



UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI PADOVA

FACOLTA' DI INGEGNERIA

Corso di laurea triennale in:
INGEGNERIA DELL'INFORMAZIONE

Titolo:

**ANALISI DELLA STABILITÀ
PER SISTEMI NON LINEARI**

Relatore:

Prof. Mauro Bisiacco

Laureando:

Nicola Fabris

Anno accademico 2013/2014

Indice

1	Classi di funzioni descrittive	1
1.1	Introduzione alle funzioni descrittive ad ingresso sinusoidale	1
1.2	Definizione formale delle SIDF	5
1.3	Funzioni descrittive per classi di ingressi stocastici	7
1.4	Funzioni descrittive per ingressi gaussiani	8
1.5	Analisi dei sistemi non lineari stocastici	8
2	Analisi dei cicli limite e stabilità	10
2.1	Analisi dei cicli limite	10
2.2	Simulazioni SIDF	12
2.3	Criteri del cerchio e di Popov	20
2.4	Analisi dei cicli limite per sistemi con non-linearità multiple . . .	21
3	Modellizzazione della risposta in frequenza	24
3.1	Metodi per determinare la risposta in frequenza	24
3.2	Sostituzione delle non-linearità	27

Introduzione

Nell'analisi qualitativa dei sistemi non lineari ci si pone l'obiettivo di determinare l'esistenza di *cicli limite* (moti periodici autosostenuti), e le proprietà di essi, includendo ampiezza, frequenza e stabilità che sono di fondamentale importanza.

La teoria delle *funzioni descrittive* (DF) è un potente approccio matematico per analizzare e testare il comportamento di tali sistemi ricordando che ad eccezione di particolari regimi operativi questi presentano sempre delle non-linearità. Gli effetti possono essere benefici (la generazione di segnali periodici utili o oscillazioni) o possono essere dannosi (la perdita del controllo porta ad un incidente in un reattore nucleare). Due categorie di funzioni descrittive sono di particolare rilievo:

- *DF ad ingresso sinusoidale (SIDF)*
- *DF ad ingresso casuale (RIDF)*

Altri tipi di DFs sono state sviluppate ed usate nello studio di fenomeni più complicati, come DF a doppio ingresso sinusoidale, che può essere usata per lo studio degli effetti dei cicli limite. L'approccio SIDF è generalmente utilizzato nell'osservazione di fenomeni periodici; è applicato per due obiettivi primari: analisi dei cicli limite e la caratterizzazione del comportamento ingresso/uscita nel dominio della frequenza. Metodi RIDF dall'altra parte sono usati per l'analisi e la progettazione di sistemi non lineari stocastici.

La presenza di cicli limite pertanto può essere un lato negativo nel controllo dei sistemi dato che possono portare a: instabilità del punto di equilibrio, deterioramento e rottura dei sistemi meccanici e a perdite di accuratezza nella regolazione. Per questo lo studio di due parametri dei cicli, ossia *frequenza e ampiezza di oscillazione* portano a distinguere tra casi accettabili e dannosi.

Capitolo 1

Classi di funzioni descrittive

1.1 Introduzione alle funzioni descrittive ad ingresso sinusoidale

I risultati fondamentali dell'approccio SIFD possono essere introdotti osservando l'applicazione più comune, ossia l'analisi dei cicli limite per un sistema con una singola non-linearità. Un *ciclo limite* (LC) è un segnale periodico, tale che $x_{LC}(t + T) = x_{LC}(t)$, per cui tale fenomeno si manifesta come una curva chiusa nella rappresentazione delle traiettorie nello spazio di stato. Queste ultime possono convergere ad x_{LC} (il ciclo limite è stabile) oppure divergere da esso (caso instabile).

Un approccio all'analisi dei LC è il metodo SIFD nel dominio della frequenza. Questa tecnica include l'analisi di sistemi nella forma della fig.1, dove $G(s)$ è espressa come un rapporto di polinomi come segue:

$$Y(s) \triangleq \mathcal{L}(y(t)) = \frac{p(s)}{q(s)} E(s) \triangleq G(s) \mathcal{L}(e(t)) \quad (1)$$

$$e(t) = r(t) - f(y(t))$$

con grado di $p(s) <$ grado di $q(s) = n$.

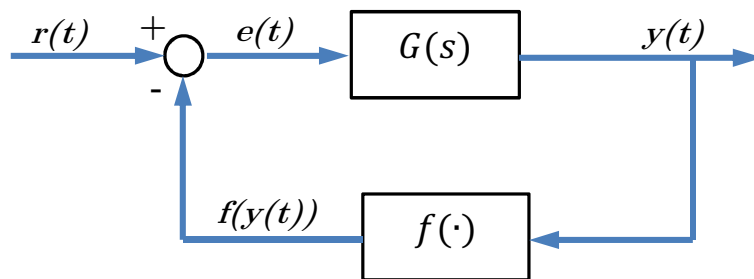


Figura 1

Una formulazione alternativa dello stesso sistema è la *descrizione in spazio di stato*:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Be(t) \\ y(t) = Cx(t) \\ e(t) = r(t) - f(y(t)) \end{cases} \quad (2)$$

dove $x(t)$ è un vettore di stato n -dimensionale. Le prime due equazioni descrivono un sistema dinamico lineare con ingresso $e(t)$ e uscita $y(t)$; quindi l'ingresso del sottosistema a catena aperta è dato dalla differenza tra il segnale di ingresso esterno $r(t)$ e una funzione non lineare di $y(t)$ (la catena di retroazione viene considerata di tipo SISO). Dalle proprietà della Laplace trasformata otteniamo che le due formulazioni precedenti del sistema sono equivalenti dato che $G(s) = C(sI - A)^{-1}B$. La non-linearità nella catena di retroazione può essere dovuta ad un sensore dell'uscita non lineare.

Al fine di investigare sulle condizioni di cicli limite in assenza di sollecitazione esterna: $r(t) = 0$, la non-linearità viene considerata in questo modo: assumiamo che l'ingresso $y(t)$ alla rete di feedback sia prevalentemente sinusoidale, i.e. $y(t) \cong a \cos(\omega t)$, e quindi l'uscita sarà anch'essa periodica.

Espandendo in serie di Fourier $f(y(t))$ abbiamo:

$$f(y(t)) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)) = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n \sin(n\omega t + \varphi_n) \quad (3)$$

dove:

$$\begin{cases} a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y(t)) \cos(n\omega t) d\omega t \\ b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y(t)) \sin(n\omega t) d\omega t \end{cases} \quad Y_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \quad \varphi_n = \text{atan} \frac{a_n}{b_n} \quad (4)$$

Assumendo che $f(y)$ sia una funzione dispari ($a_n = 0$), possiamo inoltre effettuare la seguente approssimazione:

$$f(a \cos(\omega t)) \cong \text{Re}\{b_1(a)e^{j\omega t}\} \triangleq \text{Re}\{Ns(a)ae^{j\omega t}\} \quad (5)$$

che rappresenta una descrizione approssimata che trascura le armoniche di ordine superiore al primo nella serie (3); quindi la differenza con il segnale effettivo è minimizzata in termini di errore quadratico medio (RMS). $Ns(a)$ e b_1 sono complessi, e parte reale e immaginaria di b_1 rappresentano le componenti in fase (coseno) e in quadratura (seno) rispettivamente di $f(y(t))$.

Definiamo quindi la funzione descrittiva $Ns(a)$ (definita anche con la notazione $F(a)$) dell'elemento non lineare come il numero complesso, funzione dell'ampiezza a del segnale sinusoidale applicato all'ingresso, il cui modulo è uguale al rapporto fra l'ampiezza della fondamentale del segnale d'uscita e quella del segnale di ingresso e il cui argomento è uguale allo sfasamento della fondamentale dell'uscita rispetto all'ingresso.

La DF può quindi essere espressa come:

$$Ns(a) = \frac{1}{a}(b_1(a) + ja_1(a)) = \frac{1}{a}Y_1(a)e^{j\rho_1(a)} \quad (6)$$

Secondo il principio del bilanciamento armonico, l'oscillazione che sarà possibile osservare, se esistente, si ottiene da un guadagno del sistema complessivo unitario, quindi sostituendo $f(y) \cong Ns(a)y$ nella (1) si ottengono:

$$Ns(a)G(j\omega) = -1 \quad \Rightarrow \quad G(j\omega) = -1/Ns(a) \quad (7)$$

La (7) è equivalente alle due relazioni:

$$|Ns(a)||G(j\omega)| = 1 \quad (8)$$

$$\rho_1(a) + \arg G(j\omega) = (1 + 2\vartheta)\pi, \quad \vartheta \text{ intero} \quad (9)$$

La (7) è un'equazione che coinvolge funzioni a valori complessi (la funzione descrittiva e la risposta in frequenza del sottosistema a catena aperta) e le sue soluzioni corrispondono alle ampiezze e alle pulsazioni di possibili oscillazioni autosostenute. L'equazione può essere risolta graficamente tracciando, riferendoli allo stesso sistema di assi, i diagrammi polari delle due funzioni $G(j\omega)$ e $-1/Ns(a)$; il primo graduato in valori di ω e il secondo in valori di a ; gli eventuali punti di intersezione corrispondono a valori per i quali è evidentemente soddisfatta la condizione (7), quindi caratterizzanti possibili oscillazioni autosostenute.

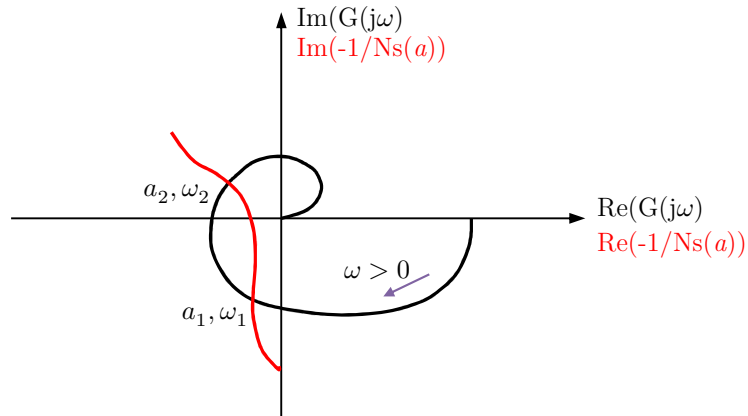


Figura 2

Per il modello in forma di stato sapendo che $X(j\omega) = \mathcal{F}(x(t))$ e quindi $j\omega X = \mathcal{F}(\dot{x})$, sostituendo nuovamente il valore ricavato per $f(y)$ nell'eq. (2) si ottiene:

$$|j\omega I - A + Ns(a)BC|X(j\omega) = 0, \quad X(j\omega) \neq 0 \quad (10)$$

Tali condizioni sono verificabili dal diagramma di Nyquist di $G(j\omega)$; inoltre l'ampiezza del ciclo limite a_{LC} e ω_{LC} sono determinate dal processo lineare. L'analisi di tipo SIFD è solo approssimata dal momento che $G(j\omega)$ dovrebbe essere una risposta in frequenza di tipo passa-basso per attenuare le armoniche di ordine superiore di $f(y(t))$, ciò deve essere tenuto in considerazione e per questo la soluzione al problema sarà solo approssimata; in particolare il caso peggiore si ha quando la DF non interseca il diagramma di Nyquist di $G(j\omega)$. Quindi si possono introdurre alcune derivazioni di SIFD per le non-linearità più comuni troncando, come detto, al termine dominante l'espansione in serie di Fourier:

- 1. *Relè ideale*: La caratteristica ingresso-uscita è una funzione discontinua, tipica degli amplificatori a relè, in uscita si ha un segnale che può assumere due (relè a due posizioni) o tre (relè a tre posizioni con soglia) valori distinti. Consideriamo $f(y) = D \operatorname{sgn}(y)$ e $y(t) = a \cos(\omega t)$, l'integrale per il primo coefficiente di Fourier diviso per a è dato da:

$$Ns(a) = \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} f(a \cos(x)) \cos(x) dx = \frac{2D}{\pi a} \int_0^{\pi} \cos(x) dx = \frac{4D}{\pi a} \quad (11)$$

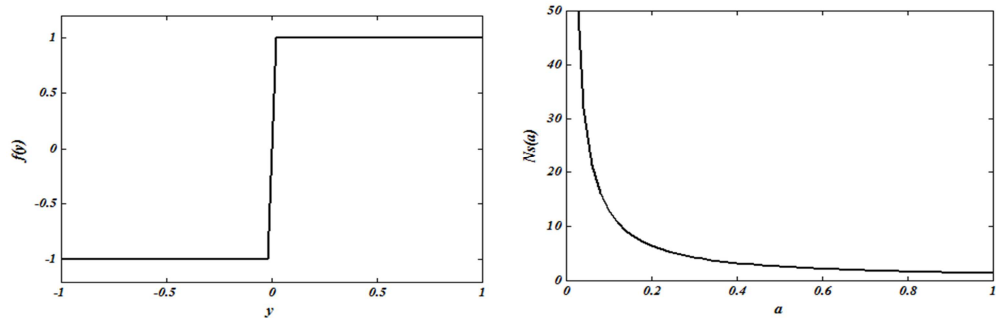


Figura 3: Relè ideale e SIFD

- 2. *Non-linearità cubica*: $f(y) = Ky^3(t)$, assumendo $y(t) = a \cos(\omega t)$ utilizzando le proprietà trigonometriche per $\cos^3(\omega t)$ si ottiene:

$$f(a \cos(\omega t)) = K[a \cos(\omega t)]^3 = Ka^3 \left[\frac{3}{4} \cos(\omega t) + \frac{1}{4} \cos(3\omega t) \right] \cong \frac{3Ka^2}{4} a \cos(\omega t) \quad (12)$$

quindi $Ns(a) = 3Ka^2/4$. Questo approccio può essere utilizzato per qualsiasi potenza della funzione di ingresso.

