UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Dipartimento di Fisica e Astronomia “Galileo Galilei”

Corso di Laurea in Fisica

Tesi di Laurea

Classificazione di sistemi fermionici in meccanica quantistica

Relatore

Prof. Roberto Volpato

Laureando

Enrico Fantoni

Anno Accademico 2023/2024

Abstract

In questa tesi si effettuerà una classificazione dei sistemi quantistici, con particolare attenzione ai sistemi fermionici non interagenti, attraverso un'analisi delle simmetrie che li caratterizzano, in particolare la simmetria di inversione temporale e di particella-lacuna. Tale classificazione risulta utile per comprendere le proprietà di alcuni materiali, come gli isolanti topologici e i superconduttori.

Indice

Introduzione

Nel 1996, Altland e Zirnbauer hanno proposto una classificazione dei sistemi fermionici in dieci categorie distinte, basata sulle simmetrie dei sistemi quantistici. Tale risultato è stato successivamente confermato da Heinzner, Huckleberry e Zirnbauer in [HHZ05]. Questa tesi si pone l'obiettivo di analizzare e presentare tale classificazione.
Nel primo capitolo vengono introdotte le algebre di Clifford e la $\mathbb{Z}_2$-graduazione di spazi vettoriali e algebre. Si dimostra che esistono precisamente otto classi di algebre di Clifford reali e due classi di algebre di Clifford complesse, le loro versioni $\mathbb{Z}_2$-graduate corrispondono alle dieci superalgebre di divisione associative, reali e finito dimensionali.
Il secondo capitolo tratta le simmetrie dei sistemi quantistici e affronta il problema di Dyson, formulato per la prima volta nel 1962 in [Dys62]. Tale problema consiste nel determinare l'ensemble di Hamiltoniane di un sistema conoscendone le simmetrie. Si identificano dieci classi di Hamiltoniane, corrispondenti alle dieci superalgebre di divisione precedentemente individuate.
Nel terzo capitolo ci si focalizza sui sistemi fermionici. Dopo aver trattato il formalismo della seconda quantizzazione, si illustra il problema di Dyson per tali sistemi. Anche in questo caso si identificano dieci famiglie di Hamiltoniane, ognuna legata a una famiglia di spazi simmetrici classici.

1 Algebre di Clifford

Questa sezione consiste in una presentazione prettamente matematica delle algebre di Clifford e della $\mathbb{Z}_2$-graduazione. Tali nozioni verranno successivamente utilizzate per descrivere le simmetrie di sistemi quantistici. Si veda ad esempio [Ren20] e [LM90] per ulteriori informazioni.

Definizione 1.1. Sia Q una forma quadratica non degenere su uno spazio vettoriale di dimensione finita V su un campo K (in particolare si utilizzerà $K = \mathbb{R}$ o $K = \mathbb{C}$). L'algebra di Clifford $C\ell(V, Q)$ è l'algebra associativa i cui generatori, denotati $\{e_i\}_{i=1,\dots,n}$, sono in corrispondenza biunivoca con una base di V e la moltiplicazione definita sull'algebra rispetta la seguente relazione:

$$\{e_i, e_j\} = 2Q_{ij} \cdot \mathbb{1} \tag{1.1}$$

dove $\{\cdot, \cdot\}$ è l'anticommutatore, $Q_{ij} \in K$ sono gli elementi di matrice di Q e $\mathbb{1} \in C\ell(Q, V)$ è l'identità moltiplicativa.

Poiché Q è simmetrica è sempre possibile scegliere una base di V tale per cui Q è diagonale con autovalori reali. Dalla relazione (1.1) segue dunque che i generatori di un'algebra di Clifford anticommutano:

$$\{e_i, e_j\} = 2Q_i \cdot \delta_{ij} \tag{1.2}$$

Si definisce $e_{i_1 \dots i_r} := e_{i_1} \dots e_{i_r}$ con $\{i_1, \dots, i_r\}$ un sottoinsieme di $\{1, \dots, n\}$ senza elementi ripetuti. Si può assumere $i_1 < \dots < i_r$ poiché utilizzando la relazione (1.2) è sempre possibile riordinare gli indici.
L'algebra di Clifford $C\ell(V, Q)$ è lo span lineare di tutti i vettori $e_{i_1 \dots i_r}$. Quindi:

$$\dim_K C\ell(V, Q) = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} = 2^n \tag{1.3}$$

Dalla legge di inerzia di Sylvester si evince che è possibile definire univocamente le algebre di Clifford sul campo dei numeri reali solamente dalla segnatura (p, q) della forma quadratica Q.

$$Q = \begin{pmatrix} +1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & +1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 \\ \underbrace{0 \quad\; 0}_{p} & & \cdots & \underbrace{0 \quad -1}_{q} \end{pmatrix} \tag{1.4}$$

La relazione (1.2) diventa:

$$\begin{aligned} e_i^2 &= \begin{cases} +1 & i = 1, ..., p \\ -1 & i = p+1, ..., n \end{cases} \\ e_i e_j &= -e_j e_i \qquad i \neq j \end{aligned} \tag{1.5}$$

Si denotano le algebre di Clifford con segnatura (p, q) sul campo dei numeri reali con $C\ell_{+p,-q}$. Nel caso in cui la segnatura sia $(p, 0)$ (o $(0, q)$) si denotano con $C\ell_{+p}$ (o $C\ell_{-q}$).
Nel caso complesso non è necessario identificare la segnatura dei generatori poiché se $e^2 = \pm 1$ allora $(ie)^2 = \mp 1$. Per definire univocamente un'algebra di Clifford sul campo dei numeri complessi è quindi sufficiente definire il numero n di generatori. Si denotano con $\mathbb{C}\ell_n$.
Le algebre $C\ell_0$ e $\mathbb{C}\ell_0$ sono rispettivamente isomorfe a $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$.

