di $M = N$ e $M_{RF} =$ N_{RF} , con $L_{TX} = L_{RX} = 8$	48
4.6	Complessità dell'algoritmo $Q - I - DB$ al variare di $M = N$ e $M_{RF} = N_{RF}$, con $L_{TX} = L_{RX} = 8$	48
4.7	Confronto della complessità dei vari algoritmi con $M_{RF} = N_{RF} = 4$	49
4.8	Confronto della complessità dei vari algoritmi con $M_{RF} = N_{RF} = 8$	49
4.9	Confronto della complessità dei vari algoritmi con $M_{RF} = N_{RF} = 16$	50
B.1	Complessità dell'algoritmo ADB al variare di M , N con $M_{RF} = 4$ calcolata nei due metodi B.6 e B.7.	69

Acronimi

ADB Analog-Digital Beamforming

ADC Analog to Digital Converter

AWGN Additive White Gaussian Noise

BB Banda Base

BP Banda Passante

DAC Digital to Analog Converter

DB Digital Beamforming

I-DB Iterative-Digital Beamforming

I-MRB Iterative Maximum Ratio Beamforming

LBG Linde-Buzo-Gray

MIMO Multiple Input Multiple Output

MISO Multiple Input Single Output

MMW mm-Wave

MRB Maximum Ratio Beamforming

PDF Probability Density Function

Q-ADB Quantized Analog-Digital Beamforming

Q-DB Quantized-Digital Beamforming

RF Radio Frequency

RX Ricezione

SIMO Single Input Multiple Output

SISO Single Input Single Output

SNR Signal to Noise Ratio

SVD-DB Singular Value Decomposition-Digital Beamforming

SVD-MRB Singular Value Decomposition-Maximum Ratio Beamforming

SVD Singular Value Decomposition

TX Trasmissione

ULA Uniform Planar Array

UPA Uniform Linear Array

Introduzione

Nello spettro elettromagnetico sono presenti almeno 250 GHz di banda disponibile tra i 3 e 300 GHz (chiamata mm-Wave (MMW)) con la possibilità di raggiungere alto bit-rate con alta efficienza spettrale. Per fare ciò i sistemi a MMW devono contrastare la forte attenuazione introdotta dal collegamento radio. La lunghezza d'onda millimetrica nei sistemi MMW permette l'uso di array con un gran numero di antenne in trasmissione e in ricezione, per combattere il path loss con una trasmissione altamente direttiva. Se la trasmissione avvenisse con un'unica antenna omnidirezionale a 60 GHz, il path loss essendo direttamente proporzionale con la frequenza, assumerebbe valori di 20 dB superiori ad una trasmissione a 6 GHz. Viceversa utilizzando un'antenna direttiva fissa con apertura data, la direttività aumenta proporzionalmente con la radice della frequenza. Inoltre mentre nei sistemi cellulari a frequenze tradizionali il beamforming effettuato in banda base utilizza una catena Radio Frequency (RF) dedicata per ogni antenna, ciò non è possibile nei sistemi a MMW a causa dell'alto costo dell'hardware RF. Quindi differenti soluzioni sono state proposte in architetture solo analogiche o analogico-digitali ibride [1]. Una buona analisi delle differenti implementazioni analogiche è riportata in [2]. In [1] sono proposte soluzioni di tipo ibrido dove l'array di antenne è pilotato da un numero limitato di catene RF. In questa tesi ci focalizziamo sul progetto di beamforming in sistemi con antenne multiple nella banda di frequenze delle MMW offrendo soluzioni alternative da quelle riportate in letteratura.

Capitolo 1

Il canale radio per le onde mm

Mentre un segnale a bassa frequenza può penetrare facilmente attraverso costruzioni, un segnale a onde millimetriche non è in grado di attraversare diversi materiali solidi. Cause significative di attenuazione alle alte frequenze sono il fogliame, le gocce di pioggia e la banda di assorbimento dell'ossigeno, che in alcuni casi possono essere fattori limitativi per la propagazione. Viceversa per quanto riguarda le antenne, alle alte frequenze possono essere collocate in gran numero in uno spazio ristretto permettendo un beamforming ad alto guadagno. In questo capitolo andremo ad analizzare il caso Multiple Input Multiple Output (MIMO) che permette l'utilizzo di più antenne in Trasmissione (TX) ed in Ricezione (RX).

1.1 Risposta impulsiva del canale

L'equivalente passa basso della risposta impulsiva di un canale a onde mm MIMO a un segnale a banda stretta è una matrice $\mathbb{C}^{N \times M}$ dove M e N sono il numero di antenne rispettivamente in TX e in RX.

$$\hat{\mathbf{H}} = \sqrt{G} \begin{bmatrix} h_{11} & \cdots & h_{1M} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{N1} & \cdots & h_{NM} \end{bmatrix} = \sqrt{G} \mathbf{H} \quad (1.1)$$

dove G è il guadagno medio del canale. Mentre G è un fattore deterministico, gli elementi di \mathbf{H} sono variabili aleatorie complesse. La matrice \mathbf{H} deve inoltre soddisfare sulla norma di Frobenius quadratica

$$\mathbb{E} [\|\mathbf{H}\|^2] = MN. \quad (1.2)$$

1.1.1 Fattori di attenuazione

Un'espressione generale per G è

$$G = \left(\frac{\lambda}{4\pi d} \right)^n \Lambda_t(\phi_t, \vartheta_t) \Lambda_r(\phi_r, \vartheta_r) G^{(o)} G^{(r)} G^{(f)} \quad (1.3)$$

dove

- $\lambda = c/f_c$ è la lunghezza d'onda della portante a frequenza f_c ;
- d è la distanza fra trasmettitore e ricevitore;
- n è il fattore di path-loss che dipende dall'ambiente circostante;
- Λ_t è il guadagno direzionale dell'antenna in trasmissione, funzione dell'azimuth ϕ_t e dell'elevazione ϑ_t del raggio trasmesso;
- Λ_r è il guadagno direzionale dell'antenna in RX, funzione dell'azimuth ϕ_r e dell'elevazione ϑ_r del raggio ricevuto;
- $G^{(o)}$ è l'attenuazione media dovuta all'assorbimento dell'ossigeno;
- $G^{(r)}$ è l'attenuazione media dovuta alla pioggia;
- $G^{(f)}$ è l'attenuazione media dovuta al fogliame.

In questo caso i guadagni direzionali di antenna Λ_t e Λ_r vengono considerati costanti per ogni angolo di raggio in arrivo o in partenza; perciò vengono inclusi nel guadagno globale G . Il modello per l'attenuazione (1.3) è valido solo per valori di d compresi nel campo lontano, o regione di Fraunhofer, dall'antenna di TX. Questa è definita come la regione oltre la distanza di campo lontano la quale è legata alle dimensioni dell'antenna in TX e alla lunghezza d'onda della portante, cioè per [3, pp. 72]

$$d \gg D_{ant} \quad d \gg \lambda \quad e \quad d \gg \frac{2D_{ant}^2}{\lambda} \quad (1.4)$$

dove D_{ant} è la dimensione lineare più grande dell'antenna.

Attenuazione in spazio libero

Il primo termine in (1.3) è l'attenuazione dovuta alla propagazione in spazio libero. Il fattore n nello spazio libero è 2, ma dipende dal modello di propagazione utilizzato: è noto che per il modello a due raggi di Fig. 1.1, n sotto determinate condizioni può raggiungere il valore di 4. Una di queste condizioni per la quale è verificata è che la differenza di cammino tra il raggio diretto e quello riflesso è minore di $\lambda/2$, il che significa che la distanza tra trasmettitore e ricevitore per la quale è verificata è $d_0 = 4h_t h_r / \lambda$, dove h_t e h_r sono rispettivamente le altezze delle antenne in TX e RX, oltre la quale il fattore $n = 4$ può essere utilizzato. Per l'intervallo di frequenze da 60 a 66 GHz e per altezze delle antenne pari rispettivamente a $h_r = 1.8\text{m}$ e $h_t \in [5; 50]\text{m}$ si ha $d_0 \in [7.2; 79.21]\text{km}$ che è più grande del range utilizzato nelle trasmissioni mm. Questo significa che il fattore $n = 4$ non viene utilizzato per segnali mm, di conseguenza si setta $n = 2$, il che è confermato anche sperimentalmente in [4, pp. 77].

Guadagno d'antenna

A causa dell'elevata attenuazione in spazio libero e degli altri fattori di attenuazione, che analizzeremo in seguito, l'uso di antenne direzionali è obbligatorio per la realizzazione con successo del collegamento. Un vantaggio dell'utilizzo delle antenne direttive è la limitazione del fenomeno del multipath, perchè essendo il cono di RX dell'antenna via

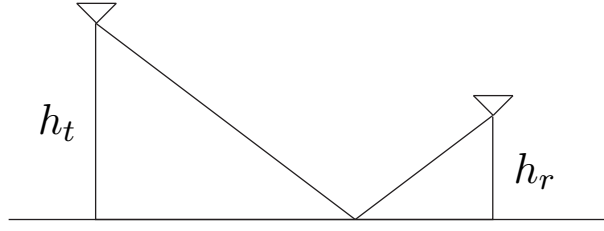


Figura 1.1: Modello a due raggi utilizzato per trovare il fattore $n = 4$.

via più stretto in proporzione alla direttività dell'antenna, i raggi che entrano nel cono avranno angoli di arrivo simili e quindi cammini e ritardi simili. Un semplice esempio di schema di radiazione è:

$$\Lambda(\phi, \vartheta) = \begin{cases} \Lambda_0, & \phi \in [\phi_{min}; \phi_{max}] \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (1.5)$$

dove Λ_0 è il guadagno costante nel settore definito da $\phi \in [\phi_{min}; \phi_{max}]$ e da $\vartheta \in [\vartheta_{min}; \vartheta_{max}]$. Nel caso in cui si effettui un approccio del tipo ray-tracing, gli angoli sono costanti e ben definiti. In altre situazioni $\phi_t, \phi_r, \vartheta_t$, e ϑ_r sono considerati variabili aleatorie uniformemente distribuite nel loro settore, cioè

$$\phi_t, \phi_r \sim \mathcal{U}[\phi_{min}; \phi_{max}], \quad \vartheta_t, \vartheta_r \sim \mathcal{U}[\vartheta_{min}; \vartheta_{max}] \quad (1.6)$$

Banda di assorbimento dell'ossigeno

Attorno ai 60 GHz dello spettro elettromagnetico è presente un picco di attenuazione dovuto alla risonanza dell'ossigeno presente nell'atmosfera. Il termine $G^{(o)}$ in (1.3) è trascurabile nella banda UHF (ultra high frequencies), ma non può esserlo per le frequenze superiori. In [4, pp. 78] è stato sviluppato un modello per l'attenuazione dovuta all'ossigeno

$$G_{[dB/km]}^{(o)}(f_c[GHz]) = \begin{cases} 0.104(f_c - 60)^{3.26} - 15.10 & 60 \geq f_c \leq 63 \\ 5.33(f_c - 63)^{1.27} - 11.35 & 63 < f_c \leq 66 \end{cases} \quad (1.7)$$

dove f_c è la frequenza della portante. Vi sono altre attenuazioni dovute a fenomeni come i vapori acquee o nebbia, ma possono essere trascurati visto che la corrispondente attenuazione è dell'ordine di 0.1 dB/km [4, pp. 78].

Attenuazione per pioggia

Nell'intervallo di frequenze delle onde mm l'attenuazione per pioggia è un fattore rilevante. A seconda dell'intensità di precipitazione R misurata in [mm/h] è valido il seguente modello [4, pp. 78]

$$G_{[dB/km]}^{(r)}(f_c[GHz], R_{[mm/h]}) = -k(f_c)R^{a(f_c)} \quad (1.8)$$

dove

$$k(f_c) = 10^{1.203 \log(f_c) - 2.290} \quad a(f_c) = 1.703 - 0.493 \log(f_c) \quad (1.9)$$

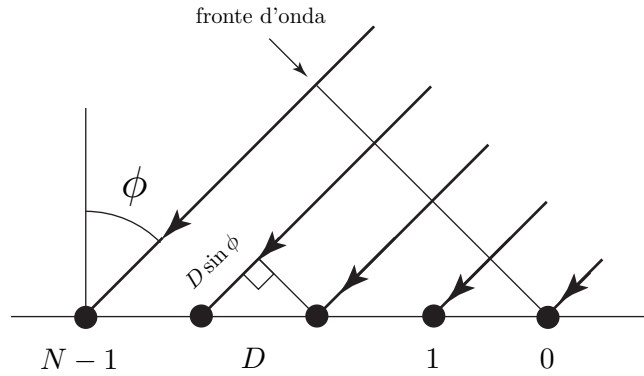


Figura 1.2: Differenza relativa dei cammini in ULA.

L'attenuazione causata dalla pioggia può raggiungere valori significativi come per esempio $G^{(r)} = -18[\text{dB/km}]$ con $R = 50\text{mm/h}$. Quindi per distanze superiori al chilometro devono essere tenute in considerazione, viceversa possono essere trascurate per distanze inferiori a 200m.

Attenuazione per fogliame

Un semplice modello per l'attenuazione dovuta al fogliame è data da [5]

$$G^{(f)}(f_c, d_{fol}) = \frac{5}{f_c^{0.3} d_{fol}^{0.6}} \quad (1.10)$$

dove d_{fol} è la profondità dell'area del fogliame tra trasmettitore e ricevitore.

1.1.2 Modello per il canale MIMO

Il modello di riferimento per il canale MIMO preso in considerazione è particolarmente adatto nel caso in cui si ha una diversità spaziale limitata ed un gran numero di antenne confinate nella stessa area, come nel caso delle onde mm. Questo modello preso da [1, pp. 3783] descrive la matrice del canale per un array di antenne lineare uniforme Uniform Planar Array (ULA) con beamforming nel piano azimutale e per un array di antenne planari uniformi Uniform Linear Array (UPA), quindi con la possibilità di un beamforming anche in elevazione.

Array lineare uniforme

Consideriamo un array lineare uniforme di antenne nel piano azimutale con N elementi equispaziati di una distanza D , illustrato in Fig. 1.2, e definiamo il vettore \mathbf{a} dei fasori

$$\mathbf{a}(\phi) = [1 \quad e^{j\zeta D \sin \phi} \quad \dots \quad e^{j(N-1)\zeta D \sin \phi}]^T \quad (1.11)$$

dove $\zeta = 2\pi/\lambda$ e ϕ rappresenta l'angolo di arrivo nel caso di ricevitore, o l'angolo di partenza nel caso di trasmettitore, nel piano azimutale. Inoltre se

$$g_l \sim \mathcal{CN}(0, 1), \quad (1.12)$$

la risposta impulsiva del canale ad un segnale a banda stretta per un sistema ULA con M antenne al trasmettitore e N antenne al ricevitore, è una matrice $\mathbf{H}_{ULA} \in \mathbb{C}^{N \times M}$ definita da

$$\mathbf{H}_{ULA} = \frac{1}{\sqrt{L}} \sum_{l=1}^L g_l \mathbf{a}_r(\phi_l^{(r)}) \mathbf{a}_t^H(\phi_l^{(t)}) \quad (1.13)$$

dove L è il numero totale di raggi e $\mathbf{a}_r(\cdot)$ e $\mathbf{a}_t(\cdot)$ sono i vettori di fasori definite in (1.11). Da notare che gli elementi di \mathbf{a} rappresentano l'offset di fase dovuta alla distanza tra elementi e dipendono solo dall'angolo ϕ sul piano azimutale. Il fattore \sqrt{G} presente in (1.1) è stato omesso per semplicità.

Array planari uniformi

Introduciamo inoltre un array planare uniforme UPA (Uniform Planar Array) costituito da $N = WH$ elementi, con W elementi equispaziati di D in una dimensione e H elementi sempre equispaziati di D nell'altra dimensione. Definiamo \mathbf{b} il vettore di fasori definito come

$$\mathbf{b}(\phi, \vartheta) = [1 \quad e^{j\zeta D(w \sin \phi \sin \vartheta + h \cos \vartheta)} \quad \dots \quad e^{j\zeta D((W-1) \sin \phi \sin \vartheta + (H-1) \cos \vartheta)}]^T \quad (1.14)$$

dove $w = 0, 1, \dots, W-1$ e $h = 0, 1, \dots, H-1$, sono gli indici degli elementi dell'antenna e $\zeta = 2\pi/\lambda$. La risposta impulsiva del canale ad un segnale a banda stretta per un sistema UPA con M antenne al trasmettitore e N antenne al ricevitore, è una matrice $\mathbf{H}_{UPA} \in \mathbb{C}^{N \times M}$ definita da

$$\mathbf{H}_{UPA} = \frac{1}{\sqrt{L}} \sum_{l=1}^L g_l \mathbf{b}_r(\phi_l^{(r)}, \vartheta_l^{(r)}) \mathbf{b}_t^H(\phi_l^{(t)}, \vartheta_l^{(t)}) \quad (1.15)$$

In questo caso si può quindi effettuare un beamforming anche in elevazione, perciò la risposta impulsiva del canale è funzione anche di ϑ .

Formulazione matriciale

Le espressioni per la risposta impulsiva del canale ricavate in (1.13) e (1.15) possono essere riscritte in una forma matriciale sintetica [6, pp. 27]:

$$\mathbf{H}_{ULA} = \frac{1}{\sqrt{L}} \mathbf{A}_r \mathbf{H}_g \mathbf{A}_t^H \quad \mathbf{H}_{UPA} = \frac{1}{\sqrt{L}} \mathbf{B}_r \mathbf{H}_g \mathbf{B}_t^H \quad (1.16)$$

dove

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_r &= [\mathbf{a}_r(\phi_1^{(r)}) \cdots \mathbf{a}_r(\phi_L^{(r)})] & \mathbf{B}_r &= [\mathbf{b}_r(\phi_1^{(r)}, \vartheta_1^{(r)}) \cdots \mathbf{b}_r(\phi_L^{(r)}, \vartheta_L^{(r)})] \\ \mathbf{A}_t &= [\mathbf{a}_t(\phi_1^{(t)}) \cdots \mathbf{a}_t(\phi_L^{(t)})] & \mathbf{B}_t &= [\mathbf{b}_t(\phi_1^{(t)}, \vartheta_1^{(t)}) \cdots \mathbf{b}_t(\phi_L^{(t)}, \vartheta_L^{(t)})] \end{aligned} \quad (1.17)$$

e

$$\mathbf{H}_g = \text{diag}(g_1, \dots, g_L). \quad (1.18)$$

dove l'operatore $\text{diag}(\cdot)$ indica una matrice con solo gli elementi della diagonale principale diversi da zero e uguali alla lista degli argomenti nell'ordine indicato.

Autocorrelazione del canale ULA

In questa sezione riportiamo da [7] l'espressione dell'autocorrelazione del canale ULA in TX e in RX

$$\mathbf{R}_{TX} = \mathbb{E}[\mathbf{H}_{ULA}^H \mathbf{H}_{ULA}] \quad \text{e} \quad \mathbf{R}_{RX} = \mathbb{E}[\mathbf{H}_{ULA} \mathbf{H}_{ULA}^H] \quad (1.19)$$

In accordo con il prodotto tra matrici, riscriviamo le espressioni per un generico elemento della riga p e colonna q , si ha

$$[\mathbf{R}_{TX}]_{p,q} = \mathbb{E}[\text{riga}_p(\mathbf{H}_{ULA}^H) \text{col}_q(\mathbf{H}_{ULA})] = \mathbb{E}[(\text{col}_p(\mathbf{H}_{ULA}))^H \text{col}_q(\mathbf{H}_{ULA})] \quad (1.20)$$

e

$$[\mathbf{R}_{RX}]_{p,q} = \mathbb{E}[\text{riga}_p(\mathbf{H}_{ULA}) \text{col}_q(\mathbf{H}_{ULA}^H)] = \mathbb{E}[\text{riga}_p(\mathbf{H}_{ULA})(\text{riga}_q(\mathbf{H}_{ULA}))^H] \quad (1.21)$$

da (1.16) e (1.20) segue

$$\begin{aligned} [\mathbf{R}_{TX}]_{p,q} &= \frac{1}{L} \mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^N \sum_{l=1}^L \sum_{o=1}^L g_l^* g_o e^{j\zeta D(p-1) \sin \phi_l^{(t)}} e^{-j\zeta D(q-1) \sin \phi_o^{(t)}} \right] \\ &= \frac{N}{L} \sum_{l=1}^L \sum_{o=1}^L \mathbb{E} \left[g_l^* g_o e^{j\zeta D(p-1) \sin \phi_l^{(t)}} e^{-j\zeta D(q-1) \sin \phi_o^{(t)}} \right]. \end{aligned} \quad (1.22)$$

Nell'ultimo passaggio si è sfruttata l'indipendenza dall'indice i dei termini entro le sommatorie. Sfruttando inoltre l'indipendenza tra il guadagno g e l'angolo ϕ dei raggi, l'aspettazione in (1.22) diventa

$$\begin{cases} \mathbb{E}[|g_l|^2] \mathbb{E}[e^{j\zeta D(p-q) \sin \phi_l^{(t)}}] & \text{se } l = o \\ \underbrace{\mathbb{E}[g_l^*]}_0 \underbrace{\mathbb{E}[g_o]}_0 \mathbb{E}[e^{j\zeta D(p-1) \sin \phi_l^{(t)}} e^{-j\zeta D(q-1) \sin \phi_o^{(t)}}] = 0 & \text{se } l \neq o \end{cases} \quad (1.23)$$

e quindi (1.22) può essere riscritta in forma più compatta come

$$[\mathbf{R}_{TX}]_{p,q} = \frac{N}{L} \sum_{l=1}^L \underbrace{\mathbb{E}[|g_l|^2]}_1 \mathbb{E}[e^{j\zeta D(p-q) \sin \phi_l^{(t)}}] = N \mathbb{E}[e^{j\zeta D(p-q) \sin \phi^{(t)}}] \quad (1.24)$$

dove da (1.6) per ogni $l = 1, \dots, L$, $\phi_l^{(l)} \sim \mathcal{U}[\phi_{min}, \phi_{max}]$, di conseguenza l'indice l è stato omesso. Similmente si può ottenere per ogni singolo elemento l'espressione dell'autocorrelazione \mathbf{R}_{RX} , il risultato è

$$[\mathbf{R}_{RX}]_{p,q} = M \mathbb{E}[e^{j\zeta D(p-q) \sin \phi^{(r)}}]. \quad (1.25)$$

Sempre da (1.6) $\phi^{(t)}$ e $\phi^{(r)}$ sono entrambe distribuite in modo uniforme. Chiamandole più genericamente ϕ , e risulta che la loro densità di probabilità è data da

$$f_\phi(a) = \begin{cases} \frac{1}{\phi_{max} - \phi_{min}} & a \in [\phi_{min}; \phi_{max}] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (1.26)$$

Calcolando l'aspettazione di una funzione di variabile aleatoria, dalla (1.24) si è in grado di arrivare alla forma chiusa di un generico elemento di riga p e colonna q della matrice di autocorrelazione Tx e Rx

$$[\mathbf{R}_{TX}]_{p,q} = \frac{N}{\phi_{max} - \phi_{min}} \int_{\phi_{min}}^{\phi_{max}} e^{j\zeta D(p-q) \sin a} da \quad [\mathbf{R}_{RX}]_{p,q} = \frac{M}{\phi_{max} - \phi_{min}} \int_{\phi_{min}}^{\phi_{max}} e^{j\zeta D(p-q) \sin a} da \quad (1.27)$$

Da notare l'indipendenza degli elementi della matrice di autocorrelazione dal numero di raggi L .

Esempi numerici della matrice di autocorrelazione ULA

Due esempi numerici di valori assunti dalla (1.27) sono esposti di seguito. I parametri utilizzati sono $\lambda = 0.005$ m, $N = 6$ e $D = \lambda/5$

$$\text{abs} \left(\frac{1}{N} \right) \mathbf{R}_{TX} = \begin{bmatrix} 1 & 0.78 & 0.28 & 0.16 & 0.30 & 0.13 \\ 0.78 & 1 & 0.78 & 0.28 & 0.16 & 0.30 \\ 0.28 & 0.78 & 1 & 0.78 & 0.28 & 0.16 \\ 0.16 & 0.28 & 0.78 & 1 & 0.78 & 0.28 \\ 0.30 & 0.16 & 0.28 & 0.78 & 1 & 0.78 \\ 0.13 & 0.30 & 0.16 & 0.28 & 0.78 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.28)$$

e per $D = 2\lambda$

$$\text{abs} \left(\frac{1}{N} \right) \mathbf{R}_{TX} = \begin{bmatrix} 1 & 0.12 & 0.01 & 0.06 & 0.02 & 0.04 \\ 0.12 & 1 & 0.12 & 0.01 & 0.06 & 0.02 \\ 0.01 & 0.12 & 1 & 0.12 & 0.01 & 0.06 \\ 0.06 & 0.01 & 0.12 & 1 & 0.12 & 0.01 \\ 0.02 & 0.06 & 0.01 & 0.12 & 1 & 0.12 \\ 0.04 & 0.02 & 0.06 & 0.01 & 0.12 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.29)$$

Possiamo osservare che l'aumento di D porta ad una diminuzione della correlazione tra elementi della matrice. Inoltre per $D = \lambda/5$ gli elementi sono abbastanza correlati.

Simulazione canale ULA

Per quanto riguarda tutte le simulazioni riportate in questa tesi, se non espressamente sottolineato, consideriamo un ambiente con un numero di raggi $L = 20$ e portante con lunghezza d'onda $\lambda = 0.005$ m. Gli array ULA in TX e in RX hanno una separazione tra elementi pari a $D = \lambda/5$ nel primo caso e $D = 2\lambda$ nel secondo e caratterizzano il canale attraverso la matrice $\mathbf{H}_{ULA} \in \mathbb{C}^{N \times M}$ in (1.16). I raggi di partenza e arrivo hanno angoli rispettivamente ϕ_t e ϕ_r , distribuiti uniformemente in $[-60^\circ; 60^\circ]$ nel piano azimutale. Le simulazioni degli Signal to Noise Ratio (SNR) sono state ottenute su 5000 realizzazioni del canale \mathbf{H}_{ULA} per ciascuna configurazione.

Capitolo 2

Beamforming ottimi e subottimi

Il capitolo inizia introducendo l' SNR , per la misura delle prestazioni di un sistema MIMO a onde mm. Successivamente viene introdotto il beamforming ottimo dato dal SVD-MRB, che rappresenta un upper bound alle prestazioni, ed uno sub-ottimo in cui il signal processing viene separato in una parte analogica in RF e una parte digitale in BB, questo per cercare di diminuire il numero di convertitori analogico digitali. Quindi nell'ambito dei sistemi mm, le soluzioni cercate vanno nella direzione di cercare di diminuire la complessità dell'hardware.

2.1 SNR: varie definizioni

Introduciamo varie definizioni di SNR le quali verranno utilizzate per valutare e confrontare le prestazioni dei sistemi considerati. Cominciamo con la definizione dell' SNR per un canale

- Singol Input Single Output (SISO)
- Additive White Gaussian Noise (AWGN)
- MIMO

2.1.1 Canale AWGN

In Fig. 2.1 è illustrato lo schema equivalente in banda base di un canale AWGN. Il rumore additivo n è un processo aleatorio con distribuzione Gaussiana complessa con media nulla e varianza σ_n^2 a simmetria circolare

$$n \sim \mathcal{CN}(0, \sigma_n^2) \quad (2.1)$$

Nel sistema considerato in Fig. 2.1 a causa dell'assenza di codifica valgono le seguenti relazioni

$$s = x \quad \text{e} \quad r = y \quad (2.2)$$

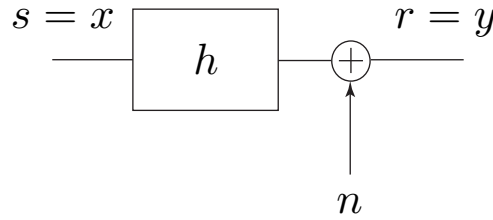


Figura 2.1: Sistema AWGN.

SNR canale AWGN

Il segnale ricevuto, considerando (2.2), è uguale a

$$y = r = hs + n = hx + n \quad (2.3)$$

Definiamo

$$M_h = \mathbb{E} [|h|^2] \quad \text{e} \quad M_x = \mathbb{E} [|x|^2] \quad (2.4)$$

rispettivamente la potenza statistica del canale e del segnale di informazione. L'espressione del *SNR medio*, chiamato Γ_{AWGN} , è dato dalla

$$\Gamma_{AWGN} = \frac{\mathbb{E}_{h,x} [|hx|^2]}{\mathbb{E} [|n|^2]} = \frac{\mathbb{E}_h [|h|^2] \mathbb{E}_x [|x|^2]}{\sigma_n^2} = \frac{M_h M_x}{\sigma_n^2} \quad (2.5)$$

Imponendo a uno la potenza statistica del canale e del segnale di informazione in ingresso si ha

$$\Gamma_{AWGN} = \frac{1}{\sigma_n^2} \quad (2.6)$$

2.1.2 Canale MIMO

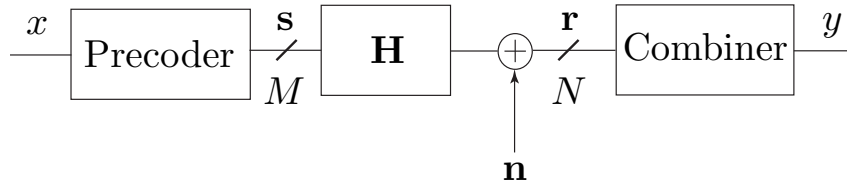
Consideriamo ora una configurazione MIMO, con M antenne in TX e N antenne in RX, caratterizzata da un singolo flusso dati in ingresso e ripartito attraverso il beamforming in TX sulle M antenne e di conseguenza ricostruito attraverso il beamforming in RX; si ha cioè un singolo flusso in ingresso ed un singolo flusso in uscita. Andiamo a definire l'*SNR normalizzato* rispetto a Γ_{AWGN} associato ad una singola realizzazione del canale e mediato su più realizzazioni. In Fig. 2.2 è rappresentato lo schema di un sistema MIMO con il beamformer in TX (precoder) e il beamformer in RX (combiner). Il vettore rumore \mathbf{n} è modellato come un vettore di processi aleatori gaussiani indipendenti con simmetria circolare, cioè

$$\mathbf{n} \sim \mathcal{N}(0, \sigma_n^2 \mathbf{I}_N) \quad (2.7)$$

dove σ_n^2 è la varianza della singola componente di \mathbf{n} , distribuita secondo la (2.1).