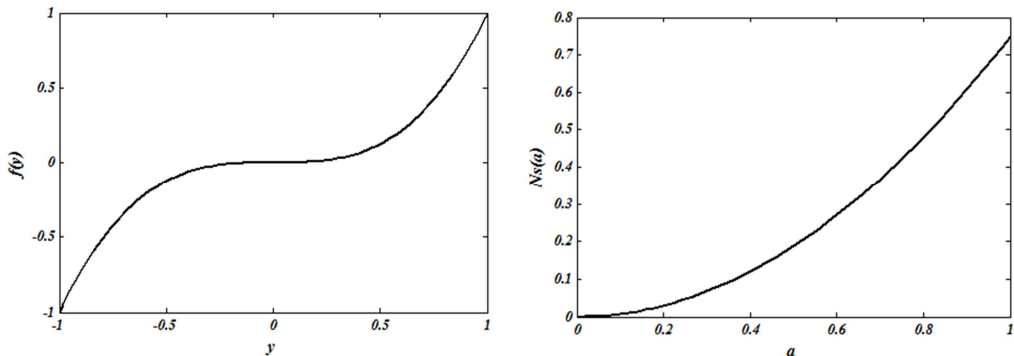


Figura 4: Non linearità cubica e SIFD

- 3. *Saturazione*: essa costituisce una non-linearità tipica, si considera per semplicità che la pendenza del tratto centrale della caratteristica sia unitario e delimitato tra i valori $-V$ e V ; applicando il segnale di ingresso $y(t) = a \sin(\omega t)$, si ha che:

$$b_1 = \frac{2a}{\pi} (\delta + \sin \delta \cos \delta), \text{ con } \delta = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & \frac{V}{a} \geq 1 \\ \arcsin \frac{V}{a}, & \frac{V}{a} < 1 \end{cases} \quad (13)$$

e posto:

$$\varphi\left(\frac{a}{V}\right) = \frac{2}{\pi} \left(\arcsin \frac{V}{a} + \frac{V}{a} \sqrt{1 - \left(\frac{V}{a}\right)^2} \right)$$

si ottiene la DF nel caso di guadagno unitario:

$$Ns(a) = \frac{1}{a} b_1 = \begin{cases} 1, & a \leq V \\ \varphi\left(\frac{a}{V}\right), & a \geq V \end{cases} \quad (14)$$

La quale è una funzione reale e nel caso più generale in cui la caratteristica della saturazione abbia guadagno nel tratto centrale $m = C/D$, la funzione descrittiva viene moltiplicata anch'essa per m .

Molti altri sistemi non lineari possono essere descritti a partire dalla DF associata alla saturazione come la *soglia con saturazione*, o *zona morta*, così come sistemi con *saturazione non netta*. L'importante è definire, una volta tracciati nello stesso grafico i diagrammi polari delle funzioni $G(j\omega)$ e $-1/Ns(a)$ e un loro punto di intersezione corrisponde ad un **ciclo limite stabile**, quando questo all'aumentare di a tende ad uscire dal dominio la cui frontiera è costituita dal diagramma polare completo di $G(j\omega)$ e ciò tende a diminuire l'ampiezza delle oscillazioni autosostenute; viceversa si ha un **ciclo limite instabile**. Per esempio un sistema a stabilità condizionata il cui diagramma polare è rappresentato in fig.5, per effetto della saturazione presenta un ciclo limite instabile (corrispondente al punto P_1) ed un ciclo limite stabile (corrispondente al punto P_2); ciò significa che il sistema per piccoli segnali è stabile, ma qualora esso venga portato in saturazione vi si possono innescare oscillazioni di pulsazione ω_2 e ampiezza a_2 .

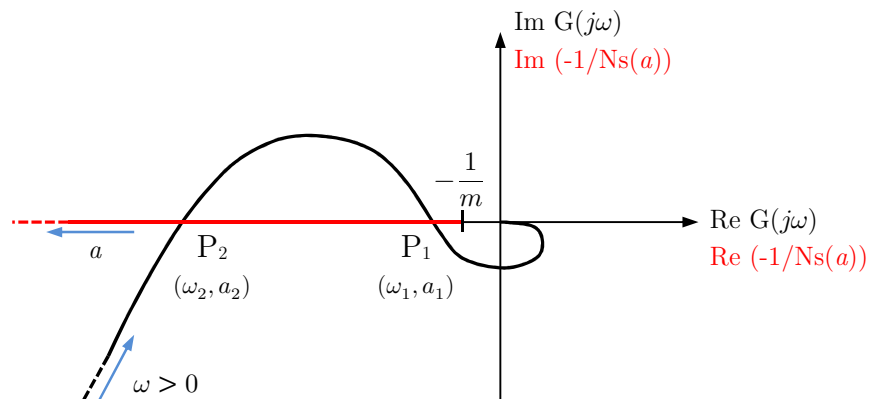


Figura 5

L'intervento della saturazione, così come di qualsiasi altro elemento non lineare ad essa ricondotto è schematizzato nella figura 6, in cui si mostra come l'applicazione del metodo della funzione descrittiva sia equivalente a considerare il sistema in retroazione ancora lineare, ma con una costante di guadagno variabile αm in funzione dell'ampiezza delle eventuali oscillazioni sinusoidali presenti all'uscita del blocco con funzione di trasferimento $-G(j\omega)$.

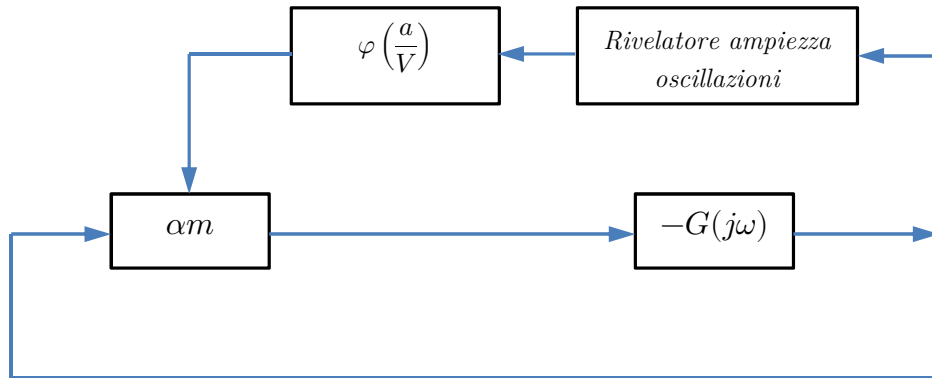


Figura 6

1.2 Definizione formale delle SIDF

La precedente analisi sulle condizioni per cicli limite, ne illustra i fattori menzionati precedentemente, principalmente la dipendenza della funzione descrittiva dal tipo di segnale di ingresso $y(t)$ e il criterio di approssimazione. In generale quando si effettua l'analisi di tipo SIDF si ha che:

- La non linearità in considerazione è $f(y(t))$, che rappresenta un campo di possibili funzioni abbastanza vasto, e può essere continua e/o multivariata;
- La classe di funzioni di ingresso è del tipo $y(t) = y_0 + a \cos(\omega t)$, definita dai parametri y_0, a ;
- Le SIDF presentano due componenti nell'approssimazione di $f(y(t))$: $N_s(y_0, a)$ per la componente sinusoidale (dispari) e $F_0(y_0, a)$ per la componente in DC, ossia:

$$f(y(t)) \cong F_0(y_0, a) + \text{Re}\{N_s(y_0, a) \cdot a e^{j\omega t}\} \quad (15)$$

- Il criterio di approssimazione deve essere quello dell'errore ai minimi quadrati:

$$E_{ms} \triangleq \int_0^{2\pi/\omega} [f(y_0 + a \cos(\omega t)) - F_0(y_0, a) - \text{Re}\{N_s(y_0, a) \cdot a e^{j\omega t}\}]^2 dt \quad (16)$$

L'accoppiamento tra y_0 e ampiezza a del segnale di ingresso in entrambe le componenti del segnale di uscita dimostra come non valga la proprietà di sovrapposizione degli effetti nel blocco non lineare.

Esempio: studio di un ciclo limite.

Si consideri il seguente processo con non-linearità rappresentata da un relè ideale ($D=1$), in un sistema a retroazione unitaria:

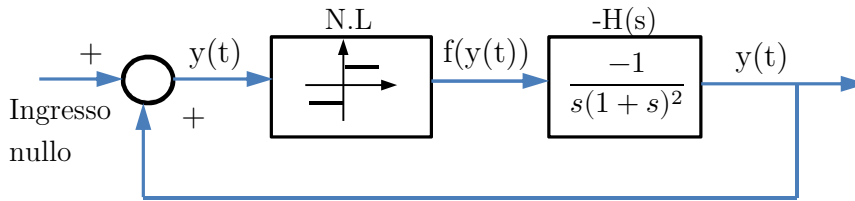


Figura 7

Fornendo un ingresso sinusoidale del tipo $y(t) = a \sin(\omega t)$ è possibile riscrivere $H(s)$ nel dominio della frequenza come $H(j\omega) = \frac{1}{j\omega(1+j\omega)^2}$, si determina quindi il diagramma di Nyquist di fig.8, notando che la funzione ha un asintoto in $\omega = -2$.