1.1 $\mathbb{Z}_2$-graduazione

1.1.1 Superspazi vettoriali

Definizione 1.2. uno spazio vettoriale $\mathbb{Z}_2$-graduato (o superspazio vettoriale) su un campo K è uno spazio vettoriale sul medesimo campo K con una decomposizione in una somma diretta:

$$V = V^0 \oplus V^1 \tag{1.6}$$

V^0 e V^1 sono detti rispettivamente sottospazi pari e dispari di V e possono essere visti come autospazi di un operatore P_V tale che:

$$P_V v = \begin{cases} +v & v \in V^0 \quad (v \text{ è detto pari}) \\ -v & v \in V^1 \quad (v \text{ è detto dispari}) \end{cases} \tag{1.7}$$

Un vettore $v \in V$ è detto omogeneo se è autovettore di P_V. Un vettore omogeneo ha parità $|v| = 1$ se dispari o $|v| = 0$ se pari. Non tutti i vettori di V sono vettori omogenei.
È possibile definire la super dimensione di V come segue:

$$\operatorname{sdim} V = (\dim V^0 | \dim V^1) \tag{1.8}$$

Per ogni campo K si denota il superspazio vettoriale $K^{p|d} := \underbrace{K^p}_{pari} \oplus \underbrace{K^d}_{dispari}$.

Definizione 1.3. Il prodotto tensore tra due superspazi vettoriali V e W è lo spazio vettoriale $V \otimes W$. Anch'esso può essere visto come un spazio vettoriale $\mathbb{Z}_2$-graduato, i sottospazi pari e dispari sono definiti come segue:

$$\begin{aligned} (V \otimes W)^0 &= V^0 \otimes W^0 \oplus V^1 \otimes W^1 \\ (V \otimes W)^1 &= V^0 \otimes W^1 \oplus V^1 \otimes W^0 \end{aligned} \tag{1.9}$$

Dalla definizione si evince immediatamente che $|v \otimes w| = |v| + |w|$ dove con $+$ si denota la somma sull'anello $\mathbb{Z}_2$.
Utilizzando la notazione introdotta precedentemente, dalla relazione (1.9), si ottiene:

$$K^{p|d} \otimes K^{p'|d'} \cong K^{pp'+dd'|pd'+p'd} \tag{1.10}$$

1.1.2 Trasformazioni lineari tra superspazi vettoriali

Siano V e W due superspazi vettoriali. La graduazione di V e W induce una $\mathbb{Z}_2$-graduazione dello spazio vettoriale $\mathrm{Hom}(V,W)$.

Proposizione 1.1. Dati due spazi vettoriali V e W esiste un isomorfismo

$$\mathrm{Hom}(V,W) \cong V^* \otimes W \tag{1.11}$$

dove si denota con V^* lo spazio duale di V

Nota. Dalla proposizione segue:

$$\begin{aligned} \mathrm{End}(V) \otimes \mathrm{End}(W) &\cong V^* \otimes V \otimes W^* \otimes W \\ &\cong (V \otimes W)^* \otimes (V \otimes W) \\ &\cong \mathrm{End}(V \otimes W) \end{aligned} \tag{1.12}$$

Lo spazio duale V^* eredita la graduazione dallo spazio V:

$$\begin{aligned} (V^*)^0 &= (V^0)^* \\ (V^*)^1 &= (V^1)^* \end{aligned} \tag{1.13}$$

Dalle relazioni (1.11), (1.9) e (1.13) segue:

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}(V,W)^0 &\cong (V^* \otimes W)^0 \\ &\cong (V^*)^0 \otimes W^0 \oplus (V^*)^1 \otimes W^1 \\ &\cong (V^0)^* \otimes W^0 \oplus (V^1)^* \otimes W^1 \\ &\cong \mathrm{Hom}(V^0, W^0) \oplus \mathrm{Hom}(V^1, W^1) \end{aligned} \tag{1.14}$$

In modo del tutto analogo si ottiene:

$$\mathrm{Hom}(V,W)^1 \cong \mathrm{Hom}(V^0, W^1) \oplus \mathrm{Hom}(V^1, W^0) \tag{1.15}$$

Scegliendo un'opportuna base di V (e analogamente per W) è possibile scrivere un generico vettore di V nella forma $v = \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \end{pmatrix}$ con $v_0 \in V^0$ e $v_1 \in V^1$. Ne consegue che gli elementi di $\mathrm{Hom}(V,W)$ possono essere visti come matrici a blocchi:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} &\in \mathrm{Hom}(V,W)^0 \\ \begin{pmatrix} 0 & B \\ C & 0 \end{pmatrix} &\in \mathrm{Hom}(V,W)^1 \end{aligned} \tag{1.16}$$

1.1.3 Superalgebre

Definizione 1.4. Un'algebra $\mathbb{Z}_2$-graduata (o superalgebra) $\mathcal{A}$ è un superspazio vettoriale V con un morfismo (chiamato moltiplicazione) di superspazi vettoriali:

$$\begin{array}{ccc} V \otimes V & \longrightarrow & V \\ a \otimes a' & \longmapsto & aa' \end{array} \tag{1.17}$$

Tale morfismo implica, dalla (1.9), che $|aa'| = |a| + |a'|$ dove con $+$ si denota la somma sull'anello $\mathbb{Z}_2$.

Definizione 1.5. Il prodotto tensore tra due superalgebre $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ è la superalgebra $\mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{B}$ definita sul superspazio vettoriale prodotto tensore in cui la moltiplicazione soddisfa la seguente proprietà:

$$(a \hat{\otimes} b)(a' \hat{\otimes} b') = (-1)^{|b||a'|}(aa') \hat{\otimes} (bb') \tag{1.18}$$

dove a, a' sono elementi omogenei di $\mathcal{A}$ e b, b' sono elementi omogenei di $\mathcal{B}$.

