

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Dipartimento di Fisica e Astronomia

CORSO DI LAUREA IN FISICA

Riduzione del rumore in fase della luce trasmessa mediante fibre ottiche

Phase noise reduction for light transmitted through optical fibers

Relatore
ZENDRI JEAN-PIERRE

Laureando
COCCHI SILVIA

ANNO ACCADEMICO 2022-2023

Abstract

Gli interferometri a largo braccio per la rivelazione di onde gravitazionali utilizzano in alcuni casi fibre ottiche per trasmettere la luce tra le diverse aree del sito. Durante questo tragitto, a causa del rumore acustico e dei transienti termici, la luce acquisisce un rumore in fase che può portare ad un degrado delle prestazioni del rivelatore. Per questo motivo si rende necessaria l'implementazione di sistemi attivi per l'abbattimento del rumore in fase. In questa tesi è stato realizzato e caratterizzato uno di questi schemi basato sull'impiego di modulatori acusto ottici in fibra. Nella prima parte si è lavorato alla realizzazione del set-up ottico in fibra ed alla caratterizzazione del rumore in fase di una fibra ottica campione, e nella seconda parte all'implementazione del sistema per la sua riduzione.

Indice

1	Introduzione e motivazioni	4
2	Apparato sperimentale	6
2.1	Budget di potenza	8
2.2	Iniezione del laser in fibra	9
2.2.1	Caratterizzazione del fascio gaussiano	9
2.2.2	Focalizzazione del fascio gaussiano	12
3	Misura del rumore in fase	16
4	Sistema di retroazione	19
4.1	Sistemi per la riduzione del rumore in fase: generalità	19
4.2	Realizzazione del sistema di loop	20
4.3	Misure sul sistema di loop	23
5	Conclusioni	25
6	Appendice	26
6.1	Fasci gaussiani	26
6.2	Focalizzazione con lenti sottili	27
6.3	Acousto-optic modulator (AOM)	28
6.4	Fibre PANDA	29
6.5	Phase Sensitive Detector	29

1. Introduzione e motivazioni

Virgo è un rivelatore interferometrico di onde gravitazionali generate da sorgenti astrofisiche. Il principio di funzionamento è quello di un interferometro di Michelson in cui la luce monocromatica a frequenza ω_0 emessa da una sorgente laser viene diretta verso un beam splitter, che la divide in modo che passi nei due bracci dell' interferometro. Una volta riflessa dagli specchi terminali (indicati come "EM" nella figura 1), la luce si ricombina sul beam splitter generando una figura di interferenza sul fotodiodo di rivelazione "PD" legata alla differenza di lunghezza dei due bracci. Il passaggio di un'onda gravitazionale modifica la lunghezza differenziale dei due bracci e conseguentemente la potenza che arriva in "PD", permettendone la rivelazione.

Come appare evidente dalla figura 1, la configurazione reale di un interferometro come Virgo risulta più complessa di un semplice interferometro di Michelson. Infatti, al fine di aumentare la sensibilità, vengono posti altri specchi sul cammino ottico della luce ("SR", "PR", "IM"), per dotare il rivelatore di diverse cavità ottiche tra loro interconnesse. I dettagli della configurazione ottica comunque non sono rilevanti ai fini di questa tesi e verranno tralasciati.

È importante però notare la lunghezza dei bracci dell' interferometro, circa 3 Km, che danno una idea delle dimensioni del sito sperimentale. Questa caratteristica infatti può generare problemi tecnici rilevanti se si devono sincronizzare in frequenza e fase i laser ausiliari, dislocati in vari punti del rivelatore, e necessari per il suo funzionamento, con il laser principale.

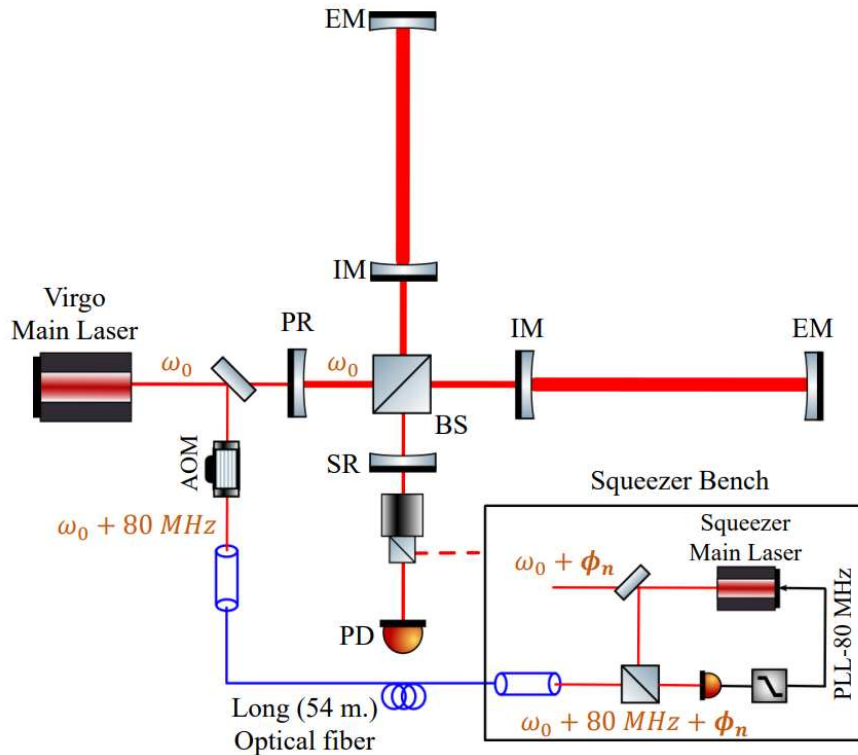


Figura 1. Schema ottico del rivelatore Virgo. Il generatore di luce squeezed che si trova nella sala di rivelazione deve essere agganciato alla frequenza ω_0 del laser principale di Virgo che si trova nella sala di iniezione distante alcune decine di metri. Per fare questo viene estratta una frazione della luce del laser principale che, dopo essere stata incrementata in frequenza di 80 MHz mediante un AOM, viene spedita tramite fibra ottica nella sala di rivelazione. Qui il laser principale dello squeezed viene agganciato -tramite un Phase Locked Loop (PLL)- in frequenza al fascio uscente dalla fibra con un offset di -80 MHz. Il laser principale dello squeezer avrà quindi una frequenza $\omega_0 + \phi_n$, dove ϕ_n è il rumore in fase catturato dal fascio propagante nella fibra ottica.

Un tipico (ma non unico) ambito in cui è necessario un laser ausiliario agganciato in frequenza a quello di Virgo è quello della riduzione del rumore quantistico del rivelatore.

Tale operazione viene effettuata iniettando luce squeezed nella porta di rivelazione del detector (linea tratteggiata rossa in figura 1) ¹. Affinchè questa tecnica sia efficace, si richiede che il laser principale del generatore di luce squeezed ("Squeezer Main Laser" nella figura 1) sia perfettamente agganciato in fase/frequenza al laser di Virgo ("Virgo Main Laser").

In questo caso il problema tecnico si può individuare nel fatto che i due laser si trovano in laboratori posizionati ad alcune decine di metri di distanza, senza una linea di vista che li colleghi. Per agganciarli in frequenza si preleva quindi una piccola frazione della luce dal Virgo main laser e, dopo averla incrementata di 80 MHz con un modulatore acusto-ottico (AOM), la si dirige nella sala dello squeezer mediante una fibra ottica lunga 54 metri. A questo punto il main laser dello squeezer viene agganciato in fase/frequenza, con un offset di -80 MHz, alla luce uscente dalla fibra tramite un "Phase Locked Loop"(PLL).

Alla fine di questo processo la luce emessa dal main laser dello squeezer avrà frequenza pari a ω_0 come desiderato, ma con un rumore in fase ϕ_n acquisito dalla luce durante il cammino in fibra ottica.

Il lavoro di questa tesi consiste nel fare una prova di concetto di un sistema di controreazione in grado di ridurre il contributo di ϕ_n . Una volta sviluppato ed ottimizzato, questo sistema potrà essere integrato nel rivelatore Virgo per ridurre gli effetti detrimentali sulla sensibilità legati al rumore in fase ϕ_n .

¹I dettagli sono esposti nell'articolo [2].

2. Apparato sperimentale

Di seguito vengono riportate presentazione dell'apparato sperimentale e misure preliminari portate avanti per caratterizzarlo.

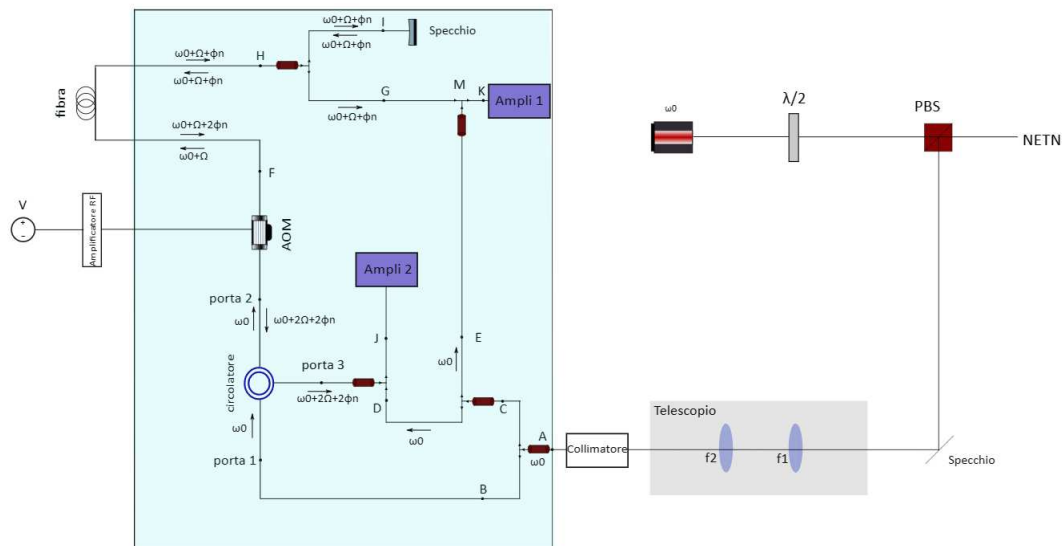


Figura 2. Apparato sperimentale. La parte su sfondo azzurro è inserita in una scatola rack da due unità, appoggiata su un tavolo ottico, mentre il resto del set-up è installato sullo stesso tavolo.