SNR nel punto di decisione

Nel punto di decisione, per una singola realizzazione del canale \mathbf{H} , dopo il beamforming in RX, consideriamo l'*SNR*, chiamato Γ , come il rapporto tra la potenza statistica del


Figura 2.2: Sistema MIMO.

segnale utile (funzione di x) e quella del rumore. Definiamo anche l'*SNR normalizzato* rispetto al rumore, cioè

$$\gamma = \frac{\Gamma}{\Gamma_{AWGN}} \quad (2.8)$$

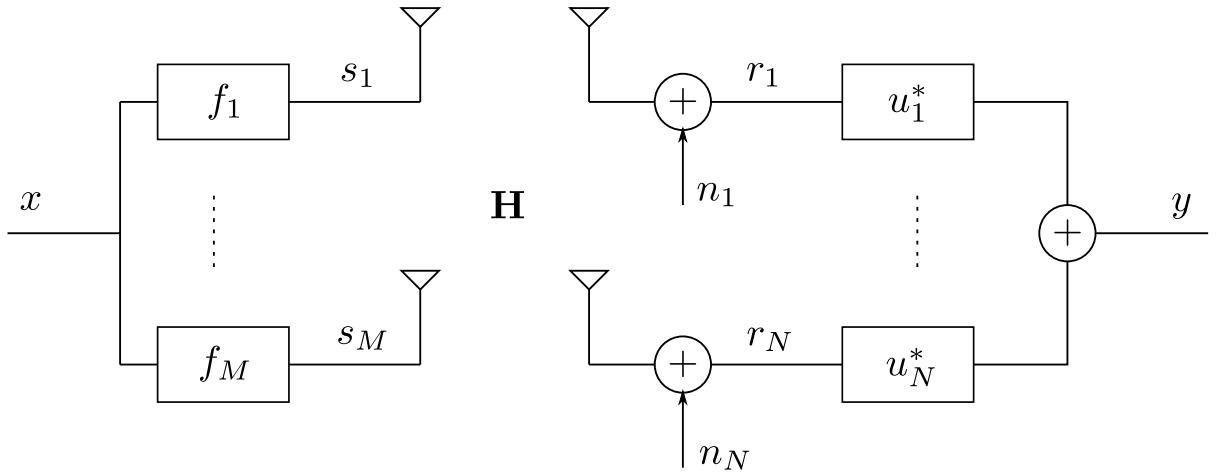
Inoltre per misurare le prestazioni del sistema medio rispetto alle realizzazioni del canale \mathbf{H}

$$\bar{\Gamma} = \mathbb{E}_{\mathbf{H}}[\Gamma] \quad \text{e} \quad \bar{\gamma} = \mathbb{E}_{\mathbf{H}}[\gamma] = \frac{\bar{\Gamma}}{\Gamma_{AWGN}} \quad (2.9)$$

dove $\mathbb{E}_{\mathbf{H}}[\cdot]$ è l'operatore che denota che l'aspettazione è fatta rispetto al canale \mathbf{H} .

2.2 Approccio SVD-MRB

Si vuole ora disegnare il precoder e il combiner ottimi tali da massimizzare γ in (2.8). Vedremo che le soluzioni ottime sono rappresentate, sia in TX che in RX, dal Maximum Ratio Beamforming (MRB)


Figura 2.3: Modello del sistema con beamformer ottimo in TX e RX.

2.2.1 Composizione del problema

Il precoder e il combiner di Fig. 2.2 sono sostituiti dai corrispondenti beamformer di Fig. 2.3, definiti come

$$\mathbf{f} = [f_1 \cdots f_M]^T \in \mathbb{C}^{M \times 1} \quad \mathbf{u} = [u_1 \cdots u_N]^T \in \mathbb{C}^{N \times 1} \quad (2.10)$$

Il segnale di ingresso x viene ripartito dal precoder sulle M antenne in TX, quindi chiameremo \mathbf{s} il vettore del segnale trasmesso

$$\mathbf{s} = [s_1 \cdots s_M]^T \in \mathbb{C}^{M \times 1} \quad (2.11)$$

legato a \mathbf{f} da

$$\mathbf{s} = \mathbf{f}x \quad (2.12)$$

Notiamo che se il segnale trasmesso \mathbf{s} è soggetto a un vincolo di potenza P , lo è di conseguenza anche il beamformer \mathbf{f} secondo

$$\mathbb{E}_x[\|\mathbf{s}\|^2] = \|\mathbf{f}\|^2 \mathbf{M}_x \leq P \quad \Rightarrow \quad \|\mathbf{f}\|^2 \leq \frac{P}{\mathbf{M}_x} \quad (2.13)$$

Il segnale vettore ricevuto \mathbf{r} , definito come,

$$\mathbf{r} = [r_1 \cdots r_N]^T \in \mathbb{C}^{N \times 1} \quad (2.14)$$

è dato da

$$\mathbf{r} = \mathbf{H}\mathbf{f}x + \mathbf{n} \quad (2.15)$$

Ricaviamo ora la corrispondente espressione del SNR sempre facendo riferimento allo schema di Fig. 2.3 e adottando delle semplificazioni senza perdita di generalità. Nel punto di decisione il segnale y è uguale a

$$y = \mathbf{u}^H \mathbf{r} = \mathbf{u}^H \mathbf{H}\mathbf{f}x + \mathbf{u}^H \mathbf{n} \quad (2.16)$$

dove \mathbf{n} è definito in (2.7). Senza perdita di generalità consideriamo x con potenza statistica unitaria ($\mathbf{M}_x = 1$) e vincolo di potenza di TX $P = 1$, quindi da (2.13) porge $\|\mathbf{f}\|^2 = 1$. Assumiamo inoltre che la potenza statistica di ogni singolo elemento della matrice \mathbf{H} sia unitaria, quindi

$$\mathbb{E} \left[|[\mathbf{H}]_{p,q}|^2 \right] = 1 \quad p = 1, \dots, N; \quad q = 1, \dots, M \quad (2.17)$$

e sempre per semplicità imponiamo

$$\|\mathbf{u}\|^2 = 1. \quad (2.18)$$

Dalla 2.16 otteniamo l'espressione di Γ

$$\Gamma = \frac{\mathbb{E}_x \left[|\mathbf{u}^H \mathbf{H}\mathbf{f}x|^2 \right]}{\mathbb{E}_n \left[|\mathbf{u}^H \mathbf{n}|^2 \right]} = \frac{|\mathbf{u}^H \mathbf{H}\mathbf{f}|^2}{\sigma_n^2} \quad (2.19)$$

in base alla (2.7). Inoltre da (2.8) e da (2.19) otteniamo

$$\gamma = |\mathbf{u}^H \mathbf{H}\mathbf{f}|^2 \quad (2.20)$$

ciò significa che γ è indipendente dalla potenza del rumore σ_n^2 . Scriviamo ora l'ottimizzazione del problema che ci siamo proposti di risolvere, cioè la ricerca dei beamformer ottimi tali da massimizzare (2.20)

$$\arg \max_{\mathbf{f}, \mathbf{u}} |\mathbf{u}^H \mathbf{H}\mathbf{f}|^2 \quad (2.21)$$

con vincoli: $\|\mathbf{f}\|^2 = 1, \|\mathbf{u}\|^2 = 1$

I beamformer ottimi sono tali da massimizzare γ senza un'incremento di potenza, da cui i vincoli sulle norme di \mathbf{f} e \mathbf{u} .

2.2.2 Soluzioni SVD (SVD-MRB)

Le soluzioni del problema (2.21) sono note in letteratura [8, pp. 44] e derivano dalla Singular Value Decomposition (SVD) della matrice del canale \mathbf{H} , ed ha la seguente forma: chiamato ρ il rango della matrice \mathbf{H} si ha [8]

$$\mathbf{H} = \mathbf{U}\mathbf{\Xi}\mathbf{F}^H = [\mathbf{u}_1 \cdots \mathbf{u}_N] \begin{bmatrix} \xi_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \xi_\rho \\ 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1^H \\ \vdots \\ \mathbf{f}_M^H \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

dove

- i valori sulla diagonale di $\mathbf{\Xi} \in \mathbb{R}^{N \times M}$ sono chiamati *valori singolari* di \mathbf{H} e soddisfano la seguente relazione,

$$\xi_1 \geq \xi_2 \geq \cdots \geq \xi_\rho \geq 0, \quad (2.23)$$

- le colonne della matrice $\mathbf{U} \in \mathbb{C}^{N \times N}$ chiamate $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_N$ sono dette *vettori singolari sinistri* della matrice \mathbf{H} ,
- le colonne della matrice $\mathbf{F} \in \mathbb{C}^{M \times M}$ chiamate $\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_M$ sono dette *vettori singolari destri* della matrice \mathbf{H} .

Le matrici \mathbf{U} e \mathbf{F} sono dette *unitarie*, perchè

$$\mathbf{U}\mathbf{U}^H = \mathbf{U}^H\mathbf{U} = \mathbf{I}_N, \quad \mathbf{F}\mathbf{F}^H = \mathbf{F}^H\mathbf{F} = \mathbf{I}_M \quad (2.24)$$

Può essere provato che i beamformer ottimi del problema (2.21), chiamati $\mathbf{f}_{SVD-MRB}$ e $\mathbf{u}_{SVD-MRB}$ sono uguali, rispettivamente, al vettore destro e al vettore singolare sinistro entrambi associati al valore singolare maggiore. In simboli si ha che (vedi 2.23)

$$\mathbf{f}_{SVD-MRB} = \mathbf{f}_1 \quad \text{e} \quad \mathbf{u}_{SVD-MRB} = \mathbf{u}_1 \quad (2.25)$$

Da notare che i vincoli sulla norma dei beamformer in (2.21) sono soddisfatti, infatti da (2.24) si ha che

$$\|\mathbf{f}_1\|^2 = \text{tr}(\mathbf{f}_1^H \mathbf{f}_1) = 1 \quad \text{e} \quad \|\mathbf{u}_1\|^2 = \text{tr}(\mathbf{u}_1^H \mathbf{u}_1) = 1. \quad (2.26)$$

Applicando la (2.25), la (2.20) diventa

$$\begin{aligned}
\gamma &= \left| \mathbf{u}_1^H \mathbf{H} \mathbf{f}_1 \right|^2 \\
&= \left| \mathbf{u}_1^H [\mathbf{u}_1 \cdots \mathbf{u}_N] \begin{bmatrix} \xi_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \xi_\rho \\ 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1^H \\ \vdots \\ \mathbf{f}_M^H \end{bmatrix} \mathbf{f}_1 \right|^2 \\
&= \left| \underbrace{(\mathbf{u}_1^H \mathbf{u}_1)}_1 \underbrace{(\mathbf{f}_1^H \mathbf{f}_1)}_1 \xi_1 + \cdots + \underbrace{(\mathbf{u}_1^H \mathbf{u}_\rho)}_0 \underbrace{(\mathbf{f}_1^H \mathbf{f}_\rho)}_0 \xi_\rho \right|^2 \\
&= \xi_1^2.
\end{aligned} \tag{2.27}$$

dove ξ_1 è anche uguale al maggiore autovalore della matrice Hermitiana $\mathbf{H}^H \mathbf{H}$ o $\mathbf{H} \mathbf{H}^H$. Dalla (2.9) si ha che le prestazioni medie rispetto alle realizzazioni del canale sono misurate da

$$\bar{\gamma} = \mathbb{E}_{\mathbf{H}}[\xi_1^2]. \tag{2.28}$$

2.2.3 Analisi prestazioni

In Fig.2.4 e Fig. 2.5 è illustrato l'andamento di $\bar{\gamma}$, utilizzando beamformer ottimi in funzione di N e per diversi valori di M , ottenuto mediando su 5000 realizzazioni del canale \mathbf{H}_{ULA} per due diversi valori di D . Possiamo notare come $\bar{\gamma}$ incrementa con il crescere del numero di antenne N e M . Questo grafico è molto importante per ottenere un confronto con le simulazioni che faremo nei prossimi capitoli con diversi approcci nel beamforming, perchè rappresenta il bound massimo che il nostro sistema può raggiungere. Notiamo che le prestazioni per $D = \lambda/5$ e $D = 2\lambda$ sono molto simili anche se leggermente superiori per $D = \lambda/5$.

2.3 Approccio iterativo (I-MRB)

Ora si vuole proporre un approccio iterativo (Iterative Maximum Ratio Beamforming (I-MRB)) che porge una soluzione alternativa al SVD del problema (2.21) noto in letteratura come *maximum ratio transmission* e *maximum ratio reception*. Parte del lavoro [9] sfrutta semplici soluzioni cicliche Multiple Input Singol Output (MISO) e Singol Input Multiple Output (SIMO) che convergono in poche iterazioni alla soluzione SVD-MRB.

2.3.1 Separazione e riformulazione del problema

Assumendo che \mathbf{f} , o alternativamente \mathbf{u} , sia noto, il problema 2.21 può essere separato in due problemi iterativi, uno SIMO e l'altro MISO. Definiamo

$$\mathbf{h}_{SIMO} = \mathbf{H} \mathbf{f} \in \mathbb{C}^{N \times 1} \quad \text{e} \quad \mathbf{h}_{MISO} = \mathbf{u}^H \mathbf{H} \in \mathbb{C}^{1 \times M}. \tag{2.29}$$

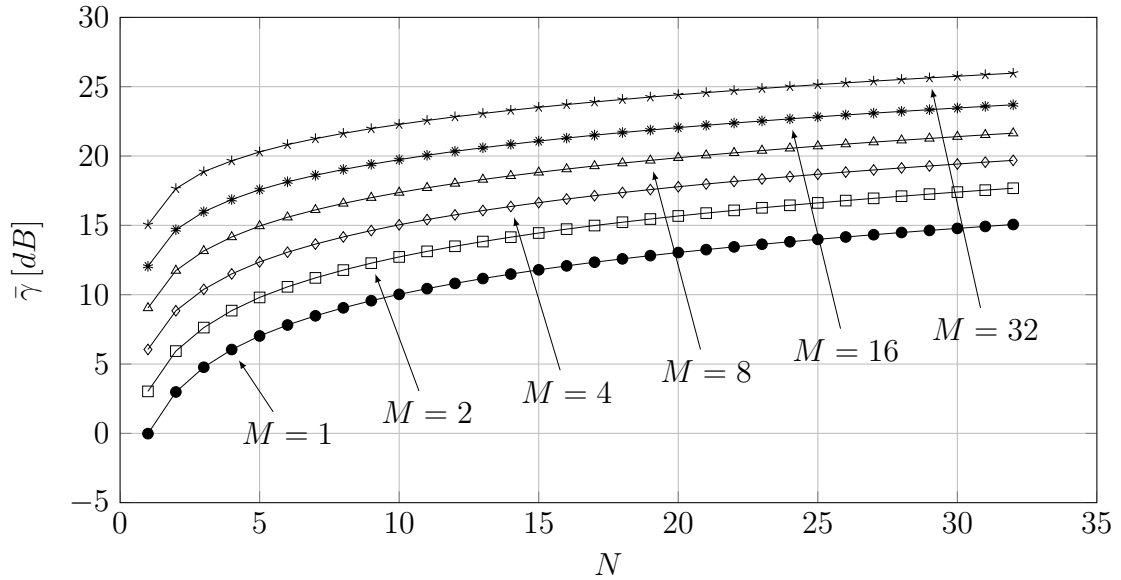


Figura 2.4: $\bar{\gamma}_{SVD-MRB}$, dato dalla (2.28), al variare di M e N per diverse realizzazioni del canale con $D = \lambda/5$.

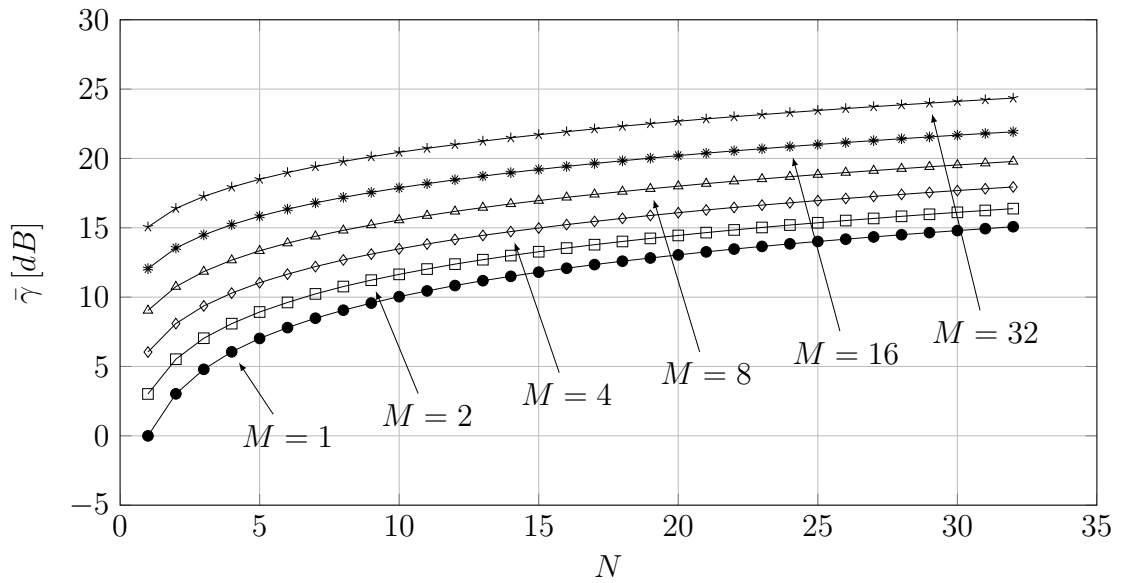


Figura 2.5: $\bar{\gamma}_{SVD-MRB}$, dato dalla (2.28), al variare di M e N per diverse realizzazioni del canale con $D = 2\lambda$.

I problemi SIMO e MISO sono rispettivamente

$$\begin{aligned}
 \text{SIMO:} & \quad \arg \max_{\mathbf{u}} |\mathbf{u}^H \mathbf{h}_{SIMO}|^2 & \text{MISO:} & \quad \arg \max_{\mathbf{f}} |\mathbf{h}_{MISO} \mathbf{f}|^2 & (2.30) \\
 \text{con vincolo:} & \quad \|\mathbf{u}\|^2 = 1 & \text{con vincolo:} & \quad \|\mathbf{f}\|^2 = 1
 \end{aligned}$$

le cui soluzioni ottime \mathbf{u}_{I-MRB} e \mathbf{f}_{I-MRB} sono [9, pp. 5396], [10, pp. 1459] semplicemente

date da

$$\mathbf{u}_{I-MRB} = \frac{\mathbf{h}_{SIMO}}{\|\mathbf{h}_{SIMO}\|} \quad \text{e} \quad \mathbf{f}_{I-MRB} = \frac{\mathbf{h}_{MISO}^H}{\|\mathbf{h}_{MISO}\|} \quad (2.31)$$

2.3.2 Procedura iterativa

Come possiamo notare le soluzioni (2.31) del problema (2.30) implicano la conoscenza dei beamformer \mathbf{f} e \mathbf{u} (2.29). Per ovviare al problema [9, pp. 5398] propone una semplice procedura riassunta in pochi step

- **Inizializzazione:** tutti gli elementi di \mathbf{u}_{I-MRB} sono inizializzati ad un valore iniziale, per esempio uguale a $1/\sqrt{N}$.
- **Step a iterativo:** settare $\mathbf{h}_{MISO} = \mathbf{u}_{I-MRB}^H \mathbf{H}$, dove \mathbf{u}_{I-MRB} è fissato al valore più recente. Risolvere il problema MISO della (2.31) dalla quale si trova il beamformer \mathbf{f}_{I-MRB} .
- **Step b iterativo:** settare $\mathbf{h}_{SIMO} = \mathbf{H}\mathbf{f}_{I-MRB}$, dove \mathbf{f}_{I-MRB} è ottenuto al punto precedente. Aggiornare il valore del beamformer \mathbf{u}_{I-MRB} risolvendo il problema SIMO della (2.31).
- Iterare lo **Step a** e lo **Step b** fino a che un determinato criterio è soddisfatto.

Dalla Fig. 2.8 si può vedere che l'algoritmo iterativo converge in 3÷6 iterazioni.

2.3.3 Analisi delle prestazioni

In Fig. 2.6 e Fig. 2.7 viene riportato $\bar{\gamma}_{I-MRB}$ per diversi valori di M e N per un canale con rispettivamente $D = \lambda/5$ e $D = 2\lambda$. Si può notare come le prestazioni dell'approccio I-MRB (con 7 iterazioni) raggiungono rispettivamente le prestazioni dell'SVD-MRB di Fig 2.4 e Fig. 2.5 con il vantaggio di non dover effettuare la SVD della matrice di canale \mathbf{H} . In definitiva pur richiedendo la conoscenza di \mathbf{H} , l'approccio I-MRB è più semplice nel progetto dei due beamformer di TX e RX.

2.4 Approccio ADB

É noto che quando si lavora nella parte dello spettro delle onde mm è conveniente lavorare nel dominio RF, anche se comporta la perdita di flessibilità di quando si lavora in banda base. Si vuole ora riprendere una configurazione di Analog-Digital Beamforming (ADB) [1] che permette di ridurre il numero delle catene RF rispetto al numero di antenne. Questa configurazione fa uso di

- un precoder (lato TX) e di un combiner (lato RX) in banda base
- modulo unitario dei pesi

Per riuscire ad avvicinare le prestazioni del MRB, i pesi RF verranno calcolati utilizzando due algoritmi diversi e successivamente ne verranno determinate le prestazioni.

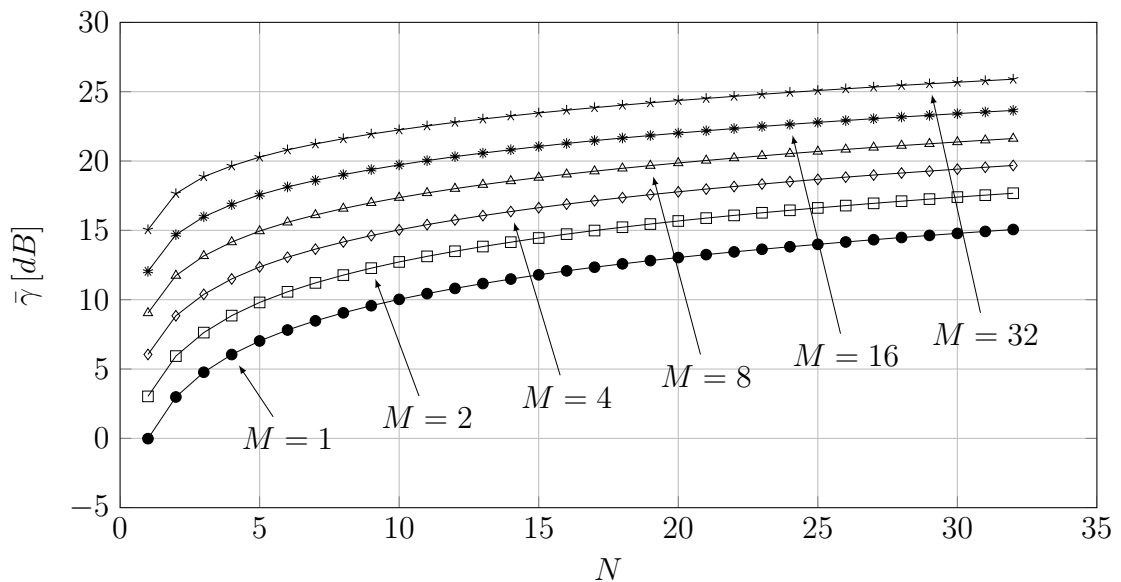


Figura 2.6: $\bar{\gamma}_{I-MRB}$ al variare di N , M per diverse realizzazioni del canale con $D = \lambda/5$, utilizzando lo schema di Fig. 2.3 in cui \mathbf{f}_{BB} e \mathbf{u}_{BB} sono stati progettati attraverso la procedura iterativa del Par. 2.3.2.

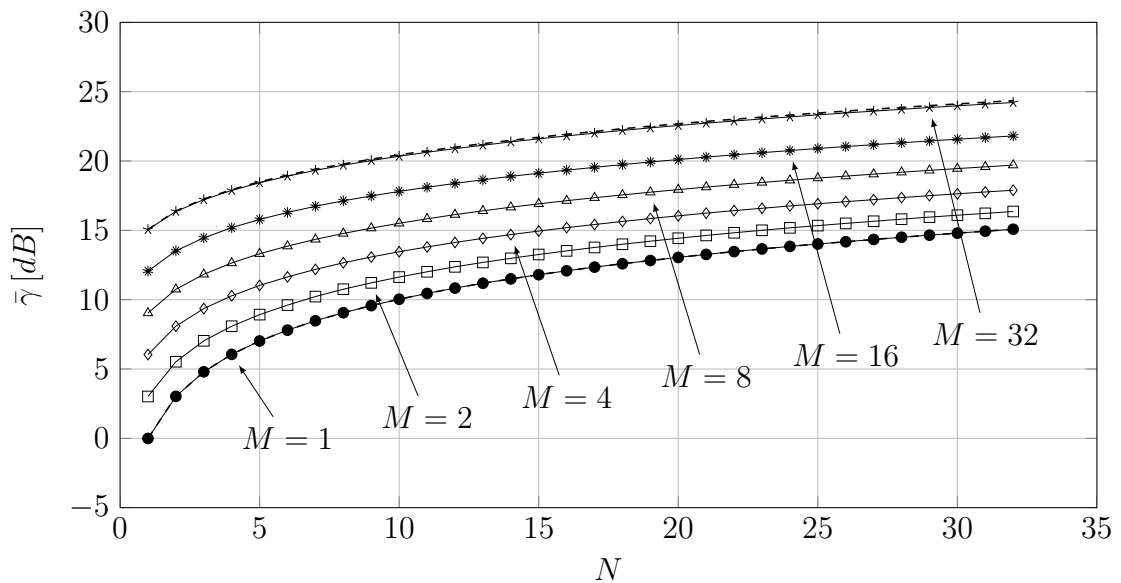


Figura 2.7: $\bar{\gamma}_{I-MRB}$ al variare di N , M per diverse realizzazioni del canale con $D = 2\lambda$, utilizzando lo schema di Fig. 2.3 in cui \mathbf{f}_{BB} e \mathbf{u}_{BB} sono stati progettati attraverso la procedura iterativa del Par. 2.3.2.

Composizione del problema

Si consideri lo schema di Fig. 2.9 dove il trasmettitore e il ricevitore hanno, rispettivamente, M e N antenne. Il trasmettitore è costituito da M_{REF} catene RF con $M_{RF} < M$; analogamente il ricevitore è costituito da N_F catene RF con $N_{RF} < N$. Il precoder

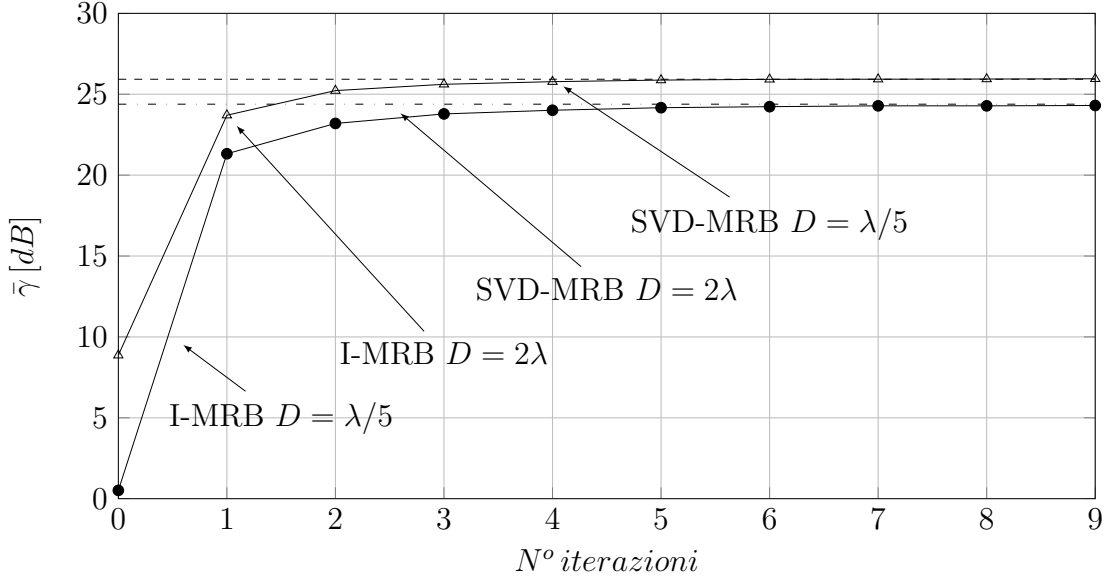


Figura 2.8: Convergenza dell' approccio I-MRB con $M = 32$ e $N = 32$.

in TX utilizza $M_{RF} \times 1$ pesi complessi in Banda Base (BB) chiamati \mathbf{f}_{BB} , seguito dal beamformer in Banda Passante (BP) $\mathbf{F}_{RF} \in \mathbb{C}^{M \times M_{RF}}$. Allo stesso modo in RX è costituito da un combiner RF in BP $\mathbf{U}_{RF} \in \mathbb{C}^{N \times N_{RF}}$ e dei pesi complessi in BB $\mathbf{u}_{BB} \in \mathbb{C}^{N \times N_{RF}}$. Ricordiamo che il numero di Analog to Digital Converter (ADC) e Digital to Analog Converter (DAC) è di 2 per ogni catena RF, uno per la parte reale ed uno per la parte immaginaria, o equivalentemente modulo e fase; in Fig. 2.9 ne viene riportato solo uno per catena per semplicità. Il segnale ricevuto si può scrivere come

$$y = \mathbf{u}_{BB}^H \mathbf{U}_{RF}^H \mathbf{H} \mathbf{F}_{RF} \mathbf{f}_{BB} x + \mathbf{u}_{BB}^H \mathbf{U}_{RF}^H \mathbf{n} \quad (2.32)$$

dove \mathbf{n} è definito in (2.7). Definiamo i pesi complessi in BB in TX che in RX come

$$\mathbf{f}_{BB} = [f_{BB,1} \ f_{BB,2} \ \cdots \ f_{BB,M_{RF}}]^T \in \mathbb{C}^{M_{RF} \times 1} \quad (2.33)$$

e

$$\mathbf{u}_{BB} = [u_{BB,1} \ u_{BB,2} \ \cdots \ u_{BB,N_{RF}}]^T \in \mathbb{C}^{N_{RF} \times 1} \quad (2.34)$$

Cerchiamo ora di progettare il precoder e il combiner al fine di massimizzare γ definito in (2.8). Tenendo conto della (2.32), possiamo riscrivere

$$\gamma = \left| \mathbf{u}_{BB}^H \mathbf{U}_{RF}^H \mathbf{H} \mathbf{F}_{RF} \mathbf{f}_{BB} \right|^2 \quad (2.35)$$

Dalla (2.35) la massimizzazione del problema diventa

$$\arg \max_{\mathbf{F}_{RF}, \mathbf{f}_{BB}, \mathbf{U}_{RF}, \mathbf{u}_{BB}} \left| \mathbf{u}_{BB}^H \mathbf{U}_{RF}^H \mathbf{H} \mathbf{F}_{RF} \mathbf{f}_{BB} \right|^2 \quad (2.36)$$

$$\begin{aligned} \text{con vincoli:} \quad & |[\mathbf{F}_{RF}]_{i,j}|^2 = 1 \quad i = 1, \dots, M \quad j = 1, \dots, M_{RF} \\ & |[\mathbf{U}_{RF}]_{i,j}|^2 = 1 \quad i = 1, \dots, N \quad j = 1, \dots, N_{RF} \\ & \|\mathbf{F}_{RF} \mathbf{f}_{BB}\|^2 = 1 \\ & \|\mathbf{U}_{RF}^H \mathbf{u}_{BB}\|^2 = 1 \end{aligned}$$

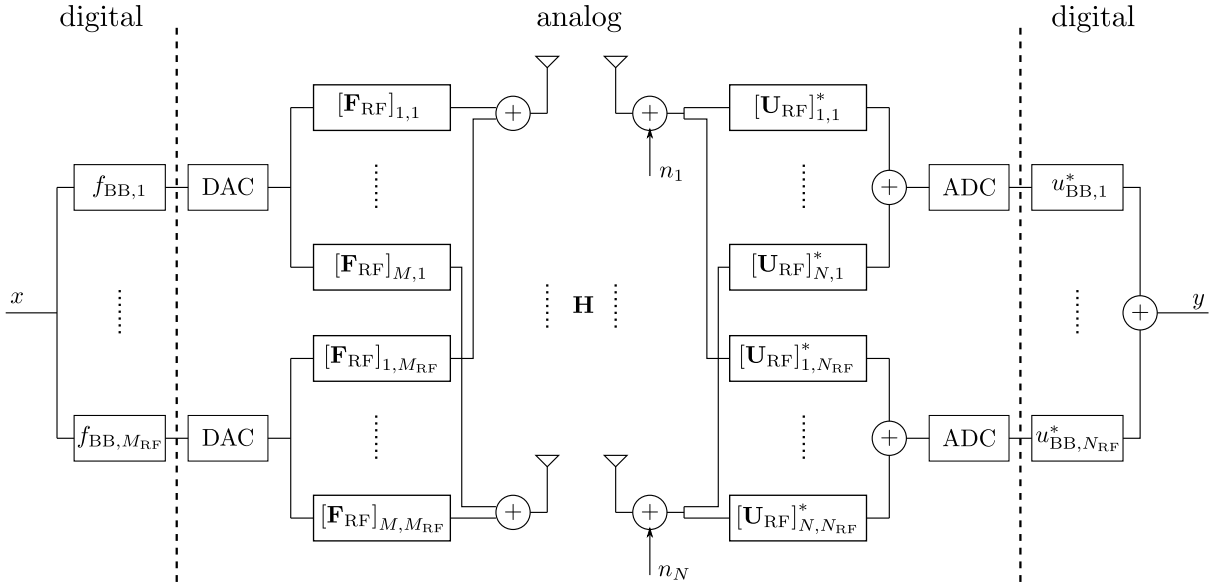


Figura 2.9: Architettura ADB: schema equivalente in BB.