È possibile, per esempio, effettuare il prodotto tensore tra superalgebre di matrici, dalle relazioni (1.12) e (1.10) si ottiene:

$$\mathrm{End}(K^{p|d}) \hat{\otimes} \mathrm{End}(K^{p'|d'}) \cong \mathrm{End}(K^{p|d} \otimes K^{p'|d'}) \cong \mathrm{End}(K^{pp'+dd'|pd'+p'd}) \tag{1.19}$$

Si nota che la superalgebra prodotto tensore di superalgebre di matrici è anch'essa una superalgebra di matrici.

1.2 Algebre di Clifford graduate

È possibile vedere le algebre di Clifford come superalgebre. Si definisce un operatore P tale che $Pe_i = -e_i$ dove e_i è un generatore dell'algebra di Clifford. Tale operatore preserva la forma quadratica Q quindi la struttura dell'algebra. Segue dunque, nota la relazione (1.7), che il sottospazio pari è lo span lineare di tutti i vettori $e_{i_1 \dots i_r}$ con cardinalità di $\{i_1 \dots i_r\}$ pari. Analogamente il sottospazio dispari è lo span lineare di tutti i vettori $e_{i_1 \dots i_r}$ con cardinalità di $\{i_1 \dots i_r\}$ dispari.
Con un ragionamento analogo a quello effettuato per ottenere la relazione (1.3) la superdimensione di un'algebra di Clifford graduata è:

$$\mathrm{sdim}_K\, C\ell(V,Q) = (2^{n-1}|2^{n-1}) \tag{1.20}$$

Per le algebre di Clifford graduate vale la seguente proposizione:

Proposizione 1.2. Siano Q_V e Q_W due forme quadratiche non degeneri definite rispettivamente sugli spazi vettoriali V e W. Se $Q_V \oplus Q_W$ è una forma quadratica su $V \oplus W$ allora si ha il seguente isomorfismo:

$$C\ell(V \oplus W, Q_V \oplus Q_W) \cong C\ell(V, Q_V) \hat{\otimes} C\ell(W, Q_W) \tag{1.21}$$

Dimostrazione. Siano $\{v_i\}_{i=1,\dots,n}$ e $\{w_j\}_{j=1,\dots,m}$ basi rispettivamente di V e W. Per semplicità si denotano con la stessa notazione i generatori (in corrispondenza biunivoca con i vettori delle basi) dell'algebra di Clifford $C\ell(V \oplus W, Q_V \oplus Q_W)$.
Si considera la seguente mappa lineare tra generatori:

$$\begin{array}{ccc} v_i & \longmapsto & v_i \hat{\otimes} 1 \\ w_j & \longmapsto & 1 \hat{\otimes} w_j \end{array}$$

Si dimostra che i generatori $\{\{v_i \hat{\otimes} 1\}, \{1 \hat{\otimes} w_j\}\}_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,m}}$ di $C\ell(V, Q_V) \hat{\otimes} C\ell(W, Q_W)$ anticommutano. Dalla (1.18) segue:

$$(v_i \hat{\otimes} 1)(1 \hat{\otimes} w_j) = (-1)^{|1||1|}(v_i \hat{\otimes} w_j) = (v_i \hat{\otimes} w_j)$$
$$(1 \hat{\otimes} w_j)(v_i \hat{\otimes} 1) = (-1)^{|v_i||w_j|}(v_i \hat{\otimes} w_j) = -(v_i \hat{\otimes} w_j)$$

Quindi:

$$(v_i \hat{\otimes} 1)(1 \hat{\otimes} w_j) = -(1 \hat{\otimes} w_j)(v_i \hat{\otimes} 1)$$

Per quanto riguarda $(v_i \hat{\otimes} 1)(v_j \hat{\otimes} 1)$ si ha:

$$(v_i \hat{\otimes} 1)(v_j \hat{\otimes} 1) = v_i v_j \hat{\otimes} 1 = -v_j v_i \hat{\otimes} 1 = -(v_j \hat{\otimes} 1)(v_i \hat{\otimes} 1)$$

Analogamente per $(1 \hat{\otimes} w_i)(1 \hat{\otimes} w_j)$.
La mappa così ottenuta preserva la struttura delle algebre di Clifford, quindi, poiché mappa generatori in generatori, mappa anche basi in basi. Si conclude dunque che le due algebre considerate sono isomorfe. □

Dalla precedente proposizione, decomponendo $\mathbb{R}^{p|q}$ in sottospazi ortogonali, si ottiene il seguente isomorfismo tra superalgebre:

$$C\ell_{+p,-q} \cong \underbrace{C\ell_{+1} \hat{\otimes} \dots \hat{\otimes} C\ell_{+1}}_{p} \hat{\otimes} \underbrace{C\ell_{-1} \hat{\otimes} \dots \hat{\otimes} C\ell_{-1}}_{q} \tag{1.22}$$

Analogamente:

$$\mathbb{C}\ell_n \cong \underbrace{\mathbb{C}\ell_1 \hat{\otimes} \dots \hat{\otimes} \mathbb{C}\ell_1}_{n} \tag{1.23}$$

Definizione 1.6. Due superalgebre $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono dette Morita equivalenti se esiste un superspazio vettoriale V tale che $\mathcal{A} \cong \mathcal{B} \hat{\otimes} \mathrm{End}(V)$ o viceversa. Si denota $\mathcal{A} \sim \mathcal{B}$.
Un'algebra $\mathbb{Z}_2$-graduata è detta Morita irriducibile se non è possibile trovare una classe di equivalenza con una superalgebra di dimensione inferiore.

1.2.1 Classificazione delle algebre di Clifford complesse

Le algebre di Clifford complesse, come dimostrato in precedenza, sono univocamente determinate dal numero n di generatori. Di seguito si cercano isomorfismi tra le algebre di Clifford e altre algebre.

0. $\mathbb{C}\ell_0 \cong \mathbb{C}$ sia come algebra graduata che non.

