

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA
Dipartimento di Fisica e Astronomia "Galileo Galilei"
Corso di Laurea in Fisica

I PRINCIPIA DI NEWTON

Le basi della dinamica classica

Laureando
COSTA FRANCESCO

Relatore
Professor *GIULIO PERUZZI*

PADOVA,
16 Aprile 2014

TAVOLA

Introduzione	I
Il Metodo newtoniano.....	I
Filosofia Naturale e Geometria	I
Scopo e regole della Filosofia Naturale.....	3
Spazio e Tempo.....	5
Il contesto storico.....	5
Tempo, spazio, luogo e moto	7
Definizioni.....	II
Massa	II
Quantità di moto.....	I3
Inerzia	I3
Forza	I4
Leggi del moto.....	I5
Precedenti illustri	I5
Prima legge.....	I6
Seconda legge.....	I7
Terza legge.....	I8
Dai fenomeni alla gravitazione universale.....	I9
Fenomeni.....	I9
Proposizioni matematiche sul moto dei corpi.....	20
Proposizioni fisiche sul Sistema del Mondo	22
Commenti	25
Conclusioni	28

I PRINCIPIA DI NEWTON

Le basi della dinamica classica

INTRODUZIONE

Era il 1687 quando Sir Isaac Newton pubblicò i suoi *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica*, segnando un traguardo fondamentale per la storia della conoscenza umana. La terza edizione rivista del 1726 costituisce il suo lascito più prezioso alla posterità, ed è il testo che verrà qui considerato.

Sarebbe oltremodo presuntuoso, nonché superfluo, pensare di sintetizzare in queste poche pagine il contenuto di una tale opera, ed il seguente lavoro si limita a fornire un'analisi circoscritta di alcuni punti fondamentali, qui di seguito elencati.

Innanzitutto sarà brevemente richiamato il metodo d'operare newtoniano.

Dopodiché (e questa sarà la parte principale di questo piccolo lavoro) si considereranno i concetti che stanno alla base dell'edificio newtoniano, spazio, tempo, e leggi del moto, cercando di contestualizzare storicamente la genesi di tali idee, presentando i punti di vista più influenti alla fine del XVII secolo, e come Newton si pone in relazione ad essi.

Infine, quasi a voler ricordare la grandezza dei risultati a cui egli pervenne applicando tali principi, si fornirà un resoconto molto sintetico e schematico di come si possa arrivare alla legge di gravitazione universale.

IL METODO NEWTONIANO

Più ancora che i concetti fondamentali e le leggi del moto, alla base degli straordinari risultati di Newton si deve porre il suo *modus operandi*, e la struttura logica in cui egli imposta il suo filosofare. Vediamone brevemente le caratteristiche principali.

Filosofia Naturale e Geometria

Già dal titolo si evince il ruolo preponderante che la matematica avrà in tutta l'opera; e allo stesso tempo tale titolo lascia trapelare il contesto storico in cui l'opera venne alla luce, e la sua carica d'innovazione.

Principia Philosophiæ è infatti il titolo di una delle opere fondamentali di Cartesio, data alle stampe nel 1644. Il Cartesianesimo era, all'epoca della giovinezza di Newton, una delle filosofie dominanti nelle accademie di tutta Europa, se non *la* filosofia dominante; esso avrà un'influenza fondamentale, come avremo modo di osservare in seguito, nello sviluppo del pensiero di Newton, sia come fonte di spunti che come bersaglio da confutare.

I nuovi Principi della Filosofia sono caratterizzati dall'essere principi *matematici*, e la filosofia dall'essere *naturale*, mettendo dunque degli stretti vincoli all'argomento dell'opera. In effetti, ciò che è davvero stupefacente è, vista la vastità del pensiero newtoniano, l'assenza totale di elementi filosofici-teologici-alchemici estranei a ciò che verrà definito come *vera filosofia naturale* (con la voluta eccezione dello *Scolio Generale* conclusivo).

Ma ciò che si può dire veramente innovativo per l'epoca è l'onnipresenza del linguaggio matematico, cosa che, tra l'altro, renderà l'opera di ostica lettura alla maggior parte dei contemporanei. Anche se già Cartesio riconobbe l'importanza della matematica nell'indagine del mondo, nelle sue opere non la troviamo così di frequente: inoltre la matematica cartesiana è geometria analitica, che pretende d'essere superiore alla geometria degli antichi, posizione questa che faceva inorridire Newton, essendo gli antichi i portatori della sapienza che lui stava solo riportando alla luce.

Ma qual è di preciso il ruolo che Newton assegna alla matematica-geometria in questo contesto? Egli stesso lo specifica nella Prefazione alla prima edizione, invertendo la tradizionale subordinazione delle arti meccaniche alle matematiche: è la geometria ad essere dipendente dalla meccanica. Gli oggetti postulati dalla geometria come fondamentali (punti, linee, circonferenze, ecc.) non sono altro che idealizzazioni della pratica esecutiva materiale, fatta con riga e compasso.

*La geometria dunque si fonda sulla prassi della meccanica, e non è nient'altro che quella parte della meccanica universale che propone e dimostra l'arte di misurare accuratissimamente.*¹

La matematica di Newton è dunque la geometria organica, ed ogni curva è pensata "operativamente", in aperto contrasto alla visione algebrica cartesiana; ma anche in contrasto con i concetti e le simbologie leibniziane. Newton aborre il concetto d'infinitesimo, e tenta infatti di trasporre i nuovi concetti del suo calcolo tramite gli oggetti matematici degli antichi, considerati gli unici degni d'esser tramandati: molte delle sue dimostrazioni consistono infatti in costruzioni geometriche in cui la conclusione è costituita dal tendere al limite di varie grandezze, ciò che egli chiama "metodo dei primi ed ultimi rapporti".

¹ Prefazione alla prima edizione.

Ma non è questa la sede per esaminare le caratteristiche del calcolo newtoniano e la sua disputa con Leibniz ed i matematici continentali. Passiamo dunque al cuore del metodo newtoniano.

Scopo e regole della Filosofia Naturale

Lo scopo della filosofia naturale è esposto con un candore che rende superflua ogni parafrasi:

Sembra infatti che tutta la difficoltà della filosofia consista nell'investigare le forze della natura a partire dai fenomeni del moto e dopo nel dimostrare i restanti fenomeni a partire da queste forze.²

La rivalutazione del processo induttivo, che si distacca nettamente dal metodo intuitivo cartesiano, non era certo una novità, tantomeno nell'ambiente della *Royal Society* d'ideali baconiani. Ma si deve riconoscere al nostro autore, che per molti versi si discosta da quegli ideali, perlomeno il merito di aver enunciato in modo così chiaro e generale il doppio processo induttivo-deduttivo che era stato abbozzato da Galileo; ma ancor più l'efficacia con cui egli lo mise in pratica. Come vedremo, infatti, il terzo libro dedicato al *Sistema del Mondo* ripercorre passo passo questo programma.

Ma la vera novità di una tale asserzione è il riconoscere nella causa del moto le forze della natura; il concetto di forza verrà meglio discusso nell'ambito delle definizioni e delle leggi del moto, ma comunque esso si discosta sensibilmente dal meccanicismo cartesiano, che vedeva ogni fenomeno spiegato da urti fra corpuscoli. In particolare la maggior novità è la forza gravitazionale, intesa come agente a distanza infinita, istantaneamente, e in assenza di un mezzo; ciò è quanto di più assurdo si potesse pensare nell'ambiente accademico del tempo, tanto da imbarazzare lo stesso Newton.

Come abbiamo detto sopra, la geometria è subordinata alla meccanica nei suoi fondamenti, ma è il mezzo tramite cui si può giungere con dimostrazioni esatte a delle conclusioni più complesse. Dunque lo strumento principe per passare dai fenomeni alle forze, e viceversa, è la geometria, e difatti i primi due libri dei *Principia* consistono essenzialmente di dimostrazioni matematiche (intervallate da *Scolii* di carattere fisico) la cui utilità è propedeutica alla comprensione della fisica del terzo libro.

Le "Regole del filosofare", vera ossatura logica alla base del metodo newtoniano, sono le seguenti:

² Prefazione alla prima edizione.

Regola I. *Delle cose naturali non devono essere ammesse cause più numerose di quelle che sono vere e bastano a spiegare i fenomeni.*

Regola II. *Perciò, finchè può essere fatto, le medesime cause vanno attribuite ad effetti naturali dello stesso genere.*

Regola III. *Le qualità dei corpi che non possono essere aumentate e diminuite, e quelle che appartengono a tutti i corpi sui quali è possibile impiantare esperimenti, devono essere ritenute qualità di tutti i corpi.*

Regola IV. *Nella filosofia sperimentale, le proposizioni ricavate per induzione dai fenomeni, devono, nonostante le ipotesi contrarie, essere considerate vere o rigorosamente o quanto più possibile, finchè non intervengano altri fenomeni, mediante i quali o sono rese più esatte o vengono assoggettate ad eccezioni.³*

La prima regola ha alla sua base il cosiddetto postulato di *semplicità* della Natura; la seconda e la terza, invece, quello di *uniformità* della Natura. La terza regola, in particolare, ha un'importanza notevole, rappresentando il processo di estensione delle grandezze e proprietà fisiche agli enti che non sono soggetti ad esperimento diretto. È grazie a questa regola che possiamo utilizzare concretamente i dati astronomici, assumendo che anche i corpi celesti possiedano le medesime proprietà fisiche che riscontriamo essere comuni a tutti i corpi terrestri.

