Tesina di laurea triennale

Introduzione alla Teoria dei Giochi

Giochi non cooperativi

Laureando: Stefano Favero

Relatore: Prof. Sandro Zampieri

Università degli studi di Padova
Facoltà di Ingegneria
Corso di Laurea Triennale in Ingegneria dell'Informazione

Contents

1 Introduzione

1.1 Cos'è la Teoria dei Giochi

Quando facciamo menzione della c.d. Teoria dei Giochi facciamo riferimento alla disciplina che studia come i decisori (*giocatori*) si comportano dal punto di vista strategico, ossia analizza come i diversi giocatori interagiscono avendo degli obiettivi comuni, ma non identici, diversi ma soprattutto conflittuali. Si tratta di una materia di studio assai vasta, che spazia dal campo economico e finanziario a quello ingegneristico, dalla politica al campo strategico-militare, dalla psicologia alla biologia e allo sport, in cui possono essere presenti aspetti anche aleatori e il ruolo centrale è svolto dal concetto di soluzione. Quest'ultimo, come preciseremo successivamente, è l'individuazione di una o più *strategie*, da parte dei diversi giocatori che riflettano una *razionalità* ed *intelligenza* dei giocatori stessi.

Possiamo individuare due diverse finalità della Teoria dei Giochi. La prima è di spiegare in termini matematici perché, in certe situazioni conflittuali, i soggetti coinvolti (giocatori) utilizzino determinate strategie e certe tattiche; si tratta di una mera interpretazione della realtà. La seconda finalità è di tipo previsionale e consiste nel individuare quali situazioni si potrebbero generare dall'interazione dei soggetti. Quest'ultima finalità è l'oggetto della seguente tesi.

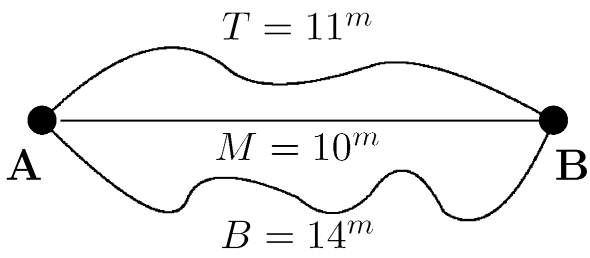
Sostanzialmente, come nelle altre teorie scientifiche, la Teoria dei Giochi si basa sulla creazione di un modello relativo ad un dato problema.

Il nome TEORIA DEI GIOCHI deriva dal libro *Theory of Games and Economics Behavior* di von Neumann e Morgenstern, pubblicato nel 1944.

Example 1.1. (Congestione)

Per andare da A a B sono possibili tre strade con differenti tempi di percorrenza, che dipendono dalla lunghezza e da altri fattori, in particolare dal traffico, per cui se più persone scelgono la stessa strada il corrispondente tempo aumenta. In questo caso l'obiettivo dei giocatori è comune (ma non è identico, in quanto ognuno vuole minimizzare il proprio tempo di percorrenza), ma la cooperazione, nella realtà, è impossibile per la difficoltà di accordarsi su chi deve percorre le strade più lente.

Figure 1.1: Rappresentazione del gioco della congestione



1.2 L'ipotesi di razionalità

Abbiamo già accennato che la Teoria dei Giochi si basa su alcune ipotesi che caratterizzano il modo di agire e pensare degli individui. In sintesi le ipotesi possono esprimersi dicendo che gli individui che interagiscono in un problema decisionale si suppone siano *intelligenti* e *razionali.* Questi due termini hanno significato ben determinato, ma senza entrare in troppi dettagli, ci basta precisare che individuo *razionale* è colui che è in grado di ordinare le sue preferenze su un insieme di risultati, e che queste preferenze soddisfano un insieme di assiomi (*assiomi della razionalità* di von Neumann e Morgenstern)[1].

Quando parliamo di "ordine delle preferenze" facciamo riferimento a due risultati x e y (esempio: $x = \textit{dispone di}\, 4000€$, e $y = \textit{avere un computer nuovo}$) e ad un decisore che è sempre in grado di dire: se x è meglio di y ($x \succ y$), o y è meglio di x ($x \prec y$), oppure se sono allo stesso livello ($x \sim y$). A questo punto, un individuo razionale assegnerà un valore di utilità ad ogni risultato che possa derivare dalle decisioni congiunte dei vari decisori, ossia ai vari profili di strategie; così, orienterà le sue scelte in modo da massimizzare la propria utilità. Infine, il decisore abbiamo detto che debba essere anche *intelligente*, ossia con una capacità logica di riconoscere le azioni necessarie per massimizzare la propria utilità, ossia proprio per agire in modo razionale.

1.3 Tipologie di giochi

La Teoria dei Giochi come accennato precedentemente, permette di trattare una vastissima gamma di situazioni competitive. E' naturale quindi che vengano introdotte delle sottocategorie di giochi per poter modellizzare al meglio le situazioni che si vengono a creare. Di seguito vengono brevemente discusse le principali.

[1] Precisiamo che su tali assiomi della razionalità vi è stato un dibattito articolato e di lunga data; tuttavia si tratta di un argomento che è più appropriato trattare in un corso di teoria delle decisioni.

1.3.1 Giochi cooperativi e non cooperativi

Un gioco è *cooperativo* se i giocatori stipulano accordi vincolanti tra loro, al fine di aumentare la propria utilità. Questo è possibile ovviamente solo quando gli interessi dei giocatori non sono in diretta oposizione tra loro. Spesso si assume che la semplice comunicazione tra i giocatori sia permessa solo nei giochi cooperativi e si parli invece di gioco *non cooperativo* quando questa non è permessa.

1.3.2 Giochi simultanei e sequenziali

I *giochi simultanei* modellizzano situazioni in cui i giocatori applicano le loro strategie simultaneamente, o se non viene soddisfatto il concetto di "simultaneamente" in termini temporali, per lo meno l'ultimo giocatore non conosce la strategia adottata dagli altri giocatori nell'ultimo "turno di azioni". Al contrario, i *giochi sequenziali* o *dinamici*, sono giochi in cui l'ultimo giocatore è in possesso di una qualche informazione riguardante le azioni dei giocatori precedenti. Il gioco *morra cinese* è un esempio di gioco simultaneo, mentre il gioco degli *scacchi* è un esempio di gioco sequenziale.