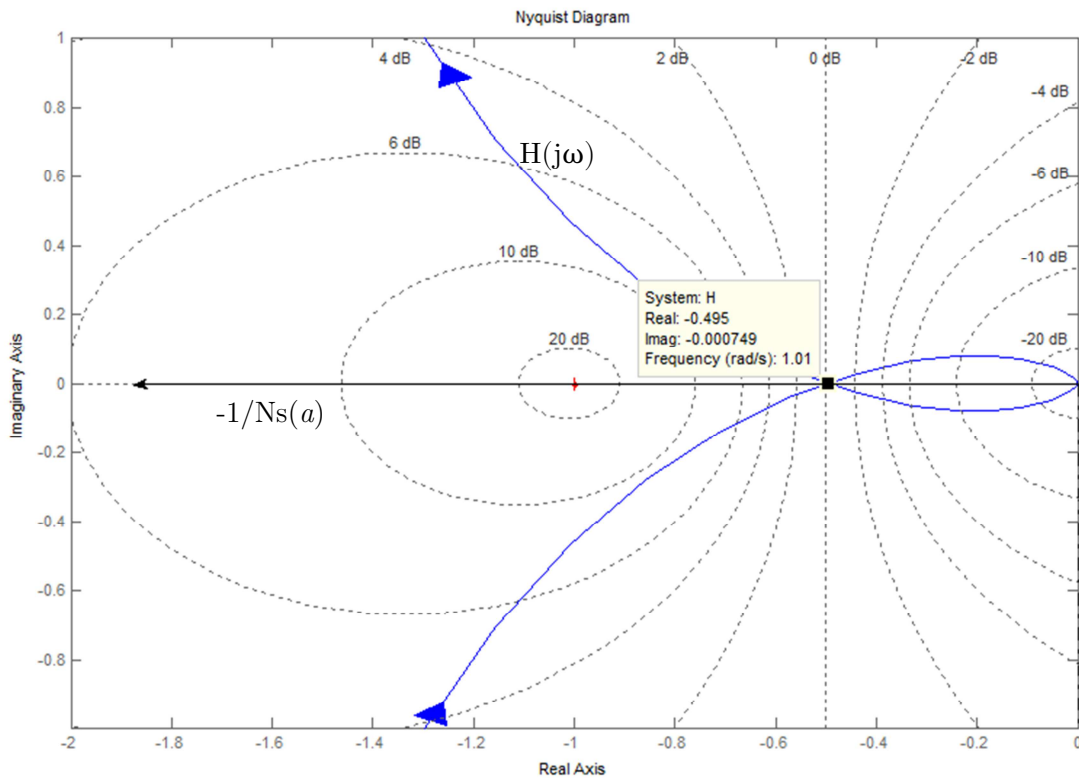


Figura 8

Il sistema oscilla nel punto di intersezione delle due curve cioè in $-\frac{1}{2}$; è possibile quindi calcolare l'ampiezza del ciclo limite ponendo:

$$-\frac{1}{Ns(a)} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\pi a}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow a = \frac{2}{\pi} \quad (17)$$

Con pulsazione di ciclo $\omega_{LC} = 1$.

1.3 Funzioni descrittive per classi di ingressi stocastici

Un possibile approccio per derivare le DF nel caso di ingressi $y(t)$ non periodici e sinusoidali è quello che usa la teoria delle variabili aleatorie, ed in particolare le funzioni di densità di probabilità (pdf) mediante le quali è possibile raggruppare una varietà di ingressi in un'unica DF. Si assume che l'ingresso sia descritto da una componente di distorsione b (bias), e da un processo stocastico (rp) a media nulla $z(t)$ caratterizzato da una fissata pdf (anch'essa a media nulla) ottenendo così $y(t) = b + z(t)$.

Esempi di densità note da assumere per y sono date da:

➤ *Distribuzione normale o gaussiana*

$$p_n(a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} \exp\left(-\frac{(a-b)^2}{2\sigma_n^2}\right) \quad (18)$$

➤ *Distribuzione uniforme*

$$p_u(a) = \begin{cases} 0, & a < b - A \\ \frac{1}{2A}, & (b - A) \leq a \leq (b + A) \\ 0, & a > b + A \end{cases} \quad (19)$$

➤ *Distribuzione triangolare*

$$p_t(a) = \begin{cases} 0, & a < b - A \\ \frac{1}{A}\left(1 - \frac{|a-b|}{A}\right), & (b - A) \leq a \leq (b + A) \\ 0, & a > b + A \end{cases} \quad (20)$$

La varianza in ciascuno dei tre casi è data da $\sigma^2 E((y(t) - b)^2)$ ed i tre valori sono dati da σ_n^2 , $\sigma_u^2 = \frac{A^2}{3}$, e $\sigma_t^2 = \frac{A^2}{6}$, a cui corrispondono le rispettive deviazioni standard.

Nel caso di ingressi di tipo sinusoidale si ricava un'espressione del tipo:

$$p_s(a) = \begin{cases} 0, & a < b - a \\ \frac{1}{\pi\sqrt{a^2 - (a-b)^2}}, & (b - a) \leq a \leq (b + a) \\ 0, & a > b + a \end{cases} \quad (21)$$

avente media b e varianza $\sigma_s^2 = \frac{a}{\sqrt{2}}$.

A seguito della descrizione precedente possiamo andare ad introdurre le funzioni descrittive ad ingresso casuale (RIDFs), così definite:

$$F_0(\sigma_n, b) = \int_{-\infty}^{\infty} f(z)p(z)dz, \quad N_z = (\sigma, b) = \frac{1}{\sigma^2} \int_{-\infty}^{\infty} zf(z)p(z)dz \quad (22)$$

Le due relazioni forniscono il minimo errore quadratico medio. Inoltre questo equivale ad assumere che la pdf in uscita ad un blocco non lineare rimane della stessa classe dell'ingresso; vi è una sola restrizione se comparata con il metodo della serie di Fourier per derivare le SIDFs: il caso di non-linearità multi-valori (come relè con isteresi) non può essere trattato usando questo approccio.

1.4 Funzioni descrittive per ingressi gaussiani

Considerando alcuni degli esempi precedenti nel caso di ingressi normali o gaussiani:

1. *Relè ideale*: $f(y) = D \cdot \text{sgn}(y)$ dove assumiamo che $b=0$, quindi si ha che:

$$\begin{aligned} N_n(\sigma_n) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_n^3}} \int_{-\infty}^{\infty} z f(z) \exp\left(-\frac{z^2}{2\sigma_n^2}\right) dz & (21) \\ &= \frac{2D}{\sqrt{2\pi\sigma_n^3}} \int_0^{\infty} z \exp\left(-\frac{z^2}{2\sigma_n^2}\right) dz \\ &= \frac{\sqrt{2}D}{\sqrt{\pi}\sigma_n} \end{aligned}$$

2. *Non linearità cubica*: $f(y) = Ky^3(t)$, sempre in assenza di bias la DF è:

$$\begin{aligned} N_n(\sigma_n) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_n^3}} \int_{-\infty}^{\infty} z f(z) \exp\left(-\frac{z^2}{2\sigma_n^2}\right) dz & (22) \\ \text{(per simmetria)} &= \frac{2K}{\sqrt{2\pi\sigma_n^3}} \int_0^{\infty} z^4 \exp\left(-\frac{z^2}{2\sigma_n^2}\right) dz \\ &= 3K\sigma_n^2 \end{aligned}$$

Ci si può chiedere quanto influenzi la scelta della pdf sulla corrispondente DF; si può dimostrare che per le quattro pdf analizzate sia nel caso di saturazione, sia nel caso di non linearità cubica (per mezzo di integrazioni numeriche con MATLAB) l'effetto non è rilevante, anche se quest'ultima presenta una discrepanza più elevata tra le varie densità.

1.5 Analisi dei sistemi non lineari stocastici

La dinamica di un sistema non lineare è rappresentata dalla seguente equazione vettoriale differenziale del primo ordine, dove $x(t)$ è il vettore di stato e $w(t)$ è la funzione vettoriale di ingresso:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), t) + G(t)w(t) \quad (23)$$

Il vettore di ingresso $w(t)$ è composto da una parte deterministica $b(t)$ e da una parte aleatoria (processo aleatorio) $u(t)$, quest'ultima composta da variabili aleatorie incorrelate nel tempo; ossia $u(t)$ viene considerato come un processo gaussiano bianco avente matrice di densità spettrale $Q(t)$.

In modo simile il vettore di stato ha una parte deterministica $m(t) = E(x(t))$ (vettore media) e una parte aleatoria $r(t) = x(t) - m(t)$. Pertanto viene descritto dal suo vettore media $m(t)$ e dalla sua matrice di correlazione, ossia $S(t) = E[r(t)r^T(t)]$.

Le equazioni che governano l'evoluzione del vettore media e della matrice di covarianza del sistema descritto dall'equazione (23) risultano:

$$\dot{m} = E[f(x, t)] + G(t)b(t) \triangleq \tilde{f} + G(t)b(t) \quad (24)$$

$$\dot{S} = E[f r^T] + E[r f^T] + G(t)QG^T(t) \quad (25)$$

L'equazione relativa ad S può essere considerata in una forma analoga all'equazione di correlazione considerando $f(x, t)$ lineare e definendo una matrice ausiliaria N_R attraverso l'equazione:

$$N_R S \triangleq E[f(x, t)r^T] \quad (26)$$

Si noti che la matrice RIDF N_R è l'estensione matriciale della definizione di scalare della funzione descrittiva dell'equazione (22). Le quantità \tilde{f} ed N_R possono essere determinate prima di risolvere le equazioni (24 e 25) e ciò richiede la conoscenza della funzione di densità congiunta di probabilità $p(x, t)$ nel caso di un sistema non lineare risolvendo un insieme di equazioni differenziali conosciute come equazioni di Fokker-Planck.

Una procedura per ottenere una soluzione approssimata delle due equazioni consiste nell'assumere che le variabili di stato siano congiuntamente gaussiane; tale assunzione è anche necessaria solamente nel caso di sistemi lineari aventi ingressi gaussiani, essa è valida in maniera approssimata nei sistemi non lineari con ingressi non gaussiani.

Sebbene l'uscita di una non-linearità con un ingresso gaussiano sia in generale non gaussiana, il teorema del limite centrale afferma che i processi aleatori tendono ad assumere un comportamento gaussiano quando filtrati da una dinamica passa basso. Allo stesso modo se ci sono ingressi non gaussiani all'ingresso di un filtro passa basso, il teorema del limite centrale afferma che le variabili di stato sono ancora congiuntamente normali. Quindi nel sistema si considera soprattutto la parte lineare e si cerca di propagare il segnale attraverso il sistema in forma gaussiana.

Come conseguenza del fatto di aver assunto le variabili di stato congiuntamente gaussiane, \tilde{f} ed N_R dipendono solamente dalla media m e dal vettore di covarianza S .

Una comparazione tra la quasi-linearizzazione svolta con la tecnica delle serie di Taylor o la tecnica ai piccoli segnali e la tecnica RIDF sottolinea i vantaggi di quest'ultima nel catturare gli effetti non-lineari di un sistema, motivo per cui tale metodo ha riscontrato un notevole successo.

Capitolo 2

Analisi dei cicli limite e stabilità

2.1 Analisi dei cicli limite

Il metodo della funzione descrittiva precedentemente preso in esame serve per la ricerca di eventuali soluzioni periodiche delle equazioni differenziali che descrivono il moto libero dei sistemi non lineari in retroazione: il metodo consente di determinare, sia pure approssimativamente, anche i parametri che definiscono quantitativamente tali soluzioni periodiche (ampiezza e frequenza delle oscillazioni quasi sinusoidali all'ingresso dell'elemento non lineare). Nei normali sistemi a controllo, con l'eccezione dei sistemi a relè, un regime di oscillazioni autosostenute corrisponde ad un comportamento anomalo da evitare; d'altronde, un tale regime, pur essendo la manifestazione più evidente dell'instabilità, non rappresenta la sola forma di instabilità che interessi rilevare ed evitare. Eventuali instabilità aperiodiche sfuggono all'analisi condotta con il metodo della funzione descrittiva.

In un sistema autonomo del secondo ordine non lineare:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = f_1(x_1(t), x_2(t)) \\ \dot{x}_2(t) = f_2(x_1(t), x_2(t)) \end{cases} \quad (27)$$

il problema di stabilire l'eventuale presenza di un insieme (ciclo) limite $\omega(\gamma)$ associato ad una traiettoria γ del sistema (27) può essere agevolato dal fatto di conoscere la tipologia di tale insieme limite, il quale può appartenere ad una delle seguenti tre classi:

1. $\omega(\gamma)$ è un punto di equilibrio x_e del sistema: al divergere di t la traiettoria γ si avvolge a spirale intorno a x_e oppure tende ad x_e secondo una direzione asintotica.



Figura 9

2. $\omega(\gamma)$ è una traiettoria chiusa del sistema: γ può coincidere con $\omega(\gamma)$, e in tal caso il movimento del sistema è periodico, oppure si avvolge a spirale attorno a $\omega(\gamma)$, restando tutta interna o tutta esterna ad essa.