1. Sia e generatore dell'algebra $\mathbb{C}\ell_1$ con $e^2 = 1$. L'algebra è isomorfa all'algebra definita su $\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$ con la seguente moltiplicazione:

$$(z_1 + z_2 e)(z_3 + z_4 e) = (z_1 z_3 + z_2 z_4) + (z_1 z_4 + z_2 z_3)e \tag{1.24}$$

   dove $z_i \in \mathbb{C}$.
   Come algebra graduata $\mathbb{C}\ell_1$ per motivi dimensionali è Morita irriducibile.

2. Siano $\{e_1, e_2\}$ i generatori dell'algebra $\mathbb{C}\ell_2$. Si definisce la mappa:
$$(1, e_1, e_2) \mapsto \left(\mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, -i\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$$
Si ha dunque:
$$e_{12} \mapsto -i\sigma_1\sigma_2 = \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$
dove σ_1, σ_2 e σ_3 sono le matrici di Pauli. Poiché $\sigma_i\sigma_j = -\sigma_j\sigma_i$ per $i \neq j$ e poiché $\sigma_i^2 = \mathbb{1}$ (quindi $(-i\sigma_2)^2 = -\mathbb{1}$) i generatori dell'algebra rispettano le relazioni delle algebre di Clifford. Di conseguenza l'algebra $\mathbb{C}\ell_2$ è isomorfa all'algebra delle matrici $\mathrm{End}(\mathbb{C}^2)$, generata dalle matrici di Pauli σ_1 e σ_2.
Dalla relazione (1.16) si evince che le matrici di Pauli σ_1 e σ_2 sono dispari e che le matrici $\mathbb{1}$ e σ_3 sono pari, dunque $\mathbb{C}\ell_2 \cong \mathrm{End}(\mathbb{C}^{1|1})$ come algebra graduata. La relazione è esprimibile anche come $\mathbb{C}\ell_2 \cong \mathrm{End}(\mathbb{C}^{1|1}) \hat{\otimes} \mathbb{C}$, si ha quindi una equivalenza di Morita $\mathbb{C}\ell_2 \sim \mathbb{C}\ell_0$.

Più in generale, utilizzando la relazione (1.23), si ha:
$$\mathbb{C}\ell_{n+2} \cong \mathbb{C}\ell_n \hat{\otimes} \mathbb{C}\ell_2 \cong \mathbb{C}\ell_n \hat{\otimes} \mathrm{End}(\mathbb{C}^{1|1}) \sim \mathbb{C}\ell_n \qquad \forall n \in \mathbb{N} \tag{1.25}$$
Si ha quindi una equivalenza di Morita:
$$\mathbb{C}\ell_n \sim \mathbb{C}\ell_\alpha \qquad \alpha := n \bmod 2 \tag{1.26}$$
È dunque possibile classificare le superalgebre di Clifford complesse in due classi di equivalenza di Morita, denotate $[\mathbb{C}]$ e $[\mathbb{C}\ell_1]$.

1.2.2 Classificazione delle algebre di Clifford reali

Si cerca di classificare le superalgebre di Clifford reali similmente a come effettuato per quelle complesse. Si cercano isomorfismi tra le algebre di Clifford e altre algebre.

0. $C\ell_0 \cong \mathbb{R}$ sia come algebra graduata che non.

1. Analogamente a $\mathbb{C}\ell_1$ l'algebra $C\ell_{+1}$ è isomorfa all'algebra definita sullo spazio vettoriale $\mathbb{R}\oplus\mathbb{R}$ con la moltiplicazione (1.24), dove $z_i \in \mathbb{R}$. Con un simile ragionamento si dimostra che l'algebra $C\ell_{-1}$ è isomorfa all'algebra dei numeri complessi $\mathbb{C}$.
$C\ell_{+1}$ e $C\ell_{-1}$ come algebre graduate sono Morita irriducibili per motivi dimensionali.

2.
   - Similmente a $\mathbb{C}\ell_2$ dalla mappa $(1, e_1, e_2) \mapsto (\mathbb{1}, \sigma_1, \sigma_3)$ segue che l'algebra $C\ell_{+2}$ è isomorfa all'algebra delle matrici reali $\mathrm{End}(\mathbb{R}^2)$.
   Come algebra graduata non si ha isomorfismo con $\mathrm{End}(\mathbb{R}^{1|1})$ poiché la matrice σ_3 è pari in $\mathrm{End}(\mathbb{R}^{1|1})$. La superalgebra $C\ell_{+2}$ è Morita irriducibile.
   - L'algebra $C\ell_{-2}$ è isomorfa all'algebra dei quaternioni $\mathbb{H}$. L'algebra dei quaternioni è definita come l'algebra su $\mathbb{R}$ generata da $\{i, j, k\}$ con $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$. Tale relazione implica $ij = -ji = k$, $jk = -kj = i$ e $ki = -ik = j$, per cui $(1, e_1, e_2) \mapsto (\mathbb{1}, i, j)$ è un isomorfismo tra le algebre $C\ell_{-2}$ e $\mathbb{H}$.
   Analogamente a $C\ell_{+2}$, come algebra graduata $C\ell_{-2}$ è Morita irriducibile.