L'apparato sperimentale è costituito da tre principali elementi:

- Una sorgente di luce laser continuo con lunghezza d'onda centrale a 1064 nm (COHERENT modello Mephisto a 500 mW). La potenza del laser iniettato nell'apparato viene selezionata tramite un sistema lamina $\frac{\lambda}{2}$, seguito da un Polarizer Beam Splitter (PBS), come in figura 2. La struttura dei fasci laser utilizzati è analizzata nelle sezioni 2.2 e 6.1.
- Un sistema di iniezione del fascio laser in fibra ottica costituito da specchi di allineamento, un telescopio di adattamento del fascio gaussiano, costituito da due lenti di lunghezza focale $f_1 = 100$ mm e $f_2 = 200$ mm, costruito sulla base di quanto esposto nelle sezioni 6.2 e 2.2.1, e un collimatore THORLABS F220APC-1064nm.
- Una scatola che contiene il circuito in fibra, i fotodiodi e i loro amplificatori, all'interno della quale la luce circola attraverso fibra ottica e i vari componenti secondo il percorso di seguito descritto. Le fibre ottiche utilizzate sono fibre polarization maintaining di tipo PANDA, con caratteristiche esposte nella sezione 6.4.

L'obiettivo che si vuole raggiungere nella costruzione dell'apparato è quello di far arrivare la luce al nodo K con una frequenza $\omega_0 + 100$ MHz, con un rumore in fase che sia il minimo possibile. Nell'esperimento Virgo il nodo K rappresenta quindi lo squeezer, il nodo F l'uscita dall'AOM e "fibra" la fibra ottica che va dalla sala di iniezione a quella di rivelazione. In questo caso nel nodo K viene inserito un fotorivelatore al fine di caratterizzare il rumore in fase della luce che arriva.

La luce entra in fibra dall'ingresso A in figura 2, e viene divisa mediante un fused fiber optic WDM (Thorlabs Wavelength Division Multiplexer). Il fascio che passa per B entra in un Polarization-Maintaining Fiber Optic Circulator Thorlabs CIR1064PM-APC, ovvero uno strumento a tre ingressi che permette alla luce di circolare in una sola direzione: il segnale entra dalla porta 1 ed esce dalla porta 2 con perdite minime (come riportato nella sezione 2.1), e lo stesso vale per un segnale che entra dalla porta 2 ed esce dalla porta 3.

Dalla porta 2 il fascio entra all'interno di un acousto-optic modulator AeroDiode 1064-AOM-1, il cui funzionamento viene descritto nella sezione 6.3 . Tale strumento viene alimentato mediante un generatore RF con un segnale 100 MHz, successivamente incrementato con un amplificatore RF ENI 325LA-11511. Tale amplificatore è necessario affinché la potenza del segnale RF sia intorno al Watt come richiesto dal costruttore, per avere efficienze dell' AOM superiori al 50%. Così facendo all'uscita dell'AOM la luce acquisisce una frequenza $\omega_0 + \Omega$, con $\Omega = 100$ MHz.

La luce uscente dall'acousto-optic modulator nel nodo F viene diretta fuori dalla scatola, dove passa attraverso 10 m di fibra Thorlabs P3-1064PM-FC-10 : la luce acquisisce in questo stadio un rumore in fase ϕ_n che si vuole andare a caratterizzare ed abbattere.

Dopo il passaggio attraverso la fibra, il fascio laser rientra nella scatola e viene diviso mediante un nuovo beam splitter in fibra nel punto H. Da una parte la luce incontra il retroriflettore Thorlabs P5-1060PMR-P01-1, che redirige la luce verso il circolatore dopo che ha attraversato nuovamente la fibra da 10 metri. Dopo essere ripassata per l'AOM la luce avrà una frequenza $\omega_0 + 2\Omega$, ed un rumore in fase $2\phi_n$ acquisito nel secondo passaggio per la fibra.

Il secondo ramo del beam splitter in H viene invece combinato con la luce a frequenza ω_0 proveniente dal nodo E, ottenuta da una derivazione (beam splitter in C) del fascio in ingresso nel nodo A.

La luce uscente dalla porta 3 viene combinata con una frazione di quella in ingresso a frequenza ω_0 , proveniente dalla porta D. È possibile in questo modo rilevare il rumore in fase $2\phi_n$ uscente dalla porta 3.

I fasci ricombinati nei nodi K e J vengono poi rivelati da due fotodiodi (dopo i quali il segnale viene amplificato da due amplificatori a transimpedenza), alla cui uscita si hanno dei battimenti a frequenza Ω e 2Ω , con rumore in fase ϕ_n e $2\phi_n$ rispettivamente. Come viene esposto nel capitolo 3, questo permetterà di analizzare il rumore in fase della luce che entra nei due nodi. In particolare, verrà utilizzata l'uscita J per generare il segnale di errore al fine di minimizzare $2\phi_n$, e di conseguenza anche ϕ_n alla porta K, come desiderato.

2.1 Budget di potenza

In questo paragrafo vengono riportati i risultati delle misure di potenza del fascio ottico circolante nei vari nodi del circuito in fibra durante la fase di assemblaggio. I dati sono riportati in tabella 1.

Ingresso	A	B	C	D	E	Porta 2	F	G	I	Porta 3	J	K
Potenza (mW)	13.3	6.7	6.4	2.3	2.4	2.2	1.4	0.38	0.46	0.30	0.68	0.13

Tabella 1. Budget di potenza del circuito in fibra ottica

I dati riportati riguardanti gli ingressi G, I, J, K, porta 3 sono stati presi connettendo direttamente gli ingressi F e H senza porre la fibra tra i due, per una prima fase di controllo del segnale in potenza. Si vuole sottolineare che quelle riportate in tabella 1 sono delle stime approssimative fatte per assicurarsi che il sistema funzioni come ci si aspetta e che si abbia un'adeguata potenza del segnale che viene trasmesso agli amplificatori.

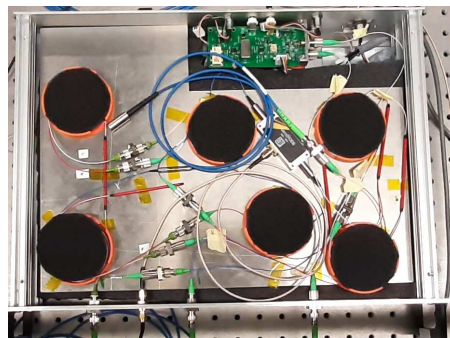


Figura 3. Realizzazione del circuito in fibra all'interno della scatola elettronica. In alto a destra è possibile vedere lo stadio di amplificazione dei fotodiodi (pigtailed). Sulla parte frontale della scatola sono invece posti dei connettori che sono rispettivamente, da sinistra a destra, l'ingresso della sorgente in fibra (nodo A), lo stadio di alimentazione RF dell'AOM, l'uscita per la fibra da 10 metri (nodo F), e l'ingresso in fibra della luce dopo la propagazione sui 10 metri (nodo H). In blu si può vedere lo specchio in fibra ottica (retroreflettore).

2.2 Iniezione del laser in fibra

Prima che venga iniettato in fibra, il fascio laser deve essere caratterizzato e quindi focalizzato per un migliore accoppiamento dei componenti.

2.2.1 Caratterizzazione del fascio gaussiano

La fase di inizializzazione dell'esperimento prevede l'iniezione della luce del laser a disposizione nella fibra ottica. L'ingresso nella fibra è mediato da un collimatore THORLABS F220APC-1064nm, che, per massimizzare l'accoppiamento, prevede l'utilizzo di un fascio gaussiano con waist $w_0=2.4$ mm a distanza dal collimatore $z_0=11.02$ mm. Descrizione dei fasci gaussiani e definizioni dei parametri usati sono riportati nella sezione 6.1 in appendice.

L'operazione preliminare necessaria da effettuare è la caratterizzazione del fascio laser.

La caratterizzazione del fascio gaussiano è stata effettuata utilizzando un profilometro laser THORLABS BC106N-VIS/M. Il profilometro è stato posto a distanza variabile dalla sorgente laser, prendendo come origine del sistema di riferimento una distanza di (27.5 ± 0.1) cm dal bordo del banco di lavoro. Tale misura è stata presa considerando i buchi che definiscono le distanze sul banco stesso, posti a 2.5 cm uno dall'altro.

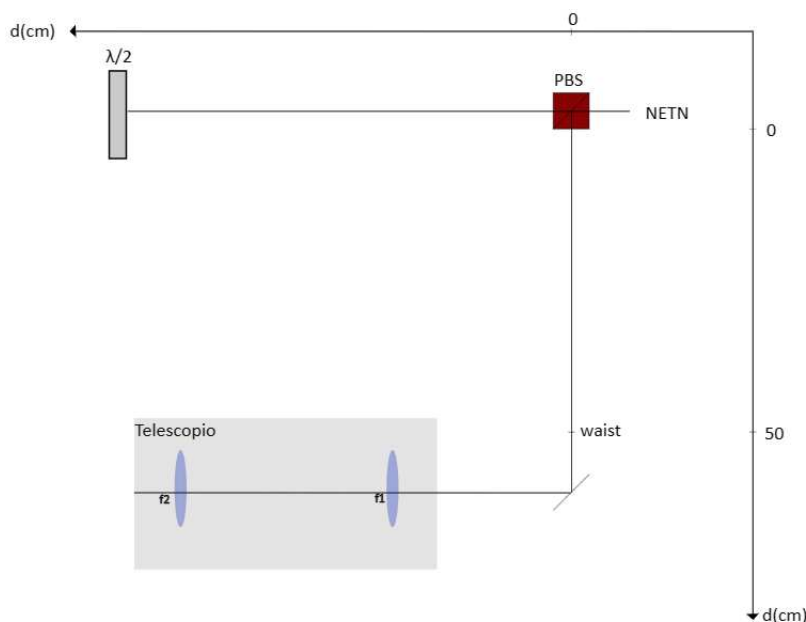


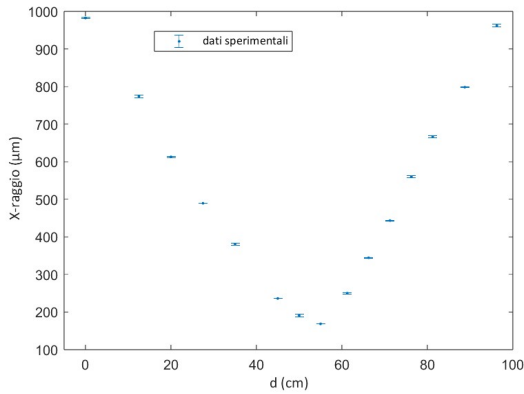
Figura 4. Apparato sperimentale: dalla sorgente laser al telescopio

I dati raccolti sono riportati in tabella 2: per ogni distanza a cui è stato posto lo strumento sono riportati i diametri ottenuti da una media su 10 misure ripetute dei diametri del fascio in direzione dell'asse delle ascisse e delle ordinate del sistema di riferimento dello strumento, con relativi errori calcolati come deviazione standard sulla media sul campione di dati a disposizione.