1.3.3 Giochi ad informazione perfetta ed imperfetta

Un gioco si dice che è ad *informazione perfetta* se tutti i giocatori conoscono le azioni precedentemente compiute da tutti gli altri giocatori. Quindi solamente i giochi sequenziali possono appartenere a questa categoria poichè nei giochi simultanei i giocatori non possono essere a conoscenza delle azioni "correnti" degli altri giocatori. Il concetto di informazione perfetta è spesso confuso con quello di *informazione completa*. Quest'ultimo concetto richiede che tutti i giocatori siano a conoscenza delle possibili strategie a disposizione di ogni giocatore e delle utilità ricavabili da esse, ma non necessariamente dell'azione che ogni giocatore ha intrapreso.

1.3.4 Giochi a somma zero e a somma non zero

Nei *giochi a somma zero* la somma delle vincite di tutti i giocatori, per ogni combinazione di strategie, risulta sempre zero. I giochi a somma zero modellano tutte quelle situazioni conflittuali in cui la contrapposizione dei due giocatori è totale: la vincita di un giocatore coincide esattamente con la perdita dell'altro. Al contrario, in un *gioco a somma non zero*, un guadagno per un giocatore non implica per forza una perdita per un altro giocatore.

1.4 Soluzione di un gioco

Posto che la descrizione di un gioco comprende i vincoli con cui i giocatori si trovano a dover fare i conti, gli interessi dei giocatori (che vengono espressi dalla loro funzione di utilità), ma non specifica quali azioni i giocatori prenderanno, è necessario specificare che cosa sia una soluzione di un gioco (o meglio come risolverlo). Dato che le variabili decisionali non dipendono da un unico giocatore, risolvere un gioco significa fornire le indicazioni ad uno o più giocatori, eventualmente tutti sulle strategie da adottare.

La soluzione di un gioco è quindi una descrizione sistematica dei risultati che possono essere tratti da un determinato tipo di gioco, partendo dalla ipotesi che i giocatori siano ovviamente razionali e intelligenti.

2 Definizione di gioco e sua rappresentazione

2.1 Gioco strategico

Un gioco strategico è un modello di interazione tra decisori, detti *giocatori*, dove ciascuno ha un insieme di possibili *azioni* o *strategie*, ossia pianifica le proprie azioni in modo definitivo e simultaneo. Un gioco strategico è costituito da pochi e semplici ingredienti fondamentali. Vi è un insieme costituito da N *giocatori*, ciascuno dei quali dispone di un insieme $A^i = \{a^i_1, a^i_2, ..., a^i_{n_i}\}$ di n_i possibili *azioni* o *strategie*.

Definition 2.1. *Si chiama strategia del giocatore i una funzione σ_i che assegna al giocatore i una mossa per ogni possibile situazione del gioco.*

Se ciascun giocatore i sceglie una strategia $a^i_k \in A^i$, si ha un *profilo*, ovvero una N-pla di strategie, $\mathbf{a} = (a^1_{k_1}, a^2_{k_2}, ..., a^N_{k_N})$, cui corrisponde un *risultato*. Ciascun decisore ha un proprio ordine di preferenze sull'insieme A dei possibili *risultati*, ossia delle conseguenze che si vengono a produrre allorché ciascun giocatore compie una determinata azione.

Riassumendo quindi, un gioco strategico consiste in:

- un insieme di *giocatori*
- per ogni giocatore, un insieme di *azioni* o *strategie*
- per ogni giocatore, una *relazione di preferenza* sull'insieme delle azioni

Solitamente, la relazione di preferenza di ciascun giocatore sull'insieme A può essere espressa attraverso una funzione di utilità (o *payoff*), associata a ciascun giocatore, che fa corrispondere valori più elevati a risultati più graditi. Quindi, al giocatore i sarà possibile associare una funzione $u_i(\mathbf{a})$, definita su A, che indica l'utilità derivante dal profilo $\mathbf{a}$, per il giocatore.

Definition 2.2. *Si chiama funzione dei pagamenti (payoff) una funzione f che assegna ad ogni giocatore la sua vincita per ogni possibile terminazione del gioco.*

Nel resto della trattazione di questa tesi, salvo dove specificato, si assume che ciascun giocatore conosca completamente la tabella che descrive l'utilità di ciascun giocatore per ciascun profilo: si dice in tal caso che il gioco è ad *informazione completa*. Si assume inoltre che i giocatori non possano stipulare accordi vincolanti, e quindi ciascun giocatore sceglierà come agire solamente in base alle informazioni di cui è in possesso (gioco non cooperativo).

Esistono due diverse interpretazioni della rappresentazione di un gioco non cooperativo. Secondo la prima tesi, il gioco modella una situazione che ha luogo una e una sola volta; questo comporta che ci si limiti a studiare solamente qual è la strategia da adottare per massimizzare il payoff. La seconda tesi ritiene invece che il gioco modelli una situazione ripetuta nel tempo, in cui i giocatori si trovano a dover determinare più strategie per concludere il gioco. La differenza tra le due categorie può essere esemplificata rispettivamente con la morra cinese e il gioco degli scacchi.

Quando il gioco modella una situazione ripetuta nel tempo, il concetto di soluzione assume il significato di equilibrio, ovvero uno stato stazionario a cui il sistema tende dopo un certo numero di volte che il gioco è stato effettuato. Precisiamo che se un gioco è composto da molte sue realizzazioni nel tempo, esaminare una singola realizzazione di questo gioco attraverso un modello in forma strategica è appropriato solo se non esistono legami di tipo strategico tra le diverse realizzazioni. Ciò significa che, anche se ogni realizzazione viene ripetuta più volte, ciascun giocatore è interessato solo a massimizzare la propria utilità che deriva da quella realizzazione; cioè, il suo comportamento è indipendente dal fatto che quella realizzazione sia o meno ripetuta. Invece, se il giocatore sacrificasse la propria utilità oggi in modo volontario, ritenendo che così facendo possa trarne dei vantaggi in una successiva ripetizione del gioco, allora esisterebbe un legame strategico tra le diverse realizzazioni del gioco. In tal caso il modello non sarebbe più lo stesso. Perciò, anche se possiamo tener conto di come il giocatore si sia comportato nel passato in situazioni simili, supporremmo comunque che il suo comportamento sia sempre e solo mirato a massimizzare la propria utilità nella attuale ripetizione del gioco.

2.2 Forme di rappresentazione

Un gioco può essere raffigurato in tre forme:

- FORMA CARATTERISTICA forma usata solo per i giochi cooperativi[1] in quanto fa riferimento alla nozione di coalizione;
- FORMA ESTESA;
- FORMA STRATEGICA.

Di queste ultime due forme tratteremo qui di seguito.

[1]Giochi dei quali non tratteremo nella presente tesi.