Fondamentale infine è la quarta regola: una volta estratti dai fenomeni dei principi che ci consentono di costruire modelli, tali principi sono sempre e comunque subordinati alla verifica induttiva che parte dai fenomeni, non dando mai la precedenza logica a delle "ipotesi".

Il tema è ripreso anche a conclusione dell'opera, con la celebre frase:

In verità non sono ancora riuscito a dedurre dai fenomeni la ragione di queste proprietà della gravità, e non invento ipotesi [hypotheses non fingo]. Qualunque cosa, infatti, non deducibile dai fenomeni va chiamata ipotesi; e nella filosofia sperimentale non trovano posto le ipotesi [...].⁴

Occorre però specificare cosa Newton intenda con la parola "ipotesi":

[...] la parola Ipotesi [...] non dev'essere intesa in un significato sì ampio da includere i Principi primi o Assiomi che io chiamo leggi del moto. [Tali principi] sono dedotti dai Fenomeni e resi generali tramite Induzione: che è la più alta prova che una Proposizione possa avere in questa filosofia.⁵

³ Libro III, Regole del filosofare.

⁴ Scolio Generale.

⁵ Lettera di Newton a Cotes, 28 Marzo 1713, *Correspondence* vol. 3.

Dunque le ipotesi che Newton bandisce dalla propria filosofia non sono quelle correttamente ricavate per induzione dai fenomeni, quanto quelle puramente speculative, come ad esempio la pienezza dello spazio o la teoria degli urti particellari tipici del Cartesianesimo. Non si deve però pensare che tali ipotesi non possano rivelarsi utili ai fini della ricerca: Newton stesso formulò molte congetture per spiegare ad esempio la natura della luce o il modo in cui agisce la forza di gravità. L'importante è che appunto tali ipotesi rimangano delle congetture e non entrino a far parte della teoria accettata, fintantoché non siano corroborate da sufficienti prove sperimentali.

SPAZIO E TEMPO

Il contesto storico

Da sempre i concetti di spazio e tempo sono stati considerati come indissolubilmente legati: vediamo rapidamente i principali punti di vista presenti nel finire del XVII secolo.

La filosofia scolastico-aristotelica, nonostante fosse in continuo e progressivo discredito, continuava ad essere la posizione ufficiale degli autori filo ecclesiastici. Non vogliamo ovviamente riassumere la complessa rete di concetti presenti nell'universo aristotelico; ci basti tuttavia affermare che ognuno di tali concetti è subordinato al meccanismo cosmologico complessivo. Per quanto riguarda lo spazio, esso è concepibile soltanto accoppiato al tempo, è limitato, e pieno, e, diremmo ora, è uno spazio assoluto: in alcune asserzioni si può già intravedere una relatività dei punti di vista in base all'osservatore, tuttavia delle tre dimensioni quella radiale (su-giù) è connaturata nello spazio assoluto per la descrizione dei moti, e chiunque conosca le basi della dinamica-cosmologia aristotelica può capire il perché. Il tempo non è definito in modo astratto: è conoscibile soltanto tramite l'osservazione dei moti (in particolare dei moti circolari), ed è quindi una proprietà, una misura del movimento.

Molte idee derivanti da quel processo astronomico che chiamiamo "rivoluzione copernicana" avevano già scosso le menti di tutta Europa: basti pensare al progressivo allargamento dello spazio aristotelico, che alla fine diventa uno spazio infinito-interminato. Le esperienze di Torricelli aprono la possibilità all'esistenza del vuoto, ma tra i contributi più stimolanti si deve inserire quello di Galileo che sottolinea l'indistinguibilità tra quiete e moto intesi in senso assoluto-aristotelico (celebre è il paragrafo della nave presente nel *Dialogo*).

Tuttavia la vera dominatrice delle scene accademiche nord europee, come abbiamo già avuto modo di dire, è la filosofia di Cartesio: in essa la fisica è in un ruolo totalmente subordinato alla metafisica, e Cartesio non trae le sue conclusioni dal metodo sperimentale galileiano, ma dal suo particolare metodo (cui dedica un libro). Per ragioni dunque più che altro metafisiche, egli sostiene che ogni cosa possa essere spiegata in termini di *materia* e *movimento*. Infatti, materia è sinonimo di estensione: in un mondo corpuscolare, in cui ogni forza della natura è pensabile in termini di urti e vortici, il vuoto non può esistere; l'universo è indefinito (infinito è solo Dio), e tutto pieno. Data l'identità tra spazio e materia che lo occupa, il movimento di un corpo è pensabile solo in relazione ai corpi che lo circondano. Ma vediamo direttamente le definizioni contenute nella sua opera magna:

X. Cos'è lo spazio, ossia il luogo interno. *Neppure lo spazio, ossia il luogo interno, e la sostanza corporea in esso contenuta differiscono nella realtà, ma soltanto per il modo in cui siamo soliti concepirli. In realtà infatti l'estensione in lunghezza, larghezza, e profondità, che costituisce lo spazio, è senz'altro la medesima che costituisce il corpo.*

XXV. Cos'è il movimento preso in senso proprio. *[Il movimento] è la traslazione di una parte di materia, ossia di un corpo, dalla vicinanza di quei corpi che la toccano immediatamente e sono considerati come in riposo, alla vicinanza di altri.*⁶

Il Cartesianesimo è importante non solo per aver grandemente influenzato i contemporanei, ma ancor più per aver stimolato la discussione filosofica: uno dei principali pensatori francesi in contrasto con le posizioni cartesiane è il filogalileiano Pierre Gassendi: egli ad esempio ribalta la concezione di spazio pieno con moto relativo, accompagnando alla sua concezione atomista uno spazio vuoto, preesistente ad ogni realtà materiale, tridimensionale, infinito, immobile, incorporeo. Tutte caratteristiche che, come vedremo, lo accomunano con lo spazio newtoniano.

Passiamo infine ad un contemporaneo e conoscente di Newton, nonché membro della *Royal Society*: Christiaan Huygens. Egli critica fortemente le posizioni di Cartesio, ed ancor più il suo modo di argomentarle, e si può dire che porti sostanzialmente a termine la matematizzazione dello spazio, facendo propria la lezione di Galileo (il che si vede nella sua ottima trattazione degli urti con diversi osservatori, *De motu corporum ex percussione*). Inoltre è fortemente critico nei riguardi dello spazio assoluto newtoniano, dicendo in sintesi: come possiamo stabilire se un corpo è in quiete nello spazio assoluto, se non abbiamo alcun riferimento preciso a cui appoggiarci? E se anche le stelle sono fisse l'una rispetto all'altra, chi mi garantisce che esse complessivamente non si stiano muovendo rispetto ad un tale ipotetico spazio?

⁶ Cartesio, *Principia Philosophiæ*, Parte II.

Insomma, è impossibile stabilire se nello spazio infinito un corpo è in quiete o è in moto, e *quiete e moto sono soltanto relativi*: questo è il punto di vista che egli esprime chiaramente pure nella corrispondenza con Leibniz.

Leibniz, altro contemporaneo membro della *Royal Society*, nonché formidabile critico di Cartesio, riguardo a questi temi assume atteggiamenti oscillanti nell'arco della vita, e lo si può desumere dalla già citata corrispondenza con Huygens: dapprima è riluttante ad abbandonare le idee di quiete e moto *veri*, ma incalzato dall'olandese, ammette i punti di forza del suo ragionare "relativistico". In ogni caso, per motivi più che altro legati alla sua complessa metafisica, reputa totalmente assurdi i concetti di tempo e spazio assoluti.

Passata in rassegna la situazione in cui si muove Newton, possiamo ad analizzare direttamente il suo pensiero.

Tempo, spazio, luogo e moto

Tali argomenti sono trattati prevalentemente nello scolio che segue le definizioni iniziali. Lo scopo non è dare delle definizioni dei concetti, ma distinguere quelli assoluti, veri e matematici dai corrispondenti relativi, apparenti, e volgari.

Vediamo in dettaglio cosa viene asserito⁷:

- I. *Il tempo assoluto, vero, matematico, in sè e per sua natura senza relazione ad alcunchè di esterno, scorre uniformemente, e con altro nome è chiamato durata; quello relativo, apparente e volgare, è una misura (esatta o inesatta) sensibile ed esterna della durata per mezzo del moto, [...]*
- II. *Lo spazio assoluto, per sua natura senza relazione ad alcunchè di esterno, rimane sempre uguale e immobile; lo spazio relativo è una dimensione mobile o misura dello spazio assoluto, che i nostri sensi definiscono in relazione alla sua posizione rispetto ai corpi, [...]*
- III. *Il luogo è la parte dello spazio occupata dal corpo, e, a seconda dello spazio, può essere assoluto o relativo. [...]*
- IV. *Il moto assoluto è la traslazione di un corpo da un luogo assoluto in un luogo assoluto, il relativo da un luogo relativo in un luogo relativo.*

Cosa importantissima ai fini degli sviluppi matematici successivi è il pensare lo spazio e il tempo come ordinati:

⁷ In tutto il paragrafo, salvo altra indicazione, le citazioni provengono dallo Scolio alle Definizioni.