I primi due vincoli in 2.36 sottolineano il fatto che per semplicità costruttiva i beamformer RF cambiano solo la fase del segnale senza amplificarlo.

2.4.1 Algoritmo per il progetto dei beamformer

Per il problema (2.36) non sono note in letteratura soluzioni. L'ottimizzazione del problema viene suddivisa tra la parte in TX e in RX, quindi viene fornita una soluzione approssimata del problema originale.

Progetto precoder

Si assume che in RX si utilizzi un beamformer ottimo e di conseguenza si calcola il precoder in TX. L'intuizione chiave presentata in [1] è quella di sfruttare la struttura di \mathbf{H}_{ULA} e la conoscenza del precoder ottimo $\mathbf{f}_{SVD-MRB}$ dato da (2.25). In pratica si assume che $\mathbf{f}_{SVD-MRB}$ sia approssimabile come una combinazione lineare di M_{RF} colonne di \mathbf{A}_t , data dalla (1.17), pesate da un beamformer in BB \mathbf{f}_{BB} :

$$\mathbf{f}_{SVD-MRB} \simeq \mathbf{F}_{RF} \mathbf{f}_{BB} = f_{BB,1} [\text{col}_1(\mathbf{F}_{RF})] + \dots + f_{BB,M_{RF}} [\text{col}_{M_{RF}}(\mathbf{F}_{RF})] \quad (2.37)$$

dove le colonne di \mathbf{F}_{RF} , indicate con $\text{col}_j(\mathbf{F}_{RF})$, $j = 1, \dots, M_{RF}$, sono scelte tra le "migliori" colonne di \mathbf{A}_t . Il problema (2.36) viene quindi riscritto dal punto di vista del precoder come:

$$\arg \min_{\mathbf{F}_{RF}, \mathbf{f}_{BB}} \|\mathbf{f}_{SVD-MRB} - \mathbf{F}_{RF} \mathbf{f}_{BB}\| \quad (2.38)$$

$$\text{con vincoli:} \quad \text{col}(\mathbf{F}_{RF}) \in \{\mathbf{a}_t(\phi_t^{(l)}), 1 \leq l \leq L\}, \quad j = 1, \dots, M_{RF}$$

$$\|\mathbf{F}_{RF} \mathbf{f}_{BB}\|^2 = 1$$

Ora il problema consiste nel selezionare le M_{RF} colonne di \mathbf{A}_t e trovare il corrispondente \mathbf{f}_{BB} ottimo. Per risolvere (2.38) in [1, pp. 3785] è stato proposto un semplice algoritmo esposto in Tab. 2.1.

Tabella 2.1: Algoritmo 1: progetto di \mathbf{F}_{RF} e \mathbf{f}_{BB} .

Inputs: $\mathbf{f}_{SVD-MRB}$, \mathbf{A}_t

1. $\mathbf{F}_{RF} = \mathbf{0}$
2. $\mathbf{f}_{BB} = \mathbf{0}$
3. $\mathbf{f}_{res} = \mathbf{f}_{SVD-MRB}$
4. **for** $i=1$ **to** M_{RF}
5. $\Psi = \mathbf{A}_t^H \mathbf{f}_{res}$
6. $o = \arg \max_{l \in \{1, \dots, L\}} [\Psi \Psi^H]_{l,l}$
7. $\mathbf{F}_{RF} = [\mathbf{F}_{RF} | \text{col}_o(\mathbf{A}_t)]$
8. $\mathbf{f}_{BB} = (\mathbf{F}_{RF}^H \mathbf{F}_{RF})^{-1} \mathbf{F}_{RF}^H \mathbf{f}_{SVD-MRB}$
9. $\mathbf{f}_{res} = \frac{\mathbf{f}_{SVD-MRB} - \mathbf{F}_{RF} \mathbf{f}_{BB}}{\|\mathbf{f}_{SVD-MRB} - \mathbf{F}_{RF} \mathbf{f}_{BB}\|}$
10. **end for**
11. $\mathbf{f}_{BB} = \frac{\mathbf{f}_{BB}}{\|\mathbf{F}_{RF} \mathbf{f}_{BB}\|}$
12. **return** \mathbf{F}_{RF} , \mathbf{f}_{BB}

Progetto combiner

Le stesse considerazioni fatte per il precoder si possono fare per il progetto del combiner, assumendo che in TX si sia in presenza di un beamformer ottimo. Quindi si arriva ad un algoritmo che seleziona le "migliori" colonne di \mathbf{A}_r al fine di minimizzare il funzionale 2.36. Disegnando separatamente i beamformers lato TX e RX può causare una perdita in potenza ricevuta se il numero di catene RF in RX è minore del numero di catene RF in TX. In questo caso le prestazioni possono degradare perchè il grado di libertà del beamforming è limitato e la potenza in RX non può essere raccolta in diverse direzioni. Analogamente un beamforming flessibile al lato RX non è utile se il grado di libertà del beamforming lato TX è limitato. Quindi come risultato, deve essere considerato come il vincolo in RX, in termini di numero di catene RF e viceversa. Per evitare ciò è stato proposto un Algoritmo 2 riportato in Tabella 2.2 che combina l'Algoritmo 1 per \mathbf{F}_{RF} e \mathbf{U}_{RF} .

PDF degli elementi dei beamformer RF

Utilizzando i parametri del canale del Paragrafo 1.1.2 si è cercato di ottenere una stima della densità di probabilità dei vari elementi della matrice \mathbf{F}_{RF} e \mathbf{U}_{RF} su 5000 realizzazioni del canale \mathbf{H}_{ULA} (1.16). Gli elementi della matrici \mathbf{F}_{RF} e \mathbf{U}_{RF} sono numeri complessi quindi ne calcoliamo la distribuzione sia per la parte reale che per la parte complessa. Per l'elemento della riga i -esima, $i = 1, \dots, M$, e colonna j -esima, $j = 1, \dots, M_{RF}$, della matrice

Tabella 2.2: Algoritmo 2: progetto combinato di \mathbf{F}_{RF} , \mathbf{U}_{RF} , \mathbf{f}_{BB} e \mathbf{u}_{BB} .

Inputs: \mathbf{A}_t , \mathbf{A}_r , $f_{SVD-MRB}$ se $M_{RF} < N_{RF}$ (o $u_{SVD-MRB}$ se $M_{RF} \geq N_{RF}$).

1. **if** $M_{RF} < N_{RF}$
2. Utilizzo dell'Algoritmo 1 per il progetto di \mathbf{F}_{RF} e \mathbf{f}_{BB}
3. $\mathbf{u}_{opt} = \mathbf{H}\mathbf{F}_{RF}\mathbf{f}_{BB}$
4. Utilizzo dell'Algoritmo 1 per il progetto di \mathbf{U}_{RF} e \mathbf{u}_{BB}
5. **else**
6. Utilizzo dell'Algoritmo 1 per il progetto di \mathbf{U}_{RF} e \mathbf{u}_{BB}
7. $\mathbf{f}_{opt} = \mathbf{H}\mathbf{U}_{RF}\mathbf{u}_{BB}$
8. Utilizzo dell'Algoritmo 1 per il progetto di \mathbf{F}_{RF} e \mathbf{f}_{BB}
9. **end if**

\mathbf{F}_{RF} , definiamo la funzione di distribuzione e la Probability Density Function (PDF)

$$F_{\mathcal{R}e[\mathbf{F}_{RF}]_{i,j}}(a) = \Pr(\mathcal{R}e\{[\mathbf{F}_{RF}]_{i,j}\} \leq a) \quad (2.39)$$

$$F_{\mathcal{I}m[\mathbf{F}_{RF}]_{i,j}}(a) = \Pr(\mathcal{I}m\{[\mathbf{F}_{RF}]_{i,j}\} \leq a) \quad (2.40)$$

$$f_{\mathcal{R}e[\mathbf{F}_{RF}]_{i,j}}(a) = \frac{dF_{\mathcal{R}e[\mathbf{F}_{RF}]_{i,j}}(a)}{da} \quad (2.41)$$

$$f_{\mathcal{I}m[\mathbf{F}_{RF}]_{i,j}}(a) = \frac{dF_{\mathcal{I}m[\mathbf{F}_{RF}]_{i,j}}(a)}{da} \quad (2.42)$$

Analogamente si possono definire le funzioni di distribuzione e densità di probabilità per gli elementi della matrice \mathbf{U}_{RF} . Gli istogrammi come stima della PDF degli elementi della matrice \mathbf{F}_{RF} sono riportati nella Fig. 2.17 e in Fig. 2.18 alla fine del capitolo. Il numero di antenne in TX e RX sono rispettivamente $M = 4$ e $N = 4$ mentre il numero di ADC sono rispettivamente $M_{RF} = 2$ e $N_{RF} = 2$. Le funzioni di densità di probabilità della matrice \mathbf{U}_{RF} non sono state riportate perchè identiche a quelle di \mathbf{F}_{RF} , il che significa che se $M = N$ e $M_{RF} = N_{RF}$ allora le due matrici \mathbf{F}_{RF} e \mathbf{U}_{RF} sono identicamente distribuite. Da notare inoltre come la prima riga della matrice \mathbf{F}_{RF} (e anche \mathbf{U}_{RF}) assume un unico valore pari a uno. Ciò è dovuto dal fatto che le colonne delle matrici \mathbf{F}_{RF} (e \mathbf{U}_{RF}) sono costituite da una combinazione lineare di colonne della matrici rispettivamente \mathbf{A}_t (e \mathbf{A}_r), le quali hanno come primo elemento uno, come riportato anche in (1.11). Osserviamo come le parti reali e immaginarie dei vari elementi delle matrici \mathbf{F}_{RF} (e \mathbf{U}_{RF}) assumano con un alta probabilità un valore che sta intorno al valore medio come in Fig. 2.17f o un numero ristretto di valori come in Fig. 2.17f e Fig. 2.18d in cui la funzione di densità di probabilità è concentrata attorno a due valori. Queste osservazioni hanno portato all'idea di quantizzare le matrici \mathbf{F}_{RF} e \mathbf{U}_{RF} al fine di semplificare la complessità. Questo tipo di approccio verrà esposto nel prossimo capitolo. Ricordando che da (2.36) i vincoli

impongono il modulo di ciascun elemento delle matrici \mathbf{F}_{RF} e \mathbf{U}_{RF} sia unitario, vogliamo ora stimare la funzione di densità di probabilità dell'argomento di ciascuno elemento delle matrici. Quindi definiamo rispettivamente la funzione di distribuzione di probabilità e la funzione di densità di probabilità come

$$F_{\angle[\mathbf{F}_{RF}]_{i,j}}(a) = \Pr(\angle \{[\mathbf{F}_{RF}]_{i,j}\} \leq a) \quad i = 1, \dots, M, j = 1, \dots, M_{RF} \quad (2.43)$$

$$F_{\angle[\mathbf{U}_{RF}]_{i,j}}(a) = \Pr(\angle \{[\mathbf{U}_{RF}]_{i,j}\} \leq a) \quad (2.44)$$

e

$$f_{\angle[\mathbf{F}_{RF}]_{i,j}}(a) = \frac{dF_{\angle[\mathbf{F}_{RF}]_{i,j}}(a)}{da} \quad (2.45)$$

$$f_{\angle[\mathbf{U}_{RF}]_{i,j}}(a) = \frac{dF_{\angle[\mathbf{U}_{RF}]_{i,j}}(a)}{da} \quad (2.46)$$

Gli istogrammi come stima della PDF della fase degli elementi di \mathbf{F}_{RF} sono riportati in Fig. 2.19. Il numero di antenne in trasmissione e ricezione sono rispettivamente $M = 4$ e $N = 4$ mentre il numero di ADC sono rispettivamente $M_{RF} = 2$ e $N_{RF} = 2$. In Fig. 2.19 sono riportate le pdf di ogni singolo elemento della matrice \mathbf{F}_{RF} . A differenza di prima, a parte la prima riga di \mathbf{F}_{RF} che assume solo un valore pari a zero, le altre PDF hanno un andamento quasi uniforme. Anche in questo caso le funzioni di densità di probabilità riguardanti la matrice \mathbf{U}_{RF} non sono state riportate perchè identiche a quelle di \mathbf{F}_{RF} , il che significa che se $M = N$ e $M_{RF} = N_{RF}$ allora le due matrici \mathbf{F}_{RF} e \mathbf{U}_{RF} sono identicamente distribuite. Quindi in questo caso per una eventuale quantizzazione della fase di ogni singolo elemento delle matrici bisognerà avere un numero di codeword maggiore rispetto alla quantizzazione che considera sia parte reale che parte immaginaria e lo si vedrà meglio sempre nel prossimo capitolo.

2.4.2 Analisi delle prestazioni

Con l'ambiente e i parametri del canale del Paragrafo 1.1.2, si è simulato il sistema con il beamforming di tipo ADB per capire quanto le prestazioni di questo approccio si avvicinano alle prestazioni dell'approccio SVD-MRB. Nelle Figure 2.10 e 2.11 sono riportati i valori di $\bar{\gamma}$ rispettivamente per $D = \lambda/5$ e $D = 2\lambda$ al variare di M , N , M_{RF} e N_{RF} . Facciamo notare come l'approccio ADB raggiunge le prestazioni SVD-MRB illustrate in Fig. 2.4 con un algoritmo che porge una soluzione "semplice" per il calcolo dei beamformer a discapito però del dover conoscere a priori il canale \mathbf{H} e i beamformer $\mathbf{f}_{SVD-MRB}$ o $\mathbf{u}_{SVD-MRB}$ i quali sono ottenuti dalla decomposizione SVD del canale \mathbf{H} .

2.5 Approcci DB

Ora si vogliono proporre due approcci di tipo ibrido. Supponiamo che \mathbf{F}_{RF} e \mathbf{U}_{RF} siano noti a priori. Definiamo il canale $\widetilde{\mathbf{H}} \in \mathbb{C}^{N_{RF} \times M_{RF}}$ come:

$$\widetilde{\mathbf{H}} = \mathbf{U}_{RF}^H \mathbf{H} \mathbf{F}_{RF} \quad (2.47)$$

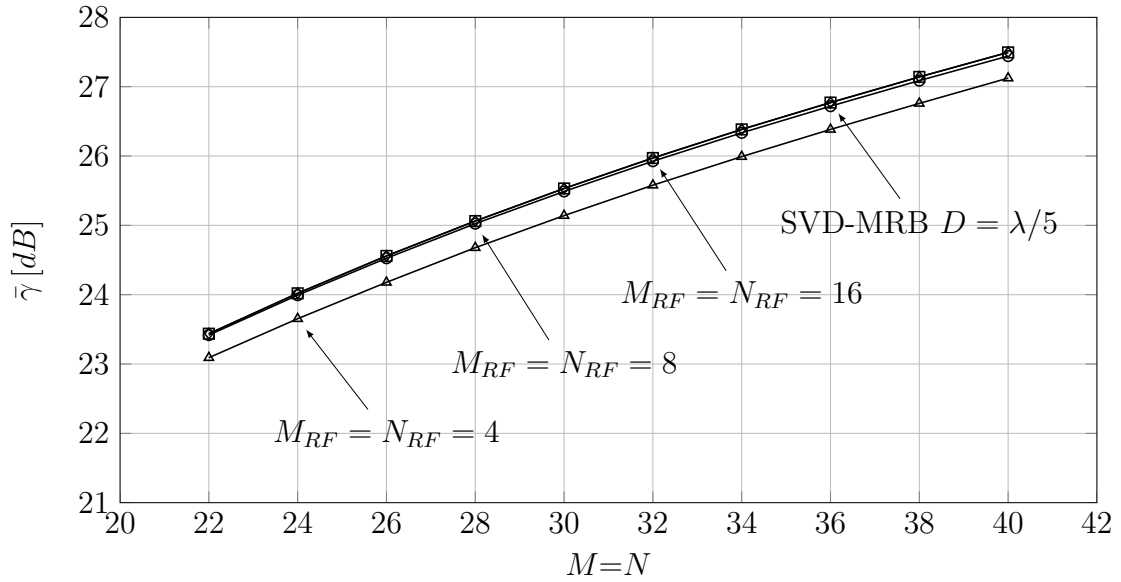


Figura 2.10: $\bar{\gamma}_{ADB}$ per diverse configurazioni di M , N , M_{RF} e N_{RF} con $D = \lambda/5$.

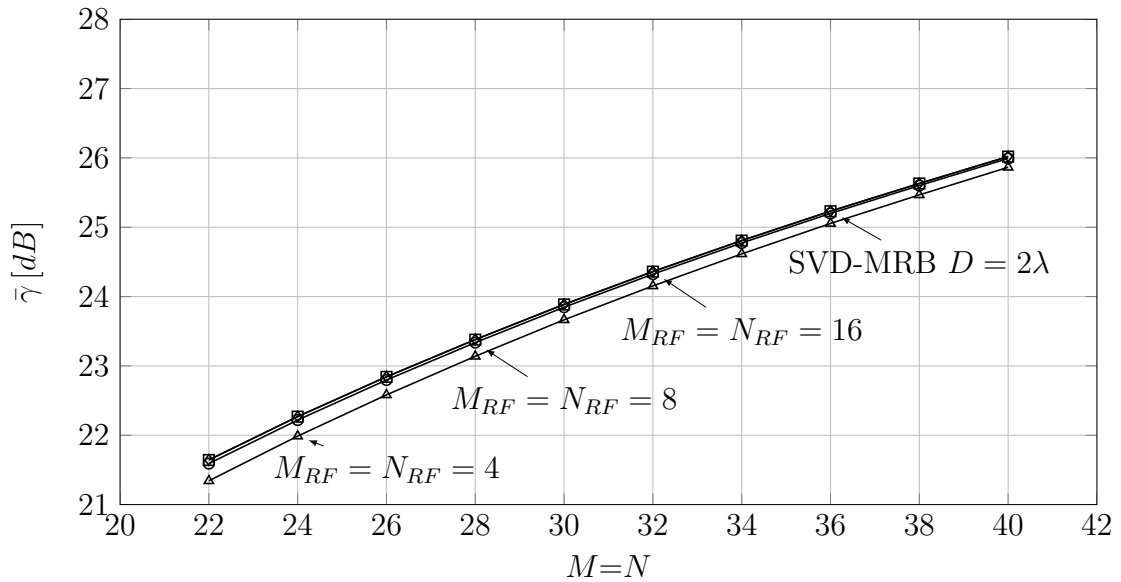


Figura 2.11: $\bar{\gamma}_{ADB}$ per diverse configurazioni di M , N , M_{RF} e N_{RF} con $D = 2\lambda$.

Il vettore rumore $\mathbf{n}_{BB} \in \mathbb{C}^{(1 \times N_{RF})}$ è il vettore rumore \mathbf{n} dello schema ADB di Fig. 2.9 portato in banda base, cioè

$$\mathbf{n}_{BB} = \mathbf{U}_{RF}^H \mathbf{n} \tag{2.48}$$

2.5.1 SNR nel punto di decisione

L'uscita y all'uscita del RX risulta essere

$$y = \mathbf{u}^H \mathbf{r} = \mathbf{u}^H (\widetilde{\mathbf{H}} \mathbf{f} x + \mathbf{n}_{BB}) \tag{2.49}$$

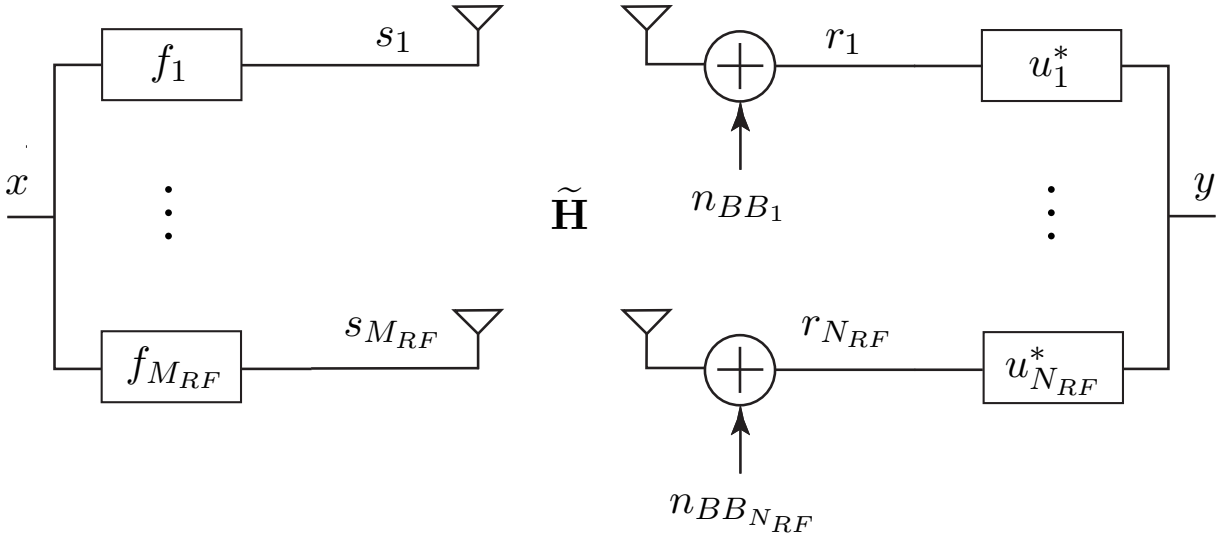


Figura 2.12: Architettura SVD/I-DB.

dove sostituendo (2.48) si ha

$$y = \mathbf{u}^H \widetilde{\mathbf{H}} \mathbf{f} x + \mathbf{u}^H \mathbf{U}_{RF}^H \mathbf{n} = \quad (2.50)$$

L'SNR nel punto di decisione è

$$\Gamma = \frac{\mathbb{E}_x \left[\left| \mathbf{u}^H \widetilde{\mathbf{H}} \mathbf{f} x \right|^2 \right]}{\mathbb{E}_n \left[\left\| \mathbf{u}^H \mathbf{U}_{RF}^H \mathbf{n} \right\|^2 \right]} = \frac{\left| \mathbf{u}^H \widetilde{\mathbf{H}} \mathbf{f} \right|^2}{\sigma_n^2} \quad (2.51)$$

e tenendo conto della definizione (2.8) si ha che

$$\gamma = \left| \mathbf{u}^H \widetilde{\mathbf{H}} \mathbf{f} \right|^2 \quad (2.52)$$

2.5.2 Approccio SVD-DB

Con riferimento allo schema di Fig. 2.12 si vogliono progettare i beamformer in banda base con l'approccio SVD-MRB di Par. 2.2 applicato al canale $\widetilde{\mathbf{H}}$, la soluzione verrà indicata con $\tilde{\mathbf{f}}_{SVD-DB} \in \mathbb{C}^{M_{RF} \times 1}$ e $\tilde{\mathbf{u}}_{SVD-DB} \in \mathbb{C}^{N_{RF} \times 1}$. Inoltre imponiamo che

$$\left\| \mathbf{F}_{RF} \tilde{\mathbf{f}}_{SVD-DB} \right\|^2 = 1 \quad \text{e} \quad \left\| \mathbf{U}_{RF} \tilde{\mathbf{u}}_{SVD-DB} \right\|^2 = 1 \quad (2.53)$$

in modo tale che i beamformer non amplifichino il segnale di ingresso. Quindi una volta ottenuti i beamformer $\tilde{\mathbf{f}}$ e $\tilde{\mathbf{u}}$ dalla SVD si effettua la seguente normalizzazione

$$\tilde{\mathbf{f}}_{SVD-DB} = \frac{\tilde{\mathbf{f}}}{\left\| \mathbf{F}_{RF} \tilde{\mathbf{f}} \right\|} \quad \text{e} \quad \tilde{\mathbf{u}}_{SVD-DB} = \frac{\tilde{\mathbf{u}}}{\left\| \mathbf{U}_{RF} \tilde{\mathbf{u}} \right\|} \quad (2.54)$$

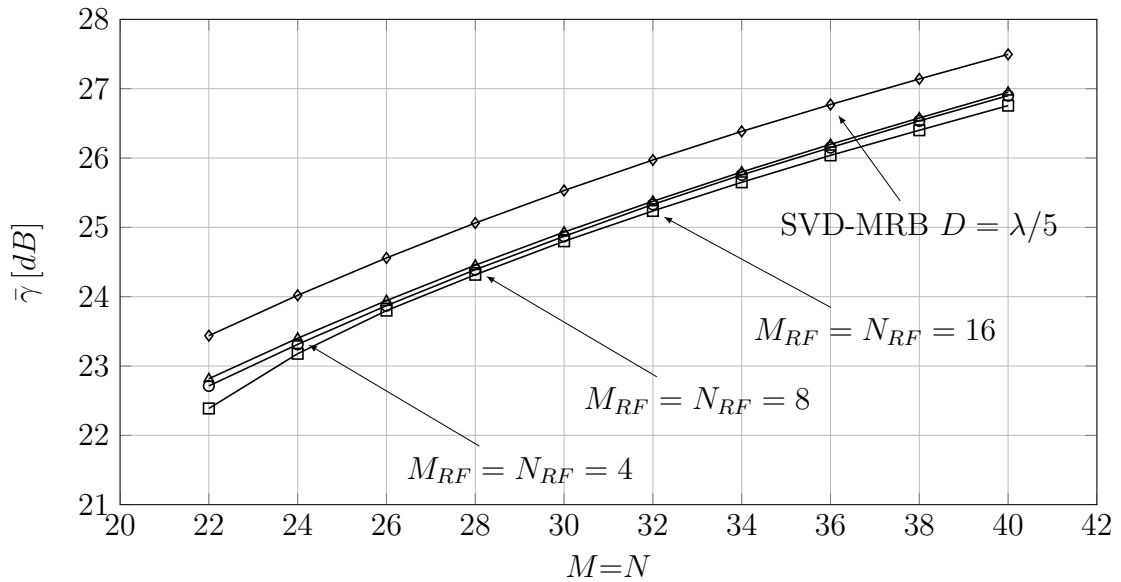


Figura 2.13: $\bar{\gamma}_{SVD-DB}$ per diverse configurazioni di M , N , M_{RF} e N_{RF} con $D = \lambda/5$. \mathbf{F}_{RF} e \mathbf{U}_{RF} sono stati progettati con l'Algoritmo 2.1 mentre $\tilde{\mathbf{f}}_{SVD-DB}$ e $\tilde{\mathbf{u}}_{SVD-DB}$ sono ottenuti dalla SVD di $\tilde{\mathbf{H}}$.