2.2.1 Forma estesa

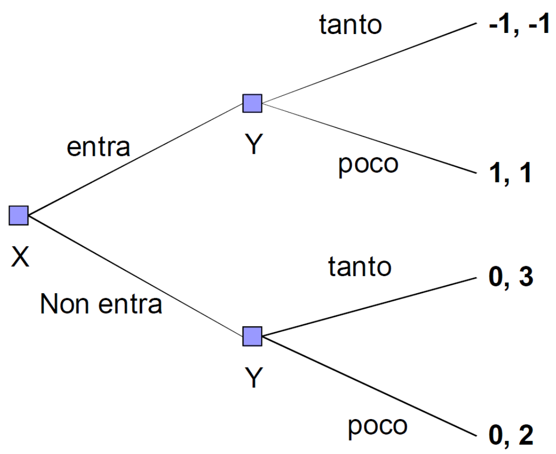
La forma estesa consiste in una descrizione puntuale del gioco, delle mosse con le relative probabilità, delle situazioni che si instaurano dopo ogni mossa, delle strategie, ecc.; essa risulta molto ricca di informazioni ma poco maneggevole. Viene usata solitamente per rappresentare giochi sequenziali.

Generalmente si utilizza una rappresentazione ad albero, in cui ad ogni nodo viene associata una possibile situazione del gioco; agli archi uscenti da ciascun nodo si associano le possibili mosse del giocatore che è chiamato a muovere in quella situazione; infine, ai nodi terminali vengono associati i valori delle vincite (*payoff*) di ciascun giocatore.

Example 2.1. (Gioco dell'entrata)

Vi sono due imprese, X e Y. Y è monopolista di un mercato, mentre X deve decidere se entrare nel mercato oppure no. Se X entra, allora Y può produrre o *poco* o *tanto*: se Y produce poco entrambe hanno profitto 1, se Y produce tanto entrambe avranno profitti -1. Se X non entra, X avra profitti nulli e Y puo sempre produrre o *poco* o *tanto*, ma resta monopolista: se Y produce poco avra profitto 2, se Y produce tanto avra profitto 3. Il gioco è rappresentato in forma estesa in Figure 2.1.

Figure 2.1: Rappresentazione in forma estesa del gioco dell'entrata



2.2.2 Forma strategica

La forma strategica è una rappresentazione più concisa, ma allo stesso tempo non ha memoria sulle strategie passate dei giocatori. Viene usata solitamente per rappresentare giochi simultanei.

Se ci sono n giocatori, si utilizza una $2n$-pla $(\Sigma_1, \Sigma_2, ..., \Sigma_n, u_1, u_2, ..., u_n)$, dove:

- Σ_i è l'insieme contentente le possibili strategie del giocatore i-esimo;
- u_i è la funzione di utilità del giocatore i-esimo definita sul prodotto cartesiano degli Σ_i

$$u_i : \Sigma_1 \times \Sigma_2 \times ... \times \Sigma_n \to \mathbb{R} \qquad i = 1, ..., n$$

Se il gioco è a due giocatori, la forma strategica può essere rappresentata tramite due matrici i cui elementi sono rispettivamente il codominio delle u_1 e u_2. Per semplicità di notazione, le due matrici possono essere "raggruppate" in un'unica matrice contenente due valori per cella.

Example 2.2. (Gioco dell'entrata)

In riferimento al *gioco dell'entrata*, in Table 2.1 ne è rappresentata la sua forma strategica.

Table 2.1: Rappresentazione in forma strategica del gioco dell'entrata

$\downarrow X \quad Y \rightarrow$	Poco	Tanto
Entra	1,1	−1,−1
Non entra	0,2	0,3

Example 2.3. (Congestione)

In riferimento al *gioco della congestione* del capitolo precedente, in Table 2.2 ne è rappresentata la sua forma strategica.

Table 2.2: Rappresentazione in forma strategica del gioco della congestione

$III = T$			
$\downarrow I \quad II \rightarrow$	T	M	B
T	16,16,16	13,10,13	13,14,13
M	10,13,13	12,12,11	10,14,11
B	14,13,13	14,10,11	16,16,11

$III = M$			
$\downarrow I \quad II \rightarrow$	T	M	B
T	13,13,10	11,12,12	11,14,10
M	12,11,12	15,15,15	12,14,12
B	14,11,10	14,12,12	16,16,10

$III = B$			
$\downarrow I \quad II \rightarrow$	T	M	B
T	13,13,14	11,10,14	11,16,16
M	10,11,14	12,12,14	10,16,16
B	16,11,16	16,10,16	19,19,19

3 Giochi non cooperativi

I giochi non cooperativi consistono in quella classe di giochi in cui i giocatori non possono stipulare accordi vincolanti, né comunicare, a prescindere dal fatto che i loro obiettivi siano confliggenti o comuni e possano quindi avere interesse ad accordarsi.

Example 3.1. (Il dilemma del prigioniero)

Due persone, sospettate di aver commesso un reato sono detenute in celle separate. Ognuno può scegliere di confessare (C) oppure di non confessare (NC). La scelta di ciascuno dei due influenza anche il destino dell'altro. Infatti, se entrambi confessano, saranno condannati a 10 anni di prigione. Se solo uno dei due confessa, accusando dunque l'altro, potrà beneficiare di uno sconto di pena, e avrà quindi solo 1 anno di carcere, mentre l'altro sarà condannato a 25 anni (per l'aggravante di non aver voluto collaborare). Se nessuno dei due confessa, in mancanza di prove testimoniali, ambedue le persone saranno accusate soltanto di danni al patrimonio e condannate a 3 anni di prigione. La situazione può essere schematizzata in Table 3.1.

Table 3.1: Rappresentazione del gioco Il dilemma del prigioniero

↓1 2→	C	NC
C	10,10	1,25
NC	25,1	3,3

In questo esempio risulta chiaro come in una situazione di non cooperazione i due prigionieri siano portati razionalmente a scegliere entrambi per il confessare, anche se, potendo collaborare, a entrambi sarebbe convenuta la strategia di non confessare.

3.1 Giochi a somma zero

I giochi a somma zero sono un caso particolare dei giochi a somma costante, in cui la costante è uguale a zero. Essi vanno a modellare tutti quelle situazioni conflittuali in cui ci sono due giocatori e la contrapposizione è totale.

Definition 3.1. *Un gioco G a due giocatori si dice a somma zero se per ogni terminazione del gioco la somma dei payoff è nulla.*

Sostanzialmente, la somma delle vincite dei giocatori in funzione delle strategie utilizzate è sempre uguale a zero: tutto ciò che viene guadagnato da un giocatore viene perso dall'altro. Il *payoff* totale è sempre lo stesso. La matrice dei pagamenti può essere espressa indicando la vincita (positiva o negativa) del primo giocatore, dal momento che la vincita del secondo è in ogni caso l'opposto. Si può usare una matrice M in cui la riga i è associata alla strategia i del giocatore I, la colonna j alla strategia j del giocatore II e l'elemento a_{ij} rappresenta quanto il primo giocatore riceve dal secondo se giocano la coppia di strategie (i, j).