3. - Nell'algebra $C\ell_{+3}$ i generatori anticommutano e quadrano a $+1$. È quindi possibile definire un isomorfismo tra $C\ell_{+3}$ e l'algebra generata dalle matrici di Pauli poiché anch'esse rispettano le stesse proprietà. È semplice dimostrare che l'algebra generata dalle matrici di Pauli è l'algebra delle matrici $\mathrm{End}(\mathbb{C}^2)$. Si ha dunque $C\ell_{+3} \cong \mathrm{End}(\mathbb{C}^2)$.
   Come algebra graduata è possibile definire la mappa
   $$(1, e_1, e_2, e_3) \mapsto (1 \hat{\otimes} 1, i \hat{\otimes} e, j \hat{\otimes} e, k \hat{\otimes} e)$$
   dove e è il generatore dell'algebra $C\ell_{-1}$ e $\{i, j, k\}$ sono i generatori di $\mathbb{H}$. Il generatore e è dispari mentre i generatori $\{i, j, k\}$ sono pari. Dalla (1.9) segue quindi che $i \hat{\otimes} e$, $j \hat{\otimes} e$ e $k \hat{\otimes} e$ sono dispari come richiesto. I generatori anticommutano e quadrano a 1 quindi si ha il seguente isomorfismo:
   $$C\ell_{+3} \cong \mathbb{H} \hat{\otimes} C\ell_{-1} \tag{1.27}$$
   - I generatori di $C\ell_{-3}$ anticommutano e quadrano a -1. Si definisce la seguente mappa:
   $$(1, e_1, e_2, e_3) \mapsto \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & j \\ j & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & k \\ k & 0 \end{pmatrix} \right)$$
   dove $\{i, j, k\}$ sono i generatori di $\mathbb{H}$. Tali matrici anticommutano e quadrano a -1. È inoltre semplice dimostrare che generano l'algebra definita sullo spazio vettoriale $\mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$ con la moltiplicazione (1.24), dove $z_i \in \mathbb{H}$.
   Come algebra graduata, analogamente a $C\ell_{+3}$ si ha:
   $$C\ell_{-3} \cong \mathbb{H} \hat{\otimes} C\ell_{+1} \tag{1.28}$$

4. Siano $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ i generatori dell'algebra graduata $C\ell_{-4}$, si definisce la seguente mappa:
   $$(1, e_1, e_2, e_3, e_4) \mapsto \left(1 \hat{\otimes} \mathbb{1}, i \hat{\otimes} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, j \hat{\otimes} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, k \hat{\otimes} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, 1 \hat{\otimes} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right)$$
   dove $\{i, j, k\}$ sono i generatori di $\mathbb{H}$. La mappa mantiene le relazioni tra i generatori: anticommutano e quadrano a -1. Si nota inoltre che i generatori sono dispari poiché 1, i, j e k sono pari mentre le matrici, dalla relazione (1.16), sono dispari. Si ha dunque il seguente isomorfismo tra algebre graduate:
   $$C\ell_{-4} \cong \mathbb{H} \hat{\otimes} \mathrm{End}(\mathbb{R}^{1|1}) \tag{1.29}$$
   Similmente definendo la seguente mappa:
   $$(1, e_1, e_2, e_3, e_4) \mapsto \left(1 \hat{\otimes} \mathbb{1}, i \hat{\otimes} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, j \hat{\otimes} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, k \hat{\otimes} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, 1 \hat{\otimes} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$$
   si dimostra che:
   $$C\ell_{+4} \cong \mathbb{H} \hat{\otimes} \mathrm{End}(\mathbb{R}^{1|1}) \cong C\ell_{-4} \tag{1.30}$$
   Dunque:
   $$C\ell_{+4} \cong C\ell_{-4} \sim \mathbb{H} \tag{1.31}$$
   Come algebre non graduate similmente si ha $C\ell_{\pm 4} \cong \mathrm{End}(\mathbb{H}^2)$

La seguente proposizione risulta utile alla dimostrazione del teorema della periodicità:

Proposizione 1.3. Si ha il seguente isomorfismo tra superalgebre:

$$C\ell_{+1} \hat{\otimes} C\ell_{-1} \cong \mathrm{End}(\mathbb{R}^{1|1}) \tag{1.32}$$

Dimostrazione. Siano e_+ ed e_- i generatori rispettivamente di $C\ell_{+1}$ e $C\ell_{-1}$. I generatori di $C\ell_{+1} \hat{\otimes} C\ell_{-1}$ sono dunque $\{e_+ \hat{\otimes} 1, 1 \hat{\otimes} e_-\}$. Si considera la seguente mappa:

$$(e_+ \hat{\otimes} 1, 1 \hat{\otimes} e_-) \mapsto \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

La mappa preserva le relazioni tra i generatori poiché:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 = \mathbb{1} \qquad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 = -\mathbb{1} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Analogamente a come effettuato per trovare un isomorfismo della superalgebra $\mathbb{C}\ell_2$ si ha la tesi. □

Teorema 1.1 (Teorema della periodicità di Bott)**.**
Si ha il seguente isomorfismo tra superalgebre:

$$C\ell_{n\pm 8} \cong C\ell_n \hat{\otimes} \mathrm{End}(\mathbb{R}^{8|8}) \qquad \forall n \in \mathbb{Z} \tag{1.33}$$

Dimostrazione. Per (1.22) è sufficiente dimostrare che $C\ell_{\pm 8} \cong \mathrm{End}(\mathbb{R}^{8|8})$.
Dalle relazioni (1.22), (1.29), (1.30), (1.28) e (1.27) segue:

$$C\ell_{\pm 5} \cong C\ell_{\pm 4} \hat{\otimes} C\ell_{\pm 1} \cong \mathrm{End}(\mathbb{R}^{1|1}) \hat{\otimes} \mathbb{H} \hat{\otimes} C\ell_{\pm 1} \cong \mathrm{End}(\mathbb{R}^{1|1}) \hat{\otimes} C\ell_{\mp 3}$$

Dalle relazioni (1.22), (1.32) e (1.19) segue:

$$\begin{aligned} C\ell_{\pm 6} \cong C\ell_{\pm 5} \hat{\otimes} C\ell_{\pm 1} &\cong \mathrm{End}(\mathbb{R}^{1|1}) \hat{\otimes} C\ell_{\mp 3} \hat{\otimes} C\ell_{\pm 1} \\ &\cong \mathrm{End}(\mathbb{R}^{1|1}) \hat{\otimes} C\ell_{\mp 2} \hat{\otimes} C\ell_{\mp 1} \hat{\otimes} C\ell_{\pm 1} \\ &\cong \mathrm{End}(\mathbb{R}^{1|1}) \hat{\otimes} \mathrm{End}(\mathbb{R}^{1|1}) \hat{\otimes} C\ell_{\mp 2} \\ &\cong \mathrm{End}(\mathbb{R}^{2|2}) \hat{\otimes} C\ell_{\mp 2} \end{aligned}$$