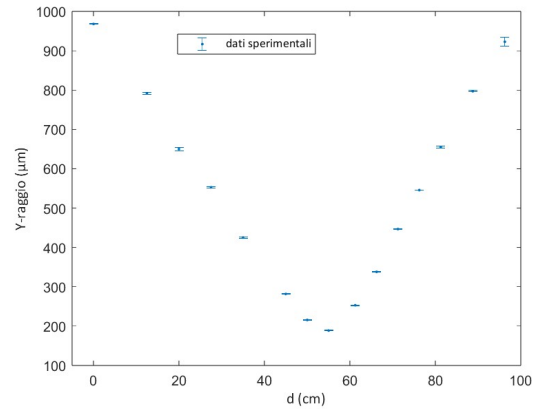
d (cm)	x-diametro (μm)	σ_x (μm)	y-diametro (μm)	σ_y (μm)
0	1965	2	1935.9	0.8
12.5	1548	4	1583	3
20	1226	2	1301	4
27.5	978.6	0.4	1106	1
35	761	2	850	1
45	472.5	0.5	563.6	0.6
50	382	3.0	431.4	0.7
55	337.0	0.6	377.1	1.0
61.25	500	2	506.2	0.8
66.25	689	1	675.9	0.9
71.25	887	1	893.4	0.6
76.25	1120	2	1091.4	0.7
81.25	1334	3	1310	2
88.75	1596.3	0.8	1594	2
96.75	1924	4	1850	10

Tabella 2. Diametro del fascio misurato in funzione della distanza di propagazione

I grafici in figura 5 riportano l'andamento dei raggi in funzione della distanza d .



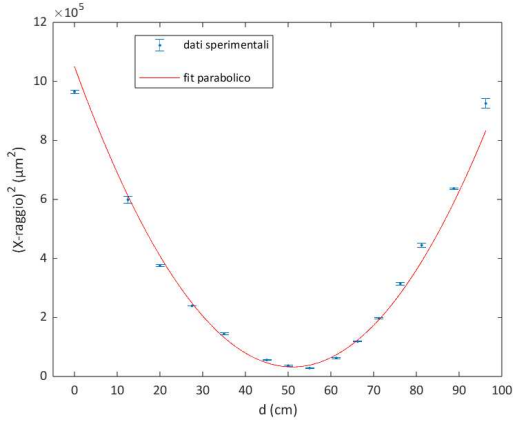
(a) Raggi lungo l'asse delle ascisse



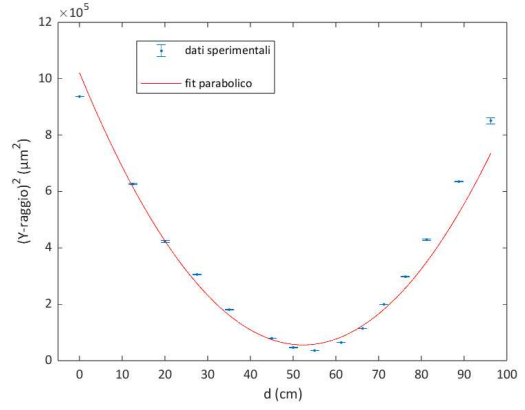
(b) Raggi lungo l'asse delle ordinate

Figura 5. Distribuzione dei dati raccolti con il profilometro laser

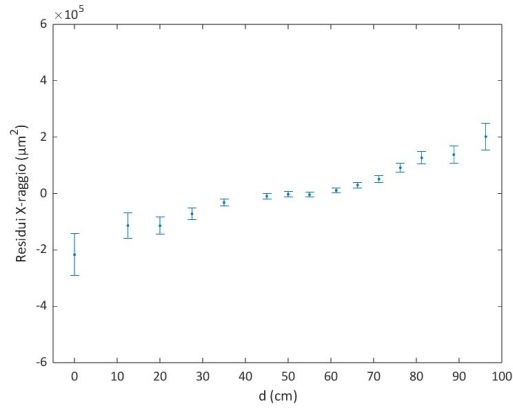
Di seguito sono riportati i fit parabolici sul modello $y=ax^2+b$ (con riferimento alla formula 21) pesati sulle incertezze sui dati, svolti per individuare i parametri w_0 e z_0 che definiscono il fascio gaussiano (figura 6). In ordinata sono riportati i valori $w^2(z)$, in ascissa la distanza dal punto di riferimento scelto a cui è stata presa la misura.



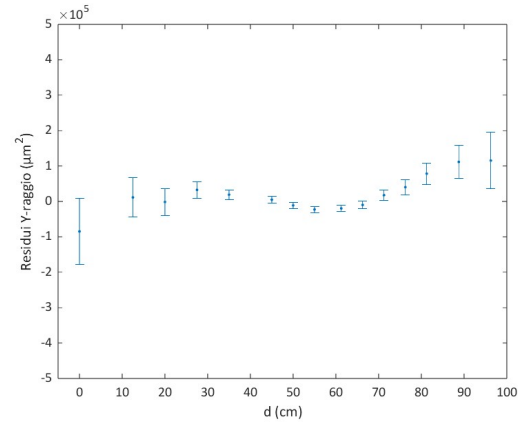
(a) X-raggio: fit parabolico



(b) Y-raggio: fit parabolico



(c) X-raggio: residui sul fit parabolico



(d) Y-raggio: residui sul fit parabolico

Figura 6. Fit parabolici sul modello $y=ax^2+b$

I risultati di tali fit sono riportati in tabella 3.

	a ($\mu\text{m}^2/\text{cm}^2$)	σ_a ($\mu\text{m}^2/\text{cm}^2$)	b (μm^2)	σ_b (μm^2)
x-raggio	390	30	$3.2 \cdot 10^4$	$9 \cdot 10^3$
y-raggio	350	30	$5.6 \cdot 10^4$	$9 \cdot 10^3$

Tabella 3. Parametri ottenuti da fit parabolico

I residui sembrano indicare una migliore accuratezza del fit in prossimità del waist, e vanno poi a crescere all'aumentare della distanza a cui è stata presa la misura. In effetti è stata notata in laboratorio, durante la presa dati, una maggiore oscillazione delle misure prese mediante profilometro dopo aver posizionato lo specchio per deviare il fascio (figura 4), per andare a caratterizzare il fascio lontano dal waist. Si ritiene che tale incertezza possa derivare dal fatto che per diametri maggiori il fascio si estende sino agli estremi della finestra del sensore CCD.

I parametri caratteristici del fascio sono ottenuti dalle espressioni $w_0 = \sqrt{b}$ e $z_0 = \sqrt{\frac{b}{a}}$ con risultati

riportati di seguito:

$$\begin{aligned} w_{0x} &= 180 \pm 30 \quad \mu\text{m} \\ z_{0x} &= 9 \pm 1 \quad \text{cm} \\ w_{0y} &= 240 \pm 20 \quad \mu\text{m} \\ z_{0y} &= 13 \pm 2 \quad \text{cm} \end{aligned}$$

2.2.2 Focalizzazione del fascio gaussiano

Si vuole che il fascio laser che entra nella fibra ottica abbia un diametro di 2.4 mm e parametro $z_0=11.02$ mm. Tale risultato viene raggiunto utilizzando un telescopio ottimamente disegnato mediante matrici ABCD (trattate nella sezione 6.2) per ottenere il fascio voluto a partire da quello a disposizione, caratterizzato nella sezione 2.2.1.

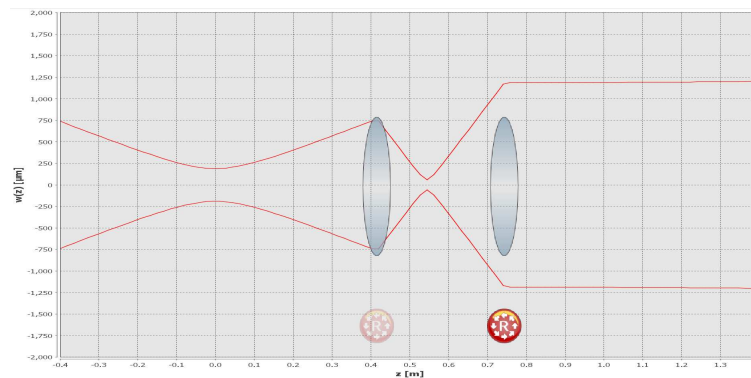


Figura 7. Realizzazione telescopio

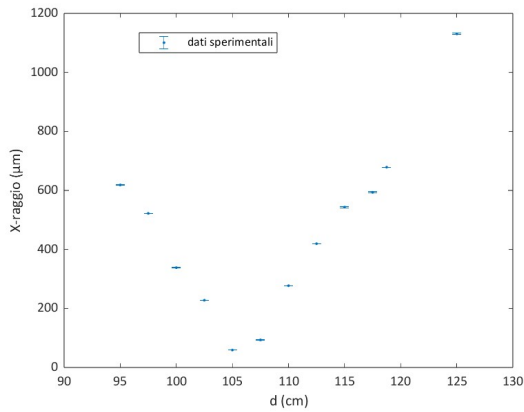
Si può vedere dalla figura 7, realizzata con il programma JamMt, che il fascio desiderato è ottenuto con due lenti sottili di lunghezza focale $f_1=100$ mm e $f_2=200$ mm. La lente da 100 mm è posta a (40.0 ± 0.1) cm dal waist individuato nella sezione 2.2.1, la lente da 200 mm a (75 ± 0.1) cm².

I dati riportati in Tabella 4 e in figura 8 sono relativi a misure prese nello spazio compreso tra le due lenti, per caratterizzare il fascio uscente dalla lente con lunghezza focale f_1 e scegliere di conseguenza dove posizionare poi la lente f_2 .

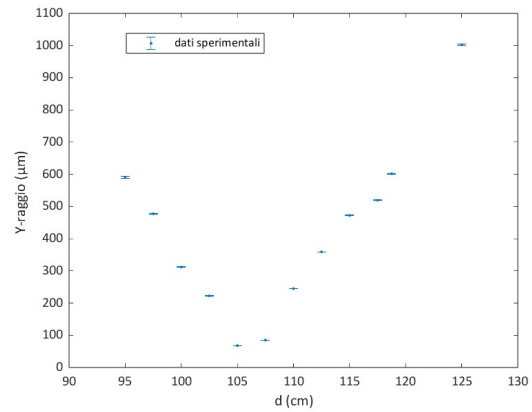
d (cm)	x-diametro (μm)	σ_x (μm)	y-diametro (μm)	σ_y (μm)
95.0	1237	4	1181	5
97.5	1044	2	955	2
100.0	676.6	0.6	624	2
102.5	456.0	0.6	444.8	0.8
105.0	118.0	0.1	135.8	0.4
107.5	186.9	0.4	169.7	0.8
110.0	554.3	0.5	490.0	1.3
112.5	839.0	0.5	718.4	0.6
115.0	1087	4	944	2
117.5	1187	5	1039	2
118.8	1357	2	1204	3
125.0	2261	4	2005	3

Tabella 4. Diametro del fascio misurato in funzione della distanza di propagazione per fascio focalizzato all'interno del telescopio

²Per la realizzazione del telescopio sono stati considerati i valori medi dei dati in tabella 3.