Example 3.2. (Gioco degli scacchi)

Nel gioco degli scacchi (dove la vittoria è rappresentata con 1, la sconfitta con -1 e il pareggio con 0) i risultati possibili sono solamente tre:

$(1, -1)$ se vince il bianco;

$(-1, 1)$ se vince il nero;

$(0, 0)$ se pareggiano.

Non esiste il caso in cui vincono entrambi o perdono entrambi. La rappresentazione del gioco tramite matrice è riportata in Table 3.2.

Table 3.2: Gioco degli scacchi: funzione di utilità nel caso di vincita (V) o perdita (P)

↓B N→	V	P
V	0	1
P	-1	0

Example 3.3. (Pari o dispari)

Due giocatori, A e B, devono scrivere un numero in un foglio, ognuno a insaputa dell'altro. Il numero ovviamente può essere o pari o dispari. Se la somma dei due numeri è pari, B cede ad A 1 euro, al contrario se la somma è dispari A cede a B la stessa cifra. Il gioco è rappresentato in Table 3.3.

Table 3.3: Gioco Pari e dispari

↓A B→	pari	dispari
pari	1,-1	-1,1
dispari	-1,1	1,-1

4 Strategie pure

Con il termine strategia pura si indicano tutti gli esempi a cui ci siamo riferiti fino ad ora, ovvero quelli a cui è naturale pensare in un primo approcio alla Teoria dei Giochi. Affronteremo in questo capitolo due concetti di soluzione, di cui il primo, il concetto di *strategia dominante*, risulta più intuitivo, mentre il secondo, l'*equilibrio di Nash*, rappresenta uno dei concetti chiave della Teoria dei Giochi.

4.1 Dominanza

La *dominanza*, pur essendo un concetto semplice e in accordo con l'intuizione, presenta come limite quello di consentire solo in un numero limitato di casi la completa risoluzione del gioco.

Definition 4.1. *Dato un gioco in forma strategica, si consideri un giocatore i e due sue strategie a^i_k e a^i_h. Sia $\mathbf{a^{-i}}$ un vettore che specifica le strategie degli altri $N-1$ giocatori. Se*

$$u_i(a^i_k, \mathbf{a^{-i}}) \geq u_i(a^i_h, \mathbf{a^{-i}}) \qquad \forall\, \mathbf{a^{-i}}$$

$$u_i(a^i_k, \mathbf{\hat{a}^{-i}}) > u_i(a^i_h, \mathbf{\hat{a}^{-i}}) \qquad \text{per qualche } \mathbf{\hat{a}^{-i}}$$

allora si dice che la strategia a^i_k domina debolmente la strategia a^i_h (equivalentemente, che a^i_h è debolmente dominata da a^i_k). Invece, si dice che la strategia a^i_k domina strettamente la strategia a^i_h (equivalentemente, che a^i_h è strettamente dominata da a^i_k) se

$$u_i(a^i_k, \mathbf{a^{-i}}) > u_i(a^i_h, \mathbf{a^{-i}}) \qquad \forall\, \mathbf{a^{-i}}$$

Se una strategia è dominata (debolmente o strettamente) da un'altra, diremo che questa strategia è dunque *dominata* (debolmente o strettamente). Quando una strategia domina tutte le altre essa viene detta *dominante*; ovviamente nel caso la strategia sia strettamente dominante, questa è unica. Al contrario possono esistere più strategie debolmente dominanti. Un gioco in cui ogni giocatore dispone di una strategia dominante, viene detto avere una soluzione dominante.

Example 4.1. Consideriamo il gioco in Table 4.1: il giocatore A presenta tre possibili strategie, mentre il giocatore B ne presenta due. Confrontando le strategie a e b del giocatore A: qualunque scelta il giocatore B effettui, ad A non converrà mai giocare a bensì b in quanto l'utilità di tale scelta è sempre maggiore. La strategia a è definibile come strettamente dominata; le strategie b e c sono strategie nondominate, ma nessuna delle due è dominante. Si noti che in questo esempio ad un giocatore razionale non converrà mai giocare la strategia a.

Se supponiamo però che ciascuno dei due giocatori oltre che ad essere razionale, sappia anche che l'altro giocatore lo è, il ragionamento iniziato viene portato alle estreme conseguenze. Se come abbiamo detto il giocatore A non giocherà mai a, ciò sarà noto anche al giocatore B. Il gioco verrà quindi modificato poichè la prima riga della tabella non verrà mai scelta. Per il giocatore B compare una strategia strettamente dominata: y; indipendentemente dalla mossa di A, per B essa rappresenta una mossa perdente. Avendo ipotizzato che ciascun giocatore sappia che l'altro è razionale, anche la scelta y verrà eliminata, semplificando ulteriormente il gioco. Questo comporta che tra b e c il giocatore A sceglierà c poichè l'alternativa è una strategia strettamente dominata. La scelta finale sarà quindi (c, x).

Table 4.1: Un gioco risolvibile tramite strategie dominanti

$\downarrow A \quad B\rightarrow$	x	y
a	3,2	2,6
b	4,4	3,3
c	6,5	1,3

Non sempre l'ipotesi di razionalità spinta ad estremi livelli può riprodurre fedelmente la realtà: in situazioni reali, a volte conviene giocare in modo non strettamente razionale, in quanto gli altri giocatori potrebbero non essere intelligenti dal punto di vista matematico, ovvero non saper sempre determinare correttamente qual è la strategia migliore per loro. Il seguente esempio ne è una dimostrazione.

Example 4.2. In riferimento al gioco in Table 4.2, si osserva subito che la strategia b è dominata per il primo giocatore indipendentemente dal valore di x, per cui il giocatore B giocherà senz'altro la strategia y. Supponendo però che x assuma un valore molto grande, per esempio 10000, è così irrazionale pensare che a B convenga giocare la strategia x? Se A fosse perfettamente razionale, senz'altro a B converrebbe giocare sempre y, ma se per caso A dovesse sbagliarsi e scegliere la strategia b, quale può essere un giocatore reale, B si troverebbe a perdere una grossa utilità. B non dovrebbe escludere l'ipotesi di sacrificare una piccola utilità per non rischiare di perderne una di molto più ingente.