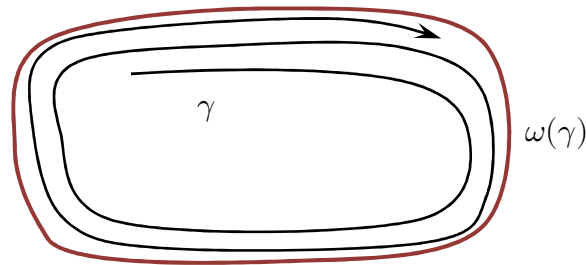


Figura 10

3. $\omega(\gamma)$ non è una traiettoria del sistema, essa consiste allora di una curva chiusa, frontiera di un insieme omeomorfo a un disco, comprendente un insieme finito e non vuoto di punti di equilibrio e alcune traiettorie del sistema, dette separatrici che connettono i punti di equilibrio; la traiettoria γ come nel caso 2 si avvolge a spirale attorno a $\omega(\gamma)$, restando tutta interna o tutta esterna ad essa.

Esempio

Se si considera il seguente sistema:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_1(t)(1 - x_1^2(t) - x_2^2(t)) - x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = x_2(t)(1 - x_1^2(t) - x_2^2(t)) + x_1(t) \end{cases} \quad (28)$$

Introducendo le coordinate polari r e θ e ponendo:

$$\begin{cases} x_1 = r \cos \theta \\ x_2 = r \sin \theta \end{cases} \quad (29)$$

Le equazioni assumo la forma più semplice del tipo:

$$\begin{cases} \dot{r}(t) = r(t)(1 - r^2(t)) \\ \dot{\theta}(t) = 1 \end{cases} \quad (30)$$

Risolvendo il sistema di equazioni è facile vedere che l'origine è l'unico stato di equilibrio del sistema e che la circonferenza $r = 1$ è una traiettoria che il sistema descrive con moto periodico. Ogni stato iniziale diverso dall'origine dà luogo ad una traiettoria limitata γ che si avvolge a spirale intorno alla circonferenza, tendendo asintoticamente ad essa (ciclo limite per ogni traiettoria).

Tale insieme limite può essere osservato da una simulazione in Matlab.

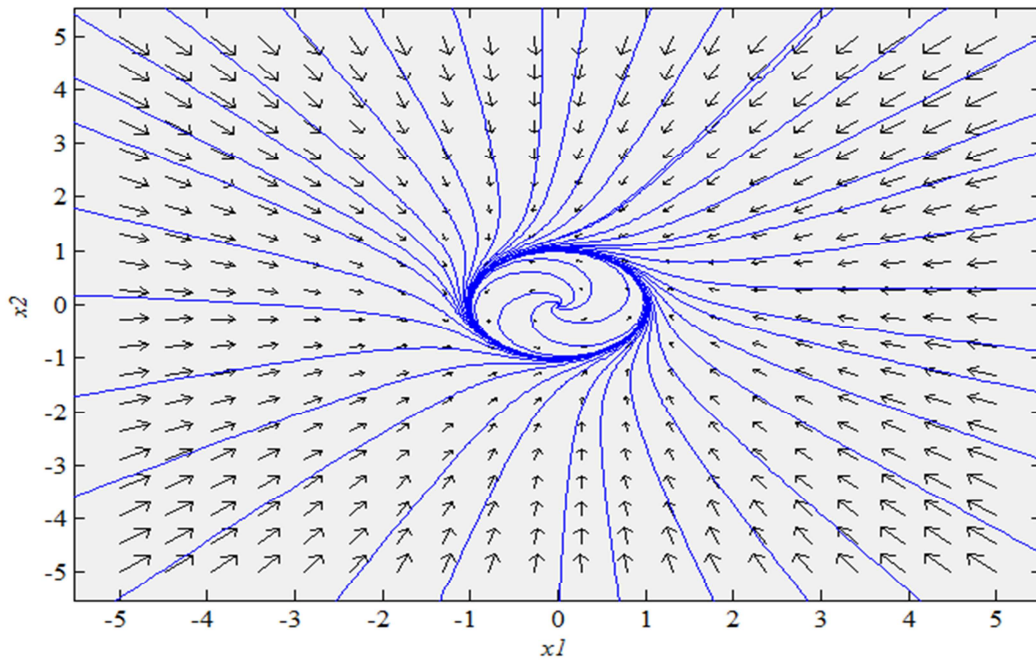


Figura 11

2.2 Simulazioni SIDF

Simulazione 1

Si consideri la seguente funzione di trasferimento per il sistema lineare:

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+2)} \quad (31)$$

e si considerino due tipi di non linearità: il relè ideale (funzione segno) e la saturazione.

Da semplici manipolazioni algebriche si ottiene che la risposta in frequenza può essere scritta come:

$$G(j\omega) = \frac{-3\omega - j(2 - \omega^2)}{9\omega^3 + \omega(2 - \omega^2)^2} \quad (32)$$

Si considerano i punti di intersezione con l'asse reale del piano complesso, che si ottengono ponendo:

$$\frac{2 - \omega^2}{9\omega^3 + \omega(2 - \omega^2)^2} = 0 \quad (33)$$

ricavando un'unica soluzione positiva per $\omega = \sqrt{2}$. Si noti che il risultato dell'equazione fornisce anche una soluzione negativa in modulo uguale alla precedente che non prenderemo in considerazione. In tal caso non si considera la pulsazione $\omega = 0$ dato che essa non dà origine ad una oscillazione autosostenuta. Valutando $Re[G(j\omega)]$ nella pulsazione trovata e sostituendo tale valore nella (7) si ottiene $Ns(a) = 6$. Queste informazioni sono state ricavate senza specificare il tipo di non-linearità.

Supponiamo ora che la non linearità consista in un relè ideale; la soluzione per l'ampiezza dell'eventuale sinusoida autosostenuta all'ingresso del blocco non lineare è data da un valore vicino a $a_{LC} = \frac{2}{3\pi}$, e una pulsazione $\omega_{LC} \cong \sqrt{2}$.

Per via grafica si osserva l'interpolazione tra il diagramma di Nyquist della $G(s)$ e $-1/Ns(a)$:

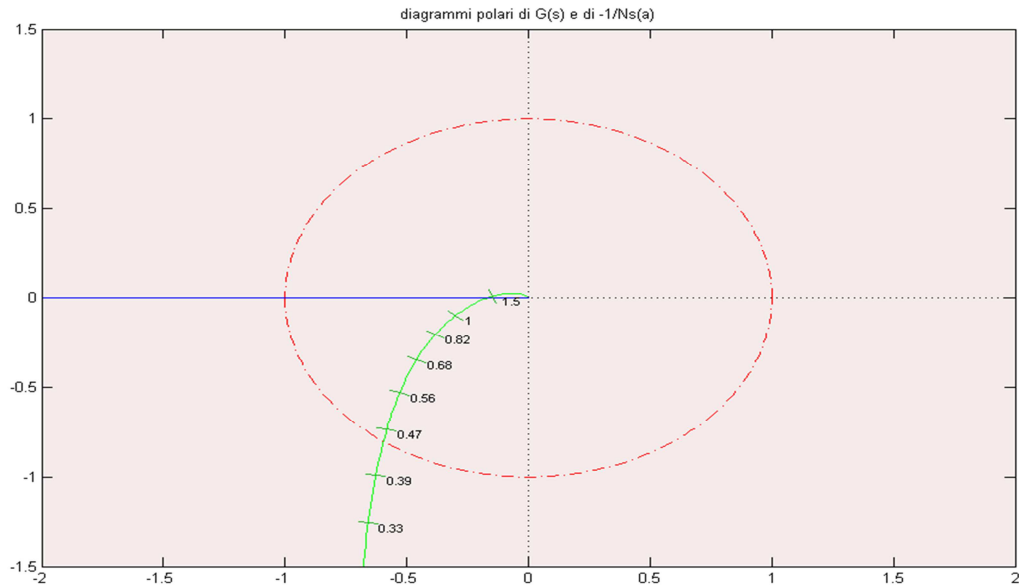


Figura 12

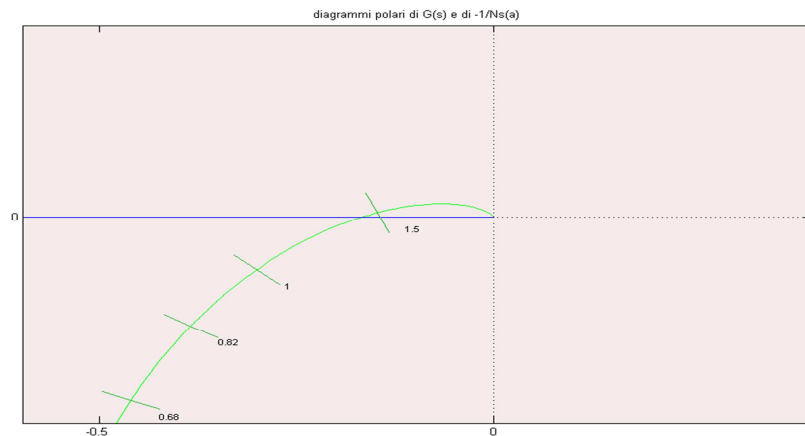


Figura 13

Avendo calcolato per $Ns(a)$ una funzione reale positiva nel diagramma di Nyquist $-1/Ns(a)$ giace nel diagramma polare nel semiasse reale negativo, l'intersezione con $G(j\omega)$ è unica e si nota che all'aumentare dell'ampiezza delle oscillazioni rispetto al valore a_{LC} tale funzione tende ad "uscire" dal dominio di $G(j\omega)$; per il *criterio di Loeb* ciò produce un effetto stabilizzante che tende a diminuire a al valore dell'oscillazione limite, viceversa al diminuire dell'ampiezza delle oscillazioni. Quindi l'analisi teorica fornisce un ciclo limite stabile.

Con l'ambiente software Simulink è possibile visualizzare l'andamento ed accertarsi dei valori ottenuti per pulsazione ed ampiezza per via teorica fornendo in ingresso al sistema retroazionato in fig.1 un segnale esponenziale decrescente.

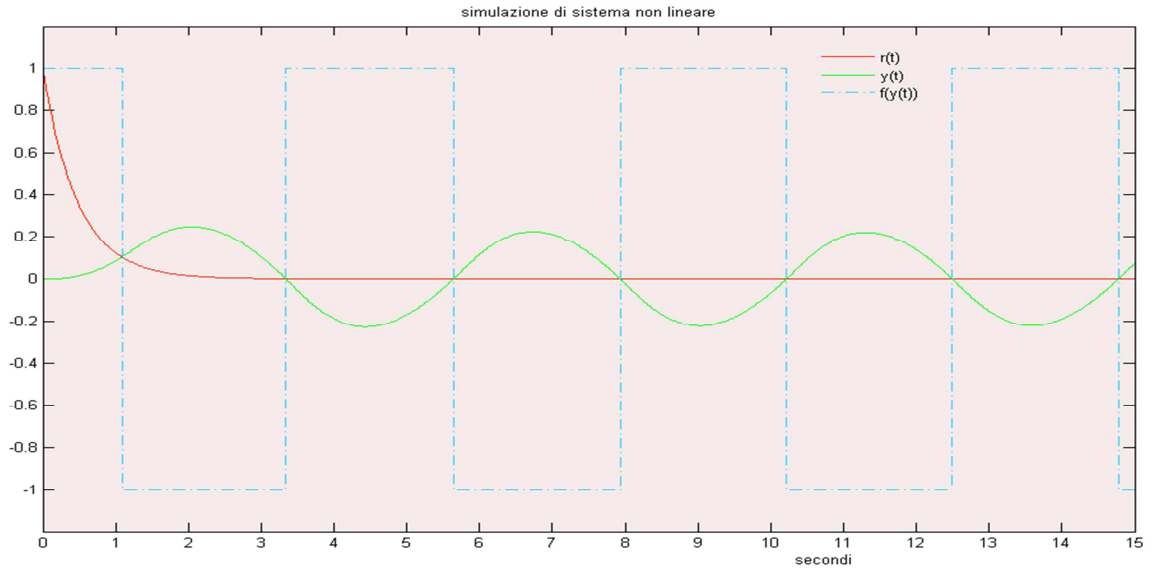


Figura 14

Nel secondo caso, ossia considerando il blocco non lineare come una funzione di saturazione con tratto centrale a pendenza unitaria ed estremi pari a -1 e 1, si ottiene una funzione descrittiva $Ns(a) \geq 1$ e quindi $-\frac{1}{Ns(a)} \leq -1$. Pertanto non essendoci intersezioni con il diagramma di $G(j\omega)$ ci aspettiamo che il sistema non abbia oscillazioni autosostenute. Anche in tal caso dalle simulazioni in Matlab si ottengono i seguenti risultati.