Come è immutabile l'ordine delle parti del tempo, così lo è anche l'ordine delle parti dello spazio.

Insomma, lo spazio e il tempo newtoniani sono dei “contenitori” matematici e vuoti, all'interno dei quali si svolgono i molteplici moti di tutto l'universo, in chiara contrapposizione alle concezioni cartesiane. Come vedremo subito, l'aver concepito l'esistenza di simili entità astratte, se da un lato ha permesso la costruzione di tutto l'edificio teorico della meccanica classica, dall'altro implica delle grandi (oggi diremo insormontabili) difficoltà sul piano epistemologico.

Evidentemente la genesi di tali concetti è almeno in parte dovuta alla sensibilità teologica di Newton, che li concepiva come *sensorium Dei* (ma non come *corpus Dei*, per non cadere in un panteismo immanentista):

*Poichè ogni particella dello spazio è sempre, e ogni momento indivisibile della durata è ovunque, certamente l'Artefice e il Signore di tutte le cose sarà sempre e ovunque.*⁸

Esaminiamo ora i problemi che tali diciture comportano.

Riguardo al tempo: poiché i giorni, che sembrano di una stessa durata, in realtà non lo sono, gli astronomi comunemente correggono queste ineguaglianze con la cosiddetta equazione del tempo, per poter poi misurare i moti celesti con un tempo *più vero*; tuttavia

È possibile che non vi sia movimento talmente uniforme per mezzo del quale si possa misurare accuratamente il tempo.

E riguardo allo spazio: le parti dello spazio assoluto non possono essere conosciute mediante i nostri sensi, e dunque solitamente definiamo gli spazi in relazione a un qualche corpo assunto immobile. Anche qui però

Potrebbe anche darsi che non vi sia alcun corpo in quiete al quale possano venire riferiti sia i luoghi che i moti.

Dunque questa intrinseca in conoscibilità dello spazio e del tempo assoluti sembra ci porti subito ad un punto morto. Tutto il discorso successivo è un crescendo per convincerci che tutto sommato non dobbiamo disperare:

La quiete e il moto, assoluti e relativi, si distinguono gli uni dagli altri mediante le loro proprietà, le cause e gli effetti.

⁸ Scolio Generale.

Proprietà

I corpi in *quiete* giacciono in quiete tra loro; tuttavia la nostra impossibilità di individuare un corpo in vera quiete fa sì che non possiamo stabilire la vera quiete osservando la posizione reciproca dei corpi.

Dato un insieme in *movimento*, le sue parti costituenti si muovono insieme ad esso; ma una di queste parti può essere in quiete rispetto alle altre, pur essendo in realtà in moto. Dunque il moto vero non si può definire in relazione ad altri corpi, poiché tali corpi dovrebbero essere veramente in quiete (cosa che, come detto sopra non c'è dato sapere).

Di conseguenza i moti assoluti devono essere riferiti non a corpi mobili ma a luoghi immobili, ossia allo spazio assoluto; se ne giustifica così l'introduzione, ma non si dice come stabilire uno stato di quiete o moto rispetto ad esso...

Cause

Le cause per le quali i moti veri sono distinti da quelli relativi sono le *forze impresse* sui corpi al fine di generare il movimento. Il moto vero non può essere generato (partenza da fermo) né modificato (partenza da moto rettilineo uniforme) se non per effetto di forze impresse sullo stesso corpo in movimento; ma il moto relativo *può essere* generato e modificato senza forze impresse su questo corpo.

Così ragionando si escludono tutti quelli che oggi chiamiamo osservatori non inerziali, ma se un osservatore si muove di moto rettilineo uniforme rispetto allo spazio assoluto?

Effetti

Gli effetti di un moto rotatorio sono le “forze” di allontanamento dall'asse del moto (*conatus recedendi ab axe motus*); nel moto circolare puramente relativo queste forze sono nulle, mentre sono presenti nel moto vero.

Newton sembra voler ribadire quanto appena detto per le cause, considerando il caso particolare della forza centrifuga apparente. Ma come si vede lo fa con un linguaggio assai diverso da quello che siamo abituati ad utilizzare ora: nell'esempio del secchio, e in quello delle sfere non usa l'espressione forza centrifuga, ma “conato a recedere”, una tipica espressione cartesiana, che dev'essere rimasta come residuo degli anni giovanili, in cui sappiamo che veniva utilizzata da Newton stesso prima di concepire la forza centripeta.

Ad illustrare questo punto (la vera rotazione è accompagnata da un conato centrifugo) è il celebre esperimento del secchio, che descriviamo velocemente: preparo un secchio pieno d'acqua, lo lego ad una fune che ritorco su se stessa molte volte, ed infine lascio il secchio in modo che la fune si srotoli; negli istanti subito successivi ho

- a) il secchio gira, l'acqua è ferma e con la superficie piatta;
dopo una fase di transizione raggiungo lo stato
- b) il secchio e l'acqua girano insieme e la superficie dell'acqua è incurvata;
poi blocco il secchio; negli istanti subito successivi ho
- c) il secchio è fermo, l'acqua gira e ha la superficie incurvata.

Se adottassi la prospettiva cartesiana, lo stato di quiete iniziale e lo stato b) non sarebbero distinguibili considerando il sistema acqua+secchio; analogamente non lo sarebbero gli stati a) e c); e tuttavia osservo effetti differenti.

Ripeto⁹ che lo scopo di tutto questo discorso non è propriamente quello di dimostrare l'esistenza del moto assoluto, quanto piuttosto di far capire che il moto di un corpo non può essere definito univocamente come traslazione rispetto ai corpi circostanti. Insomma, una distruzione del concetto di moto cartesiano.

Newton termina lo scolio con l'esempio delle sfere rotanti:

È difficilissimo in verità conoscere i veri moti dei singoli corpi e distinguerli di fatto dagli apparenti: e ciò perchè le parti dello spazio immobile, in cui i corpi veramente si muovono, non cadono sotto i sensi. La cosa tuttavia non è affatto disperata.

E dunque, con quest'ottimismo ci illustra come procedere, considerando due sfere collegate da un filo in rotazione attorno al loro centro di massa. Mettendomi sui globi, come faccio a sapere se sono loro a ruotare o i riferimenti esterni (ad esempio stelle lontane)? Tramite la misura di una forza: la tensione del filo (forza centrifuga) che, secondo il linguaggio usato sopra, è l'effetto di ogni rotazione.

Qui termina il discorso di Newton su spazio e tempo, un discorso che invero darà origine a molte discussioni e critiche, specialmente presso i contemporanei (lo spazio assoluto in particolare venne duramente criticato da Huygens e Leibniz); esse tuttavia si sopirono durante il Settecento, secolo di trionfo della meccanica newtoniana. Ma nell'Ottocento le scoperte nel settore dell'elettromagnetismo le riaccessero, mettendo sempre più in dubbio l'esistenza di un sistema etereo assoluto; le critiche più dure e sistematiche, tuttavia, vennero rivolte da Ernst Mach, specialmente in riferimento all'esperimento del secchio (chi mi dice che la superficie incurvata dell'acqua implichi il suo movimento assoluto? Che cioè le cosiddette forze apparenti non siano forze vere causate dal ruotare di tutto l'universo attorno ad essa?). La crisi dei concetti newtoniani divenne poi evidente, per lasciare infine il posto alla relatività einsteiniana.

⁹ Fatto sottolineato da R. Rynasiewicz (*Guide to the Principia*, Cohen)

Ciò che ci preme ora sottolineare, per il prosieguo del discorso, è che non viene risolto un punto fondamentale: pur escludendo i cosiddetti sistemi non inerziali, resta da capire che sistema poter considerare in pratica per stabilire *moti veri*; ossia matematicamente dove fisso l'origine dello spazio assoluto? Newton doveva essere conscio dell'arbitrarietà che una tale domanda implicava, e difatti la risposta è affidata ad un'ipotesi (sì, proprio *ipotesi*):

Ipotesi I. *Il centro del sistema del mondo è in quiete*

Da cui segue:

Proposizione XI. Teorema XI. *Il comune centro di gravità della Terra, del Sole e di tutti i pianeti è in quiete.*

Questa scelta, peraltro molto ragionevole per l'epoca, rispecchia una convinzione che Newton espresse in alcune lettere a Richard Bentley, nonché nello Scolio Generale: pur essendo proclamato da molti come colui che unificò fisica terrestre e celeste, egli non mise mai veramente in dubbio il concetto di fissità delle stelle. Ed essendo il Sole una stella, si può anch'esso pensare fermo. Infatti nella sua visione teologica, Dio creò gli infiniti sistemi stellari a grandi distanze e nella posizione opportuna affinché la forza gravitazionale reciproca potesse equilibrarsi in eterno, evitando un catastrofico collasso cosmico.