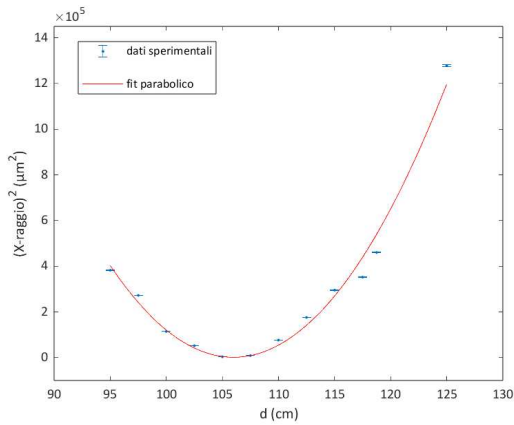
(a) Raggi lungo l'asse delle ascisse



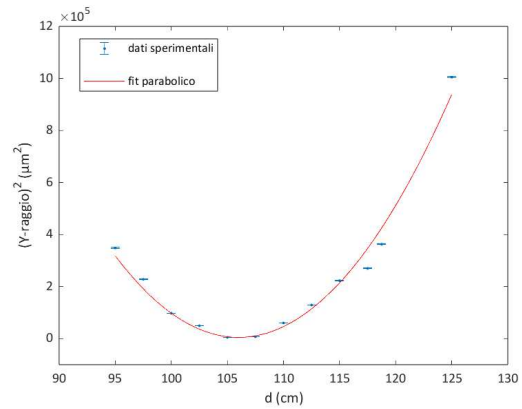
(b) Raggi lungo l'asse delle ordinate

Figura 8. Distribuzione dei dati raccolti con profilometro laser per fascio focalizzato

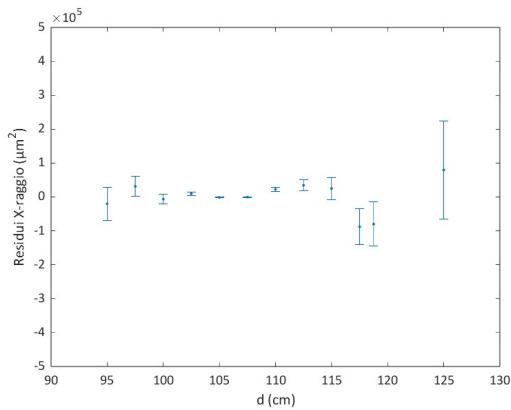
Vengono nuovamente effettuati dei fit parabolici per individuare la posizione del waist del fascio, con risultati riportati in figura 9 e in tabella 5.



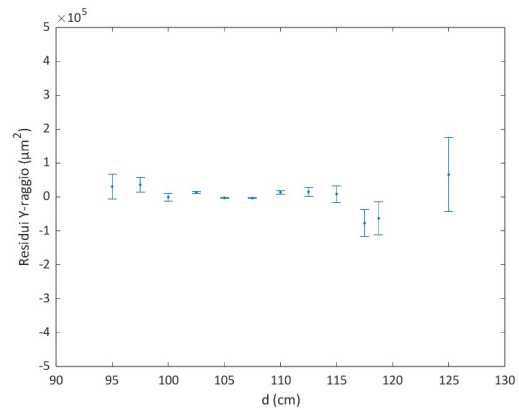
(a) X-raggio: fit parabolico



(b) Y-raggio: fit parabolico



(c) X-raggio: residui sul fit parabolico



(d) Y-raggio: residui sul fit parabolico

Figura 9. Fit parabolici sul modello $y=ax^2+b$ effettuati su fascio focalizzato

	a ($\mu\text{m}^2/\text{cm}^2$)	σ_a ($\mu\text{m}^2/\text{cm}^2$)	b (μm^2)	σ_b (μm^2)
x-raggio	$3.3 \cdot 10^3$	$0.4 \cdot 10^3$	$1.5 \cdot 10^3$	$0.9 \cdot 10^3$
y-raggio	$2.6 \cdot 10^3$	$0.3 \cdot 10^3$	$4.8 \cdot 10^3$	$0.9 \cdot 10^3$

Tabella 5. Parametri ottenuti da fit gaussiano per fascio focalizzato

I parametri caratteristici del fascio, calcolati come nella sezione 2.2.1 risultano:

$$\begin{aligned}
 w_{0x} &= 40 \pm 11 \quad \mu\text{m} \\
 z_{0x} &= 0.7 \pm 0.2 \quad \text{cm} \\
 w_{0y} &= 69 \pm 6 \quad \mu\text{m} \\
 z_{0y} &= 1.4 \pm 0.2 \quad \text{cm}
 \end{aligned}$$

Viene quindi posizionata la seconda lente, come in figura 7, in modo da avere un fascio uscente con raggio di 1.2 mm, e misurato nuovamente il diametro del fascio al variare della posizione del beam profiler, con risultati in tabella 6.

d (cm)	x-diametro (μm)	σ_x (μm)	y-diametro (μm)	σ_y (μm)
130.0	2340	20	2070	20
135.0	2330	40	2120	40
140.0	2360	40	2120	40
145.0	2320	40	2140	40
155.0	2340	50	2160	50
165.0	2500	100	2300	100

Tabella 6. Diametro del fascio misurato in funzione della distanza di propagazione per fascio focalizzato oltre il telescopio

In figura 10 è possibile osservare la distribuzione complessiva dei dati presi per il fascio che passa attraverso il telescopio.

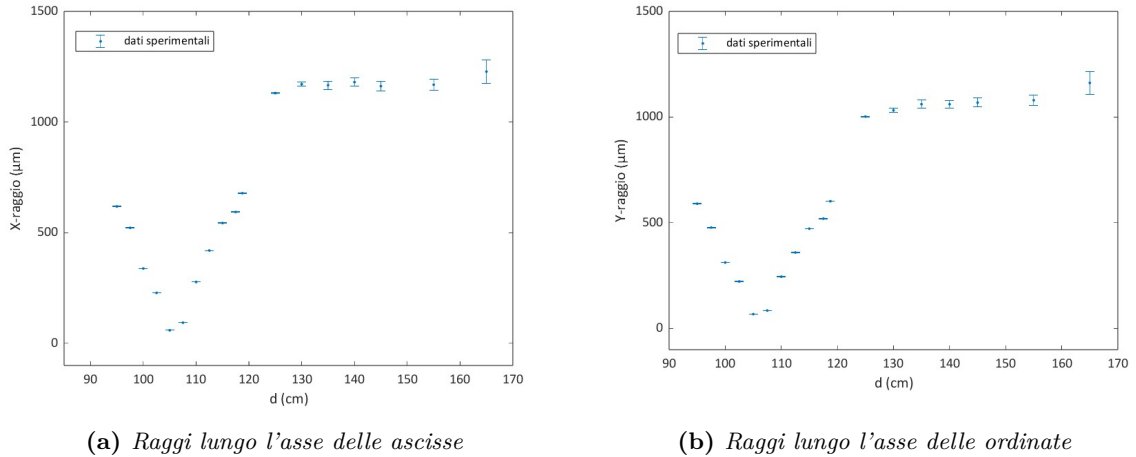


Figura 10. Distribuzione dei dati raccolti con profilometro laser per fascio focalizzato oltre il telescopio

Si può quindi vedere che, passata la seconda lente, il fascio laser si comporta come ci si aspetta.

Una volta preparato il fascio ottimale per il collimatore a disposizione, si è cercato di iniettare la luce in fibra mediante specchi di allineamento. Nonostante i numerosi tentativi non è stato però possibile ottenere accoppiamenti superiori all' 1%. Si ritiene che tale problema sia legato ad un difetto meccanico del collimatore, che non permette di realizzare un accoppiamento ottimale con la fibra. Per procedere con l'esperimento è quindi stato usato un laser fibrato preso in prestito da un altro esperimento, che ha permesso di iniettare nel circuito in fibra in figura 3 sino a 13 mW circa di potenza.

3. Misura del rumore in fase

La luce che passa nella fibra acquisisce un rumore in fase che, perchè possa essere abbattuto, deve prima essere misurato. In questo capitolo vengono riportati metodo e risultati di tale misura.

Si suppone di dover misurare il rumore in fase ϕ_n acquisito dalla fibra di 10 m (indicata come "fibra" in figura 11).

Si è visto nella sezione 2 come nel nodo G il segnale ottico abbia una fase $(\omega_0 + \Omega)t + \phi_n$. Combinando tale segnale con quello a frequenza ω_0 proveniente dal nodo E, ci si aspetta di vedere al fotodiodo K il seguente segnale di battimento

$$V_{sign} = A \sin(\Omega t + \phi + \phi_n) \quad (1)$$

Tale segnale viene combinato mediante un mixer RF (il cui funzionamento è descritto in appendice nella sezione 6.5) con una delle 4 uscite (canale 2 nella figura 11) di un generatore RF il cui funzionamento è basato su tecnologia DDS (Direct Digital Synthesizer) con voltaggio

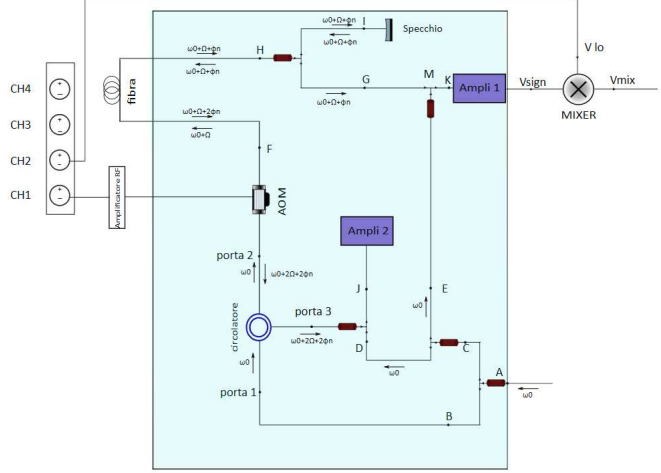


Figura 11. Misura del rumore in fase per segnale uscente dall'amplificatore 1 a 100 MHz

$$V_{LO} = B \cos(\omega_0 t + \Phi) \quad (2)$$

All'uscita di un mixer, dopo un filtro passa-basso, si ottiene quindi un segnale che contiene ϕ_n , ma anche la fase relativa tra V_{sign} e V_{LO}

$$V_{mix} = \frac{1}{2} AB \sin((\phi - \Phi) + \phi_n) \quad (3)$$

Per estrarre ϕ_n il primo passo consiste nel variare la fase Φ del segnale del local oscillator LO in modo da minimizzare il segnale e ottenere quindi la condizione per cui $\phi - \Phi = 0$. Ipotizzando poi che il rumore in fase soddisfi $\phi_n \ll 1$ si arriva ad avere

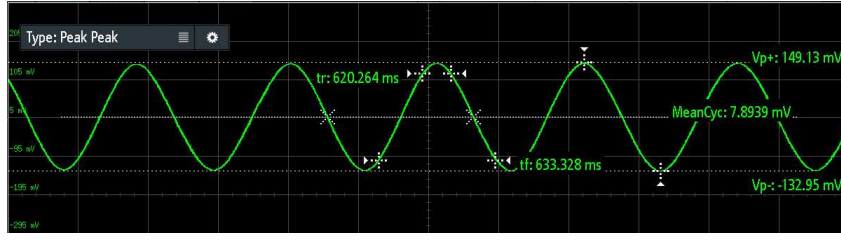
$$V_{mix} \approx \frac{1}{2} AB \phi_n \quad (4)$$

Per trovare la costante $\frac{1}{2} AB$ che permette di passare dal voltaggio V_{mix} alla fase ϕ_n viene modificata la frequenza del local oscillator da Ω a ω_1 , in modo che all'uscita del mixer il segnale sia

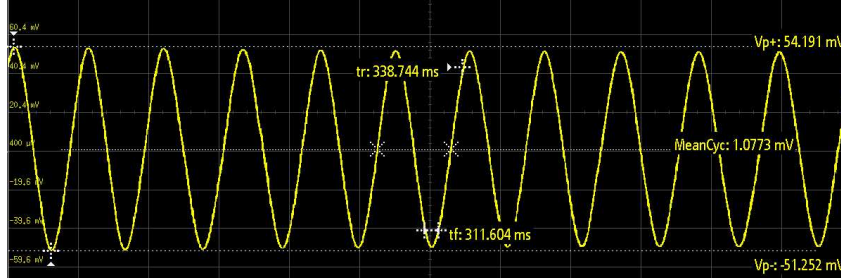
$$V_{mix-\Delta\omega} = \frac{1}{2} AB \sin((\Omega - \omega_1)t + (\phi - \Phi) + \phi_n) \quad (5)$$

Osservando tale segnale con un'oscilloscopio si può misurare il valore zero-picco di $V_{mix-\Delta\omega}$, che altro non è che il valore $\frac{1}{2} AB$ cercato (figura 12a).