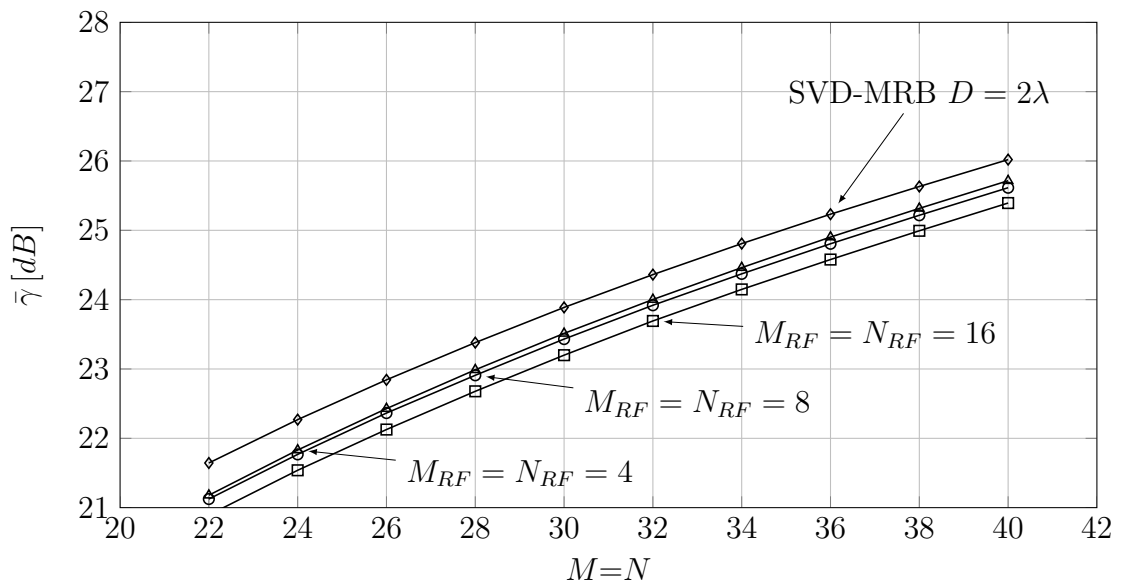


Figura 2.14: $\bar{\gamma}_{SVD-DB}$ per diverse configurazioni di M , N , M_{RF} e N_{RF} con $D = 2\lambda$. \mathbf{F}_{RF} e \mathbf{U}_{RF} sono stati progettati con l'Algoritmo 2.1 mentre $\tilde{\mathbf{f}}_{SVD-DB}$ e $\tilde{\mathbf{u}}_{SVD-DB}$ sono ottenuti dalla SVD di $\tilde{\mathbf{H}}$.

Analisi delle prestazioni

Nelle Figure 2.13 e 2.14 sono riportati i valori di $\bar{\gamma}$ rispettivamente per $D = \lambda/5$ e $D = 2\lambda$ al variare di M , N , M_{RF} e N_{RF} . Si nota che il $\bar{\gamma}$ per SVD-DB rispetto al bound dato da SVD-MRB è inferiore di circa 1 dB per $D = \lambda/5$, e 0.5 dB per $D = 2\lambda$. Questo approccio

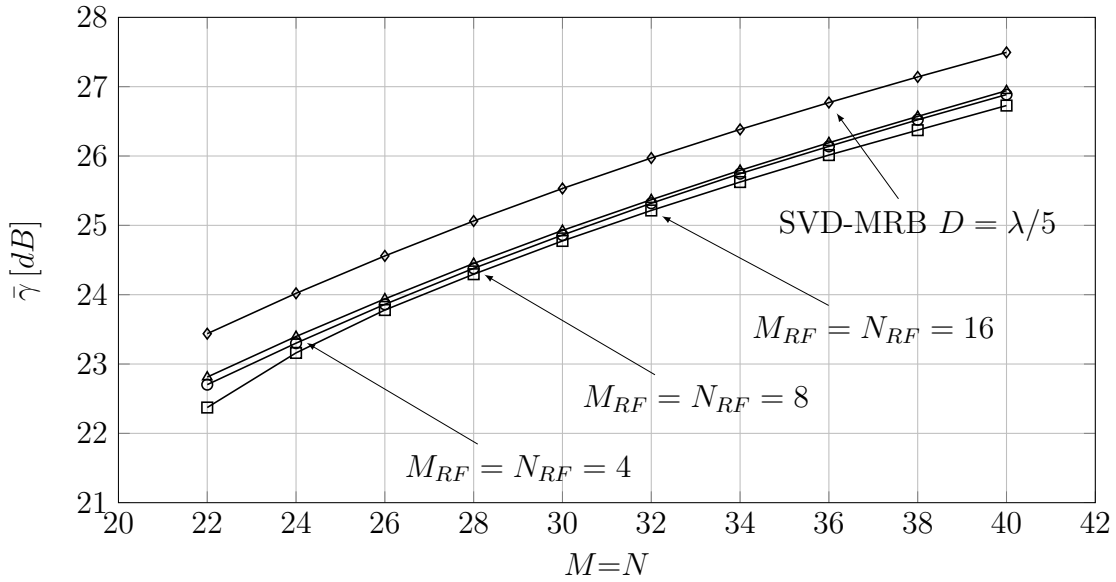


Figura 2.15: $\bar{\gamma}_{I-DB}$ per diverse configurazioni di M , N , M_{RF} e N_{RF} con $D = \lambda/5$. \mathbf{F}_{RF} e \mathbf{U}_{RF} sono stati progettati con l'Algoritmo 2.1 mentre $\tilde{\mathbf{f}}_{I-DB}$ e $\tilde{\mathbf{u}}_{I-DB}$ sono ottenuti dalla procedura ciclica di Par. 2.3.2.

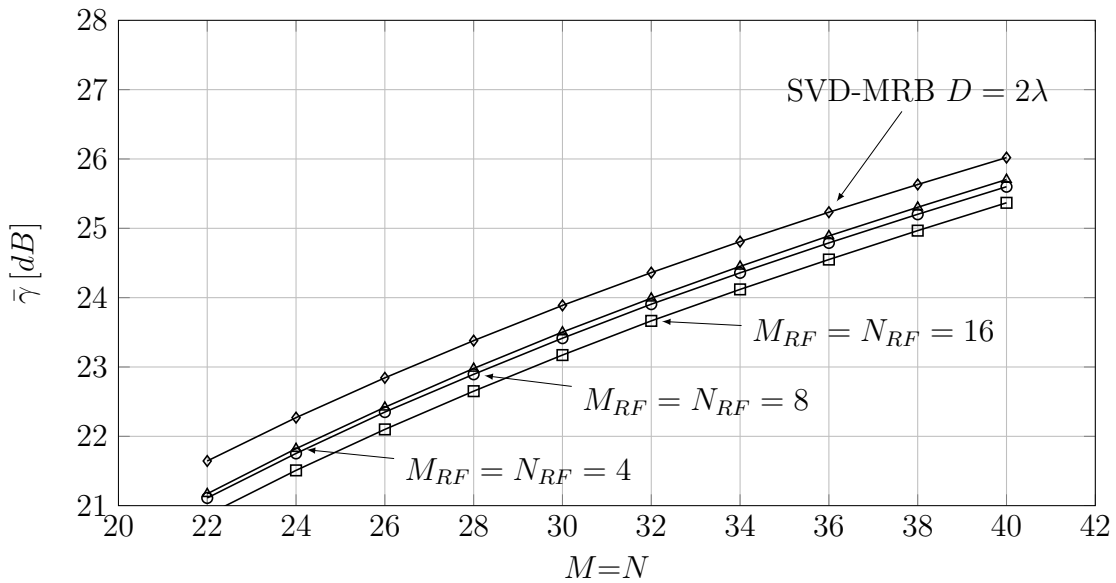


Figura 2.16: $\bar{\gamma}_{I-DB}$ per diverse configurazioni di M , N , M_{RF} e N_{RF} con $D = 2\lambda$. \mathbf{F}_{RF} e \mathbf{U}_{RF} sono stati progettati con l'Algoritmo 2.1 mentre $\tilde{\mathbf{f}}_{I-DB}$ e $\tilde{\mathbf{u}}_{I-DB}$ sono ottenuti dalla procedura ciclica di Par. 2.3.2.

SVD-DB risulta avere una complessità notevole perchè per progettare \mathbf{F}_{RF} e \mathbf{U}_{RF} bisogna effettuare la SVD di \mathbf{H} per ottenere $\mathbf{f}_{SVD-MRB}$ e $\mathbf{u}_{SVD-MRB}$, e successivamente la SVD di $\tilde{\mathbf{H}}$ per ottenere $\tilde{\mathbf{f}}_{SVD-DB}$ e $\tilde{\mathbf{u}}_{SVD-DB}$.

2.5.3 Approccio I-DB

Sempre con riferimento allo schema di Fig. 2.12 analogamente a quanto fatto con l'approccio SVD-DB calcoliamo i beamformer in banda base con l'approccio iterativo I-MRB del Par. 2.3 che chiamiamo $\tilde{\mathbf{f}}_{I-DB} \in \mathbb{C}^{M_{RF} \times 1}$ e $\tilde{\mathbf{u}}_{I-DB} \in \mathbb{C}^{N_{RF} \times 1}$. Come prima per ottenere la condizione

$$\|\mathbf{F}_{RF}\tilde{\mathbf{f}}_{I-DB}\|^2 = 1 \quad \text{e} \quad \|\mathbf{U}_{RF}\tilde{\mathbf{u}}_{I-DB}\|^2 = 1 \quad (2.55)$$

normalizziamo i beamformer $\hat{\mathbf{f}}$ e $\hat{\mathbf{u}}$ ottenuti dalla procedura iterativa applicata al canale $\tilde{\mathbf{H}}$

$$\tilde{\mathbf{f}}_{I-DB} = \frac{\hat{\mathbf{f}}}{\|\mathbf{F}_{RF}\hat{\mathbf{f}}\|} \quad \text{e} \quad \tilde{\mathbf{u}}_{I-DB} = \frac{\hat{\mathbf{u}}}{\|\mathbf{U}_{RF}\hat{\mathbf{u}}\|} \quad (2.56)$$

Analisi delle prestazioni

Nelle Figure 2.15 e 2.16 sono riportate le prestazioni. Si può notare che approssimano alle prestazioni SVD DB ma con una minore complessità per il calcolo dei beamformer in banda base.

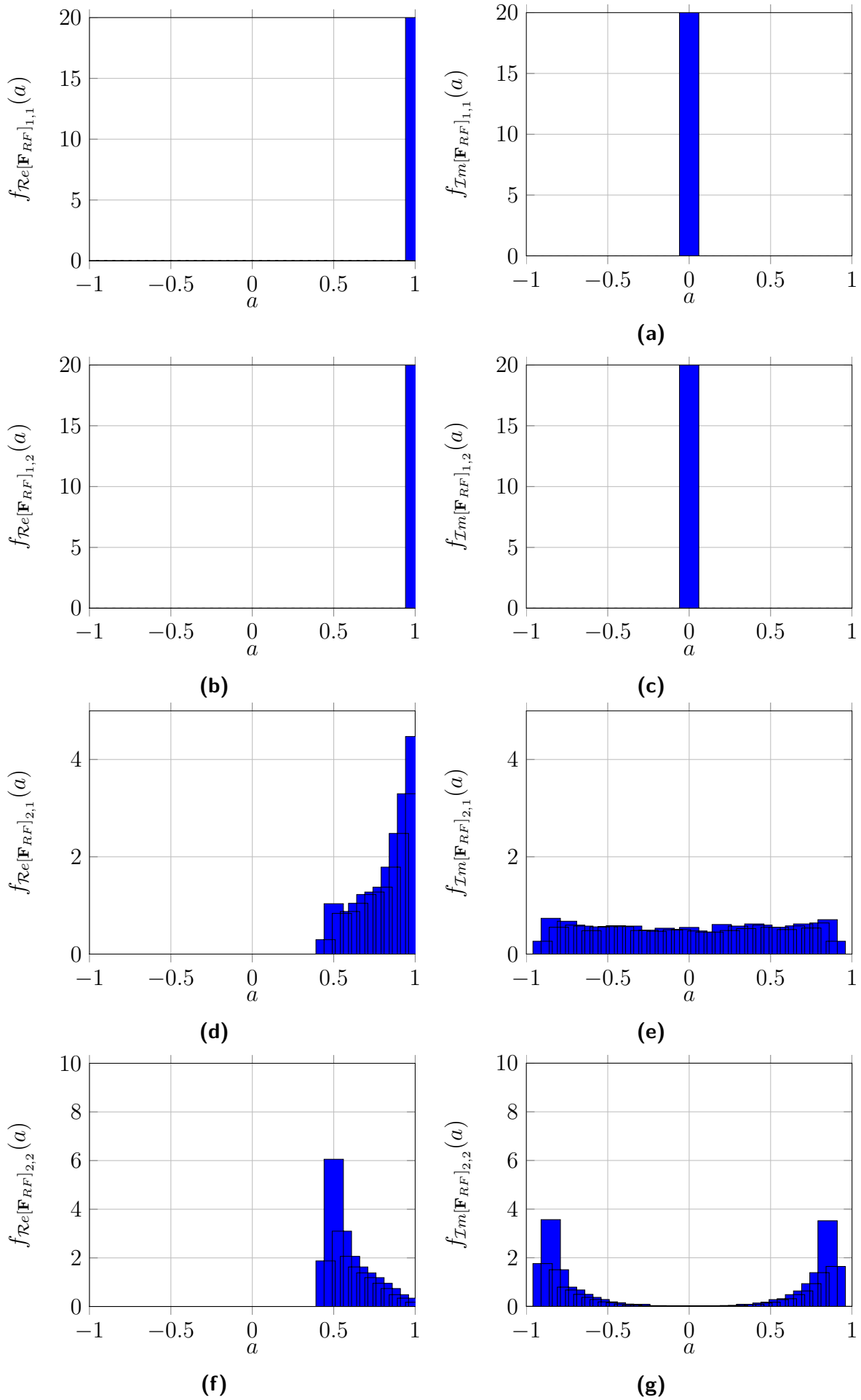


Figura 2.17: Istogramma come stima della PDF degli elementi di \mathbf{F}_{RF} con $M = N = 4$ e $M_{RF} = N_{RF} = 2$.

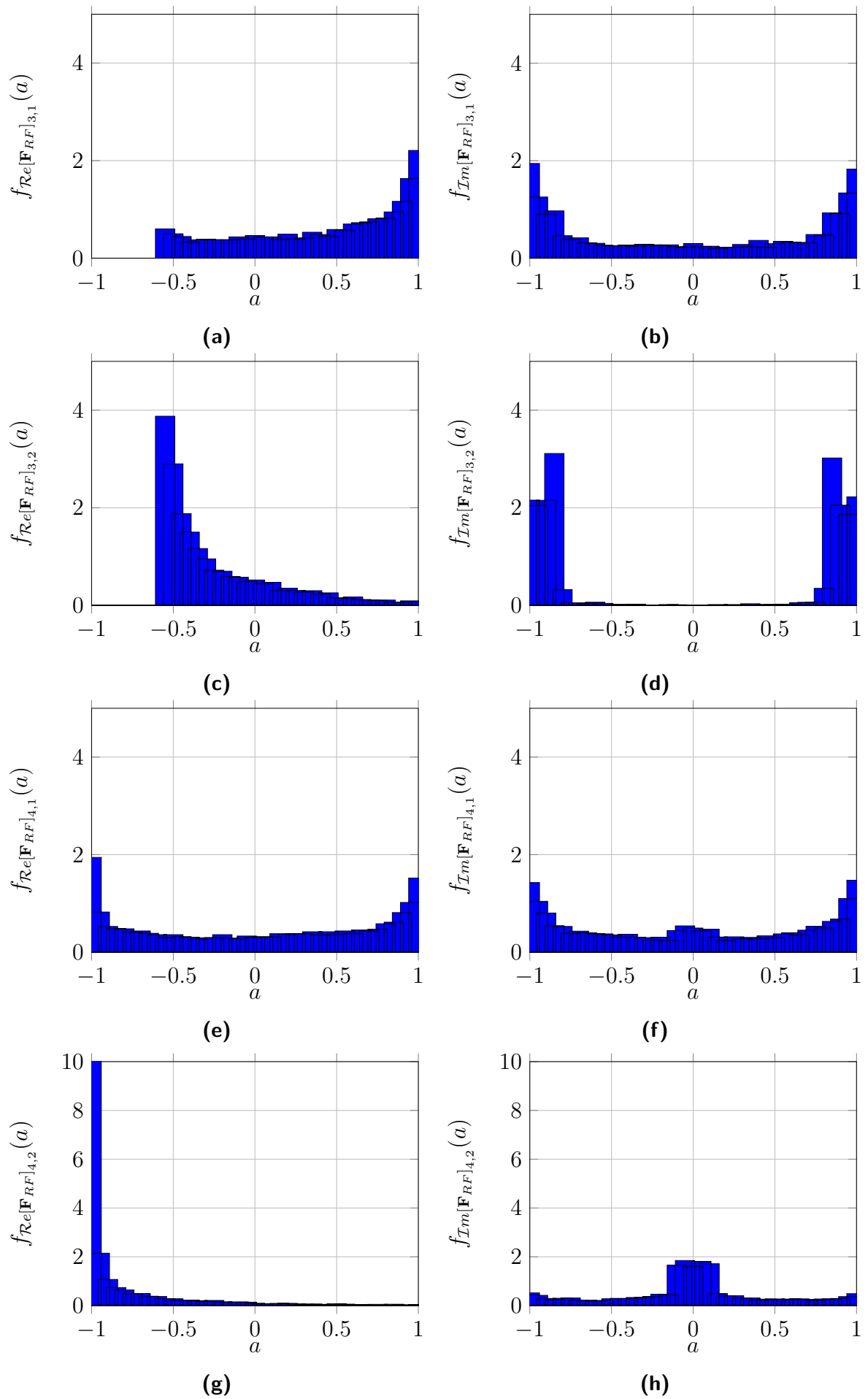


Figura 2.18: (Continua)

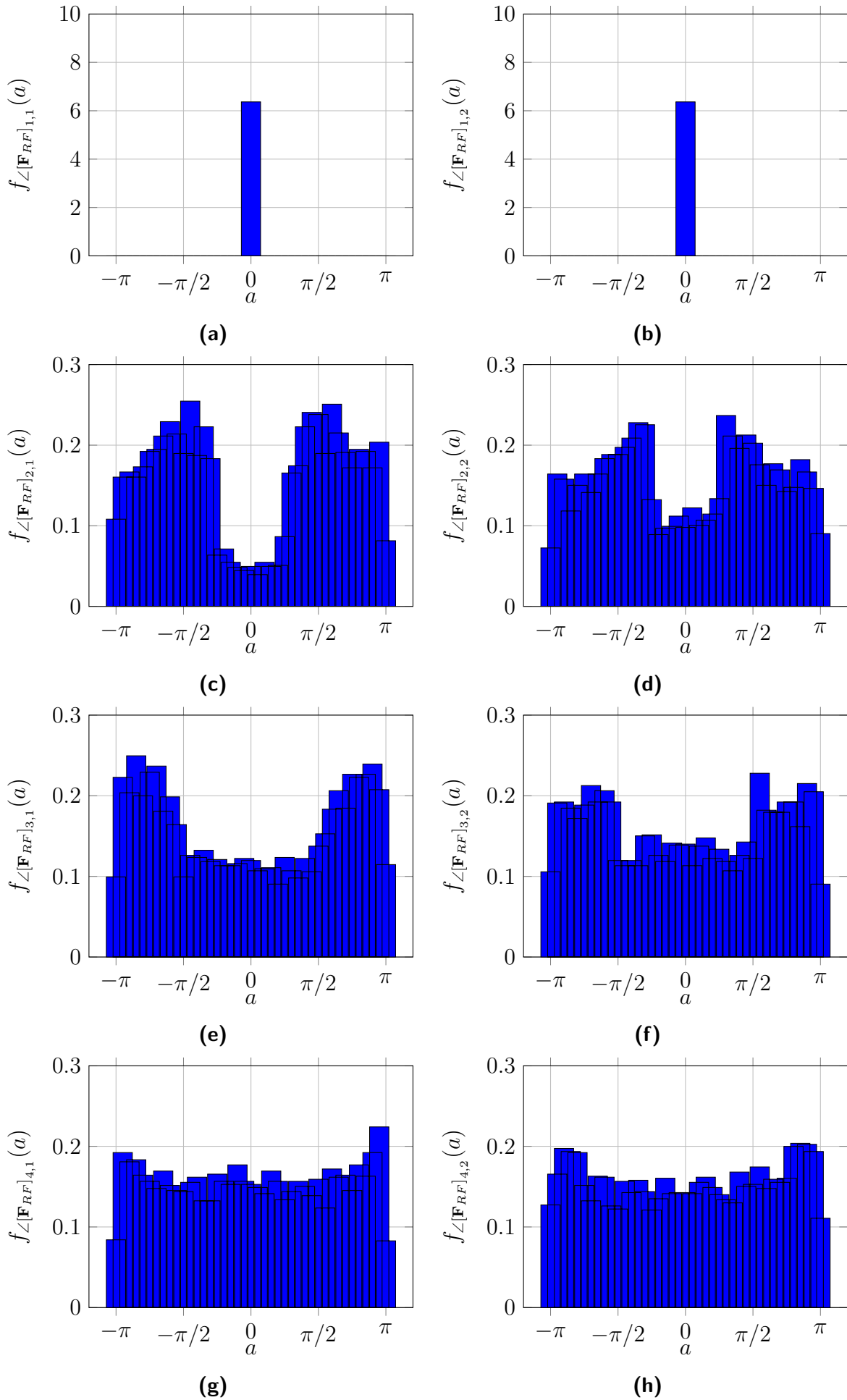


Figura 2.19: Istogramma come stima della PDF della fase degli elementi di \mathbf{F}_{RF} con $M = N = 4$ e $M_{RF} = N_{RF} = 2$.

Capitolo 3

Beamformer quantizzati

Nel paragrafo precedente abbiamo descritto architetture di beamforming ottimi e sub-ottimi. Nel caso dell'ADB abbiamo visto che è necessaria la conoscenza delle matrici \mathbf{A}_t e \mathbf{A}_r che sono fattori del canale \mathbf{H}_{ULA} , per calcolare con l'algoritmo di Heath i beamformers \mathbf{f}_{BB} , \mathbf{u}_{BB} , \mathbf{F}_{RF} e \mathbf{U}_{RF} . Per ovviare a ciò si è pensato di scegliere le matrici \mathbf{F}_{RF} e \mathbf{U}_{RF} tra gli elementi di un dizionario appositamente costruito e quindi poi calcolare \mathbf{f}_{BB} e \mathbf{u}_{BB} .

3.1 Quantizzazione vettoriale

La quantizzazione vettoriale è un'estensione multidimensionale della quantizzazione scalare. Un quantizzatore scalare mappa un grande insieme di numeri in un piccolo insieme di valori mentre un quantizzatore vettoriale fa la stessa cosa utilizzando vettori o più in generale matrici. Quindi il concetto di base è quello di associare ad una sequenza di ingresso $\mathbf{s} \in \mathbb{C}^{N \times M}$ una riproduzione $\mathbf{s}_q = \mathbf{Q}[\mathbf{s}]$ scelta da un insieme finito di L elementi (codeword) contenuti nel dizionario $\mathcal{A} = [\mathbf{Q}_1, \dots, \mathbf{Q}_L]$ che ne minimizza la distorsione $d(\mathbf{s}, \mathbf{Q}[\mathbf{s}])$.

3.1.1 Caratterizzazione della quantizzazione vettoriale

Considerando il caso generale di segnali complessi, la quantizzazione vettoriale è caratterizzata da [11]

- vettore o matrice di ingresso $\mathbf{s} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & \cdots & s_{1M} \\ s_{21} & s_{22} & \cdots & s_{2M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{N1} & s_{N2} & \cdots & s_{NM} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{N \times M}$.
- Codebook $\mathcal{A} = \{\mathbf{Q}_i\}$, $i = 1, \dots, L$, dove $\mathbf{Q}_i \in \mathbb{C}^{N \times M}$ è una codeword.
- misura della distorsione $d(\mathbf{s}, \mathbf{Q}[\mathbf{s}])$.
- regola di quantizzazione (distorsione minima)
 $\mathbf{Q} : \mathbb{C}^{N \times M} \rightarrow \mathcal{A}$ con $\mathbf{Q}_i = \mathbf{Q}[\mathbf{s}]$ se $i = \arg \min_l d(\mathbf{s}, \mathbf{Q}_l)$
- Regioni di Voronoi $R_l = \{\mathbf{s} \in \mathbb{C}^{N \times M} : \mathbf{Q}[\mathbf{s}] = \mathbf{Q}_l\}$ $l = 1, \dots, L$

3.1.2 Algoritmo LBG

L'algoritmo Linde-Buzo-Gray (LBG) viene utilizzato per la generazione del codebook attraverso una sequenza di training composta da K elementi i quali non sono nient'altro che varie realizzazioni di \mathbf{s} . Quindi si ha

$$\{\mathbf{s}(m)\} \quad m = 1, \dots, K \quad (3.1)$$

e la distorsione media, sotto ipotesi di ergodicit  del processo \mathbf{s} , risulta essere:

$$D = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K d(\mathbf{s}(k), \mathbf{Q}[\mathbf{s}(k)]) \quad (3.2)$$

Le due regole utilizzate dall'algoritmo per minimizzare D sono [11]:

Regola A

$$R_i = \left\{ \mathbf{s}(k) : d(\mathbf{s}(k), \mathbf{Q}_i) = \min_{\mathbf{Q}_l \in \mathcal{A}} d(\mathbf{s}(k), \mathbf{Q}_l) \right\} \quad i = 1, \dots, L \quad (3.3)$$

Quindi R_i   data da tutti gli elementi $\mathbf{s}(k)$ della TS pi  vicini a \mathbf{Q}_i .

Regola B

$$\mathbf{Q}_i = \arg \min_{\mathbf{Q}_j \in \mathbb{C}^{N \times M}} \frac{1}{m_i} \sum_{\mathbf{s}(k) \in R_i} d(\mathbf{s}(k), \mathbf{Q}_j) \quad (3.4)$$

dove m_i   il numero degli elementi della TS che sono in R_i

Descrizione dell'algoritmo con procedura di splitting

L'algoritmo, di tipo iterativo, inizializza il codebook con un numero di elementi $L = 1$ dove l'unico elemento   dato dal valore medio della TS. Nella fase di splitting ottiene da quest'ultimo due codeword e quindi un codebook con $L = 2$. A questo punto l'algoritmo LBG, attraverso le regole A e B ripetute ciclicamente fino a convergenza, deriva il codebook ottimo per $L = 2$. Se si vuole una dimensione finale del codebook pari a $L = 4$ si effettuer  una successiva fase di splitting per raddoppiare L e sempre attraverso l'algoritmo LBG si determina il codebook ottimo a convergenza. Questa procedura pu  essere quindi ripetuta fino a che il codebook non ha raggiunto le dimensioni volute che saranno una potenza di 2. Quindi definiamo $\mathcal{A}_j = [\mathbf{Q}_1, \dots, \mathbf{Q}_L]$ il codebook alla j -esima iterazione. La procedura di splitting genera $2L$ matrici di dimensioni $N \times M$ che costituiranno il codebook alla $j + 1$ -esima iterazione:

$$\mathcal{A}_{j+1} = \{\mathcal{A}_j^-\} \cup \{\mathcal{A}_j^+\} \quad (3.5)$$

dove

$$\mathcal{A}_j^- = \{\mathbf{Q}_i - \epsilon_-\} \quad i = 1, \dots, L \quad \mathcal{A}_j^+ = \{\mathbf{Q}_i + \epsilon_+\} \quad i = 1, \dots, L \quad (3.6)$$

Tipicamente ϵ_-   una matrice nulla, mentre ϵ_+  :

$$\epsilon_- = \mathbf{0} \quad \epsilon_+ = \frac{1}{10} \sqrt{\frac{M_s}{NM}} \cdot \mathbf{1} \quad (3.7)$$

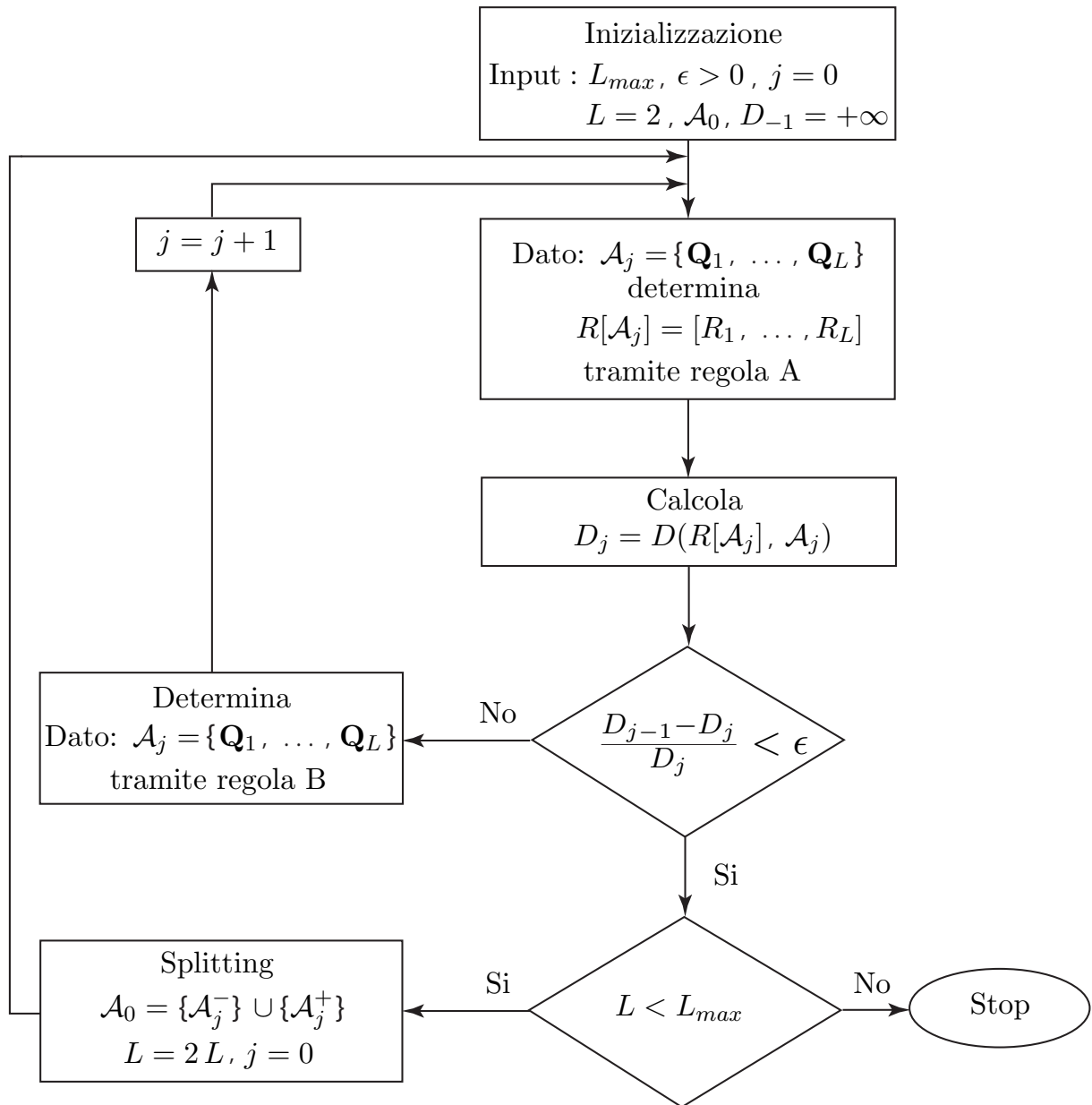


Figura 3.1: Diagramma di flusso dell'algorithm LBG.

dove $\mathbf{1}$ è la matrice di tutti uno e M_s è la potenza della TS

$$M_s = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M |s_{k,nm}|^2 \quad (3.8)$$

In 3.1 è rappresentato il diagramma di flusso dell'algorithm LBG dove il parametro $\epsilon > 0$ ($\epsilon = 10^{-3}$ tipicamente) determina il tempo di convergenza.