DEFINIZIONI

Le definizioni newtoniane introducono le grandezze fondamentali con cui costruire il nuovo impianto teorico: esse, come vedremo, sono enunciate in modo tale da anticipare in alcuni casi ciò che verrà ribadito più chiaramente nelle susseguenti leggi del moto.

Massa

La prima di esse è forse quella più importante ed allo stesso tempo la più insoddisfacente

Il concetto di quantità di materia era entrato nei problemi dinamici già nel medioevo con la teoria dell'impeto: ma quali sono le caratteristiche di tale quantità di materia, e a quale quantità misurabile corrisponde? Per tutto il periodo della cosiddetta rivoluzione scientifica non si diede mai una risposta univoca a queste domande: ad esempio Galileo menziona soprattutto il peso, e Cartesio identifica la materia con l'estensione. Newton afferma:

Definizione I. *La quantità di materia è la misura della medesima, ricavata dal prodotto della sua densità per il volume.*

[...] *In seguito indicherò questa quantità indifferentemente con i nomi di corpo, o massa. Tale quantità diviene nota attraverso il peso di ciascun corpo. Per mezzo di esperimenti molto accurati sui pendoli, trovai che è proporzionale al peso, come in seguito mostrerò.*

Già ad una prima lettura ci si accorge che la definizione non è il massimo della chiarezza, tuttavia per non cadere in facili critiche è d'uopo seguire le attente argomentazioni di Cohen.

Innanzitutto bisogna analizzare attentamente la frase: la “definizione” vera e propria è contenuta nella prima parte, che ci dice che *la massa è la misura della materia*. Effettivamente si può obiettare che così non si sta definendo nulla, tuttavia è proprio da questa frase che si capisce il valore di *grandezza fondamentale* (non derivata) che Newton le assegna. Infatti la seconda parte che riguarda densità e volume, sembra essere posta come una sorta di regola, di relazione, tra la nuova grandezza massa e le già note volume e densità; ma la densità non è definita esplicitamente da nessuna parte.

Da questo problema è sorta l'accusa, portata a fondo da Mach, della circolarità di una simile definizione: la massa non si può far derivare dalla densità, che a sua volta deriva dalla massa. Ma come abbiamo già rilevato, Newton non pensa alla massa come una grandezza derivata, e bastino i seguenti fatti a rafforzare questa tesi:

in tutto il testo dei Principia, il concetto di massa è sempre utilizzato correttamente, rispondendo agli attuali *massa inerziale* e *massa gravitazionale*;

per sottolineare la piena comprensione del concetto di massa inerziale citiamo uno schizzo preliminare (qui si usa ancora peso per intendere la massa) dove si afferma:

Con peso [...] intendo la quantità o copia di materia mossa, a parte da considerazioni riguardanti la gravità, poichè non v'è richiesta di corpi gravitanti.¹⁰

per misurare la massa inoltre non vengono mai usati densità e volume, ma l'unica procedura di misura è sempre tramite la proporzionalità col peso.

Al fine di chiarire la questione bisogna capire dunque che cosa s'intenda per densità: al tempo, mancando l'attuale sistema di misura, la densità non era espressa esplicitamente come massa/volume, ma sempre come un rapporto rispetto ad un valore noto (ad esempio tale sostanza è densa 3, o 7, o 12 volte l'acqua). La misurazione era a tutti gli effetti un peso specifico, ma un rapporto tra pesi specifici equivale ad un rapporto di densità; diciamo tuttavia che la parola in sé indicava intuitivamente il grado di compattezza o rarefazione di una sostanza. Si può dunque al

¹⁰ D.T. Whiteside, *Preliminary Manuscripts for Isaac Newton's 1687 "Principia"*.

massimo rimproverare a Newton di aver introdotto una grandezza lasciandola all'intuito del lettore, ma non era certo suo intento lo scrivere una definizione circolare.

Per concludere questa breve discussione sul concetto di massa, dobbiamo giustificare l'unica procedura empirica che Newton usa per misurarla, sfruttando cioè la proporzionalità con il peso: in parole odierne si tratta di stabilire l'uguaglianza tra massa inerziale e massa gravitazionale. Tale proporzionalità massa/peso viene enunciata, come vedremo in seguito, al libro III, Proposizione VI. Egli molto giustamente basa questa proprietà sull'esperienza, ed in particolare su esperimenti svolti da lui stesso, come riportato nella descrizione a questa proposizione. Si potrebbe semplicemente dire: osservando la caduta (nel vuoto e in un medesimo luogo¹¹) di due corpi qualsiasi aventi stesso peso, il tempo di caduta è sempre lo stesso. Ma per rendere più sensibile l'esperimento, Newton si avvale di pendoli aventi stessa lunghezza e stesso peso, ed osserva la costanza del periodo, concludendo che:

[...] la differenza di materia in corpi dello stesso peso è minore della millesima parte di tutta la materia.¹²

Quantità di moto

Definizione II. La quantità di moto è la misura del medesimo ricavata dal prodotto della velocità per la quantità di materia.

Sulla familiare quantità di moto non c'è molto da dire, salvo che fu usata estensivamente anche da Cartesio, che ne espresse pure un principio di conservazione: tuttavia egli, non usando la massa come misura della quantità di materia, arrivò a delle leggi sugli urti completamente errate.

Inerzia

Definizione III. La forza insita [vis insita] della materia è la sua disposizione a resistere; per cui ciascun corpo, per quanto sta in esso, persevera nel suo stato di quiete o di moto rettilineo uniforme.

Questa è forse tra le definizioni quella che lascia più incuriosito il lettore moderno: l'inerzia, intesa come proprietà cinetica della massa, viene chiamata *forza*.

¹¹ L'accelerazione di gravità non è costante in ogni punto della superficie terrestre, fatto noto grazie alle spedizioni dei contemporanei J. Richer ed E. Halley.

¹² Libro III, Proposizione VI.

Premettendo che Newton usa sempre correttamente il concetto in tutta la sua opera, non trattando mai questa “forza” al pari delle altre forze, cerchiamo di comprendere perchè decida di usare una simile parola.

Nella filosofia aristotelica per muovere un corpo è sempre necessaria una forza; l'inerzia della materia è proprio la sua proprietà di tendere alla quiete quando non è soggetta ad alcuna forza.

Se ci caliamo nel linguaggio dell'epoca, è quindi comprensibile la scelta di Newton, ed è inoltre giustificata dalle impressioni quotidiane (per muovere un oggetto o modificarne il moto dobbiamo vincere una sua “forza” che tende a farlo restare nel suo stato). Tuttavia, come già detto, questo non genera alcuna confusione nel seguito, perchè si tratta di una *forza interna*, che non ha alcuna caratteristica in comune con le *forze esterne impresse*.

La parola “inerzia” era già stata usata da Keplero, ma praticamente col significato aristotelico; e pure da Cartesio nella sua corrispondenza con Mersenne, ove però ne criticava il significato, essendo per lui l'estensione l'unica caratteristica essenziale della materia. Newton fu pertanto accusato da Leibniz di aver plagiato Keplero; e in un primo tempo fu pensata un'aggiunta alla definizione (poi ritenuta superflua) che spiegasse:

Non intendo la forza d'inerzia di Keplero per la quale i corpi tendono alla quiete; [intendo piuttosto] la forza di rimanere nello stesso stato, sia esso la quiete o il moto.¹³

Forza

Definizione IV. Una forza impressa è un'azione esercitata sul corpo al fine di mutare il suo stato di quiete o di moto rettilineo uniforme.

[...] La forza impressa ha varie origini: l'urto, la pressione, e la forza centripeta.

Forse il merito principale di Newton è l'aver posto a fondamento della dinamica i nuovi concetti di massa e forza. Ma che cosa sono le forze? A questa domanda si apre un problema filosofico e metodologico. La filosofia cartesiana ebbe infatti molto successo proprio perchè spiegava i fenomeni della natura tramite urti tra corpuscoli, ed il fenomeno dell'urto, implicante un'azione istantanea tra due corpi che si toccano, è tra i più intuitivi e noti. Newton introducendo le forze fu accusato da molti dei suoi contemporanei di aver ripristinato le qualità occulte presenti nella filosofia aristotelica. Ma egli stesso rispose più volte a tali accuse, seguendo la linea di pensiero già vista sopra riguardo al metodo: al fine di comprendere le regolarità matematiche della

¹³ Annotazioni nella sua copia personale dei *Principia*.

natura non è necessario dare una definizione metafisica delle forze, ma è sufficiente studiare come esse agiscono. E se dunque so collegare gli effetti osservati alle forze che li causano con delle regole ben precise, non posso dire che esse siano occulte, semmai saranno occulte solo le loro cause. Ciò non significa che la ricerca di queste eventuali “cause prime” debba essere preclusa; ma si ribadisce piuttosto che non si devono formulare ipotesi non necessarie.