Analoga procedura può essere portata avanti per il segnale ottico che è passato due volte per l'AOM, acquisendo una frequenza aggiuntiva di 2Ω . In questo caso la luce in uscita dalla porta 3 viene combinata con la luce a frequenza ω_0 proveniente dall'ingresso D, con il local oscillator collegato al mixer impostato su $2\Omega=200$ MHz (figura 12b).



(a) Segnale a 100 MHz



(b) Segnale a 200 MHz

Figura 12. Segnale di calibrazione (formula 5) ottenuto demodulando l'uscita dei fotodiodi collegati a K e J, rispettivamente a 100 e 200 MHz.

I segnali ottenuti dai mixer hanno le caratteristiche riportate in tabella 7, dove V_{pp} , ovvero l'ampiezza picco-picco, corrisponde all'ampiezza AB cercata per poi poter calcolare il rumore in fase.

	V_{sign} a 200 MHz	V_{sign} a 100 MHz
V_{pp} (mV)	105 ± 2	282 ± 2
f (mHz)	955 ± 9	480 ± 9

Tabella 7. Dati relativi ai segnali uscenti dai mixer per un sistema open-loop

Risulta evidente, dalla figura 12 e dalla tabella 7, che il segnale a 200 MHz, essendo passato due volte per l'AOM, presenta una frequenza doppia.

Le misure riportate in tabella 7 mostrano che effettivamente il segnale si comporti come ci si aspetta alle due uscite K e J. Per stimare il rumore in fase ϕ_n è stata comunque usata come ampiezza $\frac{1}{2}AB$ l'ampiezza zero-picco $V_{0p} = (92 \pm 2)$ mV, ottenuta in un momento successivo, con i parametri dell'apparato sperimentale leggermente modificati, seguendo una procedura del tutto analoga a quella sopra descritta, per segnale a 100 MHz. È su questo valore che si basano i risultati riportati di seguito.

Per una corretta stima del rumore in fase ϕ_n si deve quindi preliminarmente annullare la differenza di fase $\phi - \Phi$ tra il local oscillator e il segnale uscente dal fotodiodo, in modo da creare una situazione in cui si possa usare la formula 4.

Nel caso si abbia però a che fare con un rumore in fase non trascurabile della fibra, risulta arduo realizzare tale condizione, poichè ϕ_n tende a variare consistentemente in tempi inferiori alla scala di misura.

In figura 13 è riportato lo spettro di potenza del rumore in fase calcolato acquisendo lo spettro di V_{mix} (per un segnale a 100 MHz) quando questo tende a zero, convertito in spettro in fase mediante la formula 6.

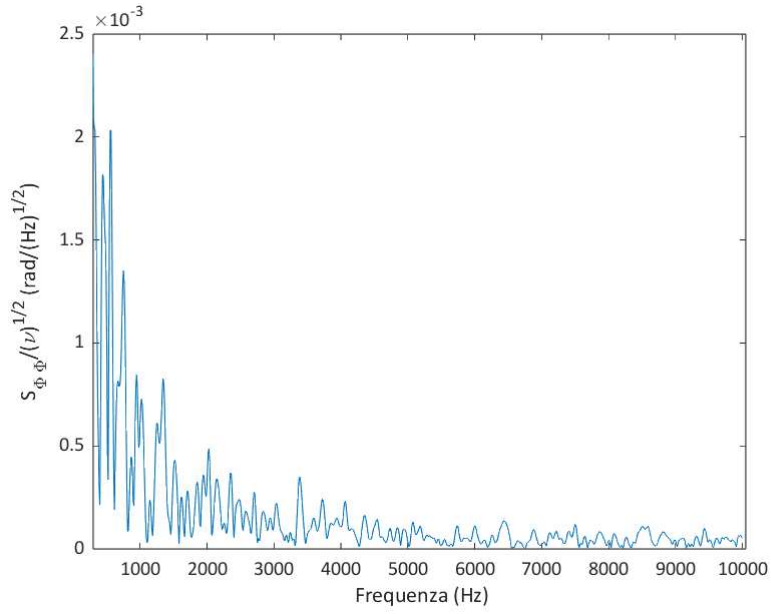


Figura 13. Spettro del rumore in fase della luce uscente dal nodo K

Lo spettro equivalente in fase è quindi ricavato da

$$S_{\phi\phi}^{\frac{1}{2}} = \frac{S_V V^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}AB} \quad (6)$$

dal quale si ottiene il rumore in fase usando la formula

$$\phi_n^2 = \int S_{\phi\phi} d\nu \quad (7)$$

sia ν la frequenza riportata in ascissa nel grafico in figura 13, con risultato:

$$\phi_n = (120 \pm 10) \text{ mrad}$$

Si vuole sottolineare che la stima ottenuta per il rumore in fase ϕ_n è presa come stima indicativa per poi calibrare l'apparato nelle fasi successive.

Si deve considerare che infatti i risultati ottenuti potrebbero essere condizionati dal fatto che la condizione $\phi_n \ll 1$ potrebbe non essere verificata, come approfondito nel capitolo 4.3.

4. Sistema di retroazione

Una volta caratterizzato il rumore in fase acquisito dalla luce nel passaggio attraverso la fibra, si vuole realizzare un sistema di retroazione che vada ad attenuarlo.

Di seguito viene riportata un' introduzione sul funzionamento dei sistemi di retroazione, seguita dai risultati ottenuti nel costruire l'apparato specifico.

4.1 Sistemi per la riduzione del rumore in fase: generalità

Un sistema di controllo è un complesso di componenti interconnessi che formano una configurazione che si vuole fornisca una precisa risposta del sistema. La base per l'analisi di un sistema è costruita sui fondamenti della teoria dei sistemi lineari, che assume ci sia una relazione causa- effetto tra i componenti di un sistema, rappresentata dal rapporto input-output³.

Si considera un sistema lineare con una fase Φ_{in} in ingresso e una fase Φ_{out} in uscita. Nello spazio delle frequenze si ha quindi

$$\Phi_{out} = A(s)\Phi_{in} \quad (8)$$

Il segnale in uscita con fase Φ_{out} viene poi iniettato nuovamente, con segno negativo, nell'ingresso del sistema.

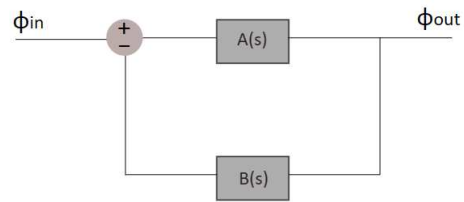


Figura 14. Sistema di controllo closed-loop: dominio delle frequenze

Dopo il passaggio per il filtro lineare $B(s)$ l'equazione che regola il sistema diventa

$$(\phi_{in} - B(s)\phi_{out})A(s) = \phi_{out} \quad (9)$$

da cui

$$\Phi_{out}(s) = \frac{A(s)}{1 + A(s)B(s)} \Phi_{in}(s) \quad (10)$$

Le fluttuazioni di fase ϕ_n in ingresso vengono quindi soppresse all'uscita dal loop dal fattore $\frac{1}{1+A(s)B(s)}$, e, nel caso $A(s)B(s) \gg 1$, la formula 10 diventa

$$\Phi_{out}(s) \approx \frac{\Phi_{in}(s)}{B(s)} \quad (11)$$

che dimostra come alti guadagni di retroazione aumentano la soppressione del rumore. Solitamente la quantità $A(s)B(s)$ decresce all'aumentare della frequenza. Quando ci si avvicina alla condizione per cui $|A(s)B(s)| \approx 1$ è importante che la fase si discosti significativamente da 180° , per evitare il valore Φ_{out} diverga, come da equazione 10. Tipicamente, nel progettare il sistema di loop, si cerca di avere un margine $\Delta\Phi \approx 30-40^\circ$, dove la distanza dalla condizione di instabilità $\Delta\Phi$ è detta phase margin.

Analogamente, quando la fase è pari a 180° , il loop va disegnato affinché $|A(s)B(s)| > 1$. Si parla in questo caso di amplitude margin o gain margin, ovvero incremento nell'ampiezza che permette di mantenere il sistema stabile.

³Per la teoria sui sistemi di loop ci si è riferiti a [4].

4.2 Realizzazione del sistema di loop

L'idea che sta alla base del sistema di loop è quella di misurare il rumore in fase $2\phi_n$ del canale a 200 MHz, per poi cercare di abbatterlo agendo sulla frequenza dell' AOM; di conseguenza anche il rumore in fase ϕ_n alla porta K sarà soppresso dello stesso fattore.

Lo schema di base è quello riportato in figura 14, in cui viene sostituito il segnale in uscita Φ_{out} con la tensione V_{out} all'uscita del mixer che, in accordo con l'equazione 4, è legato a ϕ_n da una costante di proporzionalità:

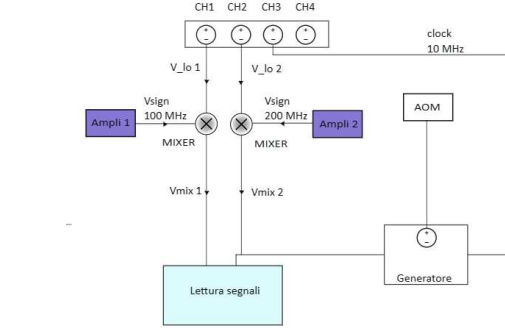


Figura 15. Realizzazione del closed loop per eliminare il rumore in fase

$$V_{out} = \alpha\phi_n \quad (12)$$

Per chiudere il loop tale segnale viene iniettato nell'ingresso "Frequency Modulation" del generatore che pilota l'AOM (con frequenza centrale di 100 MHz). In figura 15 viene riportato lo schema di implementazione pratica del circuito.