Metriche

Nel nostro caso il problema si traduce nel trovare, attraverso l'algorithm LBG, un codebook per le matrici \mathbf{F}_{RF} e \mathbf{U}_{RF} . Essendo i moduli di ogni singolo elemento delle matrici \mathbf{F}_{RF} e

\mathbf{U}_{RF} , generate con l'algoritmo di Heath, unitari, si può pensare di costruire le TS delle due matrici solo con le fasi degli elementi delle matrici. Quindi considereremo entrambe i casi per vedere le prestazioni che portano entrambe le scelte. In generale però c'è da tener conto che mentre per la quantizzazione della sola fase di \mathbf{F}_{RF} e \mathbf{U}_{RF} ogni ramo RF ha un ADC al ricevitore e un DAC al trasmettitore, per l'approccio che quantizza l'intera matrice ho bisogno del doppio di ADC e DAC per ramo RF. Definiamo la metrica distorsione e distorsione media per i due casi,

- modulo e fase

$$d_c(\mathbf{s}_k(k), \mathbf{Q}_i) = \sum_{n=1}^N \sum_{r=1}^{N_{RF}} |s_{nr}(k) - Q_{i,nr}|^2 \quad (3.9)$$

$$D_c = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K d_c(\mathbf{F}_{RF}(k), \mathbf{Q}[\mathbf{F}_{RF}]) \quad (3.10)$$

- solo fase

$$d_\phi(\mathbf{s}_k(k), \mathbf{Q}_i) = \sum_{n=1}^N \sum_{r=1}^{N_{RF}} |\arg\{s_{nr}(k)\} - \arg\{Q_{i,nr}\}|^2 \quad (3.11)$$

$$D_\phi = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K d_\phi(\mathbf{F}_{RF}(k), \mathbf{Q}[\mathbf{F}_{RF}]) \quad (3.12)$$

Selezione della Training Sequence

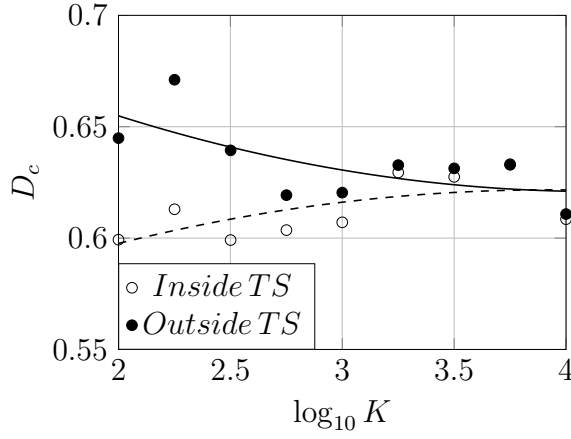
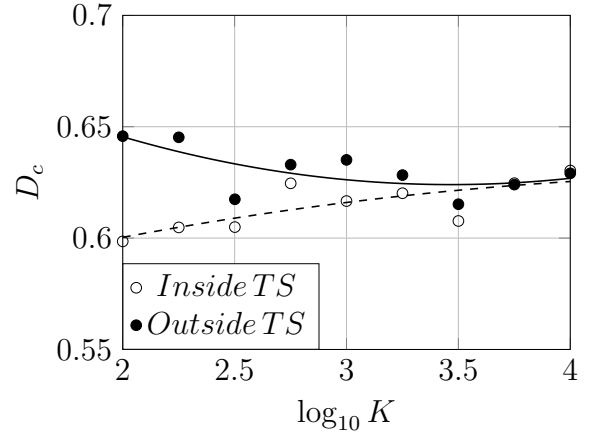
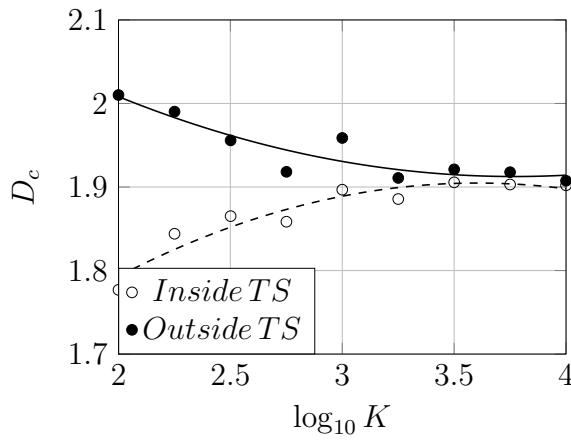
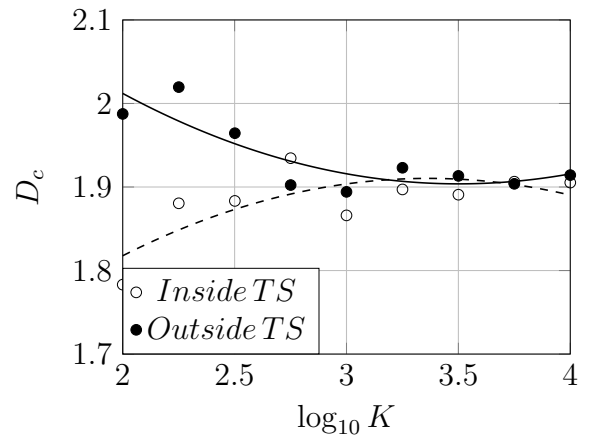
Un parametro importante è K , la lunghezza della training sequence. Infatti K deve essere abbastanza grande per ottenere un'adeguata rappresentazione del processo. Inoltre si deve fare in modo che utilizzando un'altra TS (outside TS), il valore della distorsione media sia comparabile a quello ottenuto con la TS utilizzata per costruire il codebook, in pratica i due valori di distorsione media devono convergere all'aumentare di K . Di seguito nelle Figure 3.2 e 3.3 vengono riportati gli andamenti di D_c vs. K per \mathbf{F}_{RF} e \mathbf{U}_{RF} mentre nelle Figure 3.4 e 3.5 i grafici di D_ϕ vs. K rispettivamente per \mathbf{F}_{RF} e \mathbf{U}_{RF} . La configurazione utilizzata è $M = N = 8$ e $M_{RF} = N_{RF} = 4$ con una dimensione del codebook $L=4$. Si sono verificati andamenti analoghi anche per $L=2, 8, 16, 32$ e si è visto che per $K=10000$ tutte le curve convergono.

3.2 Selezione beamformers

Abbiamo visto che attraverso l'algoritmo LBG è possibile ottenere un codebook ottimo di dimensione L desiderata. Utilizzando $\mathbf{f}_{SVD-MRB}$ e $\mathbf{u}_{SVD-MRB}$ dalle (2.25) e richiamando il funzionale utilizzato per l'algoritmo di Heath in (2.38), riadattandolo al caso della quantizzazione delle matrici \mathbf{F}_{RF} e \mathbf{U}_{RF} con i dizionari $\mathcal{D}_{TX} = [\mathbf{Q}_{TX,1}, \dots, \mathbf{Q}_{TX,L_{TX}}]$ e $\mathcal{D}_{RX} = [\mathbf{Q}_{RX,1}, \dots, \mathbf{Q}_{RX,L_{RX}}]$ rispettivamente i nuovi funzionali diventano:

$$J_{TX} = \arg \min_{\mathbf{F}_{RF} \in \mathcal{D}_{TX}, \mathbf{f}_{BB}} \|\mathbf{f}_{SVD-MRB} - \mathbf{F}_{RF} \mathbf{f}_{BB}\| \quad (3.13)$$

con vincolo: $\|\mathbf{F}_{RF} \mathbf{f}\|^2 = 1$


Figura 3.2: D_c per \mathbf{F}_{RF} . $L_{TX} = 4$.

Figura 3.3: D_c per \mathbf{U}_{RF} . $L_{RX} = 4$.

Figura 3.4: D_ϕ per \mathbf{F}_{RF} . $L_{TX} = 4$.

Figura 3.5: D_ϕ per \mathbf{U}_{RF} . $L_{RX} = 4$.

e analogamente

$$J_{RX} = \arg \min_{\mathbf{U}_{RF} \in \mathcal{D}_{RX}, \mathbf{u}_{BB}} \|\mathbf{u}_{SVD-MRB} - \mathbf{U}_{RF} \mathbf{u}_{BB}\| \quad (3.14)$$

con vincolo: $\|\mathbf{U}_{RF} \mathbf{u}\|^2 = 1$

Per risolvere (3.14) (e (3.15)) si è proposto un semplice algoritmo esaustivo illustrato in Tab. 3.1 che ha come dati di ingresso $\mathbf{f}_{SVD-MRB}$ di (2.25) e il dizionario \mathcal{D}_{TX} (\mathbf{u}_{opt} e il dizionario \mathcal{D}_{RX}). Alternativamente alle soluzioni (2.25) si possono utilizzare anche (2.31) evitando quindi di effettuare la decomposizione SVD del canale \mathbf{H} . Come per l'algoritmo di Heath, progettando separatamente il beamformer lato trasmissione e ricezione può causare una perdita in potenza ricevuta se il numero di catene RF è minore del numero di catene RF al trasmettitore. A tal fine è sufficiente utilizzare l'Algoritmo 2 esposto in Tab. 2.2 con la differenza che ora i dati di ingresso sono \mathcal{D}_{TX} e \mathcal{D}_{RX} .

Tabella 3.1: Algoritmo 1: progetto di \mathbf{F}_{RF} (e di \mathbf{U}_{RF}).

Inputs: $\mathbf{f}_{SVD-MRB}, \mathcal{D}_{TX}$
1. $J_{TX} = \infty$
2. for $i=1$ to L_{TX}
3. $\mathbf{f}_{tmp} = (\mathbf{Q}_{TX,i}^H \mathbf{Q}_{TX,i})^{-1} \mathbf{Q}_{TX,i}^H \mathbf{f}_{SVD-MRB}$
4. $J_{temp} = \ \mathbf{f}_{SVD-MRB} - \mathbf{Q}_{TX,i} \mathbf{f}_{tmp}\ $
5. if $J_{temp} < J_{TX}$
6. $\mathbf{F}_{RF} = \mathbf{Q}_{TX,i}$
7. $\mathbf{f}_{BB} = \mathbf{f}_{tmp}$
8. $J_{TX} = J_{temp}$
9. end if
10. end for
11. $\mathbf{f}_{BB} = \frac{\mathbf{f}_{BB}}{\ \mathbf{F}_{RF} \mathbf{f}_{BB}\ }$

3.3 Analisi delle prestazioni

Consideriamo l'ambiente del Paragrafo 1.1.2. Abbiamo messo a confronto diverse configurazioni di beamformers, sia in termini di numero di antenne in trasmissione e ricezione e distanza tra antenne, sia in termini di metodi di progetto utilizzati. Si va dall'approccio ottimo dato dalla SVD passando per ADB fino al Quantized Analog-Digital Beamforming (Q-ADB) con quantizzazione di modulo e fase (Q_c-ADB) o solo fase (Q_φ-ADB) degli elementi dei beamformer in BP per diversi valori di L_{TX} e L_{RX} . Ne abbiamo quindi analizzato le prestazioni simulando il valore medio di $\bar{\gamma}$. Si può notare dalla Fig. 3.6 che nel caso di una quantizzazione Q_c-ADB, con un numero di codebook $L_{TX} = L_{RX} = 8$ per $M_{RF} = N_{RF} = 16$ si raggiunge il bound (SVD-MRB). Nel caso Q_φ-ADB invece le prestazioni sono sempre inferiori al bound anche utilizzando un numero di codebook $L_{TX} = L_{RX} = 32$.

3.4 Approccio alternativo

Si è provato a selezionare i beamformer $\mathbf{F}_{RF} \in \mathcal{D}_{TX}$ e $\mathbf{U}_{RF} \in \mathcal{D}_{RX}$ e i corrispondenti beamformer in BB \mathbf{f}_{BB} e \mathbf{u}_{BB} con procedura esaustiva, con l'obiettivo di massimizzare l'SNR in (2.35) si è utilizzato il seguente funzionale

$$\arg \max_{\mathbf{F}_{RF} \in \mathcal{D}_{TX}, \mathbf{f}_{BB}, \mathbf{U}_{RF} \in \mathcal{D}_{RX}, \mathbf{u}_{BB}} \left| \mathbf{u}_{BB}^H \mathbf{U}_{RF}^H \mathbf{H} \mathbf{F}_{RF} \mathbf{f}_{BB} \right|^2 \quad (3.15)$$

con vincoli: $\|\mathbf{F}_{RF} \mathbf{f}_{BB}\|^2 = 1, \|\mathbf{U}_{RF} \mathbf{u}_{BB}\|^2 = 1$

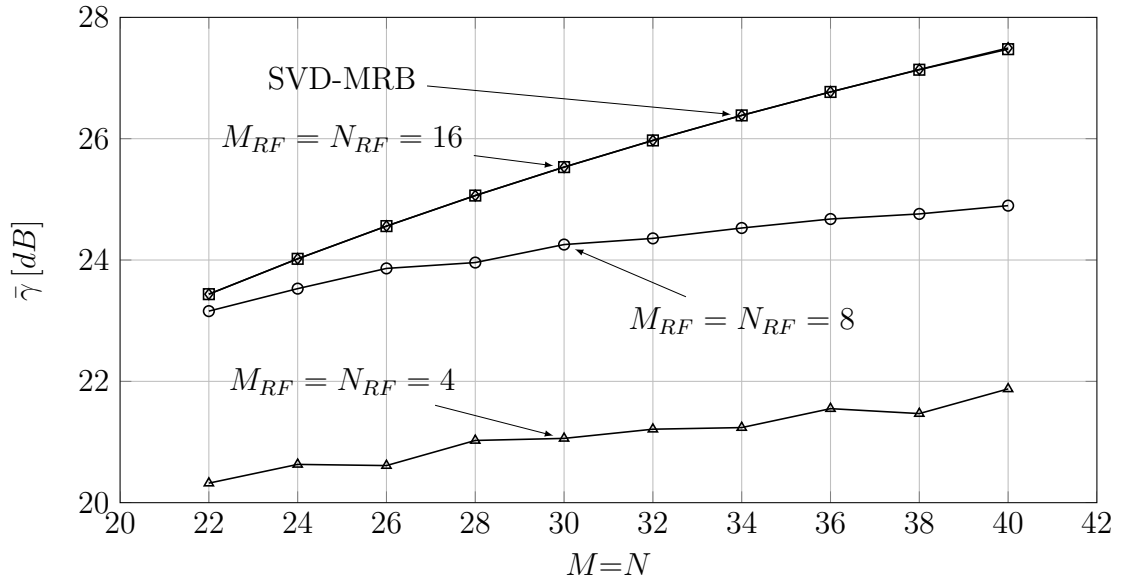


Figura 3.6: $\bar{\gamma}_{Q_c-ADB}$ per diverse configurazioni di M , N , M_{RF} e N_{RF} con $D = \lambda/5$.
 $L_{TX} = L_{RX} = 8$

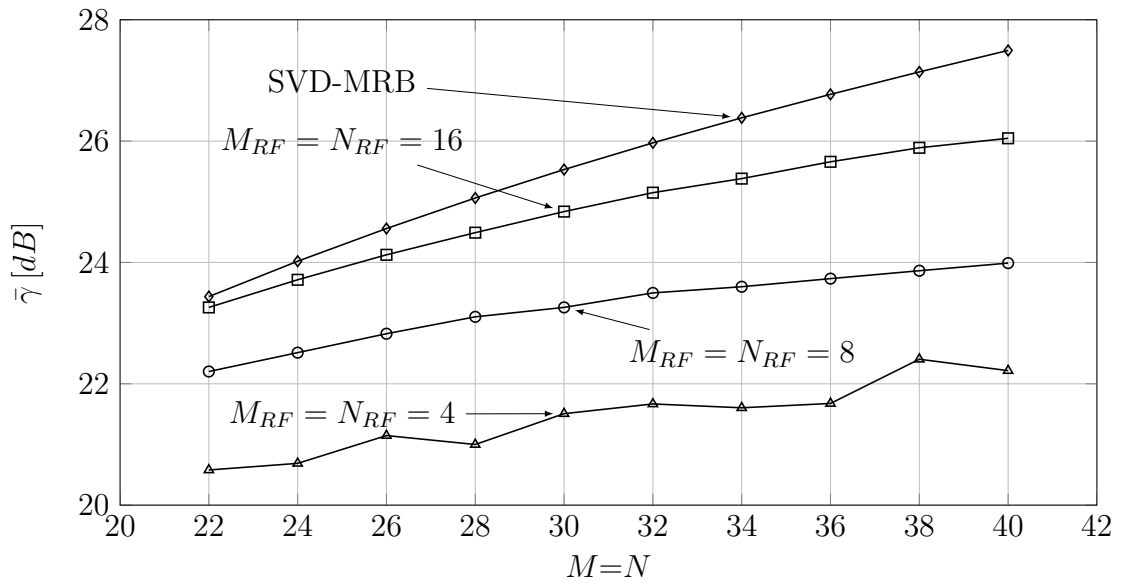


Figura 3.7: $\bar{\gamma}_{Q_\phi-ADB}$ per diverse configurazioni di M , N , M_{RF} e N_{RF} con $D = \lambda/5$.
 $L_{TX} = L_{RX} = 32$

Si è visto che questo approccio porta alle stesse prestazioni espote in precedenza ma con una complessità maggiore dovendo provare $L_{TX}L_{RX}$ coppie di beamformer, invece delle $L_{TX} + L_{RX}$ coppie dell'Algoritmo 3.1. Anche in questo caso si deve conoscere il canale \mathbf{H} e ottenere i beamformer $\mathbf{f}_{SVD-MRB}$ e $\mathbf{u}_{SVD-MRB}$ dalla decomposizione SVD oppure alternativamente \mathbf{f}_{I-MRB} e \mathbf{u}_{I-MRB} che abbiamo visto convergere a quest'ultimi.

3.5 Q-DB

Si vuole ora realizzare lo schema di Fig. 2.12 con la quantizzazione di modulo e fase degli elementi dei beamformer RF \mathbf{F}_{RF} e \mathbf{U}_{RF} . Il canale $\widetilde{\mathbf{H}}$ è definito come:

$$\widetilde{\mathbf{H}} = \mathbf{U}_{RF}^H \mathbf{H} \mathbf{F}_{RF} \quad \text{con } \mathbf{F}_{RF} \in \mathcal{D}_{TX} \text{ e } \mathbf{U}_{RF} \in \mathcal{D}_{RX} \quad (3.16)$$

Anche se apparentemente il canale $\widetilde{\mathbf{H}}$ ha la forma di 2.47, si differenzia perchè \mathbf{F}_{RF} e \mathbf{U}_{RF} sono quantizzati. In effetti, come vedremo, utilizzando dizionari con pochi elementi le prestazioni di Quantized-Digital Beamforming (Q-DB) sono nettamente inferiori a Q-ADB a meno di non utilizzare M_{RF} e N_{RF} piccoli. Un metodo più sofisticato per raggiungere le prestazioni di Q-ADB sarebbe quello di introdurre un nuovo SNR che tenga conto dei rumori di quantizzazione delle matrici \mathbf{F}_{RF} e \mathbf{U}_{RF} . Il vettore rumore $\mathbf{n}_{BB} \in \mathbb{C}^{(1 \times N_{RF})}$ è il vettore rumore \mathbf{n} dello schema ADB di Fig. 2.9 portato in banda, cioè

$$\mathbf{n}_{BB} = \mathbf{U}_{RF}^H \mathbf{n} \quad \text{con } \mathbf{U}_{RF} \in \mathcal{D}_{RX} \quad (3.17)$$

3.5.1 SNR nel punto di decisione

Dati $\mathbf{F}_{RF} \in \mathcal{D}_{TX}$ e $\mathbf{U}_{RF} \in \mathcal{D}_{RX}$ la massimizzazione dell'SNR per l'approccio DB risulta essere:

$$\begin{aligned} & \arg \max_{\mathbf{F}_{RF} \in \mathcal{D}_{TX}, \mathbf{f}, \mathbf{U}_{RF} \in \mathcal{D}_{RX}, \mathbf{u}} \left| \mathbf{u}^H \widetilde{\mathbf{H}} \mathbf{f} \right|^2 \\ \text{con vincoli:} & \quad \|\mathbf{F}_{RF} \mathbf{f}\|^2 = 1, \quad \|\mathbf{U}_{RF} \mathbf{u}\|^2 = 1 \end{aligned} \quad (3.18)$$

3.6 Q-SVD-DB

Come fatto analogamente nel Par. 2.5.2 al fine di ottenere la condizione

$$\|\mathbf{F}_{RF} \widetilde{\mathbf{f}}_{Q-SVD-DB}\|^2 = 1 \quad \text{e} \quad \|\mathbf{U}_{RF} \widetilde{\mathbf{u}}_{Q-SVD-DB}\|^2 = 1 \quad (3.19)$$

normalizziamo i beamformer $\widetilde{\mathbf{f}}$ e $\widetilde{\mathbf{u}}$ ottenuti dalla SVD di $\widetilde{\mathbf{H}}$. Quindi

$$\widetilde{\mathbf{f}}_{Q-SVD-DB} = \frac{\widetilde{\mathbf{f}}}{\|\mathbf{F}_{RF} \widetilde{\mathbf{f}}\|} \quad \text{e} \quad \widetilde{\mathbf{u}}_{Q-SVD-DB} = \frac{\widetilde{\mathbf{u}}}{\|\mathbf{U}_{RF} \widetilde{\mathbf{u}}\|} \quad (3.20)$$

3.7 Q-I-DB

Come al solito per affinché sia verificata la condizione

$$\|\mathbf{F}_{RF} \widetilde{\mathbf{f}}_{Q-I-DB}\|^2 = 1 \quad \text{e} \quad \|\mathbf{U}_{RF} \widetilde{\mathbf{u}}_{Q-I-DB}\|^2 = 1 \quad (3.21)$$

normalizziamo i beamformer $\widehat{\mathbf{f}}$ e $\widehat{\mathbf{u}}$ ottenuti dalla procedura iterativa applicata al canale $\widetilde{\mathbf{H}}$. Quindi

$$\widetilde{\mathbf{f}}_{Q-I-DB} = \frac{\widehat{\mathbf{f}}}{\|\mathbf{F}_{RF} \widehat{\mathbf{f}}\|} \quad \text{e} \quad \widetilde{\mathbf{u}}_{Q-I-DB} = \frac{\widehat{\mathbf{u}}}{\|\mathbf{U}_{RF} \widehat{\mathbf{u}}\|} \quad (3.22)$$

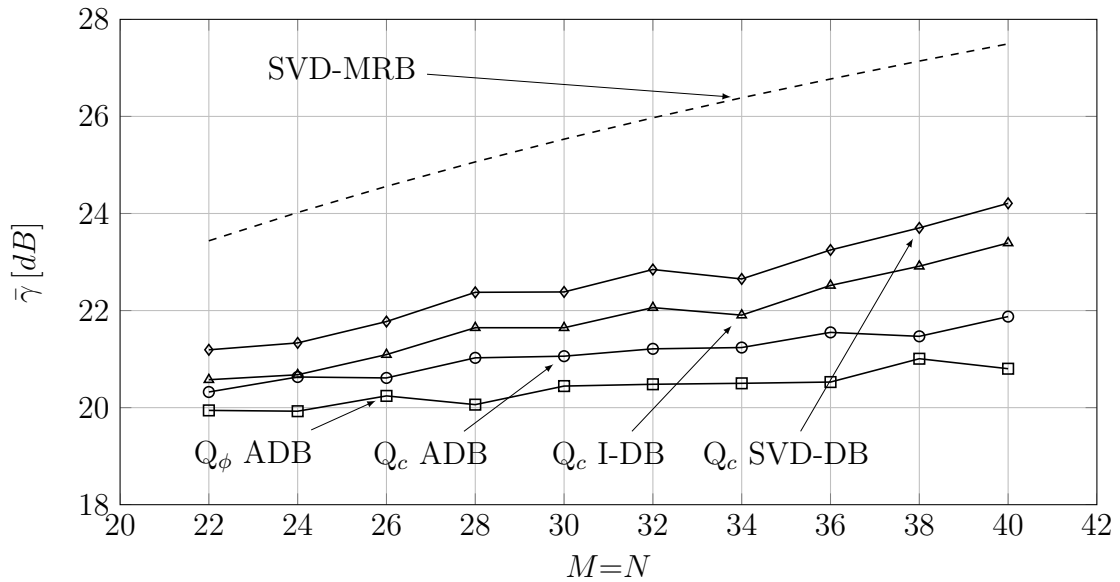


Figura 3.8: Prestazioni a confronto $M_{RF} = N_{RF} = 4$.

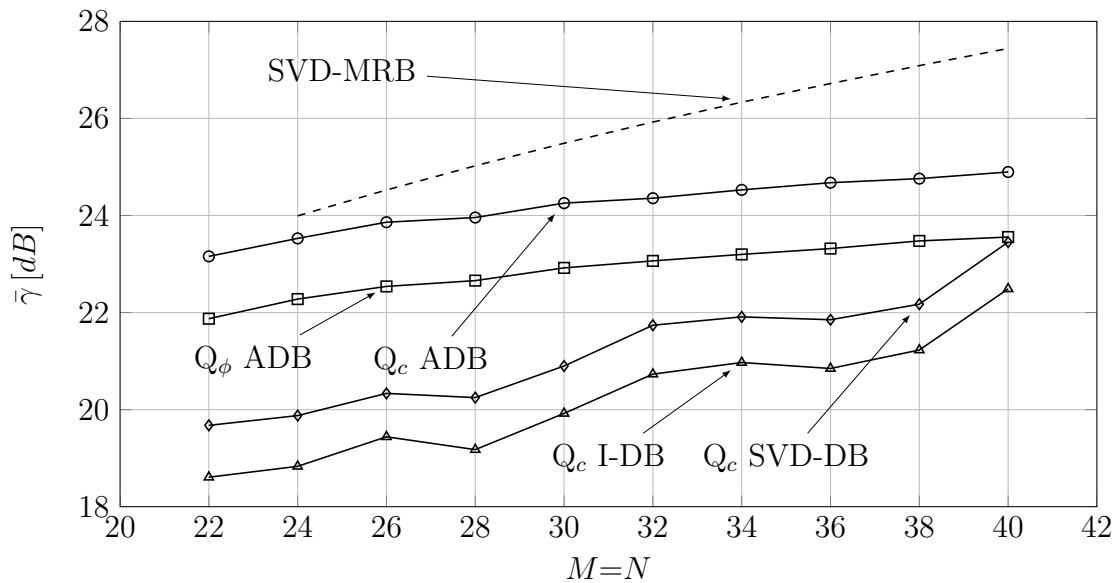


Figura 3.9: Prestazioni a confronto $M_{RF} = N_{RF} = 8$.

3.8 Prestazioni a confronto

Nelle Figure 3.8, 3.9 e 3.10 si sono messe a confronto le varie prestazioni dei sistemi quantizzati al variare del numero di catene RF. Il numero di codebook utilizzati sono 8 per $Q_c - ADB$, 16 per $Q_\phi - ADB$ e 64 per $QSVD - DB$ e $QI - DB$. Si vede che per un numero piccolo di catene RF rispetto al numero di antenne tra gli approcci quantizzati quelli DB sono i migliori, invece aumentando M_{RF} e N_{RF} gli approcci $Q - ADB$ riescono

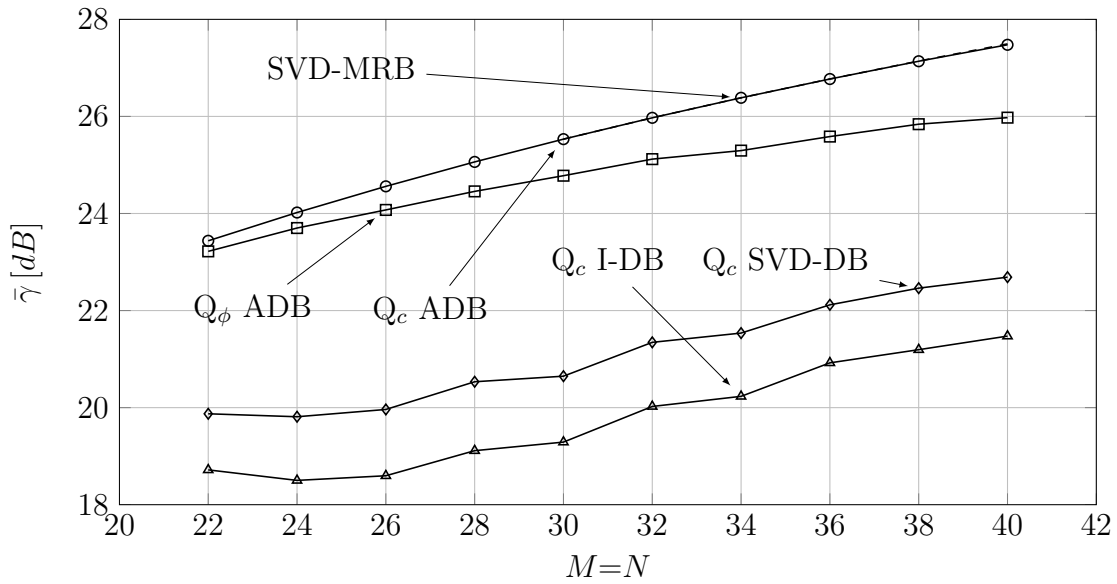


Figura 3.10: Prestazioni a confronto $M_{RF} = N_{RF} = 16$.

a raggiungere performance uguali al bound (vedi $Q_c ADB$ in Fig. 3.10) o molto prossime (vedi $Q_\phi ADB$ in Fig. 3.10).