Non sapremo mai di preciso come Newton sia giunto a concepire queste entità astratte, tuttavia molti suggerimenti in proposito ci vengono dalle sue attività di alchimista: su scala microscopica gli atomi si combinano rispondendo a particolari forze attive, e pur sfuggendocene l'intima essenza, tentiamo di comprenderle tramite l'esperimento. Un'estensione di questa linea di pensiero su scala macroscopica potrebbe portare all'idea di forza utilizzata nei *Principia*.

Vedremo poi parlando della seconda legge, che la forza “elementare” che egli ha in mente è una forza impulsiva, non una che agisca in modo continuo.

Fin qui tutte le definizioni di Newton muovono da parole e concetti già noti ai contemporanei, ma cui egli attribuisce un nuovo significato. Parlando delle forze, egli le suddivide in tre tipi, e ritiene di non dover dire nulla riguardo all'urto e alla pressione. Tuttavia l'espressione *forza centripeta* è una novità, ed egli sceglie di dedicargli la definizione V, illustrandola con più esempi rispetto alle precedenti. Dopodiché, nelle definizioni VI, VII, e VIII passa in rassegna tre quantità (misure) della forza centripeta: assoluta, acceleratrice, motrice. Non è il caso di vedere in dettaglio tali definizioni, tuttavia esse ci forniscono l'occasione per far notare che non si deve ricercare troppa consecutività logica nei *Principia*: queste tre misure della forza centripeta per essere lette correttamente implicano l'aver già compreso a fondo il secondo principio, principio che però verrà annunciato più avanti!

LEGGI DEL MOTO

Precedenti illustri

Già dal nome *Leggi del moto*, come tra l'altro facemmo notare anche per il titolo dell'opera, le reminiscenze cartesiane sono esplicite: Cartesio infatti nei suoi *Principia Philosophiæ* enunciava tre *Leggi della natura*:

XXXVII. Prima legge della natura: *ogni cosa, per quanto è in essa, persevera sempre nel medesimo stato; e così, una volta che è in moto, continua sempre a muoversi [e il suo stato non muta se non per cause esterne].*

XXXIX. Seconda legge della natura: *ogni movimento di per sè è rettilineo; e pertanto quelle cose che si muovono in circolo tendono sempre ad allontanarsi dal centro della circonferenza che descrivono.*

XL. Terza legge della natura: *un corpo, se ne incontra un altro più forte, non perde niente del suo movimento; se però si urta con uno meno forte, perde tanto movimento, quanto ne trasferisce all'altro.¹⁴*

Notiamo che la terza vorrebbe esprimere la conservazione della quantità di moto, ma considerando Cartesio questa grandezza uno scalare, e non avendo il concetto di massa, tutti i discorsi che le appartengono sono assai confusi.

Anche Huygens dette un'impostazione matematica alla sua opera sull'orologio a pendolo, mettendo alla base del moto dei gravi tre ipotesi:

- I. *Se non vi fosse gravità, e l'aria non ostacolasse il moto dei corpi, allora ciascuno di essi, una volta in moto, proseguirebbe con velocità uniforme lungo una linea retta.*
- II. *Ora invero questo moto diventa, sotto l'azione della gravità, indipendentemente dalla sua origine, un moto composto, ove interviene sia il moto uniforme verso qualsiasi direzione, sia il moto verso il basso dovuto alla gravità.*
- III. *E, ciascuno di questi due moti può essere considerato separatamente, senza che l'uno ostacoli l'altro.¹⁵*

Ma veniamo ora alle tre leggi di Newton.

Prima legge

Ciascun corpo persevera nel proprio stato di quiete o di moto rettilineo uniforme, eccetto che sia costretto a mutare quello stato da forze impresse.

Come abbiamo visto, questa legge era ormai ben consolidata nella cultura dell'epoca, e lo stesso Newton la attribuisce a Galileo. Questo potrebbe indicare la conoscenza parziale che l'autore inglese aveva del toscano: se infatti è vero che questa legge sembra comparire in varie sue opere¹⁶, è vero anche che non le diede mai una formalizzazione compiuta, e nemmeno l'elevò a regola fondamentale di una nuova

¹⁴ Cartesio, *Principia Philosophia*, Parte II.

¹⁵ C. Huygens, *Horologium Oscillatorium*, Parte II.

¹⁶ Si discute tuttora sull'effettivo significato che Galileo attribuì all'inerzia: egli parla a volte d'inerzialità dei moti circolari, e l'inerzialità dei moti rettilinei potrebbe anche essere intesa come un'approssimazione locale di questo concetto (errato).

costruzione logica (un discorso analogo vale per Gassendi). Queste cose le fece invece Cartesio, che però divise l'enunciato in due parti, e questo potrebbe riflettere la mancanza di un approccio dinamico al problema; non bisogna inoltre dimenticare che parte della sua seconda legge è dedicata al moto circolare, e che tale moto rivestiva nella sua filosofia un ruolo in qualche modo speciale. Huygens, dal canto suo, sembra avere raggiunto una comprensione più completa, tuttavia i suoi predicati sono dei casi particolari (si riferisce a gravità ed attrito dell'aria); anche Robert Hooke, in relazione al suo modello planetario, enuncia il principio d'inerzia, ed è il primo che lo utilizza per dedurre la presenza di forze nelle traiettorie curve¹⁷.

Riguardo a Newton, si potrebbe obiettare che tale legge era già contenuta nelle definizioni III e IV. Tuttavia la legge viene enunciata così com'è in relazione al processo conoscitivo della filosofia naturale, che abbiamo descritto all'inizio: è una legge che mi permette di individuare delle forze osservando dei moti.

A molti fisici successivi questa legge apparse ridondante, in quanto non sembrerebbe altro che un caso particolare della seconda legge per $F = 0$. Vediamo subito perché non è proprio così.

Seconda legge

Il cambiamento di moto è proporzionale alla forza motrice impressa, ed avviene lungo la linea retta secondo la quale la forza è stata impressa.

Ecco dunque la sorpresa per un fisico contemporaneo: la legge qui enunciata non è la classica $\vec{F} = m\vec{a}$, ma piuttosto $\vec{F} = \Delta(m\vec{v})$! Il che potrebbe a prima vista sembrare assurdo, ma non è così: Newton si sta riferendo a forze impulsive, quelle che ora indicheremmo con $\vec{F}dt$.

Ecco dunque la risposta al quesito accennato nella prima legge: esse non sono equivalenti, perché nella prima ci si occupa di forze che agiscono (o meglio non agiscono) in modo continuo, e nella seconda di forze impulsive, il che si rende manifesto negli esempi esplicativi che accompagnano gli enunciati. Inoltre nel primo corollario in cui si usa la seconda legge, che tratta della regola di composizione del parallelogramma, si parla proprio di forze impulsive. Ciò non significa che Newton non avesse ben chiara la seconda legge nel modo in cui l'usiamo noi, tuttavia sceglie di dare la precedenza logica alle forze impulsive. Quando egli tratta di una traiettoria curvilinea causata da una forza continua¹⁸, parte prima da una poligonale causata da una serie di impulsi, e poi fa il passaggio al limite, aumentando all'infinito il numero di segmenti.

¹⁷ Si vedano più oltre i Commenti alla gravitazione universale.

¹⁸ Libro I. Proposizione I.

Ci si potrebbe chiedere il perché di una tale scelta. Probabilmente anche qui le ragioni sono da ricondursi al contesto culturale in cui Newton si trova ad operare: il concetto di attrazione (che è continua e a distanza) vide molto scettici i contemporanei, che però erano abituati a trattare di azioni impulsive e di urti.

Un ulteriore stimolo ad impostare in questo modo le due leggi potrebbe essere venuto dalla lettura delle ipotesi di Huygens: i due, pur avendo svariate idee contrastanti, nutrono sempre una profonda stima reciproca.

Questa seconda legge, pur essendo dunque strettamente legata alla prima, non era ancora stata formalizzata da nessuno con una simile chiarezza; Newton, come per la prima legge, ne attribuisce la scoperta a Galileo, ma valga quanto detto sopra, con l'ulteriore aggravante che in Galileo non è nemmeno presente un chiaro concetto di massa.

Terza legge

Ad ogni azione corrisponde una reazione uguale e contraria: ossia, le azioni di due corpi sono sempre uguali fra loro e dirette verso parti opposte.

Questa legge è opera originale di Newton, ed egli ne è consapevole non citando alcuna paternità precedente; vero è che si può intravedere qualcosa quando Cartesio parla di urti nella sua terza legge, ma il tutto è molto confuso. Dalla stessa matrice (lo studio degli urti) probabilmente la trasse Newton, ma l'averla elevata a legge universale ne mette in risalto la genialità.

Le conseguenze di questo pensare quando viene applicato alla gravitazione sono veramente rilevanti: il fatto che non solo la Terra attragga un corpo a se ma che pure il corpo attragga la Terra, o altrimenti il fatto che non solo il Sole attragga i pianeti ma che i pianeti stessi attraggano il Sole e si attraggano a vicenda, è rivoluzionario.