Così facendo la frequenza del generatore RF viene alterata di una quantità pari a

$$\Delta\omega = k_{FM}V_{out} \quad (13)$$

Ricordando che la fase ϕ è legata alla frequenza dalla relazione $\omega = s\phi$, si può quindi scrivere l'equazione del loop come

$$(\phi_n - V_{out} \frac{k_{FM}}{s})\alpha = V_{out} \quad (14)$$

da cui

$$V_{out} = \frac{\alpha\phi_n}{1 + \frac{\alpha k_{FM}}{s}} \quad (15)$$

E' già stato affrontato il problema della stima di $\alpha = \frac{1}{2}AB$ nella sezione 3. Si vuole ora vedere come ottenere una stima di k_{FM} .

Il valore di tale costante viene ricavato iniettando un segnale continuo in voltaggio nell'ingresso del Frequency Modulator del generatore che guida l'AOM, per poi misurare la variazione di frequenza al variare di tale segnale. La costante k_{FM} viene quindi ottenuta mediante dalla formula 13.

I risultati di tale misura sono presentati in figura 18, che si riferisce a due diverse impostazioni della costante di conversione voltaggio-frequenza del generatore RF, chiamate rispettivamente gain 5 e gain 200. I valori stimati delle costanti k_{FM} sono riportati in tabella 8.

Usando tali valori è possibile stimare la reiezione del rumore in fase attesa dal loop nei due casi in esame. In accordo con l'equazione 15 la reiezione del sistema di controreazione frequenze con valori inferiori ad alcune centinaia di Hz dovrebbe essere sempre superiore ad un fattore 10.

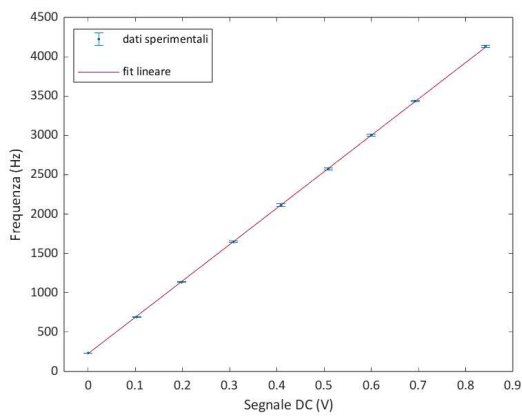
Di seguito vengono riportate le misure fatte per ottenere la costante k_{FM} .

Segnale(mV)	Periodo (μ s)
0.0 ± 0.1	4280 ± 30
103 ± 2	1444 ± 4
198 ± 2	881 ± 3
308 ± 2	607 ± 3
409 ± 2	473 ± 3
509 ± 3	388 ± 2
600 ± 3	333 ± 1
693 ± 3	291 ± 1
842 ± 3	242 ± 1

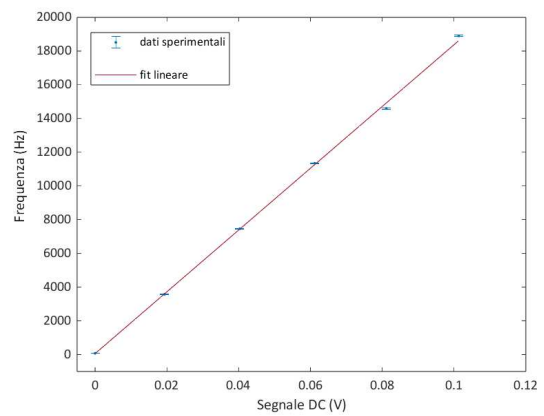
Figura 16. Gain=5

Segnale(mV)	Periodo (μ s)
0.0 ± 0.1	12500 ± 200
19 ± 1	279.6 ± 0.1
40 ± 1	134.0 ± 0.4
61 ± 1	88.1 ± 0.2
81 ± 1	66.5 ± 0.2
101 ± 2	52.9 ± 0.1

Figura 17. Gain= 200

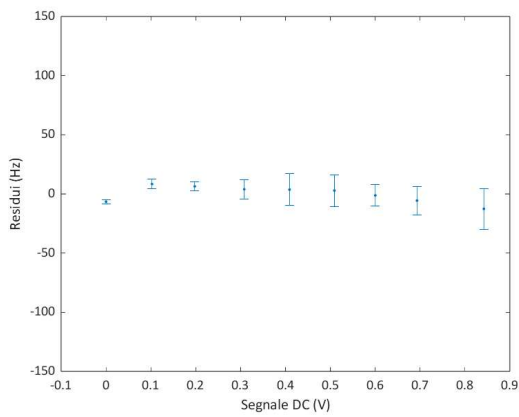


(a) Gain=5

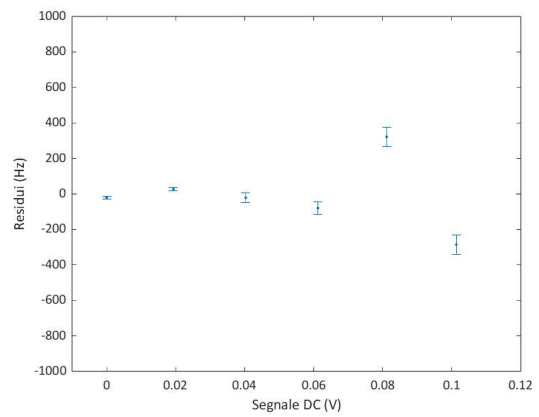


(b) Gain=200

Figura 18. Frequenza al variare di un segnale in continua



(a) Gain=5



(b) Gain=200

Figura 19. Residui per fit lineari riportati in figura 18

I parametri ottenuti dai fit lineari del tipo $y=ax+b$ effettuati sono riportati di seguito in tabella 8.

	a (Hz/V)	σ_a (Hz/V)	b (Hz)	σ_b (Hz)
gain=5	4620	10	227	9
gain=200	183000	4000	58	6

Tabella 8. Parametri ottenuti da fit lineare

In figura 20 è riportato il diagramma di Bode realizzato inserendo la costante k_{FM} per gain 5, riportata in tabella 8, nella formula 15, e plottando quindi la funzione di trasferimento del sistema in funzione della frequenza.

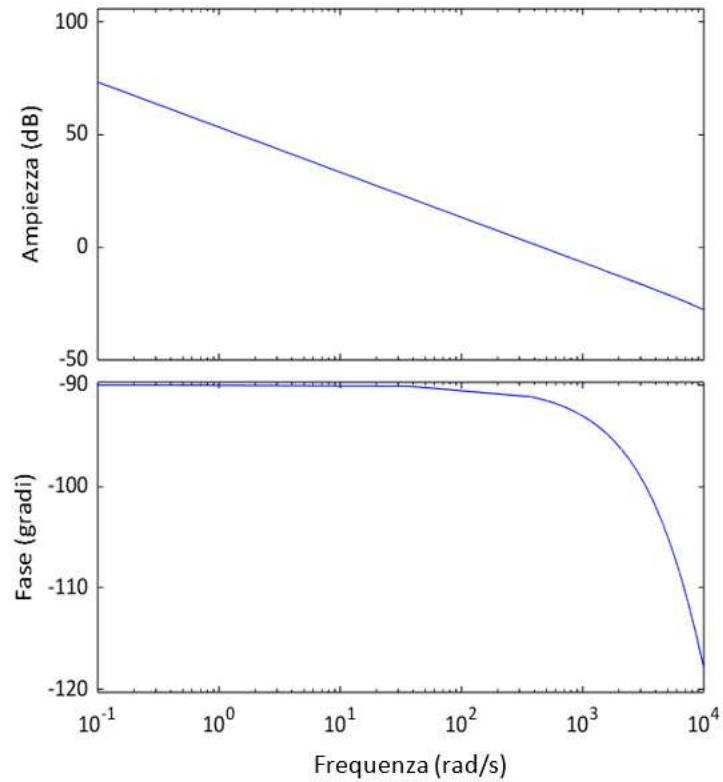


Figura 20. Diagramma di bode per gain 5

Il diagramma in figura 20 è stato realizzato considerando un amplificatore in serie alla catena di feedback con guadagno 1 e con filtro passa-basso a frequenza 3000 Hz.

4.3 Misure sul sistema di loop

Per testare l'efficacia del loop è stata intenzionalmente regolata la frequenza del generatore a 100 MHz che alimenta l'AOM, in modo da avere una leggera differenza di frequenza $\Delta\omega$ rispetto ai 100 MHz del local oscillator. Come previsto, all'uscita del mixer viene generato un battimento a frequenza $\Delta\omega$ e $2\Delta\omega$ per i casi in cui LO è rispettivamente a 100 MHz 200 MHz (vedi figura 21).

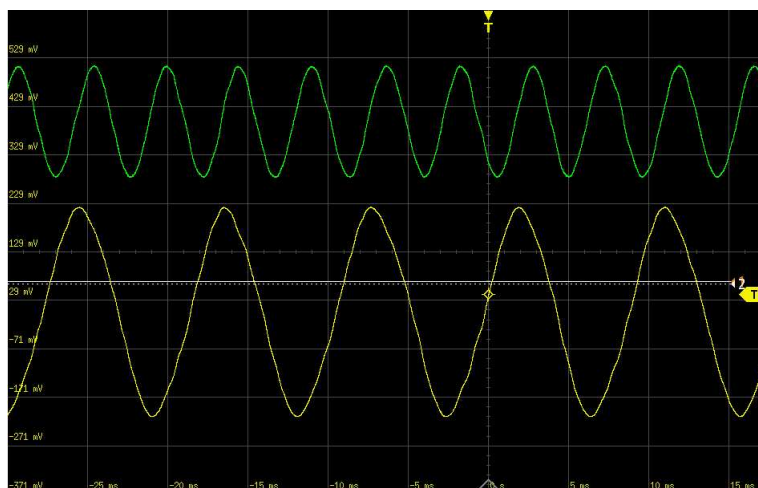


Figura 21. Effetto dell'AOM sulla luce che passa una volta per lo strumento (in giallo) e quella che passa 2 volte (in verde). Il generatore RF che pilota l'AOM è intenzionalmente settato su una frequenza leggermente diversa dal LO a 100 MHz

Una volta chiuso il loop, il sistema fa variare rapidamente la frequenza del generatore che alimenta l'AOM, in modo da annullare il battimento del canale a 200 MHz, e conseguentemente anche quello del canale a 100 MHz (figura 22).