Capitolo 4

Complessità algoritmi

L'analisi di complessità è un metodo formale per prevedere le risorse richieste dall'algoritmo. In questo capitolo riportiamo la complessità computazionale dei vari algoritmi esposti nei Capitoli 3 e 2 in termini di numero di moltiplicazioni e divisioni complesse richieste per eseguirlo. Nell'Appendice B sono riportati i procedimenti che hanno portato al calcolo finale delle varie complessità dei diversi algoritmi che di seguito riportiamo solo nel caso $M \geq N$ e $M_{RF} \geq N_{RF}$

$$C_{SVD-MRB} = \mathcal{O}(4 \cdot N^2 \cdot M + 22 \cdot M^3) \quad (4.1)$$

$$C_{I-MRB} = \mathcal{O}(N^{\circ} \text{ iter.} \cdot [2 \cdot M \cdot N + M + N]) \quad (4.2)$$

$$\begin{aligned} C_{ADB} = \mathcal{O} & \left(2 \cdot L \cdot [M \cdot M_{RF} + N \cdot N_{RF}] + \frac{M_{RF}^4}{4} + M_{RF}^3 \cdot \left[\frac{2}{3} \cdot M + \frac{1}{2} \right] \right. \\ & + M_{RF}^2 \cdot \left[\frac{5}{2} \cdot M + \frac{1}{4} \right] + M_{RF} \cdot \left[\frac{23}{6} \cdot M + 1 \right] + \frac{N_{RF}^4}{4} \\ & + N_{RF}^3 \cdot \left[\frac{2}{3} \cdot N + \frac{1}{2} \right] + N_{RF}^2 \cdot \left[\frac{5}{2} \cdot N + \frac{1}{4} \right] + N_{RF} \cdot \left[\frac{23}{6} \cdot N + 1 \right] \\ & \left. + N \cdot M_{RF}(M^2 + M_{RF}) + 2 \cdot N \cdot M^2 + 11 \cdot M^3 \right) \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned} C_{Q-ADB} = \mathcal{O} & (L_{TX} \cdot [M_{RF} \cdot (2 \cdot M + 1)] + L_{RX} \cdot [N_{RF} \cdot (2 \cdot N + 1)] \\ & + N \cdot M_{RF}(M^2 + M_{RF}) + 2 \cdot N \cdot M^2 + 11 \cdot M^3) \end{aligned} \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned} C_{Q_c-SVD-DB} = \mathcal{O} & \left(L_{TX} \cdot L_{RX} \cdot (4 \cdot N_{RF}^2 \cdot M_{RF} + 22 \cdot M_{RF}^3) + M_{RF} \cdot M \right. \\ & \left. + M_{RF} + N_{RF} \cdot N + N_{RF} \right) \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$\begin{aligned} C_{Q_c-I-DB} = \mathcal{O} & (N^{\circ} \text{ iter.} \cdot L_{TX} \cdot L_{RX} \cdot [2 \cdot M_{RF} \cdot N_{RF} + M_{RF} + N_{RF}] \\ & + M_{RF} \cdot M + M_{RF} + N_{RF} \cdot N + N_{RF}) \end{aligned}$$

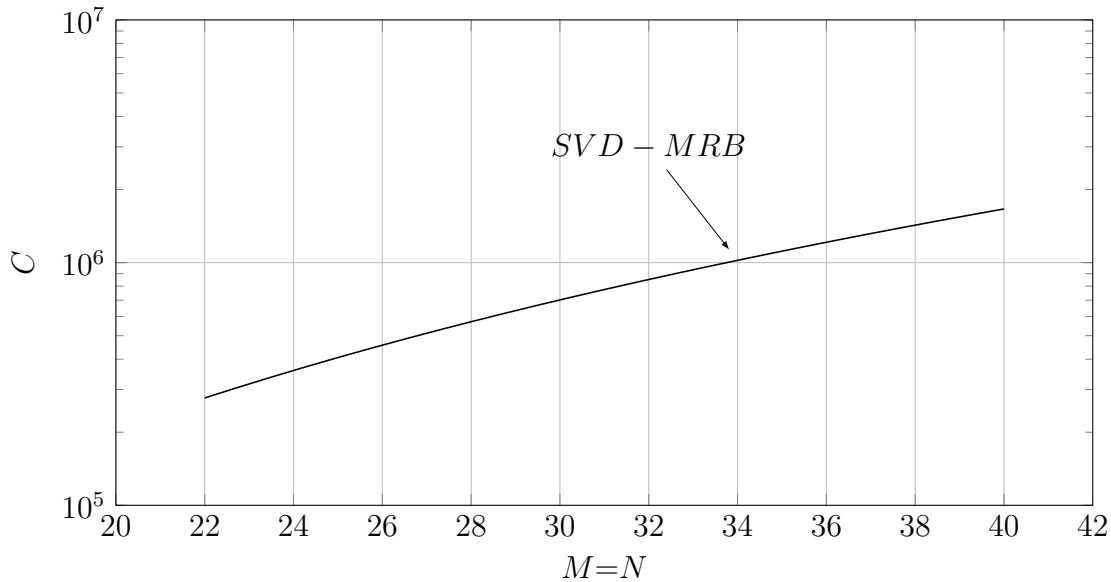


Figura 4.1: Complessità dell'algoritmo *SVD - MRB* al variare di $M = N$.

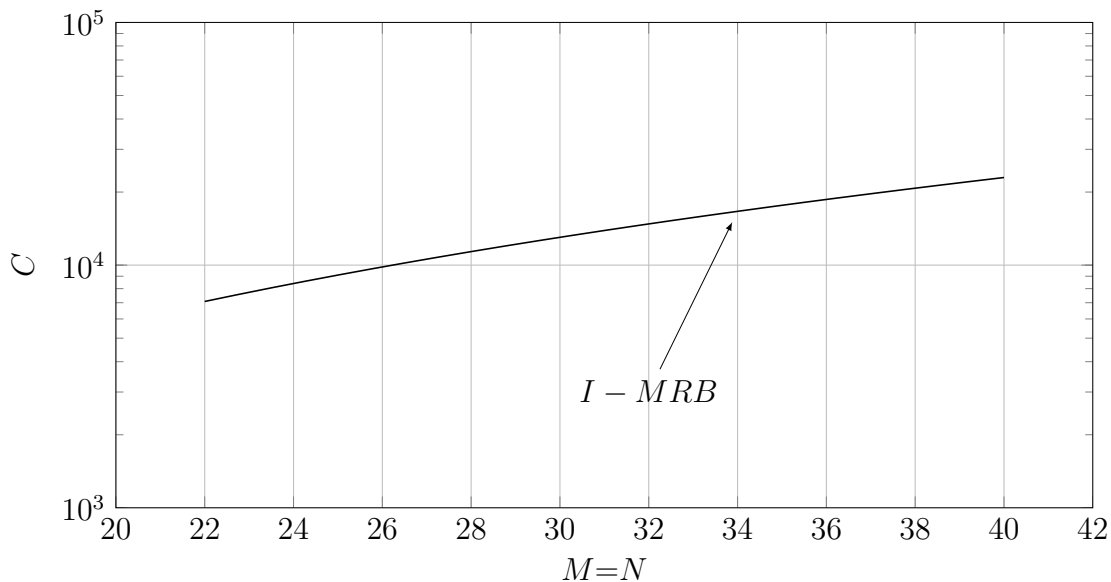


Figura 4.2: Complessità dell'algoritmo *I - MRB* al variare di $M = N$.

Analisi prestazioni

Nelle Figure 4.1, 4.2, 4.3, 4.4, 4.5 e 4.6 sono riportate le complessità dei vari algoritmi al variare di $M = N$ e $M_{RF} = N_{RF}$ e $L_{TX} = L_{RX} = 8$. Si può notare che per gli approcci di tipo DB, dato $M_{RF} = N_{RF}$ la complessità cresce linearmente con $M = N$ (4.5) quindi nelle Figure 4.5 e 4.6 il grafico è praticamente costante.

Inoltre si può notare come l'approccio Q-ADB porge sempre una minore complessità rispetto all'approccio ADB per qualsiasi configurazione di catene RF (Figure 4.4 e 4.3). Nelle Figure 4.7, 4.8 e 4.9 si può apprezzare la differenza di complessità tra i vari algoritmi.

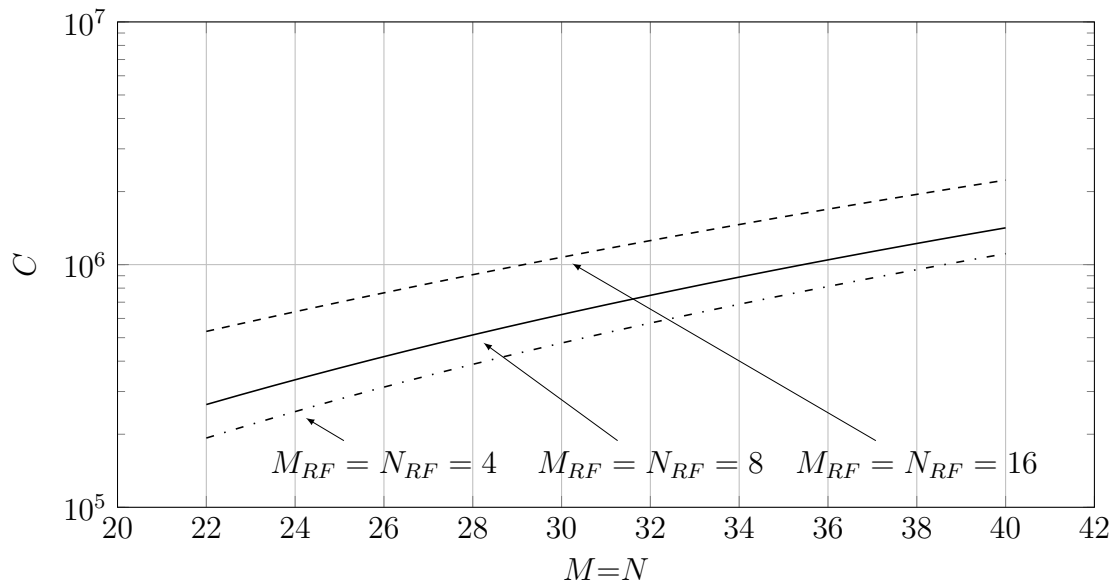


Figura 4.3: Complessità dell'algorithmo *ADB* al variare di $M = N$ e $M_{RF} = N_{RF}$, con $L_{TX} = L_{RX} = 8$.

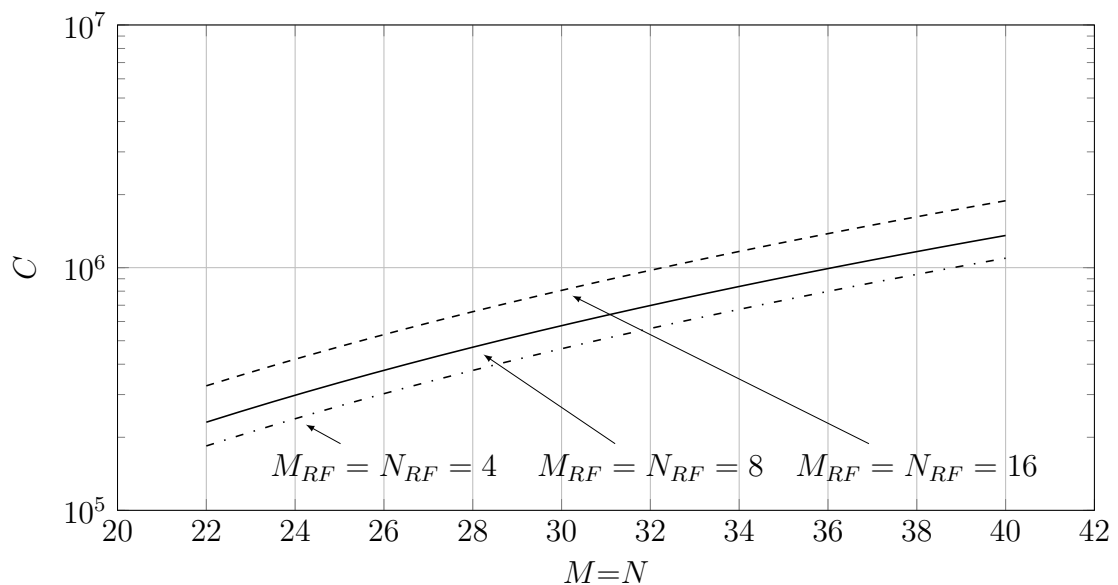


Figura 4.4: Complessità dell'algorithmo *Q-ADB* al variare di $M = N$ e $M_{RF} = N_{RF}$, con $L_{TX} = L_{RX} = 8$.

L'approccio I-MRB è quello che porge la minore complessità in tutti i casi, poi l'approccio I-DB porge una complessità che è inferiore rispetto a Q-ADB e ADB quando il numero di catene RF è 4 o 8. Come si poteva intuire quindi gli approcci iterativi sono quelli che in termini di complessità offrono le migliori prestazioni.

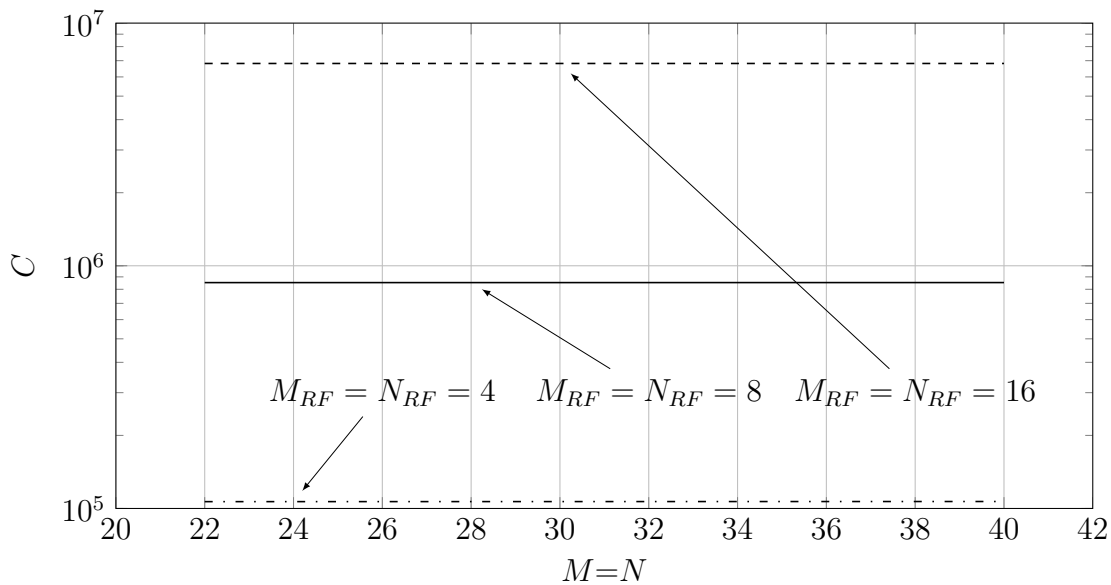


Figura 4.5: Complessità dell'algoritmo $Q-SVD-DB$ al variare di $M = N$ e $M_{RF} = N_{RF}$, con $L_{TX} = L_{RX} = 8$.

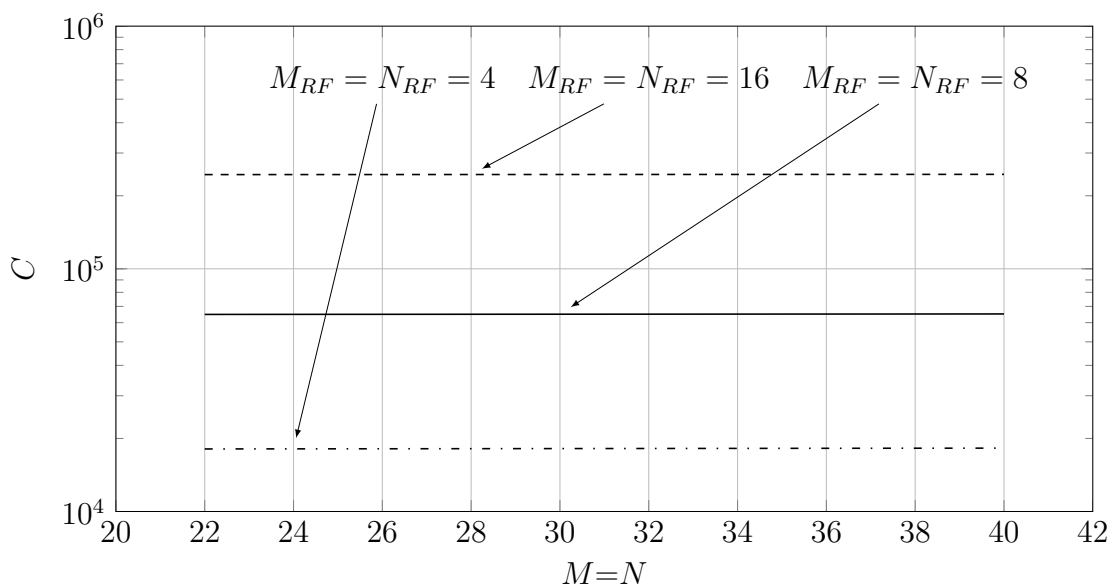


Figura 4.6: Complessità dell'algoritmo $Q-I-DB$ al variare di $M = N$ e $M_{RF} = N_{RF}$, con $L_{TX} = L_{RX} = 8$.

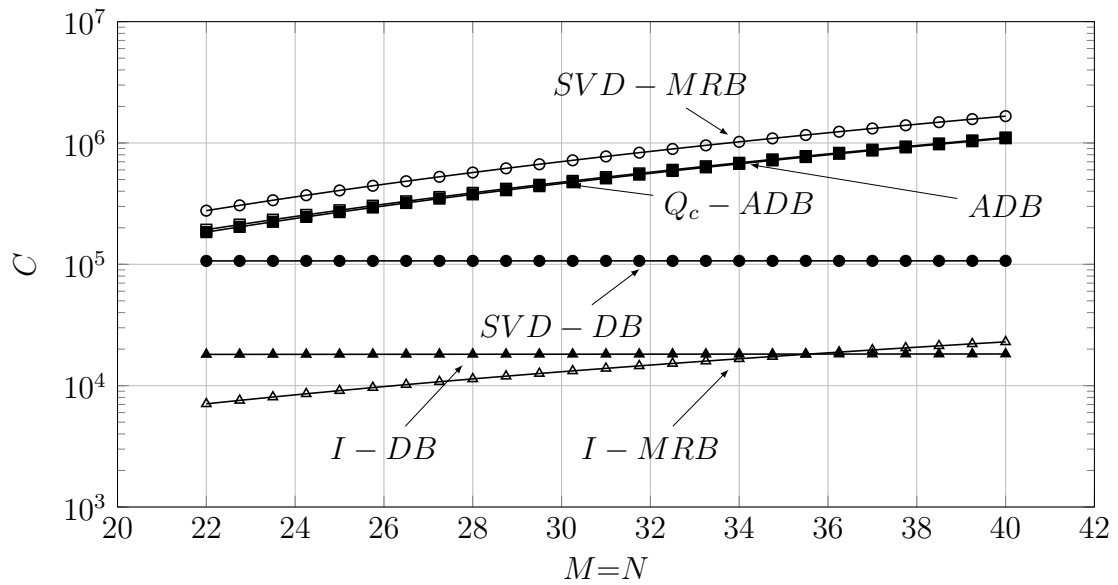


Figura 4.7: Confronto della complessità dei vari algoritmi con $M_{RF} = N_{RF} = 4$.

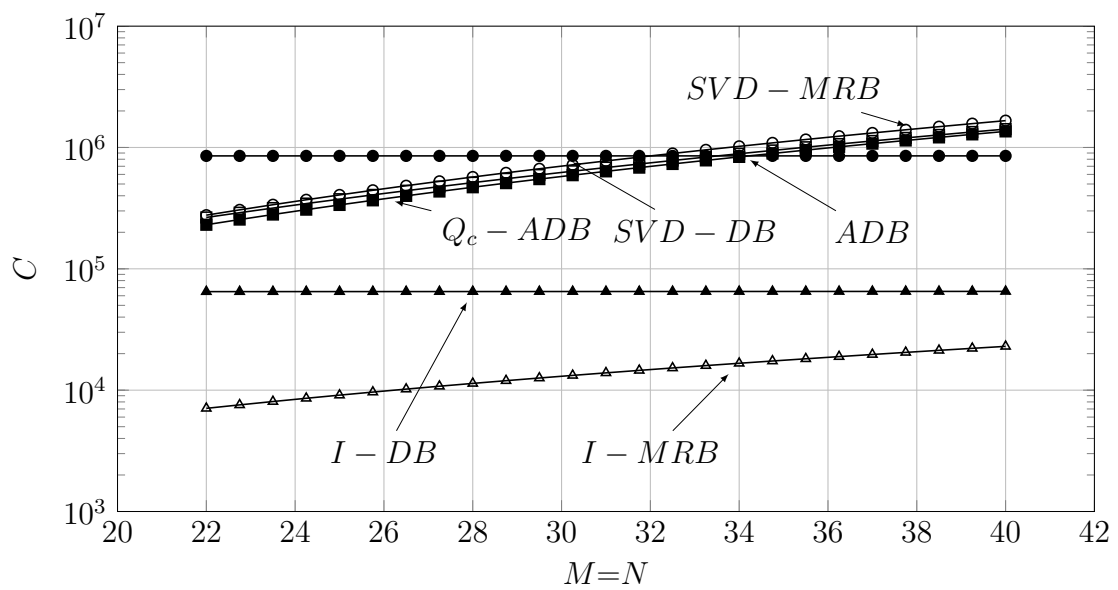


Figura 4.8: Confronto della complessità dei vari algoritmi con $M_{RF} = N_{RF} = 8$.

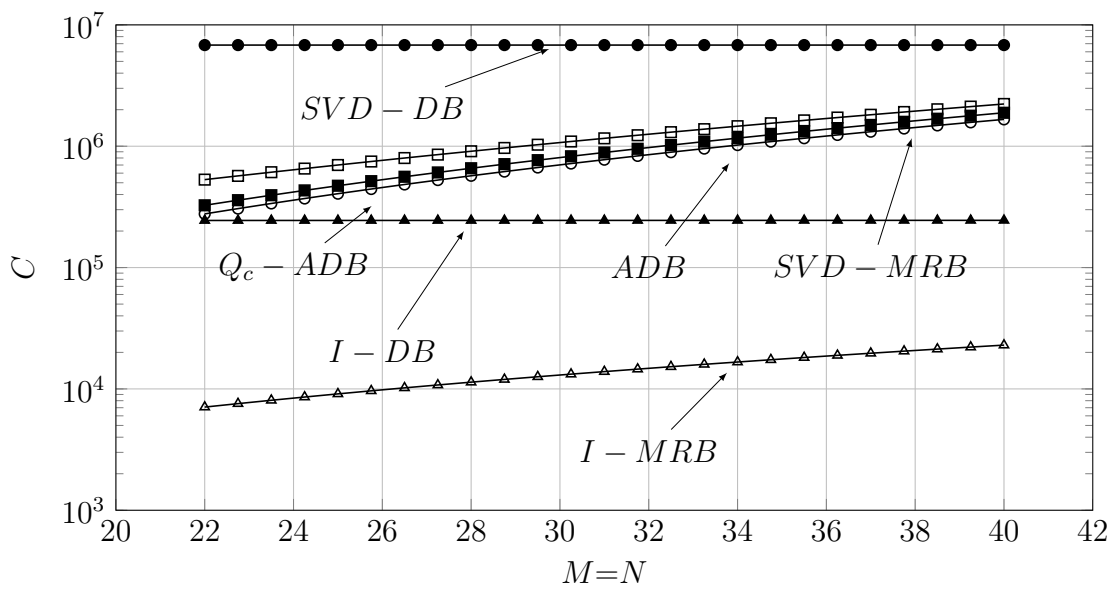


Figura 4.9: Confronto della complessità dei vari algoritmi con $M_{RF} = N_{RF} = 16$.

Appendice A

A differenza dei grafici delle prestazioni esposti in precedenza, di seguito riportiamo delle tabelle che riportano diverse configurazioni possibili per quanto riguarda il numero di antenne M , N e il numero di catene RF M_{RF} , N_{RF} . Nelle tabelle A.1 e A.2 sono riportati i valori di $\bar{\gamma}_{ADB}$ rispettivamente per $D = \lambda/5$ e $D = 2\lambda$. Nelle Tabelle A.3, A.4, A.5, A.6, A.7 e A.8, A.9, A.10, A.11, A.12, sono riportati i valori di $\bar{\gamma}_{Q_c-ADB}$ e $\bar{\gamma}_{Q_\phi-ADB}$ con diverse dimensioni del codeword L_{TX} e L_{RX} . Rispetto alle Tabelle A.1 e A.2 riportiamo in grigio i valori di $\bar{\gamma}_{Q_c-ADB}$ e $\bar{\gamma}_{Q_\phi-ADB}$ che stanno sotto di almeno 3 dB rispetto al caso ADB. Si può notare come le prestazioni degradano rispetto all'approccio ADB quando M_{RF} e/o N_{RF} sono ridotti e solo se si utilizzano codebook molto piccoli. Comunque dalle Tabelle A.5 e A.10 nel caso con $D = \lambda/5$ è sufficiente utilizzare dizionari con 8 codeword e 16 codeword, rispettivamente per $\bar{\gamma}_{Q_c-ADB}$ e $\bar{\gamma}_{Q_\phi-ADB}$ perchè le perdite in prestazioni siano molto contenute. In particolare da notare la configurazione $M = N = 32$ e $M_{RF} = N_{RF} = 1$ che porge la maggiore differenza tra ADB e Q-ADB sia per $\bar{\gamma}_{Q_c-ADB}$ che per $\bar{\gamma}_{Q_\phi-ADB}$. Anche per quanto riguarda il confronto tra i due tipi di quantizzazione le differenze aumentano con il diminuire di M_{RF} e N_{RF} e la quantizzazione della sola fase di \mathbf{F}_{RF} e \mathbf{U}_{RF} porta prestazioni peggiori a parità di numero di bit utilizzati nella quantizzazione.

Tabella A.1: $\bar{\gamma}_{ADB}$ al variare di N , M , N_{RF} , M_{RF} per diverse realizzazioni del canale con $D = \lambda/5$, utilizzando lo schema di Fig. 2.9 in cui i vari elementi sono stati progettati attraverso l'Algoritmo di Tab. 2.2 Tali prestazioni sono vicinissime al bound dato del SVD-MRB di Fig. 2.4.

N	$\bar{\gamma}_{ADB}[\text{dB}]$	M		4		8		16		32								
		1	2	1	2	1	2	1	2	1	2							
		M_{RF}	1	1	1	2	1	2	4	8	16							
		N_{RF}																
1			-0.01	2.72	5.22	5.94	7.31	8.53	8.95	9.06	10.73	11.77	12.00	10.81	12.74	14.17	14.91	15.02
2			2.74	5.52	7.87	8.55	9.93	11.17	11.63	11.65	13.33	14.37	14.69	13.40	15.31	16.70	17.49	17.64
4	1		5.21	8.01	10.24	10.81	12.04	13.27	13.64	13.82	15.36	16.30	16.48	15.59	17.41	18.67	19.31	19.40
	2		5.83	8.61	10.79	11.19	12.65	13.64	14.00	14.32	15.65	16.57	16.79	16.17	17.58	18.85	19.47	19.60
8	1		7.21	9.95	12.15	12.68	14.00	15.09	15.41	15.81	17.27	18.03	18.15	17.77	19.38	20.56	20.95	21.00
	2		8.58	11.20	13.26	13.74	15.12	15.97	16.24	16.82	17.89	18.61	18.82	18.66	19.87	20.92	21.42	21.43
	4		8.95	11.60	13.63	14.04	15.37	16.24	16.50	17.07	18.20	18.79	19.03	18.90	20.18	21.03	21.50	21.63
16	1		9.03	11.74	13.95	14.39	15.88	16.80	17.10	17.98	19.22	19.79	19.87	20.15	21.65	22.44	22.67	22.69
	2		10.72	13.42	15.42	15.73	17.26	17.91	18.20	19.17	20.07	20.60	20.70	21.26	22.14	22.96	23.31	23.31
	4		11.82	14.37	16.26	16.55	17.98	18.61	18.87	19.76	20.57	20.96	21.16	21.65	22.64	23.30	23.58	23.60
	8		12.01	14.65	16.53	16.74	18.14	18.81	19.02	19.86	20.68	21.13	21.26	21.68	22.69	23.35	23.64	23.72
32	1		10.80	13.55	15.74	16.13	17.95	18.75	18.92	20.18	21.29	21.67	21.70	22.73	23.97	24.48	24.50	24.53
	2		12.74	15.35	17.36	17.71	19.43	19.97	20.17	21.63	22.22	22.61	22.68	23.95	24.59	25.14	25.33	25.31
	4		14.14	16.74	18.68	18.87	20.54	20.94	21.13	22.44	22.97	23.32	23.40	24.49	25.15	25.56	25.75	25.79
	8		14.91	17.48	19.32	19.51	20.92	21.41	21.55	22.70	23.28	23.60	23.67	24.58	25.31	25.74	25.94	25.94
			15.10	17.62	19.39	19.59	21.02	21.44	21.60	22.67	23.32	23.61	23.66	24.56	25.33	25.78	25.90	25.93

Tabella A.2: $\bar{\gamma}_{ADB}$ al variare di N , M , N_{RF} , M_{RF} per diverse realizzazioni del canale con $D = 2\lambda$ utilizzando lo schema di Fig. 2.9 in cui i vari elementi sono stati progettati attraverso l'Algoritmo di Tab. 2.2. Tali prestazioni sono vicinissime al bound dato del SVD-MRB di Fig. 2.5.