Table 4.2: Gioco che illustra i limiti della razionalità in una situazione reale

$\downarrow A \quad B\rightarrow$	x	y
a	100,100	1,101
b	99,x	0,$-x$

Questo esempio non rappresenta un'invalidazione della Teoria dei Giochi, ma piuttosto una critica. Essa suggerisce quale dovrebbe essere il comportamento da seguire se i giocatori fossero strettamente razionali, come accade nella maggior parte dei casi reali.

E' importante far notare che l'ordine con cui sono condotte le eliminazioni delle strategie, può determinare il risultato finale. Ciò è vero per le strategie debolmente dominate, mentre per le strategie strettamente dominate l'ordine di eliminazione non influenza l'esito.

4.2 Equilibrio di Nash

L'equilibrio di Nash definisce uno "stato stazionario" in cui nessun giocatore ha interesse a cambiare strategia unilateralmente. Si tratta del concetto di soluzione più significativo della Teoria dei Giochi non cooperativi. In questo paragrafo tratteremo la sua applicazione nelle strategie pure mentre in seguito considereremo anche le strategie miste.

Definition 4.2. *Un profilo* $\mathbf{\bar{a}} = (\bar{a}^1, \bar{a}^2, ..., \bar{a}^N)$ *è un equilibrio di Nash se per ogni giocatore i si ha*

$$u_i(\bar{a}^i, \mathbf{\bar{a}^{-i}}) \geq u_i(a^i, \mathbf{\bar{a}^{-i}}) \qquad \forall\, a^i \in A^i$$

dove $\mathbf{\bar{a}^{-i}}$ *indica le strategie degli altri* $N-1$ *giocatori.*

Da tale definizione deduciamo che nessun giocatore ha interesse a deviare nella scelta della strategia rispetto al profilo di azioni di equilibrio. Come visto nel esempio del *dilemma del prigioniero* nel capitolo 3, al giocatore 1 indipendentemente dalla scelta di 2 conviene confessare. Dunque il profilo di strategie $\gamma = (C, C)$ è un equilibrio di Nash. Accade invece diversamente nel gioco *pari o dispari*, in cui il gioco non ha nessun equilibrio di Nash. Da questi esempi deduciamo che non sempre esiste un equilibrio di Nash costituito da strategie pure. Pur esistendo teoremi che danno condizioni sufficienti per ammettere in strategie pure l'esistenza di un equilibrio di Nash, essi si riferiscono a situazioni specifiche e non verranno trattati in questa sede in modo approfondito. Ci limiteremo al caso particolare dei giochi a somma zero.

Example 4.3. Il gioco in Table 4.3 ha due equilibri di Nash, in particolare sono equilibri i profili di strategie (B, L) e (B, R). Per il giocatore I la strategia T risulta essere fortemente dominata dalla strategia B, quindi un'eventuale equilibrio non lo si può trovare in T in quanto il giocatore I ha sempre interesse a cambiare la sua strategia. La strategia M è debolmente dominata da B. Ne risulta che al giocatore I conviene sempre adottare la strategia B. Il giocatore II non ha convenienza ad adottare la strategia C mentre al contrario non ha interesse a cambiare dalla strategia L alla strategia R e viceversa.

Table 4.3: Gioco con 2 equilibri di Nash

$\downarrow I \quad II\rightarrow$	L	C	R
T	0,1	−1,3	1,3
M	0,2	1,1	2,0
B	1,0	1,−1	3,0

Example 4.4. (Equilibri multipli)

Nel gioco in Table 4.4 ci sono quattro equilibri di Nash, ovvero le coppie (T_1T_2, R_1L_2), (T_1T_2, R_1R_2), (T_1B_2, R_1L_2) e (T_1B_2, R_1R_2). Si noti che per ogni equilibrio preso singolarmente, ognuno dei due giocatori non ha alcun vantaggio ad essere l'unico a cambiare strategia.

Table 4.4: Gioco con 4 equilibri di Nash

$\downarrow I \quad II\rightarrow$	L_1L_2	L_1R_2	R_1L_2	R_1R_2
T_1T_2	5,0	5,0	4,4	4,4
T_1B_2	5,0	5,0	4,4	4,4
B_1T_2	2,1	2,0	2,1	2,0
B_1B_2	0,0	0,2	0,0	0,2

4.2.1 Giochi a somma zero

I giochi a somma zero rappresentano una classe in cui la caratterizzazione degli equilibri di Nash è realizzabile in modo soddisfacente. Consideriamo il giocatore 1; nello studio della strategia migliore, un atteggiamento pessimistico prevede che, data un'azione $x \in A_1$, il giocatore 2 compia l'azione che risulta per lui più redditizia e per 1 di conseguenza più dannosa. Ovvero, se il giocatore 1 gioca la strategia x, la strategia peggiore per 1 è che 2 giochi l'azione $y(x)$, tale che

$$u_1(x, y(x)) = \min_{y \in A_2} u_1(x, y) \tag{4.1}$$

Seguendo questo ragionamento, al giocatore 1 converrà allora giocare quella azione che massimizza il suo payoff del caso peggiore, ovvero, tra tutti i minimi del tipo Equation 4.1, sceglierà quell'azione $x*$ tale che

$$\min_{y \in A_2} u_1(x*, y) = \max_{x \in A_1}\{\min_{y \in A_2} u_1(x, y)\} \tag{4.2}$$

L'azione $x*$ massimizza il minimo risultato che 1 ha la garanzia di ottenere, e per questo motivo prende il nome di *maxminimizer* per il giocatore 1. Ovviamente lo stesso tipo di ragionamento può essere fatto anche dall'altro giocatore, il che porta a definire un maxminimizer $y*$ anche per il giocatore 2:

$$\min_{x \in A_1} u_2(x, y*) = \max_{y \in A_2} \{\min_{x \in A_1} u_2(x, y)\} \tag{4.3}$$

Dal momento che il gioco è a somma zero, si ha che $u_2(x, y) = -u_1(x, y)$, il che consente di dimostrare il seguente lemma:

Lemma 4.1. *Dato un gioco a somma zero, in cui A_1 e A_2 sono gli insiemi di azioni dei due giocatori, si ha*

$$\max_{y \in A_2} \{\min_{x \in A_1} u_2(x, y)\} = -\min_{y \in A_2} \{\max_{x \in A_1} u_1(x, y)\} \tag{4.4}$$

e il massimo a sinistra e il minimo a destra nella Equation 4.4 si ottengono per lo stesso $y* \in A_2$.

Proof. Si osserva che:

$$\begin{aligned}
&\max_{y \in A_2} \{\min_{x \in A_1} u_2(x, y)\} = \\
&-\min_{y \in A_2} \{-\min_{x \in A_1} u_2(x, y)\} = \\
&-\min_{y \in A_2} \{-(-\max_{x \in A_1} (-u_2(x, y)))\} = \\
&-\min_{y \in A_2} \{\max_{x \in A_1} u_1(x, y)\}
\end{aligned}$$

□

Si vuole allora indagare le condizioni sotto le quali un gioco a somma zero ammette un equilibrio di Nash.