Tuttavia sono implicati dei problemi in questo terzo principio: innanzitutto l'interazione reciproca non necessita d'alcun mezzo, e questo è ciò che impensierì specialmente Huygens, che dopo aver assistito allo smantellamento dei vortici cartesiani, ne propose un sistema modificato alla Royal Society affinché risultasse in accordo con le leggi di Newton (d'altronde per lui era difficilmente concepibile uno spazio interplanetario vuoto, per il fatto che la sua luce ondulatoria necessitava di un mezzo che oscillasse). Inoltre il pensare ad un'azione e reazione simultanee implica che esista un qualcosa che viaggi a velocità infinita, altro fatto problematico che verrà affrontato in un diverso contesto, e con esiti tuttora insuperati, nella Relatività Generale di Einstein.

L'aver enunciato queste tre leggi, permette a Newton di sviluppare il suo programma di ricerca delle forze della natura: la prima legge ci permette di capire osservando un moto se stanno agendo delle forze sul corpo, la terza di dire se queste forze sono "reali" nello spazio assoluto o se sono dovute al nostro punto d'osservazione, la seconda infine ci permette di quantificare tali forze. Una volta trovate le relazioni matematiche siamo pronti poi per spiegare molti altri fenomeni simili.

DAI FENOMENI ALLA GRAVITAZIONE UNIVERSALE

Scopo di questa sezione è di illustrare come Newton applichi le sue regole della filosofia e i suoi principi naturali per trovare la legge di gravitazione universale. Insomma un esempio di applicazione (e che esempio!) della parte induttiva del suo filosofare.

Nei libri precedenti ho trattato i Principi della Filosofia, non filosofici tuttavia, ma soltanto matematici, a partire dai quali, però, si può discutere di cose filosofiche. [...] Rimane da insegnare, a partire dai medesimi principi, l'ordinamento del sistema del mondo.¹⁹

FENOMENI

Qui di seguito sono presentati tutti i fatti osservativi e sperimentali che Newton usa per ricavare la legge di gravitazione universale: essi in realtà non si limitano ai soli fenomeni elencati da Newton all'inizio del terzo libro.

Fenomeno I [II]. *I satelliti di Giove [Saturno] descrivono orbite quasi circolari centrate su Giove [Saturno]; i raggi vettori condotti al centro del pianeta spazzano aree proporzionali ai tempi; supposte le stelle fisse in quiete, detto T il periodo, ed r la distanza dal centro del pianeta, vale $T \propto r^{3/2}$.*

Fenomeno III. *I cinque pianeti Mercurio, Venere, Marte, Giove e Saturno cingono il Sole con le proprie orbite.*

Fenomeno IV. *Supposte le stelle fisse in quiete, detti T i periodi planetari (anche della Terra), ed r le distanze dal Sole, vale $T \propto r^{3/2}$.*

Fenomeno V. *I cinque pianeti primari, condotti i raggi al Sole, spazzano aree proporzionali ai tempi.*

¹⁹ Introduzione al terzo libro.

Fenomeno VI. *La Luna, condotto il raggio al centro della Terra, spazza aree proporzionali ai tempi.*

Quiete degli afeli planetari. *Gli afeli delle orbite dei cinque pianeti sono (quasi) in quiete.*

Moto dell'apogeo lunare. *Il moto dell'apogeo della Luna è lentissimo, di 3°3' in avanti ad ogni rivoluzione.*

Esperienze su pendoli e gravi. *Vi sono varie relazioni caratteristiche riguardanti la caduta dei gravi ed il moto dei pendoli, indagate sperimentalmente da Hygens e Newton stesso.*

PROPOSIZIONI MATEMATICHE SUL MOTO DEI CORPI

Le proposizioni matematiche qui riportate sono quelle di cui si servirà Newton nel suo argomentare successivo; esse sono contenute tutte nel primo libro, eccetto l'ultima che è nel secondo. Per brevità sono state tutte schematizzate in *Ipotesi* \Rightarrow *Tesi*, omettendo le dimostrazioni. Non essendo questo un saggio matematico, non si ricerchi qui la perfezione logica: gli enunciati ricalcano semplicemente la presentazione di Newton²⁰.

I. PROPOSIZIONE II.

*P si muove lungo una linea curva su un piano;
S in quiete o in moto rettilineo uniforme;
il raggio vettore \overline{PS} spazza aree proporzionali ai tempi.* $\left. \vphantom{\begin{array}{l} P \text{ si muove lungo una linea curva su un piano;} \\ S \text{ in quiete o in moto rettilineo uniforme;} \\ \text{il raggio vettore } \overline{PS} \text{ spazza aree proporzionali ai tempi.} \end{array}} \right) \Rightarrow$ *Su P agisce una forza centripeta diretta verso S.*

I. PROPOSIZIONE III.

*L si muove attorno a T, con \overline{LT} che spazza aree prop. ai tempi;
T si muove di moto qualunque.* $\left. \vphantom{\begin{array}{l} L \text{ si muove attorno a T, con } \overline{LT} \text{ che spazza aree prop. ai tempi;} \\ T \text{ si muove di moto qualunque.} \end{array}} \right) \Rightarrow$ *Su L agisce una forza*
 $\vec{F} = \vec{F}_c + \vec{F}_T$

ove \vec{F}_c è una forza centripeta diretta verso T, e \vec{F}_T è la risultante delle forze agenti su T.

I. PROPOSIZIONE IV. & COROLLARIO I.

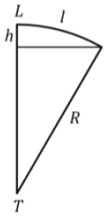
*P in moto circolare unif.
con centro C, raggio r,
velocità v, periodo T.* \Rightarrow $\left(\begin{array}{l} \text{Su P agisce una F centripeta diretta verso C;} \\ F \propto \frac{v^2}{r}. \end{array} \right.$

²⁰ Il lettore interessato alla matematica newtoniana può consultare i *Mathematical Papers* a cura di T.D.Whitehead.

COROLLARIO 6.

$$\text{Se } T \propto r^{3/2} \Rightarrow F \propto \frac{1}{r^2}$$

COROLLARIO 9.



Su L agisce una forza centripeta F diretta verso T;

se L descrive intorno a T un moto circolare uniforme, allora in Δt percorre l'arco l ; se L cade con moto rettilineo verso T, allora in Δt percorre il segmento h .

$$\Delta t \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{2R}{l} = \frac{l}{h}$$

I. PROPOSIZIONE XLV.

COROLLARIO I.

La forma dell'orbita di un corpo sottoposto alla forza F sia un'elisse rotante, che precede cioè attorno a un suo fuoco; l'angolo descritto da un abside dopo una rivoluzione sia detto θ .

$$\left. \begin{array}{l} \text{L'orbita rotante sia quasi circolare;} \\ F \propto r^n; \\ \frac{2\pi + \theta}{2\pi} = \frac{m}{n}. \end{array} \right) \Rightarrow F \propto r^{\frac{n^2}{m^2} - 3}$$

COROLLARIO 2.

Un corpo è inizialmente sottoposto ad una forza centripeta $F_0 \propto 1/r^2$ con centro C, e descrive una traiettoria ellittica con fuoco in C.

Se modifico la forza in $F = F_0 + f$, conoscendo f posso calcolare il conseguente moto absidale. E viceversa.

I. PROPOSIZIONE LXIX.

Sistema di più punti materiali A,B,C,D,...

$$\left. \begin{array}{l} A \text{ genera un campo accelerativo } |\vec{A}_A| \propto 1/r_A^2 \\ B \text{ genera un campo accelerativo } |\vec{A}_B| \propto 1/r_B^2 \end{array} \right) \Rightarrow \frac{A_A}{A_B} = \frac{m_A}{m_B}$$

I. PROPOSIZIONE LXXIV.

Ogni particella componente una sfera omogenea (di centro C) attrae i punti circostanti con una forza inversamente proporzionale alla distanza da essa. \Rightarrow Dato un punto materiale P all'esterno della sfera, esso è attratto con $F \propto 1/\overline{CP}^2$

Corol. 3. *Vale anche il viceversa.*

II. PROPOSIZIONE XXIV.

Sia dato un pendolo di lunghezza l , periodo nel vuoto T , e massa m ; e detta W la forza peso, si ha che: fissata $l \Rightarrow m \propto WT^2$

Corol. 1. *Fissati l e $T \Rightarrow m \propto W$*

PROPOSIZIONI FISICHE SUL SISTEMA DEL MONDO

In questa parte ripercorreremo la scalata di Newton verso la legge di gravitazione universale. Per far ciò, citeremo testualmente le prime proposizioni del libro III, e ne forniremo una schematica dimostrazione sulla base dei fenomeni e delle proposizioni matematiche appena citate.²¹

Si partirà caratterizzando le forze che attraggono i satelliti, i pianeti e la Luna (P. 1, 2, 3); si mostrerà poi (P.4) che la forza che attrae la Luna altro non è che la forza di gravità sperimentata dai corpi sulla superficie terrestre, che si estenderà dunque anche agli altri corpi celesti (P.5). Resta da dimostrare che l'attrazione che sperimenta qualsiasi corpo a una data distanza da un pianeta è proporzionale alla massa del corpo (P.6), ma per la reciprocità della forza, anche alla massa del pianeta. La gravitazione si estende dunque ad ogni corpo (P.7), ed anche il campo generato dai pianeti (sfere) è causato dal fatto che ogni loro particella gravita rispetto alle altre. La Prop. 8, non riportata, giustifica grazie a quest'ultimo fatto l'attrazione tra due sfere gravitanti.