N	$\bar{\gamma}_{ADB}$ [dB]		M			8			16			32						
	N_{RF}	M_{RF}	1	2	4	1	2	4	1	2	4	1	2	4	8	16		
1	1		0.06	2.49	4.06	5.55	5.67	7.5	8.61	7.3	9.3	10.85	11.84	9.32	11.43	13.16	14.4	15.01
2	1		2.6	4.68	6.1	7.32	7.52	9.2	10.24	9.26	11.09	12.46	13.24	11.34	13.3	14.88	15.92	16.3
4	1		4.17	6.17	7.6	8.73	9.26	10.8	11.56	11.28	13.02	14.1	14.57	13.66	15.46	16.81	17.39	17.53
	2		5.48	7.34	8.74	9.62	10.34	11.33	12.19	12.23	13.3	14.41	14.99	14.36	15.63	16.94	17.68	17.84
8	1		5.65	7.72	9.44	10.33	11.42	12.66	13.25	13.74	15.19	15.98	16.15	16.41	17.96	18.81	19.12	19.16
	2		7.43	9.11	10.74	11.46	12.7	13.4	14	14.81	15.62	16.43	16.73	17.21	18.08	19.04	19.43	19.53
16	4		8.62	10.23	11.55	12.15	13.23	14.01	14.49	15.18	16.11	16.64	17.02	17.36	18.54	19.19	19.65	19.7
	8		7.38	9.53	11.51	12.19	13.88	14.81	15.21	16.53	17.6	18.06	18.13	19.33	20.53	21.01	21.03	21.09
32	2		9.32	11.09	12.94	13.52	15.2	15.72	16.1	17.64	18.15	18.71	18.77	20.1	20.8	21.4	21.58	21.61
	4		10.84	12.47	14.09	14.42	15.99	16.44	16.73	18.02	18.71	19.05	19.22	20.36	21.17	21.54	21.79	21.83
32	8		11.8	13.2	14.57	14.94	16.13	16.73	17.08	18.11	18.83	19.22	19.38	20.37	21.17	21.69	21.82	21.91
	16		9.28	11.64	13.95	14.39	16.6	17.26	17.37	19.41	20.14	20.37	20.34	22.39	23.16	23.34	23.39	23.35
32	2		11.33	13.29	15.44	15.86	17.98	18.29	18.48	20.52	20.9	21.15	21.27	23.15	23.6	23.89	23.97	23.98
	4		13.16	14.83	16.8	16.93	18.81	19.05	19.27	20.99	21.37	21.62	21.69	23.34	23.92	24.12	24.27	24.27
32	8		14.44	15.92	17.4	17.63	19.1	19.45	19.62	21.09	21.58	21.79	21.86	23.4	23.99	24.26	24.32	24.37
	16		15.03	16.26	17.55	17.82	19.11	19.51	19.72	21.12	21.59	21.82	21.9	23.37	23.97	24.24	24.34	24.39

Tabella A.3: $\bar{\gamma}_c$ di Q-ADB per diversi valori di M , M_{RF} , N , N_{RF} con $D = \lambda/5$: dizionari con $L_{TX} = 2$, $L_{RX} = 2$.

$\bar{\gamma}_c$ [dB]		M		4		8		16		32							
		1	2	1	2	1	2	1	2	1	2						
N	N_{RF}																
1	1	0.01	2.56	4.40	5.88	5.42	7.23	8.92	5.91	7.61	10.11	12.08	5.75	8.23	11.13	13.63	15.05
2	1	2.53	5.30	7.31	8.46	8.08	9.29	11.49	8.43	9.58	12.87	14.60	8.37	10.92	13.59	16.21	17.62
4	1	4.50	7.21	9.21	10.06	9.65	10.78	13.04	9.76	11.00	14.33	15.98	9.72	11.65	15.02	17.74	18.94
	2	5.80	8.37	10.08	11.17	11.04	12.33	13.93	11.24	11.75	15.01	16.75	11.31	12.52	15.71	18.19	19.62
8	1	5.47	8.13	10.01	10.97	10.58	11.71	13.88	10.58	12.36	15.19	16.77	10.46	12.87	15.65	18.33	19.69
	2	6.71	9.31	10.90	12.44	11.76	12.73	14.71	11.99	12.84	15.66	17.56	12.51	13.54	16.44	18.82	20.35
16	4	8.90	11.51	13.02	13.94	13.91	14.75	16.40	14.14	14.96	17.35	18.91	14.22	15.84	17.59	20.08	21.59
	8	5.81	8.43	9.95	11.32	10.67	12.08	14.11	10.87	12.73	15.39	17.03	10.81	13.25	15.89	18.47	19.94
32	2	6.98	10.41	11.05	12.80	12.10	13.19	15.69	12.31	12.97	15.90	17.94	12.62	13.89	16.69	19.64	20.73
	4	9.99	12.73	14.12	15.04	14.65	15.72	17.37	15.18	16.30	18.19	19.67	15.19	16.41	18.56	20.87	22.42
16	8	12.02	14.58	16.29	16.74	16.76	17.53	18.87	17.05	17.96	20.09	21.29	17.04	18.39	20.43	22.30	23.63
	1	5.84	8.58	10.34	11.33	10.79	11.93	14.08	10.94	12.26	15.33	17.07	10.72	13.05	15.80	18.52	20.00
32	2	8.04	10.17	11.87	12.95	12.94	14.34	15.89	13.13	14.04	16.88	18.51	13.08	14.62	17.27	19.89	21.11
	4	11.09	13.53	15.31	15.59	15.67	16.25	18.04	15.78	16.86	18.39	20.34	15.91	17.29	19.03	21.52	22.93
16	8	13.54	16.14	17.76	18.17	18.34	19.06	20.18	18.47	19.84	20.87	22.39	18.61	19.63	21.47	23.54	24.80
	16	15.07	17.62	19.22	19.56	19.70	20.39	21.58	19.98	20.59	22.63	23.68	19.93	21.07	23.00	24.77	25.98

Tabella A.4: $\tilde{\gamma}_c$ di Q-AWB per diversi valori di M , M_{RF} , N , N_{RF} con $D = \lambda/5$: dizionari con $L_{TX} = 4$, $L_{RX} = 4$.

$\tilde{\gamma}_c$ [dB]		M		4		8		16		32							
		1	2	1	2	1	2	1	2	1	2						
N	N_{RF}																
1	1	-0.07	2.82	5.15	5.90	6.85	7.83	8.99	7.34	8.50	10.75	12.02	7.71	9.53	11.52	13.97	15.03
2	1	2.75	5.48	7.84	8.56	9.45	10.34	11.62	9.89	11.32	13.33	14.65	10.27	12.01	14.21	16.47	17.61
4	1	5.08	7.90	9.93	10.70	11.47	12.43	13.57	11.96	12.82	15.20	16.47	12.05	13.45	15.94	18.24	19.31
	2	5.89	8.55	10.70	11.25	12.18	12.87	14.00	12.69	13.46	15.55	16.76	13.02	13.92	16.19	18.42	19.60
8	1	6.75	9.46	11.55	12.18	13.09	13.93	15.02	13.39	14.64	16.65	17.87	13.49	14.97	17.47	19.56	20.75
	2	7.88	10.62	12.48	12.98	14.01	14.54	15.58	14.30	14.93	16.70	18.21	14.70	15.33	17.66	19.89	20.97
16	4	9.00	11.64	13.59	14.06	15.01	15.61	16.55	15.39	16.37	17.76	19.03	15.67	16.63	18.10	20.48	21.61
	8	7.41	10.08	12.03	12.75	13.49	14.32	15.35	13.66	14.89	16.90	18.12	13.53	15.32	17.50	19.87	20.94
32	2	8.62	11.23	13.11	13.90	14.77	15.39	16.34	14.95	15.63	17.77	18.92	15.21	16.27	18.30	20.52	21.69
	4	10.53	13.23	14.91	15.47	16.65	17.07	17.93	16.72	17.80	19.16	20.33	17.31	18.11	19.45	21.62	22.96
16	8	12.05	14.60	16.44	16.77	17.87	18.24	18.98	18.12	18.84	20.38	21.29	18.40	19.25	20.93	22.56	23.72
	1	7.71	10.30	12.47	12.96	13.89	14.69	15.70	13.96	15.24	17.14	18.37	13.95	15.73	17.97	20.21	21.35
32	2	9.04	12.02	13.55	14.22	15.25	15.71	16.78	15.06	16.17	18.16	18.90	16.09	16.73	18.74	21.32	22.12
	4	11.58	13.96	15.95	16.15	17.41	17.59	18.52	17.73	18.07	19.63	21.00	18.05	18.93	20.68	22.45	23.56
16	8	13.72	16.49	18.24	18.32	19.60	19.80	20.53	19.86	20.59	21.80	22.63	20.04	21.12	22.39	23.92	24.98
	16	15.03	17.63	19.36	19.58	20.72	20.93	21.61	20.92	21.64	22.79	23.68	21.20	21.84	23.46	25.00	25.95

Tabella A.5: $\bar{\gamma}_c$ di Q-ADB per diversi valori di M , M_{RF} , N , N_{RF} con $D = \lambda/5$: dizionari con $L_{TX} = 8$, $L_{RX} = 8$.

N	$\bar{\gamma}_c$ [dB]	M		4		8		16		32							
		1	2	1	2	1	2	1	2	1	2						
	M_{RF}	1	1	1	2	1	2	1	2	1	2						
	N_{RF}																
1	1	0.04	2.77	5.21	5.88	7.15	8.35	8.93	8.67	9.55	11.10	12.06	9.97	10.07	12.10	14.08	15.03
2	1	2.69	5.56	7.90	8.63	9.87	10.93	11.64	11.59	12.13	13.59	14.67	12.36	12.83	14.47	16.74	17.63
4	1	5.18	7.90	10.20	10.84	12.02	13.02	13.66	13.78	13.97	15.68	16.49	14.42	14.54	16.41	18.46	19.47
	2	5.93	8.60	10.80	11.34	12.64	13.45	14.10	14.39	14.49	15.92	16.82	14.86	14.80	16.70	18.72	19.67
8	1	7.20	9.89	12.08	12.69	13.80	14.73	15.35	15.64	15.84	17.15	18.15	16.55	16.65	17.96	20.01	20.95
	2	8.36	10.93	13.02	13.49	14.69	15.41	15.99	16.49	16.39	17.61	18.61	17.42	16.55	18.51	20.42	21.31
16	4	8.99	11.69	13.60	14.07	15.36	16.01	16.54	16.94	17.19	18.07	19.00	17.88	17.81	18.70	20.72	21.60
	8	8.89	11.35	13.88	14.26	15.71	16.45	17.02	17.72	17.34	18.69	19.75	18.67	18.37	19.77	21.64	22.59
32	2	9.60	12.00	14.12	14.55	15.70	16.20	16.81	17.16	17.63	18.63	19.63	18.19	17.57	19.43	21.59	22.28
	4	11.05	13.67	15.47	16.04	17.08	17.73	18.02	19.09	18.79	19.58	20.41	19.86	19.29	20.39	22.25	23.11
16	8	12.03	14.62	16.50	16.81	18.12	18.62	19.02	19.79	19.55	20.58	21.26	20.50	20.20	21.25	22.76	23.67
	1	9.40	12.34	14.39	14.57	16.85	17.28	17.47	18.52	18.50	19.11	20.43	18.98	18.76	20.42	22.67	23.71
32	2	10.11	12.79	14.80	15.25	16.56	17.17	17.60	18.11	18.18	19.38	20.26	18.47	18.63	20.38	22.24	22.87
	4	12.14	14.52	16.44	16.89	18.22	18.39	19.13	19.67	19.69	20.50	21.33	20.57	20.28	21.24	23.14	23.88
16	8	14.13	16.61	18.40	18.75	20.10	20.34	20.66	21.72	21.58	22.19	22.94	22.73	22.15	23.13	24.45	25.27
	16	15.04	17.62	19.40	19.64	20.99	21.29	21.62	22.57	22.53	23.00	23.72	23.54	22.89	23.84	25.17	25.98

Tabella A.6: $\bar{\gamma}_c$ di Q-ADB per diversi valori di M , M_{RF} , N , N_{RF} con $D = 2\lambda$: dizionari con $L_{TX} = 64$, $L_{RX} = 64$.

$\bar{\gamma}_c$ [dB]		8			16			32											
		1	2	4	1	2	4	1	2	4	8	16							
N	M	1	2	4	1	2	4	1	2	4	8	16							
	M_{RF}	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1							
N_{RF}																			
1	1	0.06	2.56	4.25	5.59	5.73	7.18	8.26	7.42	8.12	9.45	10.97	10.12	9.07	8.08	9.07	10.12	12.0	13.61
2	1	2.64	4.68	6.14	7.43	7.62	8.89	9.86	9.37	9.88	10.95	12.34	11.92	11.34	9.57	11.34	11.74	13.18	15.07
4	1	4.16	6.23	7.78	8.83	9.44	10.41	11.32	11.48	11.75	12.44	13.69	13.06	12.34	11.92	12.34	13.49	15.041	16.33
	2	5.60	7.46	8.85	9.68	10.45	10.94	11.89	12.26	12.13	12.8	14.06	13.06	13.18	13.06	13.18	13.54	15.183	16.75
8	1	5.78	7.84	9.51	10.45	11.55	12.28	12.88	13.82	14.05	14.42	15.38	14.55	15.651	14.55	15.651	15.48	16.48	18.18
	2	7.08	8.83	10.43	11.16	12.24	12.73	13.33	14.43	14.20	14.54	15.61	15.41	15.488	15.41	15.488	15.48	17.08	18.26
16	4	8.40	9.84	11.22	11.87	12.93	13.37	13.82	14.82	14.87	15.07	15.94	15.50	16.61	15.50	16.61	15.78	17.21	18.25
	1	7.49	9.62	11.56	12.29	13.92	14.43	14.84	16.42	16.60	16.68	17.34	16.62	18.265	16.62	18.265	17.98	18.97	20.37
32	2	8.14	9.88	11.79	12.54	14.06	14.55	14.96	16.61	16.57	16.73	17.47	17.73	18.58	17.73	18.58	18.34	19.20	20.28
	4	9.41	10.90	12.43	12.86	14.52	14.41	15.16	16.74	16.70	16.60	17.29	17.36	18.41	17.36	18.41	18.13	18.75	20.17
16	8	10.98	12.38	13.71	14.11	15.38	15.60	15.94	17.31	17.36	17.33	17.95	17.78	19.36	17.78	19.36	18.75	19.25	20.47
	1	7.85	10.11	12.54	13.12	14.77	15.01	15.22	17.49	17.55	17.46	17.88	18.53	19.40	18.53	19.40	18.65	19.50	20.59
32	2	9.45	10.82	12.77	13.38	15.32	15.79	16.47	18.09	18.49	18.25	19.02	18.73	20.75	18.73	20.75	20.06	20.72	22.55
	4	10.31	11.57	13.61	13.44	15.64	15.82	16.44	18.48	18.24	18.45	18.54	18.25	19.89	18.25	19.89	20.09	21.05	21.64
16	8	12.04	13.43	14.82	14.94	17.08	17.17	17.18	19.06	19.21	18.99	19.63	19.99	21.14	19.99	21.14	21.00	21.32	22.54
	16	13.68	14.99	16.33	16.61	18.08	18.44	18.36	20.41	20.26	20.29	20.48	20.95	22.14	20.95	22.14	21.40	21.96	23.12

Tabella A.7: $\bar{\gamma}_c$ di Q-ADB per diversi valori di M , M_{RF} , N , N_{RF} con $D = 2\lambda$: dizionari con $L_{TX} = 128$, $L_{RX} = 128$.

N	$\bar{\gamma}_c$ [dB]	M		4		8		16		32								
		1	2	1	2	1	2	1	2	1	2							
		M_{RF}	1	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	4	8	16		
	N_{RF}																	
1	1		0.05	2.59	4.28	5.69	5.83	7.38	8.43	7.54	8.59	9.74	11.12	9.42	9.83	10.62	12.03	13.86
2	1		2.52	4.72	6.14	7.48	7.64	9.05	10.01	9.43	10.32	11.25	12.52	11.41	11.74	12.25	13.43	15.16
	1		4.17	6.25	7.73	8.92	9.41	10.66	11.39	11.45	11.98	12.79	13.85	13.75	13.92	14.06	15.02	16.66
	2		5.63	7.44	8.86	9.8	10.44	11.31	11.99	12.39	12.42	13.22	14.3	14.5	14.02	14.22	15.29	16.82
	1		5.8	7.81	9.57	10.51	11.56	12.54	13	13.91	14.26	14.75	15.51	16.45	16.5	16.33	16.99	18.49
	2		7.44	9.11	10.71	11.37	12.54	13.11	13.64	14.71	14.59	15.12	15.94	17.09	16.49	16.59	17.04	18.61
	4		8.44	10.01	11.37	12.02	13.01	13.63	14.07	14.98	15.22	15.22	16.21	17.27	17.17	16.6	17.16	18.75
	1		7.45	9.65	11.65	12.35	13.97	14.73	14.98	16.55	16.79	17.11	17.64	19.31	19.13	18.87	19.3	20.55
	2		8.62	10.28	12.08	12.79	14.24	14.83	15.21	16.85	16.8	17.08	17.63	19.53	19.16	18.96	19.3	20.59
	4		9.76	11.27	12.72	13.23	14.68	15.09	15.49	17.02	17.15	16.97	17.79	19.48	19.44	19.02	19.31	20.58
	8		11.1	12.49	13.82	14.25	15.47	15.92	16.17	17.61	17.71	17.8	18.25	19.95	19.96	19.49	19.54	20.72
	1		9.43	11.7	14.06	14.57	16.61	17.13	17.27	19.4	19.53	19.7	19.99	22.21	22.24	21.73	21.71	22.93
	2		9.82	11.55	13.9	14.53	16.37	17.07	17.25	19.27	19.42	19.49	19.99	22.13	22.11	21.65	21.77	23
	4		10.68	12.23	14.04	14.27	16.4	16.4	17.04	18.9	18.94	18.98	19.76	21.78	21.76	21.37	21.77	22.54
	8		12.05	13.43	14.98	15.2	16.89	17.05	17.22	19.18	19.24	19.25	19.75	21.91	21.39	21.25	21.34	22.53
	16		13.83	15.14	16.63	16.9	18.35	18.69	18.79	20.53	20.59	20.59	20.79	22.94	22.96	22.78	22.35	23.44

Tabella A.9: $\bar{\gamma}_\phi$ di Q-ADB per diversi valori di M , M_{RF} , N , N_{RF} con $D = \lambda/5$: dizionari con $L_{TX} = 8$, $L_{RX} = 8$.

$\bar{\gamma}_\phi$ [dB]	8			16			32										
	M	1	2	4	1	2	4	1	2	4	8	16					
N_{RF}																	
1		0.06	2.80	5.21	5.85	6.91	7.70	8.73	7.66	8.95	10.45	11.63	7.75	9.39	11.35	13.36	14.53
2		2.91	5.59	7.86	8.58	9.55	10.42	11.39	10.19	11.71	13.04	14.16	10.58	11.87	14.02	15.93	17.15
4	1	5.20	7.95	10.12	10.81	11.59	12.38	13.40	12.30	13.29	15.00	16.03	11.89	13.85	15.68	17.69	18.85
	2	5.96	8.65	10.83	11.35	12.30	13.07	13.77	12.90	13.80	15.30	16.37	13.06	13.93	15.92	17.90	19.14
8	1	7.01	9.51	11.76	12.29	13.22	13.83	14.72	13.73	14.75	16.20	17.46	13.56	15.41	16.88	19.07	20.36
	2	7.56	10.41	12.50	13.17	13.85	14.26	15.17	14.27	15.11	16.57	17.61	14.77	15.44	17.27	19.02	20.08
16	4	8.74	11.34	13.37	13.72	14.76	15.15	16.01	14.99	16.33	17.31	18.39	15.12	16.63	17.83	19.69	20.84
	1	7.50	10.06	12.38	12.87	13.99	14.19	15.15	14.33	14.92	16.62	17.84	13.61	15.65	17.55	19.73	20.95
32	2	8.95	11.57	13.47	13.98	15.01	15.27	16.04	15.30	15.93	17.32	18.27	15.41	16.17	17.88	19.97	21.05
	4	10.40	13.02	15.03	15.27	16.20	16.43	17.29	16.63	17.38	18.67	19.55	16.40	17.71	18.88	20.81	21.89
16	8	11.58	14.16	16.08	16.34	17.40	17.66	18.34	17.77	18.70	19.56	20.52	17.90	18.77	20.15	21.73	22.84
	1	7.62	10.27	12.45	13.12	13.75	14.36	15.23	13.93	15.12	16.77	17.72	14.05	15.62	17.10	19.16	20.36
32	2	9.41	11.93	13.61	14.32	15.00	15.74	16.64	15.56	15.61	17.79	18.65	15.25	16.99	18.43	20.25	21.37
	4	11.44	13.86	15.70	15.94	17.11	17.35	18.03	17.29	18.11	19.04	20.15	17.49	18.28	19.41	21.39	22.52
16	8	13.36	15.97	17.68	17.91	19.22	19.18	19.75	19.77	20.14	20.91	21.75	19.22	20.00	21.25	22.81	24.00
	16	14.56	17.11	18.89	19.16	20.38	20.21	20.85	20.84	21.00	22.01	22.83	20.34	21.37	22.45	23.95	25.01

Tabella A.10: $\bar{\gamma}_\phi$ di Q-ADB per diversi valori di M , M_{RF} , N , N_{RF} con $D = \lambda/5$: dizionari con $L_{TX} = 16$, $L_{RX} = 16$.

N	$\bar{\gamma}_\phi$ [dB]	M		4		8		16		32								
		1	2	1	2	1	2	1	2	1	2							
		M_{RF}	1	1	1	2	1	2	1	2	1	2	4	8	16			
		N_{RF}																
1			0.04	2.77	5.25	5.90	7.25	8.32	8.81	8.67	9.65	10.88	11.69	9.31	10.29	11.80	13.42	14.55
2			2.70	5.57	7.94	8.64	9.96	10.92	11.48	11.26	12.15	13.42	14.27	11.77	12.92	14.31	16.03	17.15
4	1		5.22	7.94	10.26	10.88	12.14	13.09	13.53	13.44	14.13	15.33	16.15	13.50	14.72	16.11	17.83	19.01
	2		5.95	8.62	10.84	11.36	12.72	13.51	13.97	14.05	14.34	15.64	16.44	14.33	14.69	16.35	18.06	19.17
8	1		7.30	9.99	12.19	12.78	13.95	14.82	15.26	15.41	15.91	16.88	17.84	15.71	16.13	17.78	19.47	20.48
	2		8.36	10.85	13.06	13.46	14.71	15.32	15.84	16.13	16.22	17.43	18.14	16.50	16.66	18.00	19.79	20.83
16	4		8.87	11.55	13.49	13.90	15.29	15.77	16.26	16.54	16.94	17.66	18.50	16.62	17.40	18.27	19.98	20.97
	8		8.58	11.39	13.56	13.97	15.48	15.94	16.53	16.70	17.35	18.15	19.00	16.98	17.98	18.95	20.51	21.65
32	2		9.61	12.32	14.21	14.54	15.79	16.26	16.81	17.23	17.32	18.36	19.01	17.48	17.81	18.90	20.68	21.70
	4		10.83	13.37	15.35	15.60	16.99	17.41	17.87	18.23	18.19	19.14	20.00	18.72	18.98	19.62	21.36	22.33
16	8		11.68	14.24	16.17	16.45	17.80	18.12	18.59	19.09	18.97	19.94	20.60	19.24	19.70	20.76	21.93	22.90
	1		8.93	11.71	13.94	14.44	15.78	16.40	16.80	17.22	17.64	18.67	19.04	17.66	18.07	19.14	20.79	21.92
32	2		10.28	12.80	14.73	15.35	16.54	17.36	17.39	17.83	18.10	19.21	19.77	18.29	18.65	19.95	21.39	22.56
	4		11.80	14.34	16.19	16.47	17.78	18.03	18.56	19.03	18.73	20.09	20.81	19.34	19.53	20.79	21.86	23.15
16	8		13.52	16.02	17.78	18.11	19.39	19.69	19.88	20.58	20.78	21.25	21.95	20.95	21.27	22.03	23.02	24.18
	16		14.53	17.13	18.94	19.17	20.57	20.79	21.01	21.76	21.55	22.25	22.98	22.13	22.51	22.95	24.14	25.10

Tabella A.11: $\bar{\gamma}_\phi$ di Q-ADB per diversi valori di M , M_{RF} , N , N_{RF} con $D = 2\lambda$: dizionari con $L_{TX} = 64$, $L_{RX} = 64$.

$\bar{\gamma}_\phi$ [dB]		M		4		8		16		32								
		1	2	1	2	1	2	1	2	1	2							
N	N_{RF}	1	1	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	4	8	16		
		1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	4	8	
1	1	0.05	2.59	4.28	5.64	5.79	7.08	8.20	8.20	7.27	7.74	9.13	10.79	8.04	8.58	9.76	11.49	13.46
2	1	2.52	4.71	6.14	7.42	7.600	8.72	9.77	9.77	9.13	9.49	10.64	12.16	9.900	10.31	11.27	12.79	14.69
4	1	4.17	6.24	7.72	8.86	9.37	10.25	11.08	11.08	11.	11.11	12.08	13.42	12.02	11.93	12.68	14.09	16.03
	2	5.57	7.38	8.81	9.71	10.36	10.89	11.66	11.66	11.95	11.600	12.56	13.85	12.86	12.31	12.92	14.34	16.29
8	1	5.77	7.78	9.53	10.44	11.48	12.07	12.600	12.600	13.47	13.25	13.71	15.	14.46	14.37	14.68	15.68	17.60
	2	7.11	8.73	10.26	11.	12.06	12.31	12.99	12.99	13.81	13.22	13.93	15.09	14.92	14.22	14.72	15.73	17.54
16	4	8.20	9.77	11.07	11.70	12.66	12.95	13.53	13.53	14.25	14.11	14.06	15.45	15.06	15.03	14.68	15.89	17.75
	8	7.22	9.42	11.32	11.93	13.53	13.74	14.12	14.12	15.69	15.14	15.66	16.55	16.48	17.16	16.41	17.31	19.21
32	2	7.87	9.45	11.10	12.01	13.41	13.58	13.97	13.97	15.41	14.99	15.19	16.38	16.62	16.28	16.17	17.03	18.79
	4	9.20	10.59	12.04	12.44	13.86	13.86	14.45	14.45	15.49	15.34	15.33	16.41	16.51	16.92	16.11	17.01	18.98
16	8	10.77	12.15	13.41	13.81	14.97	15.14	15.44	15.44	16.48	16.30	16.39	17.17	17.36	17.29	17.32	17.58	19.28
	1	8.13	10.20	12.32	12.85	14.57	14.83	15.08	15.08	16.81	16.66	16.41	17.38	17.84	17.80	17.76	18.05	19.87
32	2	8.47	10.23	12.18	12.91	14.37	14.700	15.01	15.01	16.70	16.15	16.20	17.39	17.58	17.83	17.91	18.29	20.06
	4	9.78	11.13	12.77	13.07	14.78	14.64	15.24	15.24	16.51	16.27	16.44	17.45	17.68	17.76	17.39	18.03	20.19
16	8	11.46	12.76	14.11	14.34	15.68	15.59	15.90	15.90	17.38	17.15	17.00	17.80	18.07	18.21	17.96	18.06	19.88
	16	13.43	14.69	15.97	16.25	17.60	17.51	17.73	17.73	19.13	18.66	18.82	19.33	19.92	19.79	19.93	19.86	21.36

Tabella A.12: $\bar{\gamma}_\phi$ di Q-ADB per diversi valori di M , M_{RF} , N , N_{RF} con $D = 2\lambda$: dizionari con $L_{TX} = 128$, $L_{RX} = 128$.

$\bar{\gamma}_\phi$ [dB]		4			8			16			32						
		1	2		1	2	4	1	2	4	8	16					
N	M																
	M_{RF}	1	1	2	1	2	4	1	2	4	8	16					
	N_{RF}																
1	1	0.06	2.57	4.21	5.68	5.8	7.42	8.4	7.5	8.31	9.39	10.93	9.03	9.19	10.32	11.72	13.55
2	1	2.65	4.66	6.18	7.46	7.65	9.04	9.9	9.4	9.97	10.92	12.3	10.88	10.93	11.84	12.96	14.84
4	1	4.17	6.29	7.71	8.9	9.47	10.6	11.29	11.44	11.78	12.37	13.62	13.11	13.04	13.46	14.33	16.15
	2	5.65	7.45	8.92	9.78	10.47	11.21	11.87	12.31	12.09	12.83	14.00	14.00	13.33	13.63	14.63	16.39
8	1	5.79	7.81	9.5	10.46	11.57	12.39	12.85	13.8	13.81	14.21	15.2	15.8	15.43	15.5	16.02	17.71
	2	7.33	9.05	10.54	11.29	12.42	12.87	13.4	14.44	14.11	14.54	15.49	16.18	15.68	15.8	16.18	17.83
	4	8.46	9.93	11.26	11.91	12.79	13.4	13.75	14.71	14.71	14.62	15.7	16.32	16.21	15.7	16.37	18.00
16	1	7.54	9.58	11.58	12.34	13.87	14.48	14.69	16.45	16.15	16.29	17.07	18.35	18.33	18.04	18.07	19.59
	2	8.22	9.95	11.57	12.51	13.85	14.28	14.63	16.4	16.1	16.25	16.92	18.38	18.04	17.84	17.9	19.5
	4	9.42	10.89	12.45	12.73	14.26	14.58	14.99	16.38	16.14	16.16	16.89	18.3	18.3	17.52	17.62	19.36
	8	10.91	12.28	13.55	13.98	15.21	15.53	15.73	17.07	16.88	16.93	17.49	18.75	18.51	18.16	17.96	19.56
32	1	9.07	11.12	13.38	13.82	15.74	16.26	16.3	18.49	18.29	18.29	18.65	20.48	20.01	19.52	19.78	21.21
	2	9.38	11.09	13.12	13.74	15.57	16.03	16.22	18.31	18.34	18.18	18.58	20.46	20.02	19.92	19.71	21.05
32	4	10.33	11.74	13.49	13.6	15.68	15.56	16.21	17.77	17.58	17.6	18.13	19.98	20.21	19.42	19.14	20.68
	8	11.72	13.01	14.33	14.57	16.00	16.14	16.24	18.02	17.87	17.81	18.07	19.84	19.84	18.72	18.99	20.51
	16	13.57	14.83	16.1	16.4	17.72	17.85	17.96	19.53	19.57	19.4	19.63	21.32	20.94	20.63	20.33	21.59

Tabella A.13: $\bar{\gamma}_{Q-SVD-DB}$ al variare di N , M , N_{RF} , M_{RF} per diverse realizzazioni del canale con $D = \lambda/5$. $L_{TX} = 32$, $L_{RX} = 32$.