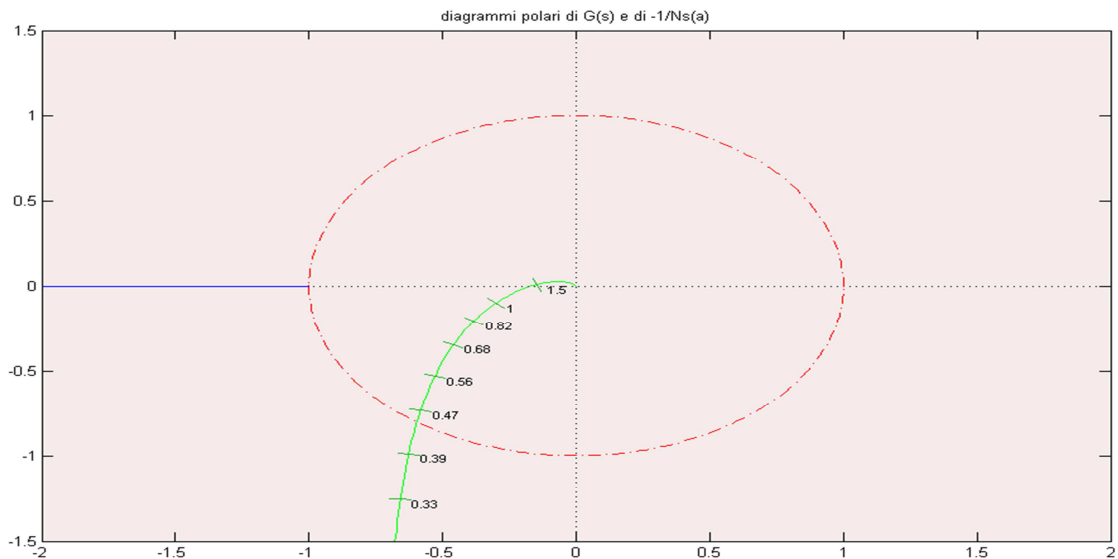


Figura 15

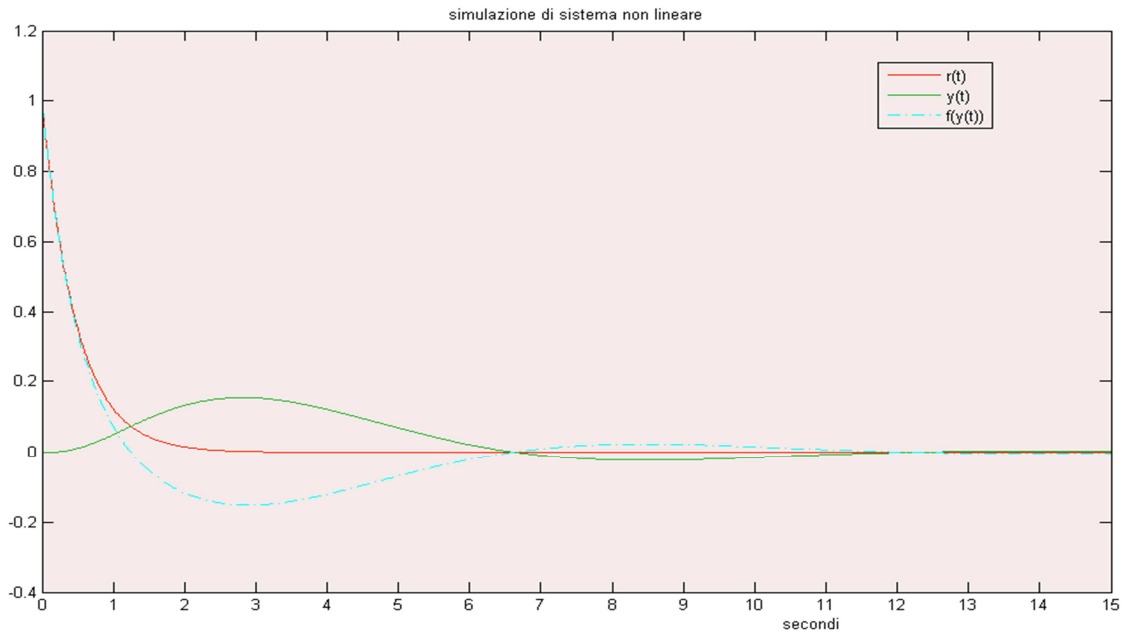


Figura 16

In tal caso è evidente l'andamento oscillatorio smorzato del sistema che non dà luogo a nessun fenomeno anomalo.

Simulazione 2

Si consideri la seguente funzione di trasferimento per la parte lineare del sistema in fig.1:

$$G(s) = \frac{108}{s(s+3)^2} \quad (34)$$

mentre per il blocco non-lineare si consideri la funzione in figura:

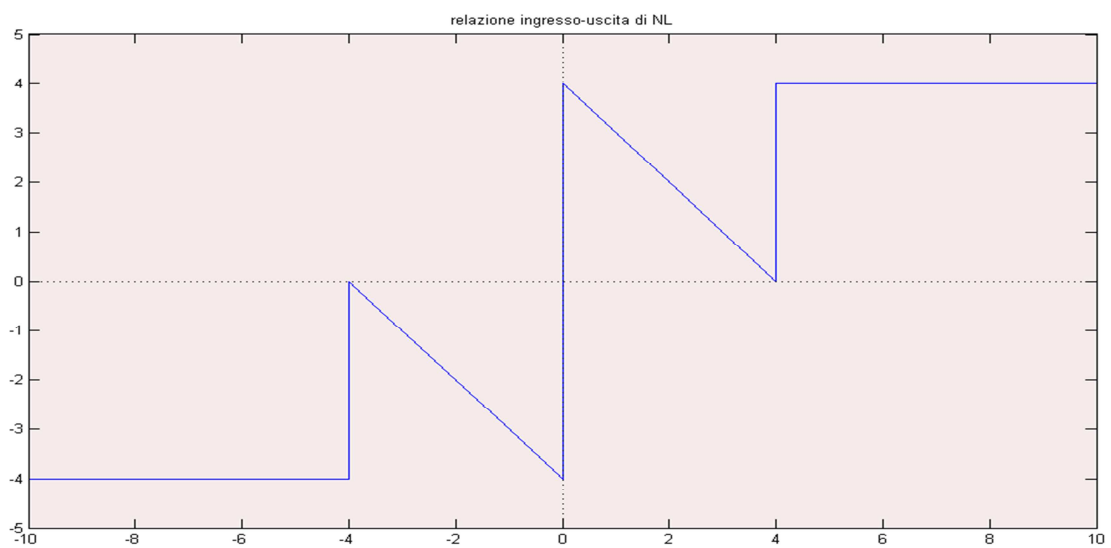


Figura 17

a cui possiamo associare la seguente funzione descrittiva, avente un andamento facilmente determinabile pensando che per valori di y in ingresso alla non-linearità compresi tra 0 e 4 $f(y)$ è definita dalla somma di un relè ideale e da un elemento lineare di pendenza -1. Pertanto:

$$N_s(a) = \frac{16}{\pi a} - 1 \quad 0 < y < 4 \quad (35)$$

Per $y = 4$ si ha un cambiamento di pendenza verso l'alto e per y che tende all'infinito la funzione descrittiva deve tendere a zero.

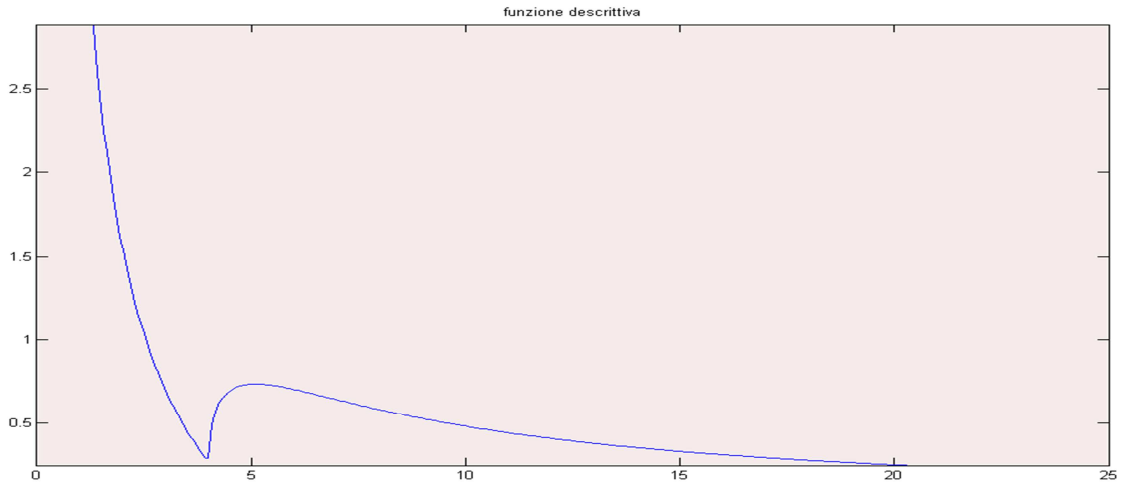


Figura 18

In tal caso esistono tre punti di intersezione tra $G(j\omega)$ e $-\frac{1}{N_s(a)}$ e le ampiezze delle tre possibili oscillazioni sono:

$$a_1 = 3.395 \text{ V} \quad a_2 = 4.084 \text{ V} \quad a_3 = 9.557 \text{ V}$$

tutte e tre alla pulsazione $\omega = 3$. La prima e la terza intersezione rappresentano dei cicli limite stabile e la seconda un ciclo limite instabile.

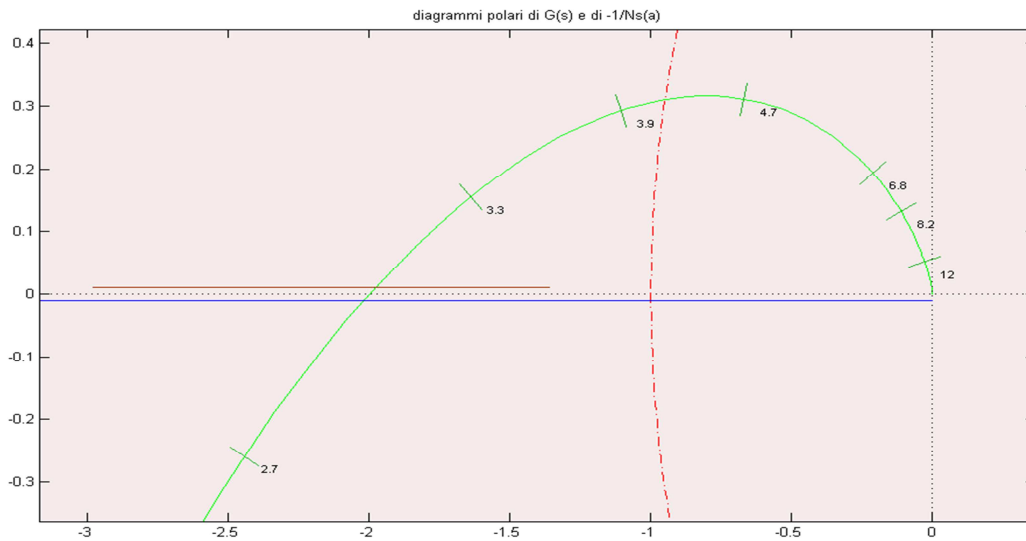


Figura 19

Come si vede in fig.19 la funzione descrittiva è composta di tre tratti: un primo tratto (colore blu) in cui il suo andamento è decrescente; successivamente la funzione assume un andamento crescente (colore marrone) per infine diventare di nuovo decrescente fino a giungere a zero ottenendo così i tre punti di intersezione con $G(j\omega)$.