²¹ Nei rimandi alle proposizioni matematiche si usa la seguente convenzione: "libro.proposizione.corollario".

III. PROPOSIZIONE I.

Le forze per effetto delle quali i pianeti che ruotano intorno a Giove [Saturno] sono continuamente distratti dai moti rettilinei, e sono trattenuti nelle proprie orbite, tendono al centro di Giove [Saturno] e sono inversamente proporzionali ai quadrati dei luoghi dal medesimo centro.

$$\begin{array}{l} \text{Fenomeno I [II]} \xrightarrow{\text{I.P2,I.P3}} \\ \xrightarrow{\text{I.P4,C6}} \end{array} F \text{ centripete dirette verso il centro del pianeta} \\ F \propto \frac{1}{r^2}$$

III. PROPOSIZIONE II.

Le forze per effetto delle quali i pianeti primari sono continuamente distratti dai moti rettilinei, e sono trattenuti nelle proprie orbite, tendono al Sole, e sono inversamente proporzionali ai quadrati delle distanze dal centro dello stesso.

$$\begin{array}{l} \text{Fenomeno V} \xrightarrow{\text{I.P2}} \\ \text{Fenomeno IV} \xrightarrow{\text{I.P4,C6}} \\ \dots \text{oppure} \dots \\ \text{Quiete degli afeli} \xrightarrow{\text{I.P45,C1}} \end{array} \Rightarrow F \text{ centripete dirette verso il Sole} \\ \Rightarrow F \propto \frac{1}{r^2}$$

III. PROPOSIZIONE III.

La forza per effetto della quale la Luna è trattenuta nella propria orbita, tende verso la Terra, ed è inversamente proporzionale al quadrato della distanza dei luoghi dal centro della stessa.

$$\begin{array}{l} \text{Fenomeno VI} \xrightarrow{\text{I.P2,I.P3}} \\ \text{Moto dell'apogeo lunare} \xrightarrow{\text{I.45.C1,I.45.C2}} \end{array} F \text{ centripeta diretta verso la Terra} \\ F \propto \frac{1}{r^2 \left(1 + \frac{4}{124}\right)}$$

Tale dipendenza di F si avvicina molto più a $\frac{1}{r^2}$ che a $\frac{1}{r^3}$. Consideriamo dunque trascurabile questa piccola deviazione, che verrà giustificata a posteriori come dovuta all'influenza del Sole.

III. PROPOSIZIONE IV.

La Luna gravita verso la Terra, ed è sempre distratta dal moto rettilineo e trattenuta nella sua orbita dalla forza di gravità.

a) Grandezze note: circonferenza terrestre $c \Rightarrow r_T = c/2\pi$; distanza media della

Terra dalla Luna $R = 60r_T$; periodo di rotazione della Luna T.

Dato un piccolo $\Delta t = 1s \xrightarrow{\text{I.P4,C9}}$ la caduta verso la Terra di un corpo orbitante assieme alla Luna è di $h \approx \frac{l^2}{2R} = \frac{(2\pi\frac{\Delta t}{T})^2}{2R}$.

$$\text{III. P3} \Rightarrow F(r_T) \propto \frac{1}{r_T^2}; F(R) \propto \frac{1}{R^2} = \frac{1}{3600r_T^2} \Rightarrow \text{Acc}(r_T) = 3600\text{Acc}(R) \Rightarrow$$

\Rightarrow nel medesimo $\Delta t = 1s$ la caduta di un corpo sulla superficie terrestre è di $h_T = 3600h = 15\text{piedi}, 1\text{pollice}, \frac{1}{4}\text{linea}$.

b) Un pendolo sulla superficie terrestre, per avere periodo di 1s, deve avere una lunghezza l fissata; se lascio cadere il corpo che era legato al pendolo, e chiamo h_G la sua caduta in 1s, osservo che vale:

$$\frac{h_G}{l/2} = \left(\frac{2\pi}{2}\right)^2 \Rightarrow h_G = \frac{\pi^2}{2}l = 15\text{piedi}, 1\text{pollice}, 1\frac{7}{9}\text{linea}.$$

c) Dunque $h_T = h_G \Rightarrow \text{Acc}(\text{lunare}) = \text{Acc}(\text{gravitazionale}) \xrightarrow{\text{Regola1,Regolaz}}$ la forza che trattiene la Luna nella propria orbita è quella stessa forza che siamo soliti chiamare gravità.

III. PROPOSIZIONE V.

I pianeti che ruotano intorno a Giove gravitano verso Giove, e quelli intorno al Sole verso il Sole, e dalla forza propria di gravità sono sempre distratti dai moti rettilinei e sono trattiene entro orbite curvilinee.

- a) Le forze causanti i moti:

dei satelliti di Giove (Sat.)	(III. P1))	sono della stessa natura
dei pianeti intorno al Sole	(III. P2)		
della Luna intorno alla Terra	(III. P3)		
- b) La forza causante il moto lunare è la gravità (III.P4).

a) $\xrightarrow{\text{Regola 2}}$ la forza causante il moto dei satelliti e dei pianeti è anch'essa la gravità.

Corol. 1. La gravità appartiene a tutti i pianeti: per la terza legge del moto, infatti, i pianeti primari graviteranno verso i propri satelliti, la Terra verso la Luna, il Sole verso i pianeti primari.

Corol. 2. La gravità appartenente a ciascun pianeta è inversamente proporzionale al quadrato delle distanze dal centro dello stesso.

Corol. 3. Per i C.1, C.2, tutti i pianeti gravitano fra loro mutuamente.

III. PROPOSIZIONE VI.

Tutti i corpi gravitano verso i singoli pianeti, ed i loro pesi verso un qualunque medesimo pianeta, ad uguali distanze dal suo centro, sono proporzionali alla quantità di materia contenuta in ciascuno di essi.

- a) Sulla Terra si prendano due corpi di diverso materiale 1 e 2, dello stesso peso, e si appendano a fili della stessa lunghezza:

$$\left. \begin{array}{l} W_1 = W_2 \\ l_1 = l_2 = l \end{array} \right) \xrightarrow{\text{si osserva}} T_1 = T_2 \xrightarrow{\text{II.P24.C1}} \frac{m_1}{m_2} = \frac{W_1}{W_2}$$

- b) Si sollevi un corpo C all'altezza della Luna, e si lasci cadere con essa

$$\xrightarrow{\text{a), III.P4}} \frac{m_C}{m_L} = \frac{W_C}{W_L}, \text{ come sulla superficie.}$$

- c) Siano 1 e 2 due satelliti di Giove: allora la "forza accelerativa" che li attrae è (III.P1)

$$A_1 \propto 1/r_1^2, \quad A_2 \propto 1/r_2^2. \text{ Mettendomi alla stessa altezza } r_1 = r_2 \Rightarrow A_1 = A_2$$

$$\xrightarrow{W=mA} \frac{W_1}{W_2} = \frac{m_1}{m_2}.$$

- d) Si può ripetere il medesimo ragionamento per corpi gravitanti sul Sole.

III. PROPOSIZIONE VII.

La gravità appartiene a tutti i corpi, ed è proporzionale alla quantità di materia in ciascuno.

È già dimostrata parzialmente nella precedente: resta da estendere il ragionamento ai pianeti; ma ciò discende direttamente da III.P5.C3 con I.P69.

Inoltre dalla I.P74 discende che la gravità dei pianeti deriva dalla gravità delle loro particelle costituenti.

Commenti

Notiamo come in nessuna delle precedenti proposizioni Newton abbia mai utilizzato la prima legge di Keplero, nonostante avesse risolto il problema (diretto e inverso) nel primo libro. Questo perchè le orbite dei pianeti sono sì ellittiche, ma quasi circolari: non sarebbe stato saggio fondare una legge universale su di un'approssimazione che avrebbe potuto rivelarsi fallimentare. Infatti piccole deviazioni da tale traiettoria portano a sostanziali modifiche dell'andamento di F con r . Basti pensare (ed è mostrato nel libro I) che se il Sole non fosse in un fuoco, ma fosse al centro dell'ellisse, si otterrebbe una forza elastica direttamente dipendente da r .

Come invece abbiamo visto egli utilizza la terza legge e la costanza della velocità areolare, fatti assodati con maggior accuratezza. Per essere più certo dei suoi asseriti,

inoltre, mostra che ogni piccola variazione dalla legge dell'inverso del quadrato porterebbe ad un notevole moto degli afeli; quest'ultimo modo è quello utilizzato per la Luna, che ha movimenti molto più irregolari degli altri corpi celesti considerati.