Theorem 4.1. *Dato un gioco a somma zero e due giocatori,* 1 *e* 2*, se* $(x*, y*)$ *è un equilibrio di Nash, allora:*

- $x*$ *è un maxminimizer per* 1 *e* $y*$ *lo è per* 2
- *si ha*

$$\max_{x \in A_1} \{\min_{y \in A_2} u_1(x, y)\} = \min_{y \in A_2} \{\max_{x \in A_1} u_1(x, y)\} = u_1(x*, y*) \tag{4.5}$$

Ne consegue che se esite un equilibrio di Nash, esso è costituito da una coppia di *maxminimizer*, ovvero i possibili equilibri di Nash vanno cercati tra le coppie di maxminimizer. Tuttavia prendendo una coppia di *maxminimizer*, questi non costituiscono generalmente un equilibrio di Nash. Inoltre se esistono più equilibri di Nash, allora questi hanno tutti gli stessi payoff, secondo l'Equation 4.5.

Il teorema seguente invece afferma il viceversa del teorema precedente: se esistono equilibri di Nash, allora ciascuna coppia di maxminimizer ne costituisce uno.

Theorem 4.2. *Se un gioco a somma zero ammette equilibri di Nash, $x*$ è un maxminimizer per* 1*, e $y*$ è un maxminimizer per* 2*, allora $(x*, y*)$ è un equilibrio di Nash.*

Example 4.5. Nel gioco in Table 4.5 la strategia (σ_a, σ_y) costituisce un'equilibrio anche se entrambi i giocatori hanno a disposizione dei payoff migliori.

Table 4.5: (σ_a, σ_y) è un'equilibrio anche se ci sono dei payoff migliori

$\downarrow A \quad B \rightarrow$	σ_x	σ_y	σ_z
σ_a	6	3	4
σ_b	5	2	-2
σ_c	7	-1	3

Example 4.6. (Equilibri multipli)

Nel gioco rappresentato in Table 4.6, le strategie (a, y) e (b, w) sono equilibri di Nash.

Table 4.6: Gioco avente equilibri multipli

$\downarrow A \quad B \rightarrow$	x	y	w	z
a	2	1	1	4
b	5	1	1	2
c	3	-1	0	-1

5 Strategie miste

Con il termine *strategia mista* indichiamo una distribuzione di probabilità sull'insieme delle strategie pure del giocatore.

Definition 5.1. *Dato l'insieme di azioni A^i a disposizione del giocatore i, una strategia mista per il giocatore i è una distribuzione di probabilità su tale insieme. Ossia, una strategia mista è un vettore di probabilità $\mathbf{x} = (p_1^i, p_2^i, ..., p_{n_i}^i)$ sulle possibili azioni che il giocatore può intraprendere, $p_k^i \geq 0$ e $\sum_{k=1}^{n^i} p_k = 1$.*

Se un giocatore ha a disposizione almeno due strategie pure, ci sono infinite strategie miste a disposizione di questo giocatore, potendo scegliere infatti come probabilità con la quale giocare una strategia pura, qualsiasi numero reale fra 0 ed 1. Ogni strategia pura può essere vista come un caso particolare di strategia mista, che assegna probabilità pari a 1 a quella strategia pura (a tutte le altre strategie pure sarà assegnata probabilità pari a 0).

Supponendo per semplicità un gioco a due giocatori, se il giocatore 1 ha un'idea delle probabilità con cui il giocatore 2 giocherà le sue strategie, non è difficile per 1 determinare qual è l'utilità attesa in funzione della strategia da lui scelta:

$$U_1(a_k^1) = p_1^2 u_1(a_k^1, a_1^2) + p_2^2 u_1(a_k^1, a_2^2) + ... + p_m^2 u_1(a_k^1, a_m^2) \tag{5.1}$$

con $a_k^i \in A^i$ la k-esima strategia pura del giocatore i-esimo e p_k^i la probabilità del giocatore i-esimo con cui intraprende la strategia k-esima. Il giocatore 1, intelligente e razionale, seglierà quindi quella strategia a_k^1 tale che rende massimo il proprio payoff.

Definition 5.2. *Dato un gioco a due giocatori a somma zero con matrice A, se il giocatore 1 gioca la strategia mista $\mathbf{x} \in X$ e il giocatore 2 gioca la strategia mista $\mathbf{y} \in Y$, è detta utilità attesa la quantità*

$$E(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} x_i a_{ij} y_j = \mathbf{x}^T A \mathbf{y}$$

dove X è l'insieme delle strategie miste del giocatore 1 e Y è l'insieme delle strategie miste di 2.

Le considerazioni fatte sopra ovviamente valgono anche nel caso di gioco a N giocatori. Dato un giocatore, se questo fosse a conoscenza delle probabilità con cui gli altri $N-1$ giocatori sceglieranno le loro strategie, determinare quella azione che rende massima la propria utilità risulterebbe semplice. Normalmente però le probabilità degli altri giocatori non sono note a priori. Ecco che quindi si complica il concetto di soluzione del gioco.

5.1 Dominanza

Possiamo definire in modo alternativo una strategia strettamente dominata grazie ad un differente approcio al problema.

Definition 5.3. *Una strategia $a_k^i \in A^i$ è strettamente dominata se non esiste alcun vettore di probabilità relativo alle scelte degli altri giocatori per cui giocare a_k^i massimizza l'utilità attesa del giocatore i.*

In riferimento al gioco in Table 5.1, secondo la definizione di dominanza in strategie pure, non vi sono strategie dominate per nessuno dei due giocatori. Ragionando invece in termini di strategie miste, supponiamo che il giocatore B attribuisca una probabilità p al fatto che A giochi la strategia a, e dunque $1-p$ al fatto che giochi la strategia b. L'utilità attesa di B in funzione delle sue strategie è:

$U_B(x) = p_a^A u_B(a,x) + p_b^A u_B(b,x) = 10p + 0(1-p) = 10p$

$U_B(y) = p_a^A u_B(a,y) + p_b^A u_B(b,y) = 0p + 10(1-p) = 10(1-p)$

$U_B(z) = p_a^A u_B(a,z) + p_b^A u_B(b,z) = 3p + 3(1-p) = 3$

Se $p < 0.5$ la strategia ottima per B è giocare y, se $p > 0.5$ è giocare x, invece se $p = 0.5$ le strategie x e y sono equivalenti e danno utilità pari a 5, contro la strategia z che dà utilità pari a 3 per ogni p. E' quindi chiaro che al giocatore B non conviene giocare la strategia z per nessun valore di p. Dunque, in base alla definizione data in questo capitolo, z è una strategia strettamente dominata.