Possiamo infine eseguire una simulazione notando che assumendo come ingresso un segnale esponenziale, il sistema manifesta la presenza del ciclo limite corrispondente al terzo caso tra quelli precedentemente descritti (a_3) e quindi l'oscillazione autosostenuta risulta stabile.

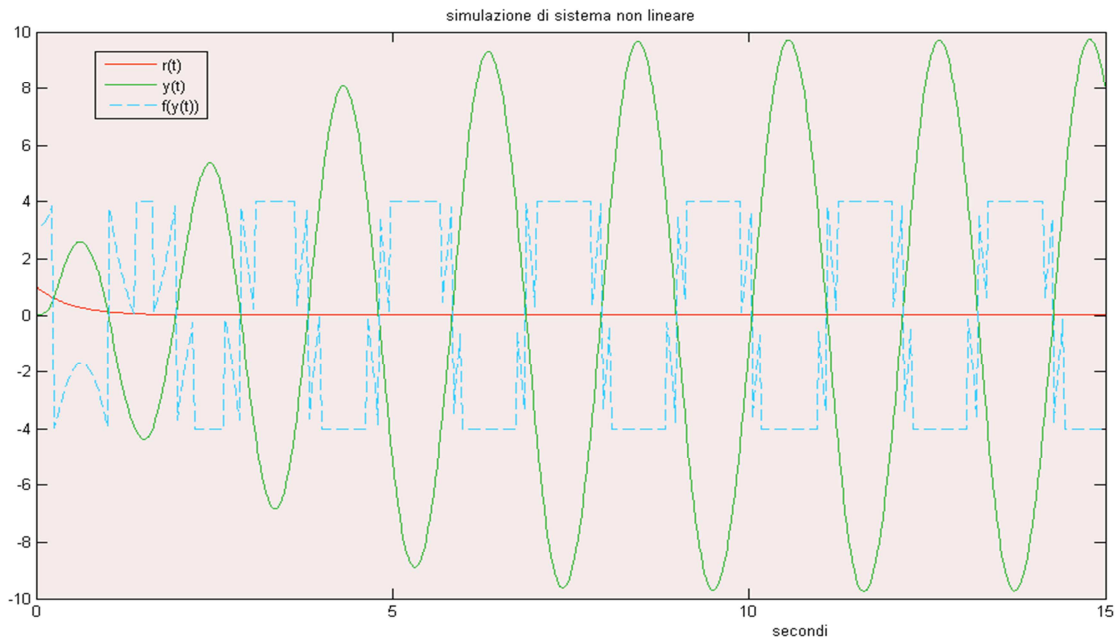


Figura 20

Simulazione 3 (Oscillatore a ponte di Wien)

Si consideri il seguente circuito detto oscillatore a ponte di Wien:

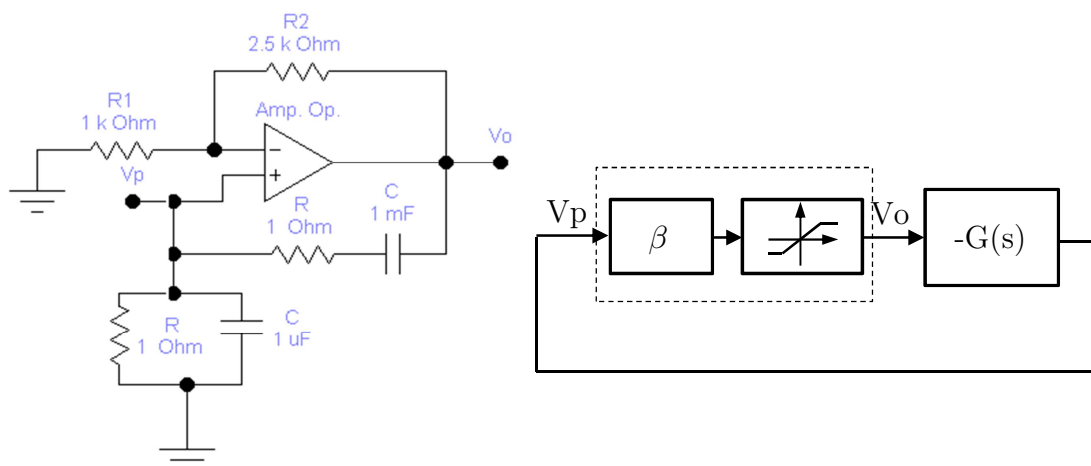


Figura 21

Se si considera lo schema a blocchi del sistema retroazionato in fig.21 si ottiene facilmente la funzione di trasferimento data da:

$$G(s) = -\frac{V_p}{V_o} = \frac{-RCs}{s^2R^2C^2 + s3RC + 1} \quad (36)$$

L'equazione caratteristica $1 + KG(s) = 0$ del sistema retroazionato quando la non linearità (parte tratteggiata dello schema a blocchi) viene sostituita da un guadagno K è:

$$s^2R^2C^2 + s(3 - K)RC + 1 = 0 \quad (37)$$

e dalla tabella di Routh si ricava che il sistema è stabile per valori di $K < K^* = 3$; quindi nel sistema si innesca un'oscillazione autosostenuta solamente nel momento in cui $\beta = 1 + \frac{R_2}{R_1} > 3$ ossia $R_2 > 2R_1$. Il diagramma di Nyquist di $G(s)$ interseca il semiasse reale negativo in corrispondenza alla pulsazione $\omega^* = \frac{1}{RC}$. Considerando la tensione di alimentazione dell'amplificatore pari a $V_M = 12V$ si approssima la tensione di saturazione della caratteristica non lineare a pochi decimi di volt inferiore ad essa. Con i componenti scelti nello schema circuitale la funzione descrittiva (reale) del blocco non lineare è la seguente:

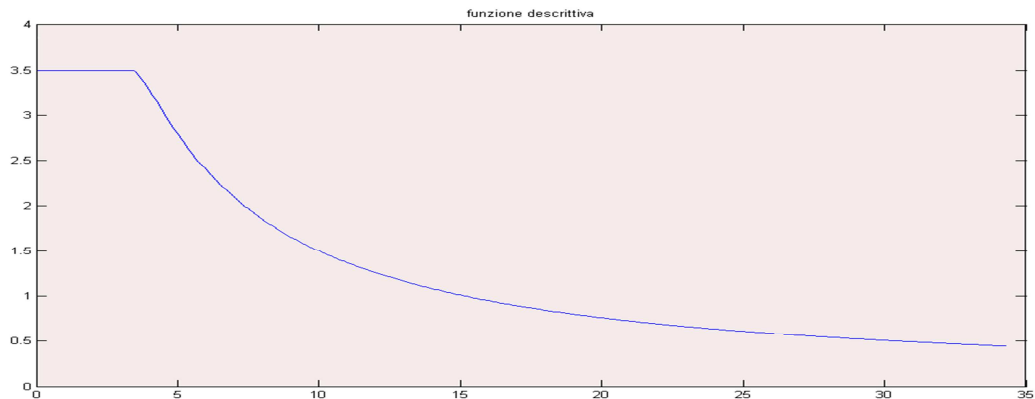


Figura 22

mentre l'intersezione tra $G(s)$ e $-\frac{1}{N_s(a)}$ è descritta nel piano di Gauss da:

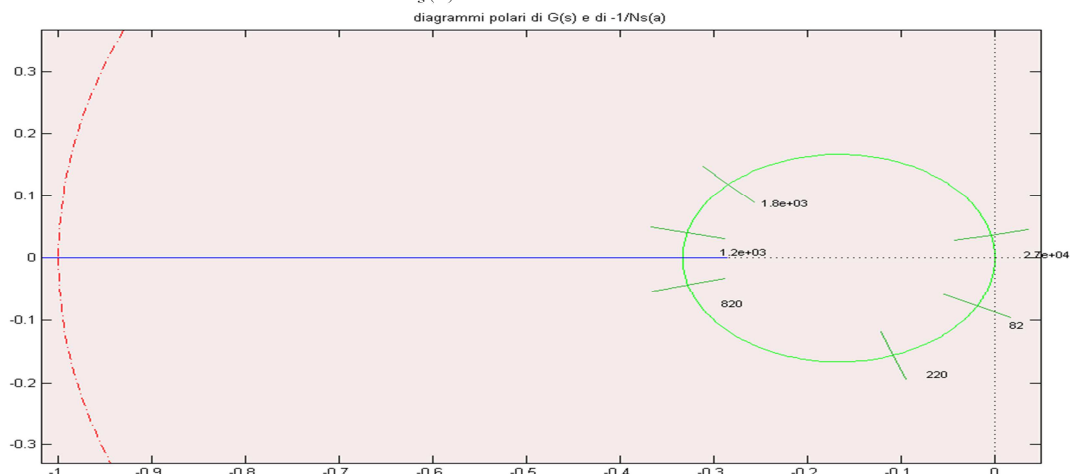


Figura 23

L'ampiezza dell'oscillazione è pertanto ricavabile per via grafica oppure mediante l'equazione (7) una volta ricavata la frequenza di ciclo $\omega_{LC} = 1000$ rad/s: essa risulta $a_{LC} = 4,56$ V.

Dalla simulazione in Simulink considerando il seguente schema a blocchi circuitale è possibile notare la relazione tra V_p (ingresso positivo dell'amplificatore) e V_o (uscita del ponte di Wien).

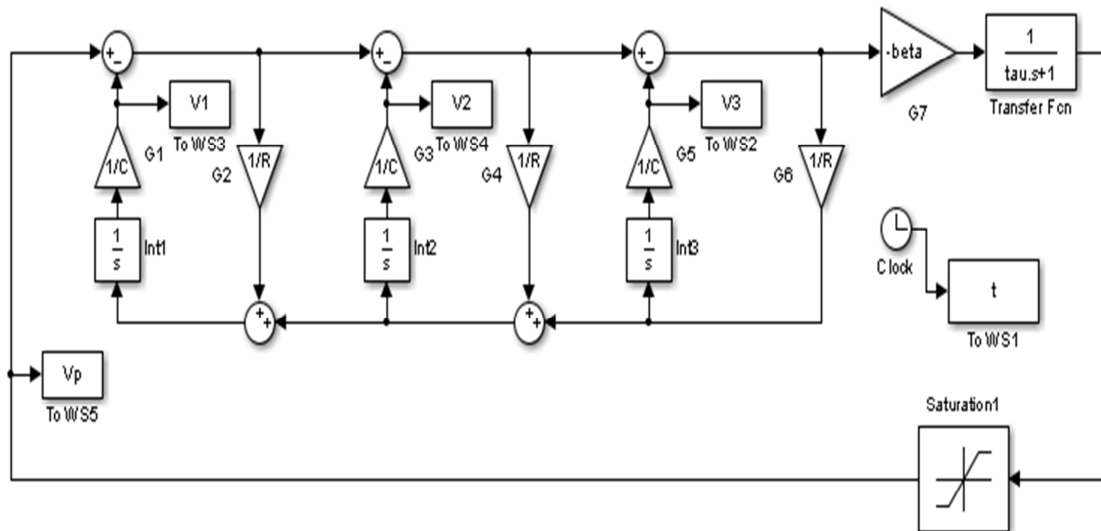


Figura 24

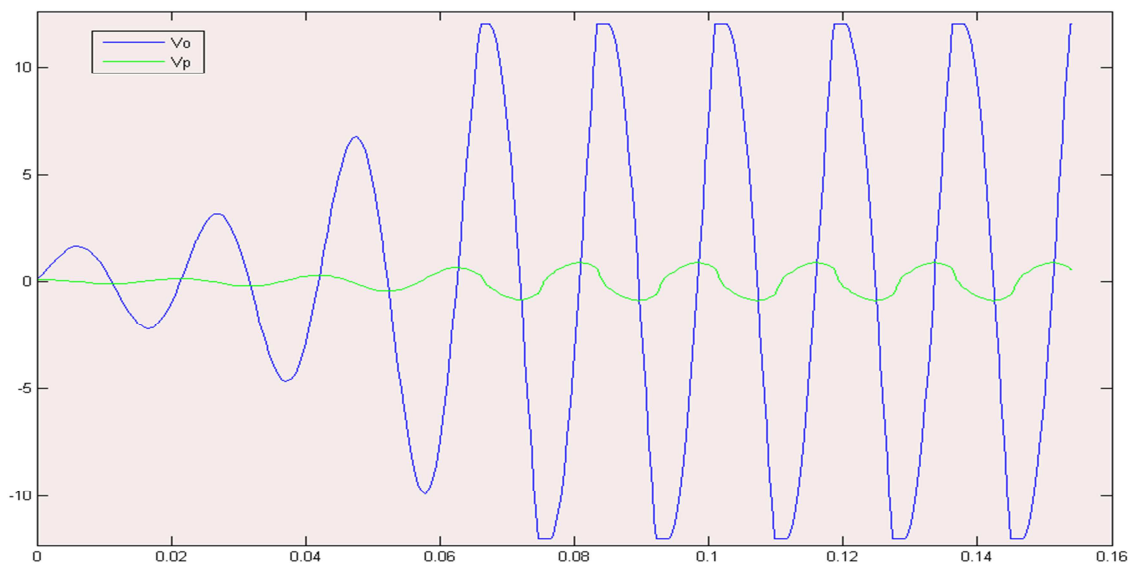


Figura 25

Si noti come in tal caso nella modellizzazione di tale circuito oscillatorio, la presenza di eventuali cicli limite nel sistema sia vantaggioso nella fabbricazione di circuiti integrati analogici o digitali; inoltre anche in tal caso il ciclo limite risulta stabile.