L'esclusione dei moti ellittici dalle ipotesi è un fatto veramente notevole, vista l'importanza storico-culturale che aveva una tale ipotesi; inoltre la genesi dei *Principia* ruota proprio intorno al "problema di Kelpero". Ma vediamo più estesamente come nasce questo problema.

La rivoluzione copernicana diede nuove descrizioni cinematiche del sistema cosmologico, ma la ricerca delle cause dei moti in questi nuovi modelli con la fisica aristotelica portava soltanto ad assurdi; era necessaria una riforma generale della dinamica. Keplero stesso tentò di dare una spiegazione ai moti planetari, introducendo un'*anima motrix* del Sole ed una sua interazione magnetica con i pianeti; anche G.A. Borelli diede una spiegazione dei moti ellittici, che però, come quella kepleriana, prevedeva un'*anima motrix* accoppiata stavolta ad una tendenza centrifuga. Ma con l'avvento del meccanicismo cartesiano, queste forze "occulte" non potevano trovare alcun consenso (come d'altronde si vide con la stessa gravità di Newton). Il primo a riproporre delle forze non riconducibili ad urti corpuscolari fu Robert Hooke; egli scrive:

[Questo nuovo Sistema del Mondo] si basa su tre ipotesi:

in primo luogo che tutti assolutamente i corpi celesti possiedono un'attrazione o forza gravitazionale verso i loro propri centri, per mezzo della quale attirano non solo le loro stesse parti ed impediscono a queste di allontanarsi da essi, [...] ma che essi attirano in effetti anche tutti gli altri corpi celesti che si trovano nella sfera della loro attività; [...].

La seconda ipotesi è questa: che tutti assolutamente i corpi dotati di un moto semplice e rettilineo continueranno ad avanzare in linea retta, finchè, da qualche altra forza efficace, non vengono fatti deviare e curvare in un moto descrivente un circolo, un'elisse o qualche altra curva composta.

La terza ipotesi è: queste forze d'attrazione hanno un effetto tanto più potente, quanto più il corpo su cui agiscono è vicino al loro centro. Ora io non ho ancora verificato sperimentalmente quali siano questi diversi valori; [...].²²

Alla luce della teoria di Newton queste ipotesi appaiono davvero eccezionali. Con Newton stesso si aprì una controversia sulla paternità della gravitazione universale, sulla quale non è necessario soffermarci. Osserviamo invece, a vantaggio di Newton, alcuni fatti riguardanti la prima ipotesi:

²² Robert Hooke, *An attempt to Prove the Motion of the Earth from Observation*, 1674.

l'attrazione di Hooke è diretta verso i centri dei pianeti: fu merito di Newton il far derivare ques'attrazione centrale dalle attrazioni dei singoli corpuscoli costituenti;

l'attrazione di Hooke possiede una sfera di attività, presumibilmente finita; l'estendere la medesima causa del moto planetario al moto delle comete, porta invece Newton a non dare alcun limite spaziale alla forza gravitazionale, che si fa sempre più debole fino a distanze infinite.

Tuttavia è la seconda ipotesi che ha il peso maggiore: Hooke è il primo ad utilizzare a fondo il principio d'inerzia, comprendendo cioè che una traiettoria curva implica una forza diretta verso il centro di curvatura. E se non si può dire che Hooke abbia tutti i meriti che pretenderebbe gli fossero riconosciuti, questo fatto tuttavia è di un'importanza straordinaria nello sviluppo dei *Principia*. Nonostante le pretese di priorità che Newton avanzò in seguito alla controversia, ci sono molte prove che egli durante tutto il suo periodo giovanile continuasse a pensare ai conati cartesiani, e che pensasse ai moti curvi come ad una sorta di equilibrio tra una forza attrattiva ed una tendenza ad allontanarsi dal centro. Pare dunque che quell'enorme inversione concettuale da conati centrifughi a forze centripete sia proprio da attribuirsi a Hooke.

Ma è l'ultima ipotesi quella che ci riporta al punto da cui eravamo partiti: la dipendenza della forza attrattiva dalla distanza dai centri. In questo passo Hooke afferma di non averla ancora trovata, ma parla soltanto di una sua decrescenza; più avanti, nella corrispondenza con Newton, egli stesso proporrà come ipotesi la decrescenza con $1/r^2$, ma ammettendo di non essere in grado di trovare una dimostrazione soddisfacente, si rimette alle maggiori doti matematiche del professore lucasiano.

Specifichiamo meglio il problema: per un moto circolare uniforme, sia Newton che Huygens avevano trovato, anni prima, che vale la relazione $F \propto v^2/r$ (con F che all'epoca rappresentava ancora una tendenza centrifuga); combinando questa relazione con la terza legge di Keplero si ottiene immediatamente $F \propto 1/r^2$. Ma i moti dei pianeti non sono così semplici: un moto kepleriano può accordarsi ad una forza centrale diretta verso il Sole? E se sì, con quale dipendenza dalla distanza? Questo era sostanzialmente il problema che Christopher Wren pose a Hooke e Halley; problema che quest'ultimo rigirò a Newton, che nel frattempo era già pervenuto autonomamente ad una soluzione. E fu proprio Halley, sbalordito dai risultati raggiunti, a spronarlo nell'avanzamento dei lavori e a pubblicare i *Principia*.

Dunque il problema di Keplero (sia diretto che inverso) è quello che storicamente ha dato il via a tutta l'elaborazione della teoria, e la sua risoluzione occupa una buona parte del primo libro. Il fatto che Newton, dopo tutto ciò, abbia scelto di ometterlo nella dimostrazione della gravitazione, per preferire delle vie più sicure e certe, denota ancora una volta la sua grandezza e lucidità.

CONCLUSIONI

Riguardo le basi dell'opera newtoniana, abbiamo visto che egli riceve fondamentali apporti dalla cultura filosofico-scientifica del suo tempo, e che molti concetti esposti si comprendono a fondo soltanto calandoli in quel contesto culturale. Ciò non toglie nulla alla straordinarietà del suo contributo, che segna certamente un punto di svolta nella storia della scienza.

Con Newton assistiamo alla formalizzazione completa ed esauriente di tutte le conoscenze accumulate nel processo detto "rivoluzione scientifica", per arrivare infine alla sua più grande conquista: la legge di gravitazione universale. L'immensa varietà di fenomeni che essa riesce a spiegare (studio di maree, comete, moti lunari, ecc.) rappresentò agli occhi dei contemporanei la sua più eccezionale conferma.

Per sottolineare la grandezza del suo genio, facciamo notare come egli avesse un notevole intuito, e la capacità non comune di concentrarsi sul problema principale rendendo trascurabili le deviazioni secondarie; una capacità forse da mettere in relazione col suo pensiero matematico "infinitesimale". Infatti si potrebbe dire che il crollo del sistema Tolemaico, e la ricerca di nuovi modelli (cinematici), furono causati dall'osservazione dei dettagli; ma la spiegazione gravitazionale (dinamica) del nuovo modello eliocentrico fu ottenuta proprio trascurando i dettagli!

Se infatti tutti i corpi celesti si perturbano mutuamente, come fare a definire delle orbite chiuse e a definire dei periodi? Gli afeli dei pianeti non sono proprio in quiete, men che meno quello lunare, un fatto però su quale poggia l'estensione della gravità alla fisica celeste; Newton usa nella dimostrazione una quiete che non c'è, e giustifica a posteriori l'irregolarità. Quando vuole dimostrare che tutti i corpi celesti agiscono l'un l'altro, chiama a testimoni le perturbazioni vicendevoli di Giove e Saturno; perturbazioni che però con gli strumenti dell'epoca non erano visibili.

Non sorprende dunque se, almeno per tutta la prima metà del XVIII secolo, la figura di Newton andò ricoprendosi man mano di un'aura semidivina: egli era l'eroe che con la sola ragione aveva svelato alcuni dei più grandi arcani della natura.

Ma più che elogiare il suo lavoro di sistematizzazione del sapere ed il suo intuito geniale, bisogna riconoscere la svolta che la sua opera ha segnato per le generazioni future, aprendo nuove vie che erano prima impercorribili. Il suo metodo, che considera le verità dell'umana scienza come provvisorie e sempre subordinate all'esperienza, è forse l'eredità più preziosa che ci ha lasciato per proseguire in quel difficoltoso dipanamento del grande mistero che ci circonda.

BIBLIOGRAFIA

Isaac Newton, *Principi matematici della Filosofia naturale*, traduzione di A. Pala, UTET, 1965. [Ogni citazione dei *Principia* è stata tratta da questa traduzione.]

Isaac Newton, *The Principia – Mathematical Principles of Natural Philosophy*, a new translation by I. Bernard Cohen & Anne Whitman, Preceded by *A guide to Newton's Principia*, by I. Bernard Cohen, University of California Press, 1999.

Niccolò Guicciardini, *Newton*, Carocci editore, 2011.

Thomas S. Kuhn, *La rivoluzione copernicana*, Einaudi, 2000

Controllo citazioni:

René Descartes, *Opere 1637-1649*, Bompiani, 2009

Christiaan Huygens, *Horologium Oscillatorium*, Parigi, 1673 (Google Books)