Table 5.1: Un gioco che esemplifica il confronto tra le due definizioni di dominanza

$\downarrow A \quad B\rightarrow$	x	y	z
a	4,10	3,0	1,3
b	0,0	2,10	10,3

Vediamo un'apparente differenza tra la definizione di dominanza in strategie pure e quella in strategie miste. Se nella prima una strategia risulta dominata se ce n'è almeno un'altra che risulta migliore, nella seconda una strategia è dominata se in nessun caso massimizza l'utilità attesa del giocatore.

Theorem 5.1. *Se una strategia pura è dominata, esiste una strategia mista ottimale che non utilizza la strategia pura dominata.*

5.2 Equilibrio di Nash

L'introduzione delle strategie miste cambia la trattazione dell'equilibrio di Nash. Supponiamo che ciascun giocatore abbia un numero finito di strategie pure e che esso possa attuare una strategia mista su di esse. Consideriamo un profilo di strategie miste $\mathbf{p}^1, \mathbf{p}^2, ..., \mathbf{p}^N$, in cui $\mathbf{p}^i = (p_1^i, p_2^i, ..., p_{n_i}^i)$ è la strategia mista del giocatore i-esimo; indichiamo con $\mathbf{P}^{-i} = [\mathbf{p}^1, \mathbf{p}^2, ..., \mathbf{p}^{i-1}, \mathbf{p}^{i+1}, ..., \mathbf{p}^N]$ il profilo di strategie degli altri $N-1$ giocatori, in riferimento al giocatore i. Il *supporto* di $\mathbf{p}^i$ è l'insieme delle strategie pure $a_k^i \in A^i$ tali che $p_k^i > 0$. Infine indichiamo con $\mathcal{H}^i$ l'insieme di tutte le possibili strategie miste del giocatore i.

L'utilità attesa associata alla strategia mista $\mathbf{p}^i$ del giocatore i a fronte delle altre $N-1$ strategie $\mathbf{P}^{-i}$, può esprimersi come

$$U_i(\mathbf{p}^i, \mathbf{P}^{-i}) = p_1^i u_i(a_1^i, \mathbf{P}^{-i}) + p_2^i u_i(a_2^i, \mathbf{P}^{-i}) + ... + p_{n_i}^i u_i(a_{n_i}^i, \mathbf{P}^{-i}) \tag{5.2}$$

L'insieme delle migliori strategie del giocatore i, dato un profilo $\mathbf{P}^{-i}$ è

$$B_i(\mathbf{P}^{-i}) = \{\mathbf{p}^i : U_i(\mathbf{p}^i, \mathbf{P}^{-i}) \geq U_i(\hat{\mathbf{p}}^i, \mathbf{P}^{-i}) \qquad \forall\, \hat{\mathbf{p}}^i \in \mathcal{H}^i\} \tag{5.3}$$

In perfetta analogia col caso delle strategie pure, un equilibrio di Nash è allora un profilo $\tilde{\mathbf{p}}^1, \tilde{\mathbf{p}}^2, ..., \tilde{\mathbf{p}}^N$ tale che, per ogni giocatore i, si ha

$$\tilde{\mathbf{p}}^i \in B_i(\tilde{\mathbf{P}}^{-i}) \tag{5.4}$$

Theorem 5.2. *Un qualsiasi gioco in cui ogni giocatore ha un numero finito di strategie, ammette almeno un equilibrio di Nash in strategie miste.*

Il teorema sopra enunciato è un risultato molto importante, in quanto afferma che un gioco può possedere più equilibri: alcuni in strategie pure e sicuramente uno in strategie miste. Per calcolare gli equilibri in strategie miste, il seguente teorema da un fondamentale risultato.

Theorem 5.3. *Si consideri un profilo di strategie miste* $\mathbf{p}^1, \mathbf{p}^2, ..., \mathbf{p}^N$*. Questo costituisce un equilibrio di Nash se e solo se ogni strategia pura nel supporto di* $\mathbf{p}^i$ *è una miglior risposta a* $\mathbf{P}^{-i}$*.*

Proof. (solo se) Sia $\mathbf{p}^1, \mathbf{p}^2, ..., \mathbf{p}^N$ un equilibrio di Nash, e supponiamo per assurdo che $a_k^i \in A^i$ faccia parte del supporto di $\mathbf{p}^i$, ma che non sia una miglior risposta a $\mathbf{P}^{-i}$. Osservando che l'espressione dell'utilità attesa è lineare rispetto alle probabilità, possiamo allora decrementare la probabilità p_k^i di a_k^i in $\mathbf{p}^i$ a favore di un'azione che sia invece una miglior risposta a $\mathbf{P}^{-i}$: ossia, $\mathbf{p}^i$ non sarebbe una miglior risposta a $\mathbf{P}^{-i}$, contraddicendo il fatto che fa parte di un equilibrio di Nash.

(Se) Supponiamo ora che ogni strategia pura nel supporto di $\mathbf{p}^i$ sia una miglior risposta a $\mathbf{P}^{-i}$, ma che il profilo $\mathbf{p}^1, \mathbf{p}^2, ..., \mathbf{p}^N$ non sia un equilibrio di Nash, ossia supponiamo che esista una strategia mista $\hat{\mathbf{p}}^i$ che dà luogo a un'utilità attesa per i superiore a quella di $\mathbf{p}^i$ in risposta a $\mathbf{P}^{-i}$. Sempre per la linearità dell'utilità attesa, deve esserci dunque nel supporto di $\hat{\mathbf{p}}^i$ almeno una strategia pura avente utilità attesa superiore a qualche strategia nel supporto di $\mathbf{p}^i$, il che però contraddice l'ipotesi che tutte le strategie pure nel supporto di $\mathbf{p}^i$ sono migliori risposte a $\mathbf{P}^{-i}$. □

L'importante conseguenza di questo teorema è che tutte le strategie pure contenute nel supporto di una strategia mista, all'equilibrio, danno luogo alla stessa utilità attesa della strategia mista. Tuttavia, ai fini del calcolo, questo non basta a concludere che siamo in presenza di un equilibrio di Nash: deve anche verificarsi che ciascuna strategia pura nel supporto di $\mathbf{p}^i$ sia la miglior risposta alle altre ($\mathbf{P}^{-i}$).