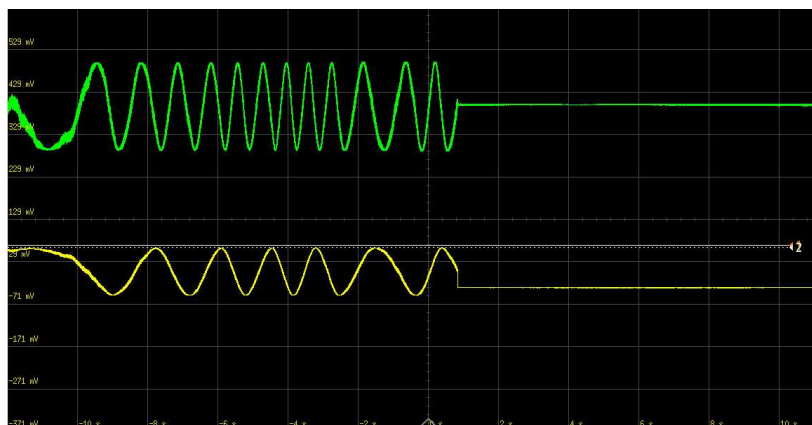


Figura 22. Effetto della chiusura del loop

Così facendo è stata verificata la capacità del sistema di retroazione di ripristinare la condizione in cui l'offset in frequenza della luce alla porta K è 100 MHz.

Analogamente si può vedere in figura 23 come, nel caso in cui si parta con il generatore che pilota l'AOM a 100 MHz, le ampie fluttuazioni di fase a bassa frequenza indotte dalla fibra vengano soppresse una volta chiuso il loop.

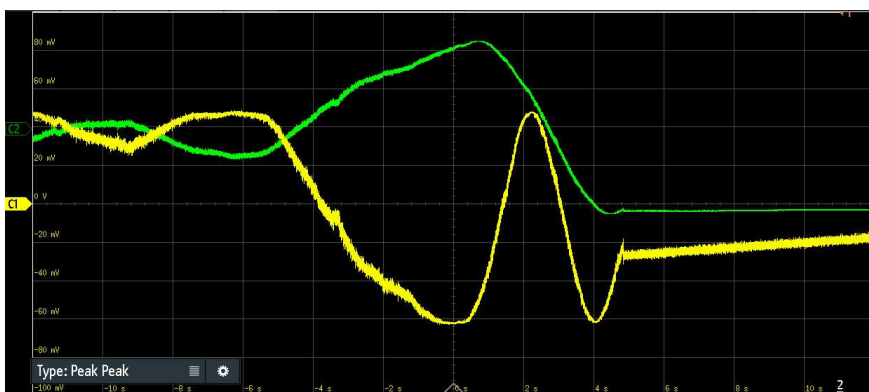


Figura 23. Chiusura del loop: oscillazioni nel caso in cui inizialmente il LO ed il generatore che pilota l'AOM sono entrambi a 100 MHz

Per quanto riguarda la caratterizzazione della soppressione del loop per frequenze più alte, è stato acquisito lo spettro di potenza del rumore in fase nel nodo K per i due diversi valori della costante k_{FM} considerati in figura 18.

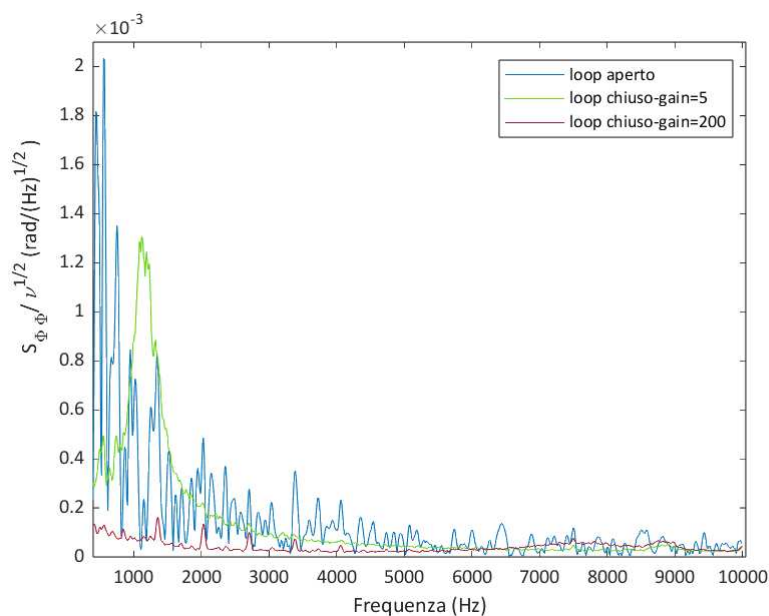


Figura 24. Chiusura del loop: spettro

In figura 24 è possibile vedere il confronto tra gli spettri di potenza del rumore in fase con e senza loop chiuso. Nel caso di basso guadagno, il sistema presenta una risonanza attorno a 1000 Hz la cui origine non è stata individuata, e che influenza pesantemente il rumore in fase. Per guadagni maggiori la soppressione del rumore in fase è invece evidente.

Si vede comunque che la soppressione risulta inferiore ai valori attesi. Si ritiene ciò possa essere dovuto al rumore dell'elettronica di rivelazione, che dovrà essere valutato in test successivi.

Bisogna inoltre notare che gli spettri riportati in figura 24 hanno valenza puramente indicativa. Infatti, la riga a 200 MHz e quella a 100 MHz del generatore DDS usato non sono impostabili in modo da averne una che sia esattamente il doppio dell'altra. La condizione $\phi - \Phi = 0$, richiesta per stimare ϕ_n utilizzando la formula 4, risulta quindi verificata solo per un breve periodo di tempo, non permettendo quindi di fare misure sul lungo periodo.

5. Conclusioni

Questo elaborato ha lo scopo di presentare i risultati di un lavoro di tesi che è stato sviluppato in più passaggi.

La prima fase è incentrata sulla costruzione di un circuito in fibra ottica utilizzato per la caratterizzazione del rumore in fase accumulato dalla luce quando si propaga lungo tale fibra.

Nella seconda parte della tesi si è invece lavorato su un sistema di controreazione finalizzato all'abbattimento di tale rumore. È stato dimostrato che il sistema così realizzato funziona secondo quanto previsto, ma manifesta comunque delle criticità.

In particolare:

- l'abbattimento del rumore in fase, per quanto evidente, risulta sensibilmente minore di quello atteso. Inoltre il loop di controreazione genera in alcuni casi delle risonanze di cui non è stata individuata l'origine;
- la misura del rumore in fase al nodo K, che rappresenta il nodo dove si vuole minimizzare il rumore, risulta difficile da portare avanti a causa del drift relativo in frequenza tra i generatori RF utilizzati.

Il perfezionamento del sistema richiederà quindi ulteriori studi di ottimizzazione dei filtri di controreazione, con misure dirette della loro funzione di traferimento per un confronto con il modello teorico. Per evitare invece il drift relativo tra i generatori, si pianifica di usare per il segnale uscente dal nodo J, che contiene il segnale di errore, un divisore di frequenza, in modo che entrambi i Local Oscillators dei due mixer possano operare con lo stesso canale a 100 MHz.

6. Appendice

6.1 Fasci gaussiani

Le sorgenti di luce laser generano intensi fasci ottici con profili di intensità centrati intorno alla direzione di propagazione. Tali raggi non sono approssimabili ad onde piane; per la loro descrizione si usa invece l'ottica gaussiana⁴.

Si considera di seguito il modo gaussiano principale per propagazione laser: i modi di ordini successivi non verranno considerati nel caso specifico analizzato in questa trattazione.

La soluzione che si cerca per descrivere il sistema deve tenere conto del peculiare comportamento di un fascio proveniente da una sorgente laser: nei pressi della sorgente il raggio si propaga come un'onda piana con ampiezza costante, mentre, a distanze maggiori, assume una forma analoga a quella di un'onda sferica divergente.

L'analisi del fascio lungo la direzione di propagazione z viene portata avanti supponendo di trovarsi in condizioni precise:

- viene applicata l'approssimazione di Fresnel, per cui la dimensione trasversale del fascio, individuata dalla coordinata ρ , risulta trascurabile rispetto alla distanza su cui si sviluppa lungo la direzione di propagazione z : $\rho \ll z$;
- il modo gaussiano si propaga in uno spazio isotropo, in cui campo elettrico e magnetico risultano ortogonali alla direzione di propagazione;
- si considera l'equazione di Helmholtz

$$(\nabla^2 + \vec{k}^2)\vec{E}(\vec{r}) = 0 \quad (16)$$

che, scomposta lungo componenti trasversali e longitudinali risulta

$$(\nabla_T^2 + 2ik\frac{\partial}{\partial z})A(x, y, z) = 0 \quad (17)$$

dove il campo elettrico $\vec{E}(\vec{r})$ è scritto nella forma $E = A \exp\{ikz\}$, con z direzione di propagazione e con ampiezza $A(x, y, z)$ che varia lentamente su scala confrontabile con quella della lunghezza d'onda, quindi con $\frac{\partial}{\partial z}A \ll kA$ e $\frac{\partial^2}{\partial z^2}A \ll k\frac{\partial}{\partial z}A$.

L'equazione di Helmholtz è ricavata dall'equazione delle onde di Maxwell, assumendo che per il campo elettrico valga la decomposizione $\vec{E} = \vec{E}(\vec{r}) f(t)$.

La soluzione dell'equazione 16, con approssimazione di Fresnel, è:

$$E(r) = \frac{A(z, \rho)}{kz} e^{i\frac{k\rho^2}{2z}} e^{ikz} \quad (18)$$

dove $\rho = x^2 + y^2$.

Si introducono ora, per descrivere il fascio, le quantità:

$$R(z) = \frac{z^2 - z_0^2}{z} \quad (19)$$

$$w_0^2 = \frac{\lambda z_0}{\pi} \quad (20)$$

$$w(z)^2 = w_0^2 \left(1 + \left(\frac{z}{z_0}\right)^2\right) \quad (21)$$

$$\eta(z) = \tan^{-1}\left(\frac{z}{z_0}\right) \quad (22)$$

con λ e k rispettivamente la lunghezza e il vettore d'onda caratteristici dei raggi che si vogliono analizzare.

⁴Quanto riportato nelle sezioni 6.1, 6.2, 6.3, 6.4 è estrapolato da [3].

Con tale notazione il risultato totale del modo gaussiano principale, o TEM_{00} , fissata A_0 come ampiezza costante, è descritto dalla seguente espressione:

$$E(\rho, z) = A_0 \frac{w_0}{w(z)} e^{-\left(\frac{\rho}{w(z)}\right)^2} e^{\frac{ik\rho^2}{2R(z)}} e^{i(kz - \eta(z))} \quad (23)$$

dove il primo termine esponenziale descrive la distribuzione di ampiezza nella direzione trasversale del fascio, il secondo la curvatura sferica dei fronti d'onda e l'ultimo l'evoluzione del fascio lungo la direzione di propagazione.

In prima approssimazione si può quindi vedere che il fascio gaussiano è completamente caratterizzato dai parametri w_0 e z_0 .

Il waist w_0 definisce il raggio della sezione trasversale minima individuabile nel fascio. Di conseguenza $w(z)$ individua in generale il raggio del fascio ad una distanza z dalla posizione del waist. Il parametro z_0 va invece a determinare la lunghezza della zona di Rayleigh, ovvero la regione del fascio in cui questo presenta la sua minore variazione. E' quindi z_0 che va a delimitare il confine tra la regione in cui si ha una soluzione di onda piana, per $-z_0 < z < z_0$, e la zona a maggiore distanza dal waist per cui si ha una soluzione di onda sferica divergente.