2.3 Criteri del cerchio e di Popov

Se si desidera affrontare la stabilità da un punto di vista più diretto ed usare dei criteri che garantiscano il comportamento che normalmente si richiede ai sistemi di controllo, cioè la stabilità asintotica per perturbazioni di qualunque entità (stabilità asintotica globale) il criterio del cerchio e quello di Popov forniscono condizioni sufficienti per la stabilità asintotica globale dei sistemi in retroazione non lineari autonomi costituiti da un anello in cui risultano disposte in cascata una parte non lineare puramente algebrica ed una parte lineare dinamica (con schema equivalente a quello della fig.1 con $r = 0$).

Criterio del cerchio

Si suppone che la caratteristica dell'elemento non lineare sia contenuta in un settore delimitato da due rette con pendenza angolare α e β , che si suppongono entrambe positive. Noti così tali parametri può essere definito il cerchio critico rappresentato in fig.26.

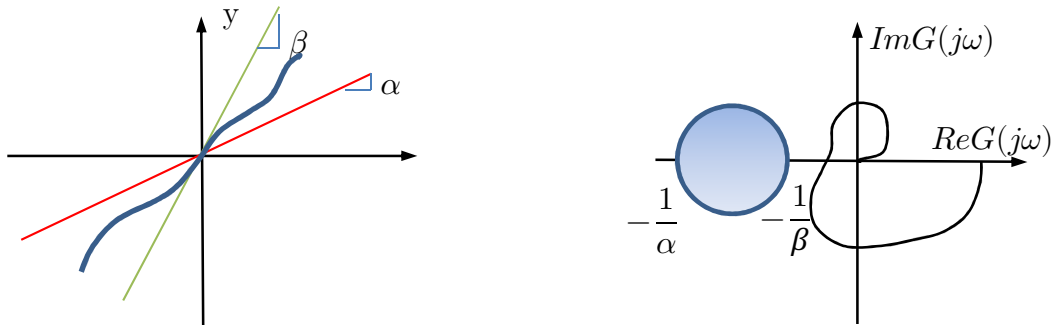


Figura 26

Nell'ipotesi che la funzione di trasferimento della parte lineare del sistema $G(s)$ abbia tutti i poli a parte reale negativa, ad eccezione di un eventuale polo nell'origine, condizione sufficiente perché il sistema a retroazione sia globalmente asintoticamente stabile è che il diagramma polare completo della funzione $G(j\omega)$ non circonda ne tocchi il cerchio critico.

Tale criterio risulta un'estensione del criterio di Nyquist, dato che quando risulta $\alpha = \beta = m$ il cerchio si riduce ad un punto sull'asse reale di ascissa $-1/m$. Caso frequente è quello in cui la caratteristica dell'elemento non lineare tende ad un asintoto orizzontale, come in presenza di saturazione; basta allora in tal caso assumere $\alpha = 0$ e il cerchio degenera nel semipiano a sinistra della retta verticale passante per il punto $-1/\beta$.

Criterio di Popov

Il criterio di Popov, fornisce come il criterio del cerchio condizioni sufficienti per la stabilità asintotica globale.

Esso ha l'inconveniente di non riferirsi al diagramma di Nyquist, bensì al diagramma di Popov, ma fornisce un campo di stabilità più ampio di quello corrispondente al criterio del

cerchio, ossia garantisce la stabilità di sistemi che non soddisferebbero il criterio del cerchio.

Per la funzione di trasferimento $G(s)$ della parte lineare si considerano 2 casi:

1. *Caso principale:* $G(s)$ è strettamente stabile, cioè ha tutti i poli a parte reale negativa;
2. *Caso particolare:* $G(s)$ ha tutti poli a parte reale negativa, tranne un polo nell'origine.

Per quel che riguarda la caratteristica della parte non lineare $f(x)$, si suppone che essa sia compresa in un settore, come nel caso precedente ossia che esista un numero reale positivo β tale che:

$$0 \leq \frac{f(x)}{x} \leq \beta \quad \forall x, \quad (38)$$

nel caso principale, oppure

$$0 < \varepsilon \leq \frac{f(x)}{x} \leq \beta \quad \forall x \quad (39)$$

nel caso particolare. Nel caso particolare, si richiede pertanto che il grafico non abbia punti in comune con l'asse delle ascisse oltre l'origine e che non abbia tangente orizzontale nell'origine.

Affinché il sistema retroazionato nel caso generale si dica assolutamente stabile nel settore $[0, \beta]$, è sufficiente che esista una retta passante per il punto $-1/\beta$ che non intersechi né tocchi il diagramma polare della funzione complessa $G_p(j\omega) = \text{Re}G(j\omega) + j\omega \text{Im}G(j\omega)$ tracciato per ω variabile da zero all'infinito.

Nel caso particolare invece perché il sistema sia stabile nel settore $[\varepsilon, \beta]$, è sufficiente che esista una retta passante per il punto $-1/\beta$ che non intersechi né tocchi il diagramma polare della funzione complessa $G_p(j\omega)$ e che valga inoltre la condizione $\lim_{\omega \rightarrow 0^+} \omega \text{Im}G(j\omega) < 0$.

2.4 Analisi dei cicli limite per sistemi con non-linearità multiple

Considerando un sistema generico del tipo $\dot{x} = f(x, u)$ avente un numero qualunque di non-linearità e con più ingressi; assumendo che u sia un vettore costante u_0 , si desidera determinare se il sistema suddetto presenta dei cicli limite.

Assumiamo che le variabili di stato siano circa sinusoidali, dove a_x è un vettore complesso delle ampiezze e x_c è il valore centrale del vettore di stato (preso come riferimento). Come fatto in precedenza possiamo trascurare le armoniche di ordine più elevato, ottenendo la seguente approssimazione:

$$f(x, u_0) \cong F_{DF}(u_0, x_c, a_x) + \text{Re}[A_{DF}(u_0, x_c, a_x)a_x e^{j\omega t}] \quad (40)$$

Il vettore F_{DF} e la matrice A_{DF} si ottengono eseguendo l'espansione in serie di Fourier delle funzioni $f(x_c + \text{Re}[a_x e^{j\omega t}], u_0)$ come illustrato precedentemente, definendo la

funzione descrittiva nel caso multivariato. L'eventuale ciclo limite esiste se si determinano dei valori di x_C ed $a_x \neq 0$ in modo tale da soddisfare:

$$F_{DF}(u_0, x_C, a_x) = 0 \quad [j\omega I - A_{DF}(u_0, x_c, a_x)]a_x = 0 \quad (41)$$

Tali equazioni non sono nella maggior parte dei casi semplici da risolvere ma possono essere trattate con metodi iterativi che utilizzano approssimazioni successive.

Capitolo 3

Modellizzazione della risposta in frequenza

3.1 Metodi per determinare la risposta in frequenza

L'approccio SIDF viene usato per due scopi primari: l'analisi dei cicli limite e la caratterizzazione del comportamento ingresso-uscita (I/O) dell'impianto non-lineare nel dominio della frequenza. In questa sezione verranno esposti due metodi per determinare la risposta in frequenza dipendente dall'ampiezza della non linearità, da qui in poi definiti come modelli SIDF I/O.

Le due tecniche di modellizzazione che verranno illustrate sono: *il metodo analitico del bilanciamento armonico* ed *il metodo simulativo*.

Metodo analitico del bilanciamento armonico

Data la generica dinamica non lineare del sistema descritta come segue:

$$\dot{x} = f(x, u) \tag{42}$$

con un segnale di ingresso scalare $u(t) = u_0 + b_u \cos(\omega t)$ ed il vettore n-dimensionale x assunto come un vettore quasi sinusoidale:

$$x \cong x_c + Re[a_x e^{j\omega t}] \tag{43}$$

dove la variabile a_x si assume come un vettore complesso (nella notazione dei fasori), ed x_c è il vettore di stato considerato come riferimento o centro per le componenti continue di tutte le sinusoidi considerate.

Si procede sviluppando un modello di spazio di stato quasi lineare nel quale ogni elemento di tipo non lineare viene sostituito analiticamente con la corrispondente SIDF scalare, e si formulano delle equazioni quasi lineari:

$$\begin{aligned} f(x, u) \cong & F_{DF}(u_0, b_u, x_c, a_x) + Re[A_{DF}(u_0, b_u, x_c, a_x) a_x e^{j\omega t}] \\ & + Re[B_{DF}(u_0, b_u, x_c, a_x) b_u e^{j\omega t}] \end{aligned} \tag{44}$$

Si definiscono le equazioni del bilanciamento armonico, che sono per le componenti in DC e in AC pari a:

$$F_{DF}(u_0, b_u, x_c, a_x) = 0 \quad (45)$$

$$j\omega I a_x = A_{DF} a_x + B_{DF} b_u \quad (46)$$

In principio si risolve la prima delle due equazioni considerando come incognite le ampiezze x_c, a_x dati i valori di u_0, b_u e successivamente nella seconda equazione si determinano le incognite A_{DF} e B_{DF} ; tuttavia tale procedura in generale è complessa e richiede speciali software di risoluzione delle equazioni non lineari.

Successivamente, assumendo che ci sia una relazione lineare di uscita del tipo $y = Cx$ per semplicità, il modello ingresso/uscita può essere valutato come:

$$G(j\omega; u_0, b_u) = C[j\omega I - A_{DF}]^{-1} B_{DF} \quad (47)$$

Tutte le matrici del modello quasi lineare possono dipendere dalle ampiezze dell'ingresso e del vettore di stato u_0, b_u . Tale approccio veniva usato per lo sviluppo di un modello automatizzato chiamato *model-order deduction algorithm for nonlinear systems* (MODANS). Questo tipo di approccio però presenta il limite di assumere che ogni ingresso ad una non-linearità possa essere considerato quasi sinusoidale; esso inoltre è molto più laborioso del secondo metodo che si andrà ad analizzare, ma esso viene considerato il principale algoritmo di risoluzione per la determinazione della risposta in frequenza.

Metodo simulativo

Il secondo tipo di procedura consiste nell'applicare un segnale sinusoidale all'ingresso del sistema non lineare; via software si esegue la simulazione e si effettua l'integrazione dell'uscita del sistema fino a che si raggiunge uno stato a regime, ottenendo così la risposta in frequenza che d'ora in poi chiameremo anche SIDF dinamica o nel dominio della frequenza $G(j\omega; u_0, b_u)$.