Analogamente si ottiene:

$$C\ell_{\pm 7} \cong \mathrm{End}(\mathbb{R}^{4|4}) \hat{\otimes} C\ell_{\mp 1}$$
$$C\ell_{\pm 8} \cong \mathrm{End}(\mathbb{R}^{8|8})$$

Da cui la tesi. □

Dal teorema segue immediatamente:

$$C\ell_n \sim C\ell_\alpha \qquad \alpha := n \bmod 8 \tag{1.34}$$

Si hanno dunque 8 classi di equivalenza di Morita per le algebre di Clifford reali: $[\mathbb{R}]$, $[C\ell_{\pm 1}]$, $[C\ell_{\pm 2}]$, $[C\ell_{\pm 3}]$ e $[\mathbb{H}]$.

In sintesi, denotando le algebre di matrici $\mathrm{End}(K^n)$ con $K(n)$, si ha la seguente tabella:

algebra di Clifford	algebra	superalgebra	classe di equivalenza
$\mathbb{C}\ell_0$	$\mathbb{C}$	$\mathbb{C}$	$[\mathbb{C}]$
$\mathbb{C}\ell_1$	$\mathbb{C}\oplus\mathbb{C}$	$\mathbb{C}\ell_1$	$[\mathbb{C}\ell_1]$
$\mathbb{C}\ell_2$	$\mathbb{C}(2)$	$\mathrm{End}(\mathbb{C}^{1\|1})$	$[\mathbb{C}]$
$C\ell_{-4}$	$\mathbb{H}(2)$	$\mathbb{H}\,\hat{\otimes}\,\mathrm{End}(\mathbb{R}^{1\|1})$	$[\mathbb{H}]$
$C\ell_{-3}$	$\mathbb{H}\oplus\mathbb{H}$	$\mathbb{H}\,\hat{\otimes}\,C\ell_{+1}$	$[C\ell_{-3}]$
$C\ell_{-2}$	$\mathbb{H}$	$C\ell_{-2}$	$[C\ell_{-2}]$
$C\ell_{-1}$	$\mathbb{C}$	$C\ell_{-1}$	$[C\ell_{-1}]$
$C\ell_0$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$[\mathbb{R}]$
$C\ell_{+1}$	$\mathbb{R}\oplus\mathbb{R}$	$C\ell_{+1}$	$[C\ell_{+1}]$
$C\ell_{+2}$	$\mathbb{R}(2)$	$C\ell_{+2}$	$[C\ell_{+2}]$
$C\ell_{+3}$	$\mathbb{C}(2)$	$\mathbb{H}\,\hat{\otimes}\,C\ell_{-1}$	$[C\ell_{+3}]$
$C\ell_{+4}$	$\mathbb{H}(2)$	$\mathbb{H}\,\hat{\otimes}\,\mathrm{End}(\mathbb{R}^{1\|1})$	$[\mathbb{H}]$

Tabella 1

2 Gruppi di simmetrie

In questa sezione si introduce la $\mathbb{Z}_2$-graduazione, illustrata nella precedente sezione, nella descrizione delle simmetrie di sistemi quantistici. Inoltre viene presentato il problema di Dyson, proposto per la prima volta in [Dys62]. Per ulteriori dettagli si veda [Moo15].

2.1 Rappresentazioni di algebre

Per poter proseguire nella trattazione delle simmetrie è necessario introdurre le definizioni di strutture reali, complesse e quaternioniche.

2.1.1 Strutture reali su spazi vettoriali complessi

Una struttura reale su uno spazio vettoriale complesso V è una mappa antilineare $C : V \to V$ tale che $C^2 = +1$.
Per ogni $v \in V$ esistono due unici vettori $x, y \in V$ tali che $v = x + iy$ e $C(v) = x - iy$. Si definiscono i sottoinsiemi V_{Re} e V_{Im} tali per cui $x \in V_{Re}$ e $iy \in V_{Im}$. Si noti che tali insiemi sono entrambi spazi vettoriali reali. Si ha quindi un isomorfismo tra spazi vettoriali reali $V \cong V_{\mathbb{R}} := V_{Re} \oplus V_{Im}$, dato da:

$$v \mapsto \frac{v + C(v)}{2} \oplus \frac{v - C(v)}{2} \tag{2.1}$$

2.1.2 Strutture complesse su spazi vettoriali reali

Una struttura complessa su uno spazio vettoriale reale V è una mappa lineare $I : V \to V$ tale che $I^2 = -1$. Con tale struttura si può definire la moltiplicazione per un numero complesso come segue, sia $v \in V$:

$$(x + iy)v = xv + yI(v) \tag{2.2}$$

Dato uno spazio reale V è possibile definire una struttura complessa su $V \oplus V$ data da $I(v_1, v_2) = (-v_2, v_1)$ per ogni $v = (v_1, v_2) \in V \oplus V$. La moltiplicazione per un numero complesso risulta dunque:

$$(x+iy)\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xv_1 - yv_2 \\ xv_2 + yv_1 \end{pmatrix} \tag{2.3}$$

Un modo analogo di approcciare il problema è definire uno spazio vettoriale complesso $V_{\mathbb{C}}$ come segue:

$$V_{\mathbb{C}} = V \otimes \mathbb{C} \tag{2.4}$$

dove con V si denota uno spazio vettoriale reale. Sia $v \otimes z \in V \otimes \mathbb{C}$, la moltiplicazione per un numero complesso w è definita come $w(v \otimes z) = v \otimes zw$. Questa procedura è analoga ad aggiungere una struttura complessa su $V \oplus V$ poiché applicare I a $(v_1, v_2) \in V \oplus V$ è equivalente a moltiplicare $v_1 \otimes 1 + v_2 \otimes i \in V \otimes \mathbb{C}$ per i.