$\bar{\gamma}_{Q-SVD-DB}[\text{dB}]$		M		4		8		16		32							
		1	2	1	2	1	2	1	2	1	2						
N																	
	N_{RF}																
1	1	-0.02	2.81	5.31	5.95	7.33	8.54	8.80	9.12	10.07	10.22	10.25	10.78	10.76	11.04	9.78	10.05
2	1	2.76	5.56	8.01	8.62	10.02	11.19	11.43	11.83	12.70	12.82	12.64	13.54	13.58	13.54	12.50	13.12
4	1	5.29	8.02	10.31	10.85	12.27	13.30	13.49	14.10	14.85	14.91	14.87	15.91	15.93	15.25	15.26	15.31
	2	5.94	8.64	10.84	11.35	12.74	13.72	13.90	14.46	15.19	15.34	15.21	16.18	16.18	15.51	15.06	15.52
8	1	7.37	10.09	12.30	12.75	14.30	15.16	15.30	16.21	16.74	16.67	16.40	18.22	17.75	17.84	17.40	17.37
	2	8.56	11.23	13.31	13.71	15.17	15.95	16.10	16.90	17.42	17.53	17.37	18.73	18.67	17.90	16.78	17.68
	4	8.82	11.46	13.52	13.90	15.31	16.07	16.20	16.95	17.57	17.59	17.10	18.72	18.66	18.62	17.78	17.94
16	1	9.20	11.92	14.17	14.53	16.26	16.94	17.00	18.38	18.73	18.77	18.36	20.60	20.41	20.45	19.09	19.17
	2	10.10	12.77	14.91	15.21	16.91	17.45	17.51	18.74	19.16	19.25	18.48	20.80	20.81	20.22	19.45	19.59
	4	10.26	12.94	14.68	15.40	16.99	17.54	17.61	18.76	19.04	19.08	18.25	20.82	20.86	20.41	19.58	19.78
	8	10.10	12.85	14.35	14.89	16.39	17.24	17.43	17.94	18.50	19.04	18.52	20.60	20.43	20.21	18.31	18.53
32	1	10.85	13.61	15.98	16.26	18.26	18.78	18.77	20.57	20.82	20.47	20.53	23.01	23.00	22.42	21.35	21.93
	2	10.91	13.31	15.97	15.98	17.81	18.71	18.74	20.50	20.63	20.76	19.89	22.81	22.59	22.50	21.65	21.43
	4	11.05	13.28	15.76	15.81	17.77	18.19	18.00	19.58	20.77	20.15	20.12	22.18	22.13	21.83	21.93	21.36
	8	9.92	12.06	14.69	14.96	17.20	17.62	17.47	19.01	20.31	19.95	18.87	21.47	22.46	21.16	20.73	19.96
16	10.13	12.87	14.96	15.41	17.42	17.95	17.77	19.18	19.74	19.80	19.61	21.43	21.11	21.16	20.53	20.50	

Tabella A.14: $\bar{\gamma}_{Q-I-DB}$ al variare di N , M , N_{RF} , M_{RF} per diverse realizzazioni del canale con $D = \lambda/5$. $L_{TX} = 32$, $L_{RX} = 32$.

$\bar{\gamma}_{Q-I-DB}[\text{dB}]$		4			8			16			32						
		1	2		1	2	4	1	2	4	8	16					
N	M_{RF}	1	1	1	1	2	1	2	4	1	2	4	8	16			
	N_{RF}																
1		-0.02	2.81	5.31	5.95	7.33	8.54	8.80	9.12	10.07	10.22	10.25	10.78	10.76	11.04	9.78	10.05
2		2.76	5.56	8.01	8.62	10.02	11.19	11.43	11.83	12.70	12.82	12.64	13.54	13.58	13.54	12.5	13.12
4	1	5.29	8.02	10.31	10.85	12.27	13.3	13.49	14.10	14.85	14.91	14.87	15.91	15.93	15.25	15.26	15.31
	2	5.94	8.64	10.84	11.35	12.74	13.72	13.90	14.46	15.19	15.34	15.21	16.18	16.18	15.51	15.06	15.52
8	1	7.37	10.09	12.30	12.75	14.30	15.16	15.30	16.21	16.74	16.67	16.40	18.22	17.75	17.84	17.40	17.37
	2	8.56	11.23	13.31	13.71	15.17	15.95	16.10	16.9	17.42	17.53	17.37	18.73	18.67	17.90	16.78	17.68
	4	8.82	11.46	13.52	13.90	15.31	16.07	16.19	16.95	17.57	17.59	17.10	18.72	18.66	18.62	17.78	17.94
16	1	9.20	11.92	14.17	14.53	16.26	16.94	17.00	18.38	18.73	18.77	18.36	20.60	20.41	20.45	19.09	19.17
	2	10.10	12.77	14.91	15.21	16.91	17.45	17.51	18.74	19.16	19.25	18.48	20.80	20.81	20.22	19.45	19.59
	4	10.26	12.94	14.68	15.40	16.99	17.54	17.61	18.76	19.04	19.08	18.25	20.82	20.86	20.41	19.58	19.78
	8	10.10	12.85	14.35	14.89	16.39	17.24	17.43	17.94	18.50	19.04	18.52	20.60	20.43	20.21	18.31	18.53
32	1	10.85	13.61	15.98	16.26	18.26	18.78	18.77	20.57	20.82	20.47	20.53	23.01	23.00	22.42	21.35	21.93
	2	10.91	13.31	15.97	15.98	17.81	18.71	18.74	20.50	20.63	20.76	19.89	22.81	22.59	22.50	21.65	21.43
	4	11.05	13.28	15.76	15.81	17.77	18.19	18.00	19.58	20.77	20.15	20.12	22.18	22.13	21.83	21.93	21.36
	8	9.92	12.06	14.69	14.96	17.20	17.62	17.47	19.01	20.31	19.95	18.87	21.47	22.46	21.16	20.73	19.96
16	10.13	12.87	14.96	15.41	17.42	17.95	17.77	19.18	19.74	19.80	19.61	21.43	21.11	21.16	20.53	20.50	

Appendice B

Di seguito sono esposti tutti i calcoli per ricavare le complessità dei vari algoritmi esposti nei Cap. 2 e 3.

B.1 SVD-MRB

Data la matrice $\mathbf{H} \in \mathbb{C}^{(N \times M)}$ la complessità per il progetto dei beamformer $\mathbf{f}_{SVD-MRB}$ e $\mathbf{u}_{SVD-MRB}$ è pari a quella della decomposizione SVD di 2.22, la quale risulta essere [12]

$$C_{SVD-MRB} = \begin{cases} \mathcal{O}(4 \cdot N^2 \cdot M + 22 \cdot M^3) & \text{se } M \geq N \\ \mathcal{O}(6 \cdot N \cdot M^2 + 20 \cdot M^3) & \text{se } N > M \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

B.2 I-MRB

Date le seguenti matrici

$$\mathbf{H} \in \mathbb{C}^{(N \times M)}, \quad \mathbf{h}_{MISO} \in \mathbb{C}^{(1 \times M)}, \quad \mathbf{h}_{SIMO} \in \mathbb{C}^{(N \times 1)} \quad (\text{B.2})$$

la complessità di ogni step dell'algoritmo I-MRB è riassunta in Tab. B.1, quindi in totale per il progetto dei beamformer lato TX e RX, si ha una complessità di

$$C_{I-MRB} = N^o \text{ iter.} \cdot (C_3 + C_4 + C_5 + C_6) = \mathcal{O}(N^o \text{ iter.} \cdot [2 \cdot M \cdot N + M + N]) \quad (\text{B.3})$$

Tabella B.1: Complessità per step dell'algoritmo I-MRB descritta nel Par. 2.3.2.

1.	$\mathbf{u}_{I-MRB} = \frac{1}{\sqrt{N}} \mathbf{1}_{(N \times 1)}$	
2.	for i=1 to $N^o \text{ iter.}$	
3.	$\mathbf{h}_{MISO} = \mathbf{u}_{I-MRB}^H \mathbf{H}, (1 \times M)$	$C_3 = \mathcal{O}(N \cdot M)$
4.	$\mathbf{f}_{I-MRB} = \frac{\mathbf{h}_{MISO}^H}{\ \mathbf{h}_{MISO}\ }$	$C_4 = \mathcal{O}(M)$
5.	$\mathbf{h}_{SIMO} = \mathbf{H} \mathbf{f}_{I-MRB}, (N \times 1)$	$C_5 = \mathcal{O}(N \cdot M)$
6.	$\mathbf{u}_{I-MRB} = \frac{\mathbf{h}_{SIMO}}{\ \mathbf{h}_{SIMO}\ }$	$C_6 = \mathcal{O}(N)$
7.	end for	

Tabella B.2: Complessità per step dell'algoritmo ADB di Tab. 2.1.

Inputs: $\mathbf{f}_{SVD-MRB}, \mathbf{A}_t$	
1. $\mathbf{F}_{RF} = \mathbf{0}$	
2. $\mathbf{f}_{BB} = \mathbf{0}$	
3. $\mathbf{f}_{res} = \mathbf{f}_{SVD-MRB}$	
4. for $i=1$ to M_{RF}	
5. $\Psi = \mathbf{A}_t^H \mathbf{f}_{res}$	$C_5 = \mathcal{O}(L \cdot M)$
6. $o = \arg \max_{l \in \{1, \dots, L\}} [\Psi \Psi^H]_{l,l}$	$C_6 = \mathcal{O}(L \cdot M)$
7. $\mathbf{F}_{RF} = [\mathbf{F}_{RF} \text{col}_o(\mathbf{A}_t)], (M \times i)$	
8. $\mathbf{f}_{BB} = (\mathbf{F}_{RF}^H \mathbf{F}_{RF})^{-1} \mathbf{F}_{RF}^H \mathbf{f}_{SVD-MRB}$	calcolo C_8 eseguito sotto
9. $\mathbf{f}_{res} = \frac{\mathbf{f}_{SVD-MRB} - \mathbf{F}_{RF} \mathbf{f}_{BB}}{\ \mathbf{f}_{SVD-MRB} - \mathbf{F}_{RF} \mathbf{f}_{BB}\ }$	$C_9 = \mathcal{O}(\underbrace{2 \cdot i \cdot M}_{\text{multipl. num.} + \text{multipl. den.}} + \underbrace{M}_{\text{divisione}})$
10. end for	
11. $\mathbf{f}_{BB} = \frac{\mathbf{f}_{BB}}{\ \mathbf{F}_{RF} \mathbf{f}_{BB}\ }$	$C_{11} = \mathcal{O}(\underbrace{M_{RF} \cdot M}_{\text{moltiplicazione}} + \underbrace{M_{RF}}_{\text{divisione}})$
12. return $\mathbf{F}_{RF}, \mathbf{f}_{BB}$	

B.3 ADB

Date le matrici:

$$\mathbf{A}_t \in \mathbb{C}^{(M \times L)}, \mathbf{A}_r \in \mathbb{C}^{(N \times L)}, \mathbf{f}_{SVD-MRB} \in \mathbb{C}^{(M \times 1)}, \mathbf{H} \in \mathbb{C}^{(N \times M)}.$$

la complessità di ogni step dell'algoritmo ADB di Tab. 2.1 per il progetto dei beamformer \mathbf{F}_{RF} e \mathbf{f}_{BB} lato TX, è riportata in Tab. B.2.

Complessità step 8, due metodi:

a) Calcolo inversa e poi moltiplico per \mathbf{F}_{RF}^H (1^a moltiplicazione) e successivamente moltiplico per $\mathbf{f}_{SVD-MRB}$ (2^a moltiplicazione).

$$\begin{aligned} C_{8a} &= \mathcal{O} \left(\underbrace{M \cdot i^2 + i^3}_{\text{multipl.} + \text{c. inversa}} + \underbrace{i^2 \cdot M}_{1^{\text{a}} \text{ moltiplicazione}} + \underbrace{i \cdot M}_{2^{\text{a}} \text{ moltiplicazione}} \right) \\ &= \mathcal{O}(i^3 + 2 \cdot M \cdot i^2 + i \cdot M) \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

b) Calcolo pseudoinversa di \mathbf{F}_{RF} (che all'interno del ciclo ha dimensioni $(M \times i)$ [12]) e poi moltiplico per $\mathbf{f}_{SVD-MRB}$ (2^a moltiplicazione).

$$C_{8b} = \mathcal{O} \left(\underbrace{4 \cdot M^2 \cdot i + 22 \cdot i^3}_{\text{complessità SVD}} + \underbrace{M \cdot i}_{2^{\text{a}} \text{ moltiplicazione}} \right) \quad (\text{B.5})$$

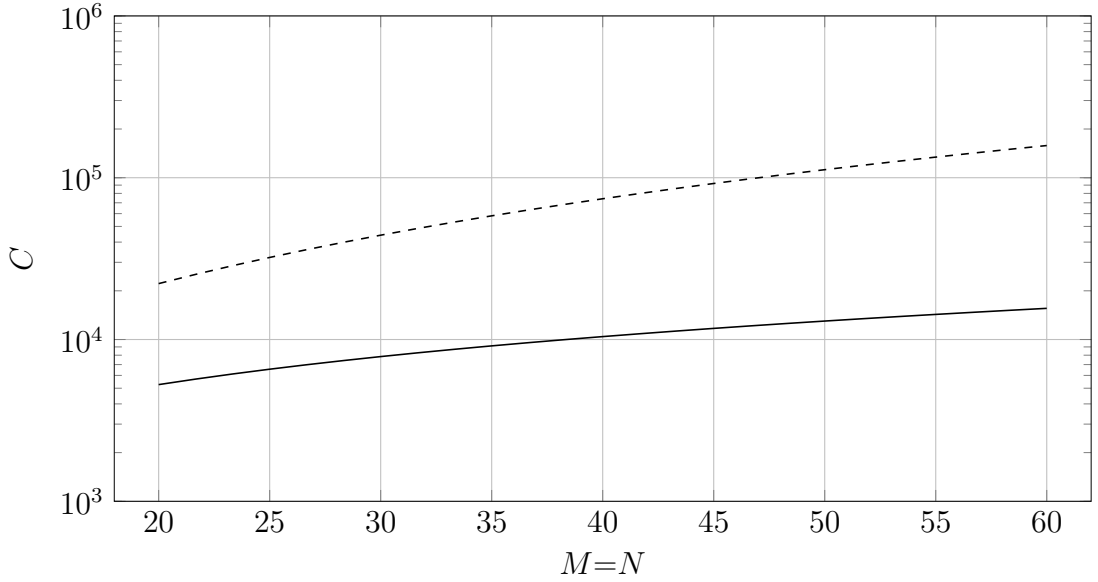


Figura B.1: Complessità dell’algoritmo ADB al variare di M, N con $M_{RF} = 4$ calcolata nei due metodi B.6 e B.7.

In totale lato TX abbiamo¹:

$$\begin{aligned}
 C_{ADB_a, TX} &= \mathcal{O} \left(\sum_{i=1}^{M_{RF}} [C_5 + C_6 + C_{8a} + C_9] + C_{11} \right) & (B.6) \\
 &= \mathcal{O} \left(2 \cdot M \cdot L \cdot M_{RF} + \frac{M_{RF}^4}{4} + M_{RF}^3 \cdot \left[\frac{2}{3} \cdot M + \frac{1}{2} \right] \right. \\
 &\quad \left. + M_{RF}^2 \cdot \left[\frac{5}{2} \cdot M + \frac{1}{4} \right] + M_{RF} \cdot \left[\frac{23}{6} \cdot M + 1 \right] \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 C_{ADB_b, TX} &= \mathcal{O} \left(\sum_{i=1}^{M_{RF}} (C_5 + C_6 + C_{8b} + C_9) + C_{11} \right) & (B.7) \\
 &= \mathcal{O} \left(2 \cdot M \cdot L \cdot M_{RF} + \frac{11}{2} \cdot M_{RF}^4 + 11 \cdot M_{RF}^3 \right. \\
 &\quad \left. + M_{RF}^2 \cdot \left[2 \cdot M^2 + \frac{3}{2}M + \frac{11}{2} \right] + M_{RF} \cdot \left[2 \cdot M^2 + \frac{7}{2} \cdot M + 1 \right] \right)
 \end{aligned}$$

In maniera analoga si possono ottenere le complessità $C_{ADB_a, RX}$ e $C_{ADB_b, RX}$ del progetto di \mathbf{U}_{RF} e \mathbf{u}_{BB} nei due metodi. Come illustrato in Fig. B.1 si può vedere che il metodo che porge la minore complessità è B.6.

Con riferimento all’Algoritmo 2.2 , dovendo progettare i beamformer sia lato TX che RX, si applica due volte l’algoritmo ADB di Tab. 2.1. Inoltre si devono calcolare $\mathbf{f}_{SVD-MRB}$

¹SOMME NOTEVOLI:

$$\sum_{i=1}^N i = \frac{N(N+1)}{2}, \quad \sum_{i=1}^N i^2 = \frac{N^3}{3} + \frac{N^2}{2} + \frac{N}{6}, \quad \sum_{i=1}^N i^3 = \frac{N^4}{4} + \frac{N^3}{2} + \frac{N^2}{4}$$

(o $\mathbf{u}_{SVD-MRB}$) dalla SVD di \mathbf{H} quindi per $M \geq N$ la complessità totale risulta essere [12](riportiamo solo caso a):

$$C_{ADB_a} = \begin{cases} \mathcal{O} \left(\underbrace{C_{ADB_a, TX}}_{\text{compl. step 2 Alg. 2.2}} + \underbrace{C_{ADB_a, RX}}_{\text{compl. step 4 Alg. 2.2}} + \underbrace{N \cdot M_{RF}(M^2 + M_{RF})}_{\text{compl. step 3 Alg. 2.2}} \right) \\ + \underbrace{2 \cdot N \cdot M^2 + 11 \cdot M^3}_{\text{compl. calcolo } \mathbf{f}_{SVD-MRB} \text{ via SVD di } \mathbf{H}} & \text{se } M_{RF} \geq N_{RF} \\ \mathcal{O} \left(\underbrace{C_{ADB_a, TX}}_{\text{compl. step 8 Alg. 2.2}} + \underbrace{C_{ADB_a, RX}}_{\text{compl. step 6 Alg. 2.2}} + \underbrace{N \cdot N_{RF}(N^2 + N_{RF})}_{\text{compl. step 7 Alg. 2.2}} \right) \\ + \underbrace{4 \cdot N^2 \cdot M + 13 \cdot M^3}_{\text{compl. calcolo } \mathbf{u}_{SVD-MRB} \text{ via SVD di } \mathbf{H}} & \text{se } M_{RF} \geq N_{RF} \end{cases} \quad (\text{B.8})$$

mentre per $M < N$, si parla di *Thin SVD* [12], si ha:

$$C_{ADB_a} = \begin{cases} \mathcal{O} \left(\underbrace{C_{ADB_a, TX}}_{\text{compl. step 2 Alg. 2.2}} + \underbrace{C_{ADB_a, RX}}_{\text{compl. step 4 Alg. 2.2}} + \underbrace{N \cdot M_{RF}(M^2 + M_{RF})}_{\text{compl. step 3 Alg. 2.2}} \right) \\ + \underbrace{2 \cdot N \cdot M^2 + 11 \cdot M^3}_{\text{compl. calcolo } \mathbf{f}_{SVD-MRB} \text{ via SVD di } \mathbf{H}} & \text{se } M_{RF} \geq N_{RF} \\ \mathcal{O} \left(\underbrace{C_{ADB_a, TX}}_{\text{compl. step 8 Alg. 2.2}} + \underbrace{C_{ADB_a, RX}}_{\text{compl. step 6 Alg. 2.2}} + \underbrace{N \cdot N_{RF}(N^2 + N_{RF})}_{\text{compl. step 7 Alg. 2.2}} \right) \\ + \underbrace{6 \cdot N \cdot M^2 + 11 \cdot M^3}_{\text{compl. calcolo } \mathbf{u}_{SVD-MRB} \text{ via SVD di } \mathbf{H}} & \text{se } M_{RF} \geq N_{RF} \end{cases} \quad (\text{B.9})$$

B.4 Q-ADB

Nel Cap. 3 abbiamo quantizzato i beamforme \mathbf{F}_{RF} e \mathbf{U}_{RF} . La quantizzazione dal punto di vista della complessità porta a notevoli benefici rispetto all'approccio ADB, perchè l'operazione che porgeva maggiore complessità (step 8 di Tab. B.2) si può calcolare offline. Affrontiamo solo il calcolo della complessità della progettazione dei beamformer lato TX essendo uguale alla complessità lato RX. Dato il dizionario del beamformer in BP \mathbf{F}_{RF}

$$\mathcal{D}_{TX} = [\mathbf{Q}_{TX,1}, \dots, \mathbf{Q}_{TX,L_{TX}}] \quad (\text{B.10})$$

definiamo $\mathcal{D}_{TX,PINV}$ dato dalla pseudo inversa di $\mathbf{Q}_{TX,i}$, $i = 1, \dots, L_{TX}$

$$\mathcal{D}_{TX,PINV} = [\mathbf{Q}_{TX,PINV,1}, \dots, \mathbf{Q}_{TX,PINV,L_{TX}}] \quad (\text{B.11})$$

Tabella B.3: Complessità per step dell'algoritmo Q-ADB di Tab. 3.1.

Inputs: $\mathbf{f}_{SVD-MRB}, \mathcal{D}_{TX}, \mathcal{D}_{TX,P.INV}$	
1. $J_{TX} = \infty$	
2. for $i=1$ to L_{TX}	
3. $\mathbf{f}_{tmp} = \mathbf{Q}_{TX,P.INV,i} \mathbf{f}_{SVD-MRB}$	
4. $J_{temp} = \ \mathbf{f}_{SVD-MRB} - \mathbf{Q}_{TX,i} \mathbf{f}_{tmp}\ $	$C_4 = \mathcal{O}(M_{RF} \cdot M)$
5. if $J_{temp} < J_{TX}$	
6. $\mathbf{F}_{RF} = \mathbf{Q}_{TX,i}$	
7. $\mathbf{f}_{BB} = \mathbf{f}_{tmp}$	
8. $J_{TX} = J_{temp}$	
9. end if	
10. end for	
11. $\mathbf{f}_{BB} = \frac{\mathbf{f}_{BB}}{\ \mathbf{F}_{RF} \mathbf{f}_{BB}\ }$	$C_{11} = \mathcal{O}\left(\underbrace{M_{RF} \cdot M}_{\text{moltiplicazione}} + \underbrace{M_{RF}}_{\text{divisione}}\right)$

dove

$$\mathbf{Q}_{TX,P.INV,i} = (\mathbf{Q}_{TX,i}^H \mathbf{Q}_{TX,i})^{-1} \mathbf{Q}_{TX,i}^H \quad (\text{B.12})$$

In Tab. B.3 è riportata la complessità di ogni singolo step dell'algoritmo Q-ADB. La complessità per il progetto di \mathbf{F}_{RF} e \mathbf{f}_{BB} lato TX è

$$C_{Q-ADB,TX} = L_{TX} \cdot (C_4 + C_{11}) = \mathcal{O}(L_{TX} \cdot [M_{RF} \cdot (2 \cdot M + 1)]) \quad (\text{B.13})$$

e analogamente per il progetto di \mathbf{U}_{RF} e \mathbf{u}_{BB} lato RX è

$$C_{Q-ADB,RX} = L_{RX} \cdot (C_4 + C_{11}) = \mathcal{O}(L_{RX} \cdot [N_{RF} \cdot (2 \cdot N + 1)]) \quad (\text{B.14})$$

Con riferimento sempre all'Algoritmo 2.2 nel caso con $M_{RF} < N_{RF}$, per progettare i beamformer sia lato TX che RX, applichiamo due volte l'algoritmo Q-ADB di Tab. 3.1. Inoltre si devono calcolare $\mathbf{f}_{SVD-MRB}$ (o $\mathbf{u}_{SVD-MRB}$) dalla SVD di \mathbf{H} quindi per $M \geq N$ la complessità totale risulta essere:

$$C_{Q-ADB} = \begin{cases} \mathcal{O} \left(\underbrace{C_{Q-ADB,TX}}_{\text{compl. step 2, Alg. 2.2}} + \underbrace{C_{Q-ADB,RX}}_{\text{compl. step 4, Alg. 2.2}} + \underbrace{N \cdot M_{RF}(M^2 + M_{RF})}_{\text{compl. step 3 Alg. 2.2}} \right. \\ \left. + \underbrace{2 \cdot N \cdot M^2 + 11 \cdot M^3}_{\text{compl. calcolo } \mathbf{f}_{SVD-MRB} \text{ via SVD di } \mathbf{H}} \right) & \text{se } M_{RF} < N_{RF} \\ \mathcal{O} \left(\underbrace{C_{Q-ADB,TX}}_{\text{compl. step 8 Alg. 2.2}} + \underbrace{C_{Q-ADB,RX}}_{\text{compl. step 6 Alg. 2.2}} + \underbrace{N \cdot N_{RF}(N^2 + N_{RF})}_{\text{compl. step 7 Alg. 2.2}} \right. \\ \left. + \underbrace{4 \cdot N^2 \cdot M + 13 \cdot M^3}_{\text{compl. calcolo } \mathbf{u}_{SVD-MRB} \text{ via SVD di } \mathbf{H}} \right) & \text{se } M_{RF} \geq N_{RF} \end{cases}$$

(B.15)

mentre per $M < N$ si ha:

$$C_{Q-ADB} = \begin{cases} \mathcal{O} \left(\underbrace{C_{Q-ADB,TX}}_{\text{compl. step 2, Alg. 2.2}} + \underbrace{C_{Q-ADB,RX}}_{\text{compl. step 4, Alg. 2.2}} + \underbrace{N \cdot M_{RF}(M^2 + M_{RF})}_{\text{compl. step 3 Alg. 2.2}} \right) \\ + \underbrace{2 \cdot N \cdot M^2 + 11 \cdot M^3}_{\text{compl. calcolo } \mathbf{f}_{SVD-MRB} \text{ via SVD di } \mathbf{H}} & \text{se } M_{RF} < N_{RF} \\ \mathcal{O} \left(\underbrace{C_{Q-ADB_a,TX}}_{\text{compl. step 8 Alg. 2.2}} + \underbrace{C_{Q-ADB,RX}}_{\text{compl. step 6 Alg. 2.2}} + \underbrace{N \cdot N_{RF}(N^2 + N_{RF})}_{\text{compl. step 7 Alg. 2.2}} \right) \\ + \underbrace{6 \cdot N \cdot M^2 + 11 \cdot M^3}_{\text{compl. calcolo } \mathbf{u}_{SVD-MRB} \text{ via SVD di } \mathbf{H}} & \text{se } M_{RF} \geq N_{RF} \end{cases} \quad (\text{B.16})$$

B.5 Q-SVD-DB

In questo caso per il progetto dei beamformer dobbiamo massimizzare il funzionale 3.18 il che richiede una procedura esaustiva che utilizza tutte le coppie dei beamformer in BP \mathbf{F}_{RF} e \mathbf{U}_{RF} contenuti nei rispettivi dizionari \mathcal{D}_{TX} e \mathcal{D}_{RX} . Quindi per ogni coppia $(\mathbf{F}_{RF}, \mathbf{U}_{RF})$ la procedura calcola la SVD di $\tilde{\mathbf{H}}$ (con dimensioni $(N_{RF} \times M_{RF})$) e ricava la coppia dei beamformer in BB $(\tilde{\mathbf{f}}_{Q_c-SVD-DB}, \tilde{\mathbf{u}}_{Q_c-SVD-DB})$, alla fine selezionerà i beamformer in BB e BP che massimizzano il SNR. Quindi la complessità totale risulta essere

$$C_{Q_c-SVD-DB} = \begin{cases} \mathcal{O}(L_{TX} \cdot L_{RX} \cdot (4 \cdot N_{RF}^2 \cdot M_{RF} + 22 \cdot M_{RF}^3)) + C_{norm} & \text{se } M_{RF} \geq N_{RF} \\ \mathcal{O}(L_{TX} \cdot L_{RX} \cdot (6 \cdot N_{RF} \cdot M_{RF}^2 + 20 \cdot M_{RF}^3)) + C_{norm} & \text{se } N_{RF} > M_{RF} \end{cases} \quad (\text{B.17})$$

dove

$$C_{norm} = M_{RF} \cdot M + M_{RF} + N_{RF} \cdot N + N_{RF} \quad (\text{B.18})$$

è la complessità dovuta alla normalizzazione 3.20 dei beamformer.

B.6 Q-I-DB

La complessità di Q-I-DB, per le stesse considerazioni fatte per Q-SVD-DB, risulta essere quella di I-MRB per un fattore moltiplicativo $L_{TX} \cdot L_{RX}$ dato dal fatto che devo provare tutte le coppie possibili dei dizionari di \mathbf{F}_{RF} e \mathbf{U}_{RF} al fine di massimizzare il funzionale 3.18. Quindi si ha

$$\begin{aligned} C_{Q-I-DB} &= \underbrace{N^{\circ} \text{ iter.} \cdot L_{TX} \cdot L_{RX} \cdot (C_3 + C_4 + C_5 + C_6)}_{\text{compl. proced. iterativa 2.3.2}} + \underbrace{C_{norm}}_{\text{compl. norm. 3.22}} & (\text{B.19}) \\ &= \mathcal{O}(N^{\circ} \text{ iter.} \cdot L_{TX} \cdot L_{RX} \cdot [2 \cdot M_{RF} \cdot N_{RF} + M_{RF} + N_{RF}] \\ &\quad + M_{RF} \cdot M + M_{RF} + N_{RF} \cdot N + N_{RF}) \end{aligned}$$

dove C_{norm} è la complessità della normalizzazione 3.22 e risulta essere uguale a B.18.

Bibliografia

- [1] O. Ayach, R. Heath, S. Abu-Surra, S. Rajagopal, “Low complexity precoding for large millimeter wave mimo systems,” *Proceedings of IEEE International Conference on Communications (ICC)*, pp. pp. 3724–3729, 2012.
- [2] F. Gholam, J. Via, I. Sanatamaria, “Beamforming design for simplified analog antenna combining architectures,” *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, vol. 60, no. 5, pp. pp. 2373–2378, 2011.
- [3] T. Rappaport, *Wireless Communications-principles and practice.*, 2nd ed., Prentice Hall, Ed., 1997.
- [4] P. Smulders, L. Correia, “Characterisation of propagation in 60 GHz radio-channels,” *Electronics Communications Engineering Journal*, vol. 9, no. 2, pp. 73–80, 1997.
- [5] F. Khan, Z. Pi, “Mm-wave mobile broadband (mmb): unleashing the 3-300 GHz spectrum,” *IEEE 802.15*, pp. pp. 3724–3729, 2012.
- [6] K. Yu, “Modeling of multiple-input multiple output radio propagation channels,” Ph.D. dissertation, Royal Institute of Technology Stockholm, 2002.
- [7] N. Belli, “Mimo Array Gain Techniques for Communications over mm-wave Channels,” Master’s thesis, Università degli Studi di Padova, 2013.
- [8] A. Paulraj, R. Nabar, D. Gore, *Introduction to Space-Time Wireless Communications.*, 1st ed., Cambridge University Press, Ed., 2003.
- [9] X. Zheng, Y. Xie, J. Li, P. Stoica, “Mimo transmit beamforming under uniform elemental power constraint,” *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 55, no. 11, pp. pp. 5395–5406, 2007.
- [10] T. Lo, “Maximum ratio transmission,” *IEEE Transactions on Communications*, vol. 47, no. 10, pp. pp. 1458–1461, 1999.
- [11] N. Benvenuto, G. Cherubini, *Algorithms for Communications Systems and their Applications*, Wiley, Ed., 2003.
- [12] G. H. Golub, C. F. Van Loan, *Matrix Computations*, The Johns Hopkins Univ. Press, Ed., 1996.