Nell'illustrazione dell'uso del secondo metodo si assumerà per semplicità che $u_0 = 0$, e si procede nella determinazione di $G(j\omega, b)$ per un range di ampiezze di ingresso $[b_{min}, b_{max}]$ per coprire il campo dei possibili valori operativi del sistema, così come per un insieme di frequenze $[\omega_{min}, \omega_{max}]$ il più ampio possibile.

Successivamente degli insiemi di valori specifici $\{b_i\}$ e $\{\omega_j\}$, considerati dai due intervalli vengono selezionati per determinare $G(j\omega_j, b_i)$.

Il modello del sistema non lineare viene poi sviluppato aggiungendo nuovi stati corrispondenti agli integrali di Fourier:

$$\operatorname{Re}[G_K(j\omega_j, b_i)] = \frac{\omega_j}{\pi b_i} \int_{KT}^{(K+1)T} y(t) \cos(\omega t) dt \quad (48)$$

$$\operatorname{Im}[G_K(j\omega_j, b_i)] = \frac{-\omega_j}{\pi b_i} \int_{KT}^{(K+1)T} y(t) \sin(\omega t) dt \quad (49)$$

dove $\operatorname{Re}(\cdot)$ ed $\operatorname{Im}(\cdot)$ sono parti reale ed immaginaria del modello SIDF $G(j\omega_j, b_i)$, considerando $T = 2\pi/\omega_j$, ed $y(t)$ è l'uscita del sistema non lineare. In altre parole le derivate degli stati successivi di tale modello con il quale si vuole linearizzare l'impianto sono proporzionali a $y(t) \cos(\omega t)$ ed a $y(t) \sin(\omega t)$.

Il raggiungimento di uno stato a regime per b_i e ω_j è garantito da criteri di settaggio di tolleranze e di convergenza su modulo e fase di G_K dove K corrisponde al numero di periodi simulati. L'integrazione viene interrotta alla fine di ogni periodo e criteri di convergenza verificano che i risultati siano contenuti all'interno di un intervallo di tolleranza, in particolare G_K deve essere considerato vicino a G_{K-1} ; quindi al termine della simulazione il programma di calcolo fornisce il valore più vicino a $G(j\omega_j, b_i)$. Se l'insieme di frequenze considerato è a valori molto vicini il punto di convergenza trovato per la simulazione alla pulsazione ω_j può essere considerato come una buona condizione iniziale per la simulazione alla pulsazione ω_{j+1} .

Esempio 1

Una breve dimostrazione di come risolvere ed impostare le equazioni del bilanciamento armonico è data nel seguente esempio: si consideri un semplice sistema chiuso in retroazione composto da un relè ideale e da un blocco lineare dinamico $W(j\omega)$.

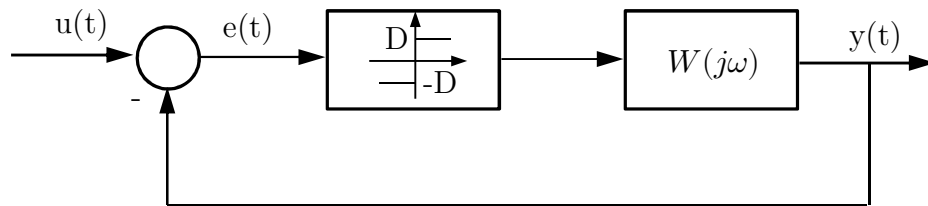


Figura 27

Si consideri l'ingresso dato da $u(t) = b \cos(\omega t)$, allora l'uscita sarà data da un segnale quasi sinusoidale del tipo $y(t) \cong \operatorname{Re}[c(b)e^{j\omega t}]$, e si avrà quindi $e(t) \cong \operatorname{Re}[e(b)e^{j\omega t}]$, dove in generale c ed e sono considerati come dei fasori complessi.

Questi sono caratterizzati dalla relazione:

$$c = Ns(|e|)W(j\omega)e = Ns(|e|)W(j\omega)(b - c) \quad (50)$$

La SIDF nel caso del relè ideale è pari a $Ns(e) = 4D/(\pi|e|)$ quindi la relazione complessiva di ingresso/uscita è data da:

$$G(j\omega, b) = \frac{c}{b} = \frac{4D}{\pi|b-c|} \frac{(b-c)}{b} W(j\omega) \quad (51)$$

Considerando il modulo di tale relazione:

$$|G(j\omega, b)| = \frac{4D}{\pi b} |W(j\omega)| \quad (52)$$

si osserva il fatto importante che la retroazione in questo modello non cambia la dipendenza in frequenza da $|W(j\omega)|$ ma solamente la fase; questo non è sorprendente, dal momento che l'uscita del relè ha sempre la stessa ampiezza che successivamente viene modificata solamente da $|W(j\omega)|$. La relazione tra le fasi di G e W non è invece semplice da determinare anche in questo semplice caso.

3.2 Sostituzione delle non-linearità

I seguenti approcci permettono di trattare la presenza di blocchi non-lineari in un impianto con caratteristiche statiche sostituendoli con elementi lineari aventi guadagni che possono essere considerati all'interno di un intervallo di valori basandosi sulle seguenti proprietà della non-linearità:

- Intervalli di non linearità (modelli a settore)
- Pendenze della curva caratteristica della non-linearità (modelli a pendenza)
- Funzione descrittiva ad ingresso casuale (RIDFs)
- Funzione descrittiva ad ingresso sinusoidale (SIDFs)

Una risposta in frequenza basata sulla SIDF dell'impianto provvede un eccellente compromesso tra conservazione delle proprietà del modello non lineare e robustezza (intesa nel senso di mantenere l'eventuale stabilità del sistema). Si dimostra che considerando le prime due tecniche si ottiene un sistema lineare eccessivamente conservativo, mentre le RIDFs non sono in genere robuste nel senso che nel caso di un sistema linearizzato di questo tipo definito stabile potrebbe essere caratterizzato da cicli limite e quindi essere instabile. Un attributo molto importante dei sistemi lineari basati su modelli SIDF è che essi tengono conto del fatto che gli effetti della maggior parte delle non-linearità dipende dalla frequenza di lavoro, così come dall'ampiezza del segnale in ingresso; e nessuna delle altre descrizioni è in grado di catturare altrettanto adeguatamente queste due proprietà. Dal punto di vista della robustezza nel senso del mantenimento della stabilità del sistema non lineare in relazione a variazioni di ampiezza, è stato dimostrato che nessuno dei quattro modelli definiti è in grado di dare delle condizioni sufficienti per garantire la stabilità.

Entrambi i criteri di Aizerman e di Kalman che forniscono un criterio sufficiente sulla stabilità assoluta dei sistemi non lineari retroazionati non valgono per i primi due modelli proposti; mentre le analisi con SIDF e RIDF sono inadeguate per garantire la robustezza.

Queste famiglie di modelli però in molte circostanze sono conservative; per esempio una particolare non-linearità può essere ben definita mediante uno dei quattro modelli visti, soddisfare il criterio di Aizerman e risultare essa stessa stabile; si ha così la conservazione della stabilità tra il sistema reale e quello approssimato. Viceversa per la robustezza; solamente criteri come quelli definiti precedentemente di Popov o del cerchio garantiscono la stabilità assoluta del sistema non lineare e potrebbero anche non essere soddisfatti, oltre ad essere difficilmente applicabili a sistemi che presentano più di una non linearità.

In particolare i modelli SIDF sono quelli che garantiscono la migliore affidabilità in termini di robustezza e di non-esistenza di cicli limite con ampio margine.

Se si considera una non-linearità definita da una funzione iniettiva e derivabile ovunque i modelli a pendenza sono sempre più conservativi dei modelli a settore, i quali a loro volta sono più conservativi rispetto ai modelli SIDF. Questo perché il range di valori di una SIDF non può eccedere il range di pendenza, e quest'ultimo non può eccedere il range di un settore della non-linearità. Solamente i modelli SIDF, però, tengono conto della dipendenza dalla frequenza di ogni effetto non lineare da considerare.

Questo è importante nel caso di non-linearità multiple in cui denotando per ciascuna non linearità f_k ($k=1,2$) le pendenze minime e massime $m_{k,min}$ ed $m_{k,max}$ si nota che i modelli a settore ed a pendenza corrispondono a tutti i possibili guadagni appartenenti al rettangolo con bordi definiti dalle pendenze massime e minime per ogni frequenza. Invece nel caso dei modelli SIDF al variare della frequenza esiste un'unica traiettoria all'interno di tale rettangolo che definisce il guadagno del sistema lineare, in particolare essa è specificata al variare della frequenza dagli elementi dinamici lineari che precedono ogni singola non-linearità.

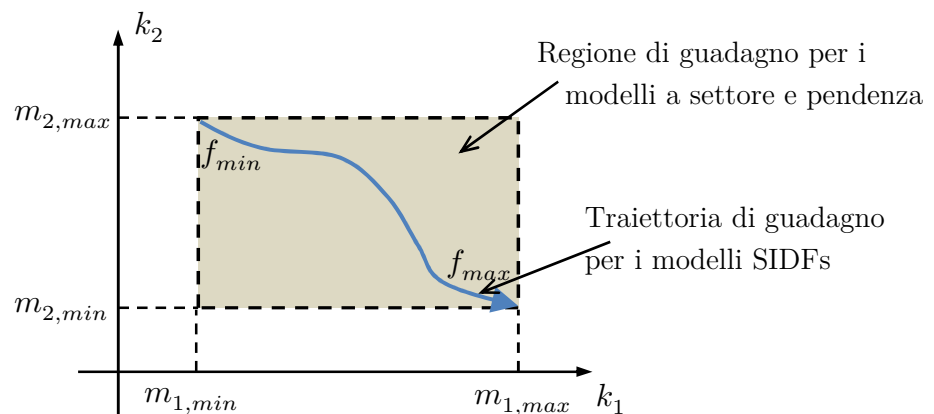


Figura 28

Considerando i due tipi di modelli DF, ci sono due differenze basilari tra i modelli SIFD e RIFD: come considerato precedentemente la distribuzione del segnale di ingresso è differente, e le SIDFs possono caratterizzare la variazione di fase del segnale in ingresso causata dalla presenza di non-linearità multi-valore come isteresi e backlash, cosa che le RIDFs non possono fare.

La principale differenza risiede però, come già sottolineato, nel fatto che il modello RIDF è una procedura di quasi-linearizzazione che viene considerata in un'ampia banda di frequenze, mentre il modello SIDF è ottenuto da quasi linearizzazioni multiple eseguite per una sequenza di frequenze. Questo comportamento può essere assimilato considerando un semplice sistema dinamico con retroazione unitaria costituito da un blocco lineare passa basso seguito da un blocco di saturazione (unitario).

Si può notare che considerando ingressi sinusoidali di ampiezza superiore all'unità gli ingressi a bassa frequenza sono attenuati leggermente dal filtro, risultando in saturazione, quindi con guadagno del modello SIDF basso; invece, non appena la frequenza del segnale e quindi l'attenuazione del filtro hanno un incremento, la saturazione decresce ed eventualmente scompare fornendo una risposta in frequenza $G(j\omega, b)$ che si accosta alla dinamica del filtro passa basso senza non-linearità.

Un ingresso casuale con valor medio superiore all'unità, d'altra parte risulta in saturazione a tutte le frequenze, quindi $G(j\omega, b)$ è identico nel caso RIDF ad un filtro seguito da un blocco lineare con guadagno inferiore ad uno.

BIBLIOGRAFIA

[1]: Mauro Bisiacco, M. Elena Valcher, “*Controlli automatici*”, Libreria Progetto Padova.

[2]: James H. Taylor, “*Describing Functions*”, University of New Brunswick, ottobre 1999.

[3]: Mauro Bisiacco, Simonetta Braghetto, “*Teoria dei sistemi dinamici*”, Progetto Leonardo, Esculapio, Bologna, ed. settembre 2011.

[4]: Giovanni Marro, “*Controlli automatici*”, Zanichelli, quinta edizione.

[5]: Hassan K. Khalil, “*Nonlinear Systems*”, Prentice Hall, terza edizione.