2.1.3 Strutture quaternioniche

Come visto nel paragrafo 1.2.2 l'algebra dei quaternioni è l'algebra sui numeri reali generata da $\{i, j, k\}$, tali che $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$.
Una struttura quaternionica su uno spazio vettoriale complesso V è data da una mappa antilineare $K : V \to V$ tale che $K^2 = -1$.
Poiché V è complesso è presente una mappa lineare $I : V \to V$ data da $I(v) = iv$ (quindi $I^2 = -1$). Si definisce $J = KI$, si dimostra che questi operatori rispettano le relazioni dei quaternioni:

$$\begin{gathered} J^2 = KIKI = KI(-I)K = K^2 = -1 \\ IJK = IKIK = I(-I)KK = -1 \end{gathered} \tag{2.5}$$

È possibile, in analogia al caso complesso, definire l'aggiunto di una matrice su $\mathbb{H}$, il coniugato di un quaternione $q = a + bi + cj + dk$ è $\bar{q} = a - bi - cj - dk$.

2.2 Simmetrie in meccanica quantistica

Per il teorema di Wigner, in meccanica quantistica, ogni simmetria è indotta da un operatore unitario o antiunitario. Si definisce $\mathrm{Aut}_{\mathbb{R}}(\mathcal{H})$ il gruppo di tali operatori sullo spazio di Hilbert $\mathcal{H}$. Esso può essere visto come un gruppo $\mathbb{Z}_2$-graduato: si definisce un omomorfismo $\phi : \mathrm{Aut}_{\mathbb{R}}(\mathcal{H}) \to \{\pm 1\}$ con immagine $+1$ se applicata a una simmetria rappresentata da un operatore unitario e con immagine -1 se applicata a una simmetria rappresentata da un operatore antiunitario.
Sia $[\psi]$ il raggio vettore associato allo stato $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ e sia $T \in \mathrm{Aut}_{\mathbb{R}}(\mathcal{H})$ un operatore antiunitario (T^2 è quindi un operatore unitario) tale che $\bar{T}^2[\psi] = [\psi]$ per ogni $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ dove $\bar{T}$ è la proiezione di T che agisce sui raggi vettori. Si ha:

$$\begin{gathered} T^2|\psi\rangle = e^{i\varphi}|\psi\rangle \\ T^2T|\psi\rangle = TT^2|\psi\rangle = Te^{i\varphi}|\psi\rangle = e^{-i\varphi}T|\psi\rangle \end{gathered} \tag{2.6}$$

Poiché la fase $e^{i\varphi}$ è indipendente da $|\psi\rangle$, si ottiene $T^2 = e^{i\varphi} = e^{-i\varphi}$, dunque $T^2 = \pm 1$. Per gli operatori lineari A tali che $\bar{A}^2[\psi] = [\psi]$ si può invece sempre definire $A^2 = 1$, al costo di moltiplicare A per una fase.

Denotato G il gruppo delle simmetrie della dinamica del sistema, è possibile effettuare un'ulteriore graduazione di G definendo una mappa $\tau : G \to \{\pm 1\}$ con immagine $+1$ se applicata a una simmetria che non inverte il verso del tempo e con immagine -1 se applicata a una simmetria che lo inverte. Sia $U(t)$ l'operatore di evoluzione causale, sia $g \in G$ e sia $\rho(g)$ una rappresentazione (unitaria o antiunitaria) di G. Si ha:

$$\rho(g)U(t)\rho(g)^{-1} = U(\tau(g)t) \tag{2.7}$$

Per rispettare tale relazione, deve valere:

$$\rho(g)H\rho(g)^{-1} = \chi(g)H \tag{2.8}$$

dove $\chi(g) := \phi(g)\tau(g)$. Si noti che vale sempre $\phi(g)\tau(g)\chi(g) = 1$. Una simmetria di un sistema quantistico ha dunque una $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$-graduazione. Per semplicità, tipicamente si fissa $\chi(g) = 1$ riducendosi quindi a una $\mathbb{Z}_2$-graduazione.

Definizione 2.1. Sia (G, ϕ) un gruppo $\mathbb{Z}_2$-graduato. Una rappresentazione di (G, ϕ) su uno spazio vettoriale complesso V è una mappa $\rho : G \to \mathrm{Aut}_{\mathbb{R}}(V_{\mathbb{R}})$ tale che $\rho(g)$ sia $\mathbb{C}$-lineare (o $\mathbb{C}$-antilineare) se $\phi(g) = +1$ (o $\phi(g) = -1$). Si denota $V_{\mathbb{R}}$ lo spazio vettoriale V visto come spazio vettoriale reale. La rappresentazione si denota (V, ρ).

Definizione 2.2. Si definisce un morfismo tra le rappresentazioni (V_1, ρ_1) e (V_2, ρ_2) del gruppo (G, ϕ) come la mappa $\mathbb{C}$-lineare $F : V_1 \to V_2$ tale che $F\rho_1(g) = \rho_2(g)F \ \forall g \in G$. Si denota lo spazio di tutti i morfismi tra le rappresentazioni con $\mathrm{Hom}^G_{\mathbb{C}}(V_1, V_2)$.

Si noti che $\mathrm{Hom}^G_{\mathbb{C}}(V_1, V_2)$ è uno spazio vettoriale reale poiché se $F \in \mathrm{Hom}^G_{\mathbb{C}}(V_1, V_2)$ e $\phi(g) = -1$ allora $iF \notin \mathrm{Hom}^G_{\mathbb{C}}(V_1, V_2)$. Questa è la motivazione per cui nella definizione 2.1 la mappa ρ ha immagine in $\mathrm{Aut}_{\mathbb{R}}(V_{\mathbb{R}})$ anziché in $\mathrm{Aut}_{\mathbb{R}}(V)$.