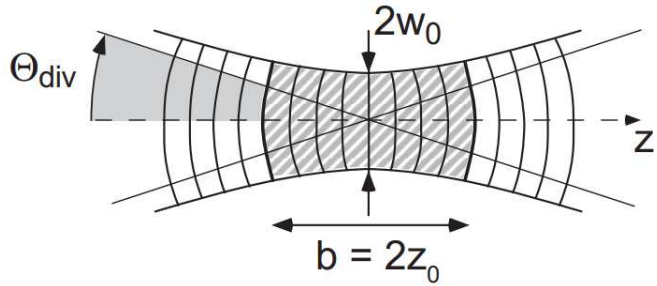


Figura 25. Modo gaussiano principale

La fase di Gouy $\eta(z)$ viene introdotta considerando che l'onda, passando per il fuoco gaussiano, acquisisce maggiore curvatura, provocando una deviazione dall'evoluzione lineare della fase dell'onda piana. Ulteriore parametro fondamentale da considerare è la divergenza del fascio, definita da

$$\Theta_{div} = \frac{w_0}{z_0} \quad (24)$$

6.2 Focalizzazione con lenti sottili

In ottica geometrica l'alterazione della direzione di un raggio di luce causata dal passaggio attraverso componenti ottici è descritta da relazioni trigonometriche non sempre semplici da ricavare. Nel caso di fasci che presentino una simmetria assiale tali relazioni possono essere però linearizzate, con una notevole semplificazione nella trattazione matematica. Gli strumenti più convenienti da utilizzare in questo campo sono le matrici ottiche, dette matrici ABCD.

Si consideri un raggio di luce che si propaga con un angolo α rispetto all'asse z : il raggio è completamente caratterizzato dalla distanza r dall'asse z e dalla pendenza $\tan(\alpha)$, e può essere espresso come $R = (r, \alpha)$ in approssimazione parassiale. Il raggio di luce sarà quindi descritto da R_1 e R_2 prima e dopo aver attraversato il componente ottico in questione. Si avrà una relazione tra i due mediata da quella che è chiamata matrice ABCD, indicata di seguito come T , caratteristica di ogni elemento ottico:

$$R_2 = TR_1 \quad (25)$$

che è equivalente a scrivere:

$$\begin{pmatrix} r_2 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} \quad (26)$$

Per esempio, si può ricavare la matrice per passaggio di un raggio attraverso una lente sottile:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix} \quad (27)$$

Utilizzando le matrici ABCD si può inoltre studiare l'effetto di un sistema costituito da due lenti di lunghezza focale f_1 e f_2 poste ad una distanza l l'una dall'altra. La matrice corrispondente al fenomeno risulta

$$T = \begin{pmatrix} 1 - \frac{l}{f_1} & l \\ -(\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{l}{f_1 f_2}) & 1 - \frac{l}{f_2} \end{pmatrix} \quad (28)$$

I parametri dei fasci gaussiani trasformano dipendentemente da coefficienti delle matrici ABCD, che possono quindi essere usati nel caso specifico adattare il fascio uscente dal nostro laser a quello richiesto per l'iniezione in fibra mediante l'uso di lenti sottili.

In accordo con tale metodo il parametro del fascio $q(z) = z - iz_0$, sotto azione di una matrice ABCD, trasforma come

$$q_1 = T \otimes q_0 = \frac{Aq_0 + B}{Cq_0 + D} \quad (29)$$

sia q_0 il valore iniziale, e q_1 il valore in seguito all'applicazione della matrice ABCD.

Tale metodo è stato utilizzato per progettare un telescopio per adattare il fascio gaussiano a disposizione al collimatore in ingresso alla fibra ottica (vedi paragrafo 2.2.2).

6.3 Acousto-optic modulator (AOM)

Nel momento in cui un'onda sonora si propaga in un cristallo, provoca fluttuazioni periodiche di densità, che inducono a loro volta una variazione dell'indice di rifrazione alla stessa frequenza e lunghezza d'onda. L'effetto dell'oscillazione dell'indice di rifrazione può essere paragonabile a quello di un reticolo ottico di diffrazione: l'onda sonora va quindi ad influenzare la propagazione dei raggi di luce. Un AOM è un cristallo alla fine del quale è posto un elemento piezoelettrico per indurre onde ultrasoniche; per evitare riflessione ed onde stazionarie, un assorbitore è posto all'altro capo. La testa ultrasonica viene fatta vibrare mediante onde radio e irradia onde sonore attraverso il cristallo. Il raggio di luce attraversa quindi un campo di onde sonore e viene diffratta.

Si considera di seguito una variazione dell'indice di rifrazione in direzione x causata da un'onda sonora con frequenza Ω e vettore d'onda $\vec{q} = q\vec{e}_x$:

$$n(t) = n_0 + \delta n_0 \cos(\Omega t - qx) \quad (30)$$

e si usa l'equazione delle onde che attraversano un mezzo con indice di rifrazione n in coordinate polari

$$(\nabla^2 - (\frac{n}{t})^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2}) \vec{E}(\vec{r}, t) = 0 \quad (31)$$

tenendo conto del fatto che la correzione apportata all'indice di rifrazione è piccola e si può dunque scrivere $(n_0 + \delta n(t))^2 \approx n_0^2 + 2n_0\delta n(t) + \dots$, limitandosi ulteriormente a studiare il sistema in direzione x , poichè non ci si aspetta ci siano variazioni dell'onda sonora nelle altre direzioni.

Si possono individuare più elementi che vanno a comporre il campo elettrico:

- il campo elettrico incidente, che evolve come

$$E_i(\vec{r}, t) = E_{i0}(x, t) e^{-i(\omega t - \vec{k}\vec{r})} \quad (32)$$

- un campo aggiuntivo dovuto alla modulazione dell'indice di rifrazione, che porta a variazioni di frequenza $\omega \pm \Omega$, interpretabile come un campo riflesso

$$E_a(\vec{r}, t) = E_{a0}(x, t) e^{-i(\omega' t - \vec{k}'\vec{r})} \quad (33)$$

con $\omega' = \omega + \Omega$ e $\vec{k}' = \vec{k} + \vec{q}$.

Si può quindi riscrivere l'equazione 31 come

$$(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - k_y^2 - k_z^2 - (\frac{n_0^2}{c^2} - \frac{2n_0\delta n(t)}{c^2} + \dots) \frac{\partial^2}{\partial t^2}) \vec{E}(\vec{r}, t) = 0 \quad (34)$$

L'indice di rifrazione oscillante non influenza il cettore di propagazione, e si può quindi scrivere

$$\vec{k}'^2 = (\vec{k} + \vec{q})^2 = n_0^2 \frac{(\omega + \Omega)^2}{c^2} \approx \left(\frac{n_0 \omega}{c}\right)^2 \quad (35)$$

Stidando quindi l'equazione 34 con le approssimazioni fatte e un campo elettrico totale $E = E_i + E_a$, si arriva alle soluzioni

$$E_i(z, t) = E_{i0} \cos\left(\frac{\gamma z}{2}\right) e^{-i(\omega t - kr)} \quad (36)$$

$$E_a(z, t) = E_{i0} \sin\left(\frac{\gamma z}{2}\right) e^{-i((\omega + \Omega)t - (k+q)r)} \quad (37)$$

dove $\gamma = \frac{k \delta n_0}{n_0 \sin \theta}$ e θ definito da $k_x = k \sin \theta$, con E_{a0} posto a zero come in generale succede all'entrata di un AOM.

Quindi ciò che si ottiene è un fascio riflesso con uno shift delle frequenze ed un'intensità che per z piccolo è proporzionale a $(\gamma z)^2$. L'ampiezza di modulazione per l'indice di rifrazione per intensità I_s del suono risulta

$$\delta n_0 = \sqrt{\frac{M I_s}{2}} \quad (38)$$

con M determinato fenomenologicamente in base ai parametri del materiale.

6.4 Fibre PANDA

Le fibre PANDA sono delle fibre polarization maintaining costruite in modo da eliminare il problema della depolarizzazione della luce che si manifesta nel momento in cui questa attraversa un mezzo: si hanno in questo caso due modi di polarizzazione ben definiti che si propagano nella fibra con diverse velocità di fase, in modo che l'energia non possa passare da un modo all'altro. Tale separazione dei modi di polarizzazione viene ottenuta introducendo un'anisotropia nel nucleo della fibra mediante birifrangenza: lo stress applicato alla fibra per congelare il nucleo fa sì che il materiale presenti degli indici di rifrazione diversi su piano parallelo o perpendicolare alla direzione di propagazione della luce.

6.5 Phase Sensitive Detector

Un mixer è un componente elettronico che combina due o più segnali per produrre come segnale in uscita il prodotto dei segnali in ingresso. Se si considerano due segnali

$$V_1 = A \sin(\omega_1 t + \phi_1) \quad (39)$$

$$V_2 = B \cos(\omega_2 t + \phi_2) \quad (40)$$

il prodotto dei due risulta

$$\tilde{V}_{mix} = AB \sin(\omega_1 t + \phi_1) \sin(\omega_2 t + \phi_2) = \frac{AB}{2} [\sin((\omega_2 - \omega_1)t + (\phi_2 - \phi_1)) + \sin((\omega_2 + \omega_1)t + (\phi_2 + \phi_1))] \quad (41)$$

dove è stata utilizzata la relazione trigonometrica $\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)]$.

Un filtro passa-passo posto dopo il mixer va a tagliare il componente a frequenza più alta, lasciando un segnale pari a

$$V_{mix} = \frac{AB}{2} \sin((\omega_2 - \omega_1)t + (\phi_2 - \phi_1)) \quad (42)$$

Nei mixer reali [1] l'ampiezza del segnale 42, pur essendo legata alle ampiezze A e B (equazioni 39 e 40) non ha esattamente l'espressione 42. Per questo motivo, una volta selezionati i due segnali 39 e 40, nel corso di questa tesi è stata esplicitamente misurata l'ampiezza del battimento.

Riferimenti bibliografici

- [1] <https://www.google.com/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=&ved=2ahUKEwiO1POyudKCAxU-gv0HHT23BcAQFnoECBEQAQ&url=https%3A%2F%2Fwww.minicircuits.com%2Fapp%2FAN00-010.pdf&usg=AOvVaw1zYCT1Nqh8kFKCbBuimtJd&opi=89978449>.
- [2] Eleonora Capocasa, Yuefan Guo, Marc Eisenmann, Yuhang Zhao, Akihiro Tomura, Koji Arai, Yoichi Aso, Manuel Marchiò, Laurent Pinard, Pierre Prat, et al. Measurement of optical losses in a high-finesse 300 m filter cavity for broadband quantum noise reduction in gravitational-wave detectors. *Physical Review D*, 98(2):022010, 2018.
- [3] Dieter Meschede. *Optics, Light and Lasers*. WILEY-VCH, 2007. paragrafi 1.9 , 2.3 , 3.4.3, 3.8.4.
- [4] Robert H. Bishop Richerd C. Dorf. *Modern Control Systems*. PEARSON, 2017. paragrafi 1.1 , 4.1.