Example 5.1. In riferimento al gioco in Table 5.2, sia $S = (\mathbf{p}, \mathbf{q})$ un equilibrio di Nash misto e supponiamo che le azioni possibili per i due giocatori A e B siano rispettivamente (a_1, a_2) e (b_1, b_2). Supponiamo inoltre che anche il supporto di $\mathbf{p}$ e $\mathbf{q}$ sia rispettivamente (a_1, a_2) e (b_1, b_2).

Poiché tutte le strategie pure nel supporto di una strategia mista devono avere tra loro la stessa utilità attesa, si ha che $U_A(a_1) = U_A(a_2)$, ovvero

$$u_A(a_1, b_1)q_1 + u_A(a_1, b_2)q_2 = u_A(a_2, b_1)q_1 + u_A(a_2, b_2)q_2 \tag{5.5}$$

da cui abbiamo che

$$5q_1 + 1q_2 = 2q_1 + 6q_2 \tag{5.6}$$

Inoltre, poichè q è una distribuzione di probabilità abbiamo che $q_1 + q_2 = 1$. Risolvendo il sistema lineare otteniamo che $q_1 = \frac{5}{8}$ e $q_2 = \frac{3}{8}$.

Analogamente, per il giocatore B abbiamo che

$$u_B(a_1, b_1)p_1 + u_B(a_2, b_1)p_2 = u_B(a_1, b_2)p_1 + u_B(a_2, b_2)p_2 \tag{5.7}$$

da cui otteniamo che

$$6p_1 + 2p_2 = 1p_1 + 5p_2 \tag{5.8}$$

Imponendo che p sia una distribuzione di probabilità otteniamo che $p_1 = \frac{3}{7}$ e $p_2 = \frac{4}{7}$. Quindi $((\frac{3}{7}, \frac{4}{7}), (\frac{5}{8}, \frac{3}{8}))$ è l'unico equilibrio di Nash misto per questo gioco.

Table 5.2: Equilibri di Nash misti

$\downarrow A \quad B \rightarrow$	b_1	b_2
a_1	5,6	1,1
a_2	2,2	6,5

Example 5.2. In riferimento al gioco in Table 5.3, osserviamo preliminarmente che la strategia L è fortemente dominata da C. Ne segue che ogni strategia mista di II che sia una miglior risposta a una qualunque strategia di I assegna sempre probabilità 0 a L (se per assurdo fosse assegnata a L una probabilità positiva, converrebbe "trasferire" tale probabilità dalla strategia L alla strategia C, ottenendo un'utilità attesa di II strettamente maggiore, in contraddizione con l'assunto che fosse una "miglior risposta").

Ci si può quindi restringere, nella ricerca di equilibri, alle strategie miste del tipo $(0, q, 1-q)$ per II. Il payoff atteso per I da $(p, 1-p)$ e $(0, q, 1-q)$ è:

$$5pq + 7p(1-q) + 1(1-p)q + 4(1-p)(1-q) = (q+3)p + (4-3q) \tag{5.9}$$

Poichè il coefficiente di p è maggiore di 0, la "best reply" per I è sempre $p = 1$. Cosa che non dovrebbe sorprendere, visto che eliminata la strategia L la strategia B di I diventa fortemente dominata.

Per quanto riguarda II, il suo payoff atteso è:

$$4pq + 8p(1-q) + 11(1-p)q + 3(1-p)(1-q) = (-12p+8)q + (5p+3) \tag{5.10}$$

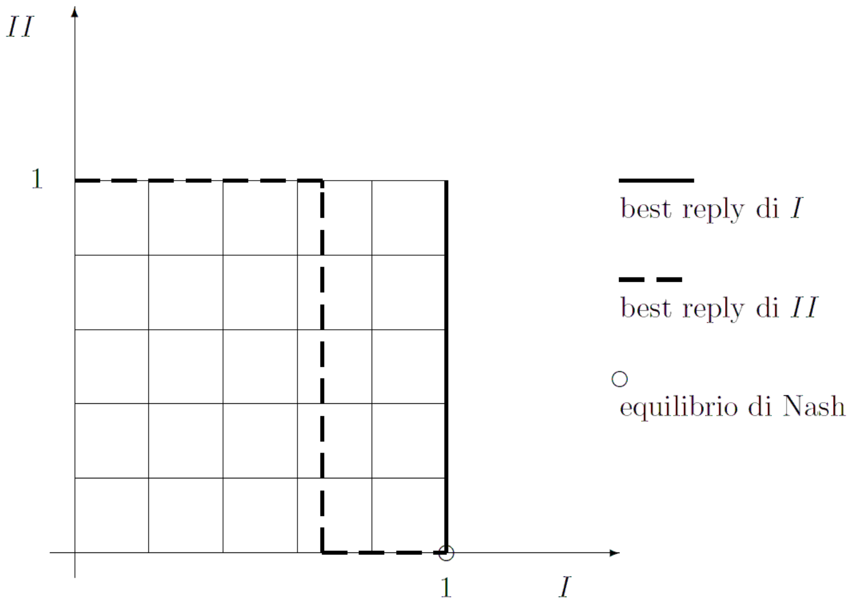
per $p < \frac{2}{3}$ la "best reply" per II è $q = 1$, per $p > \frac{2}{3}$ è $q = 0$, ed infine per $p = \frac{2}{3}$ è tutto l'intervallo $[0, 1]$.

Come si può notare dal grafico delle migliori risposte in Figure 5.1, troviamo un solo equilibrio di Nash, che è di fatto in strategie pure: dopotutto la coppia (T, R) è l'unica che sopravvive all'eliminazione iterata di strategie fortemente dominate.

Table 5.3: Equilibri di Nash misti e strategie dominate

$\downarrow I \quad II \rightarrow$	L	C	R
T	3,2	$5,4$	7,8
B	5,9	1,11	4,3

Figure 5.1: Grafico delle migliori risposte



Ringraziamenti

Un ringraziamento speciale va

ai miei genitori per avermi permesso di raggiungere questo traguardo
alla mia ragazza Ilaria per essermi sempre stata vicina
e alla cugina Angela

Bibliografia

[1] Martin J. Osborne, *An Introduction to Game Theory*, 2003, Oxford University Press.

[2] Vincenzo Auletta, *Strumenti della Teoria dei Giochi per l'Informatica*, 2010, Università degli Studi di Salerno.

[3] A. Agnetis, *Introduzione alla Teoria dei Giochi*, Dipartimento di Ingegneria dell'Informazione, Università degli Studi di Siena.

[4] Fioravante Patrone, *Strategie pure e miste*, Università degli Studi di Genova.

[5] Vito Fragnelli, *Teoria dei Giochi*, 2010, Università degli Studi del Piemonte.

[6] Dimitri P. Bertsekas, John N. Tsitsiklis, *Introduction to Probability*, 2008, Athena Scientific.