Definizione 2.3. Una rappresentazione è detta irriducibile quando non esistono sottorappresentazioni, quindi quando non esiste un sottospazio $W \subset V$ con $W \neq \{0\}$ tale che $\rho(g)w \in W \ \forall g \in G$ e $\forall w \in W$.

Nel caso generale in cui $\chi = \pm 1$ si considerano sistemi in cui l'Hamiltoniana presenta un gap, cioè un intervallo aperto di numeri reali non contenuto nello spettro dell'Hamiltoniana. Tale gap può essere traslato poiché il potenziale è definito a meno di una costante, per semplicità si pone centrato attorno a 0. Formalmente lo spettro dell'Hamiltoniana non contiene il valore 0 e $1/H$ è un operatore limitato. Si nota che il segno dell'Hamiltoniana permette quindi di effettuare una graduazione dello spazio di Hilbert $\mathcal{H}$:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}^0 \oplus \mathcal{H}^1 \tag{2.9}$$

dove si denotano $\mathcal{H}^0$ e $\mathcal{H}^1$ i sottospazi in cui rispettivamente $H > 0$ e $H < 0$. La rappresentazione delle simmetrie su tale spazio eredita la graduazione, dalle relazioni (1.14) e (1.15) segue che una simmetria pari deve mantenere il segno dell'Hamiltoniana mentre una dispari deve invertirlo. Dalla (2.8) segue quindi che una simmetria è pari se $\chi = +1$ e dispari se $\chi = -1$. Le definizioni 2.1 e 2.2 per gruppi $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$-graduati diventano quindi:

Definizione 2.4. Sia (G, ϕ, χ) un gruppo $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$-graduato. Una rappresentazione di (G, ϕ, χ) su un superspazio vettoriale complesso $V = V^0 \oplus V^1$ è una mappa $\rho : G \to \mathrm{Aut}_{\mathbb{R}}(V_{\mathbb{R}})$ tale che $\rho(g)$ sia $\mathbb{C}$-lineare (o $\mathbb{C}$-antilineare) se $\phi(g) = +1$ (o $\phi(g) = -1$). Inoltre si ha $\rho(g) \in \mathrm{Aut}_{\mathbb{R}}(V_{\mathbb{R}})^0$ se $\chi(g) = +1$ e $\rho(g) \in \mathrm{Aut}_{\mathbb{R}}(V_{\mathbb{R}})^1$ se $\chi(g) = -1$.

Definizione 2.5. Si definisce un morfismo graduato tra le rappresentazioni (V_1, ρ_1) e (V_2, ρ_2) del gruppo (G, ϕ, χ) come la mappa $\mathbb{C}$-lineare $F : V_1 \to V_2$ tale che, quando F è pari, si ha $F\rho_1(g) = \rho_2(g)F \ \forall g \in G$ mentre, quando F è dispari, si ha $F\rho_1(g) = \chi(g)\rho_2(g)F \ \forall g \in G$. La $\mathbb{Z}_2$-graduazione è assegnata in accordo con le relazioni (1.14) e (1.15).

2.3 Problema di Dyson

A volte non si conosce l'operatore Hamiltoniano di un sistema quantistico ma se ne conoscono le simmetrie della dinamica. Dyson propose di trovare l'ensemble di possibili Hamiltoniane note le simmetrie della dinamica del sistema [Dys62], tale quesito è noto come "problema di Dyson".
Per semplicità si considera $\chi = 1$. È utile alla risoluzione enunciare i seguenti teoremi:

Teorema 2.1 (Lemma di Schur)**.**
Un morfismo $F \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}^G(V_1, V_2)$ tra due rappresentazioni irriducibili (V_1, ρ_1) e (V_2, ρ_2) è zero o un isomorfismo. Inoltre, sia (V, ρ) una rappresentazione irriducibile del gruppo $\mathbb{Z}_2$-graduato (G, ϕ), si ha che $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}^G(V) \coloneqq \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}^G(V, V)$ è isomorfo a un'algebra di divisione reale e associativa.

Dimostrazione. Sia $x \in \mathrm{Ker}(F)$. Per linearità di F si ha:

$$F(\rho_1(g)(x)) = (\rho_2(g))(F(x)) = (\rho_2(g))(0) = 0 \qquad \forall g \in G$$

quindi $\rho(g)(x) \in Ker(F) \ \forall g \in G$, dunque $\mathrm{Ker}(F)$ è una sottorappresentazione di V_1. Poiché per ipotesi V_1 è irriducibile $\mathrm{Ker}(F) = V_1$ (quindi $F = 0$) oppure $\mathrm{Ker}(F) = 0$ (quindi F è iniettiva). Similmente sia $y \in V_1$, si ha $F(\rho_1(g)(y)) = (\rho_2(g))(F(y))$ con $F(y) \in \mathrm{Im}(F)$. Poiché anche $(\rho_2(g))(F(y)) \in \mathrm{Im}(F)$ si deduce che $\mathrm{Im}(F)$ è una sottorappresentazione di V_2, dunque si ha $\mathrm{Im}(F) = 0$ (quindi $F = 0$) oppure $\mathrm{Im}(F) = V_2$ (quindi F suriettiva).
F può dunque essere 0 oppure un isomorfismo. Se $V_1 = V_2 = V$, poiché ogni $F \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}^G(V)$ tale che $F \neq 0$ è invertibile, allora $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}^G(V)$ è un'algebra di divisione. □

Teorema 2.2 (Teorema di Frobenius)**.**
Ogni algebra di divisione associativa, reale e finito dimensionale è isomorfa a $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ o $\mathbb{H}$.

Tornando al problema di Dyson, sia G il gruppo di simmetrie della dinamica di un sistema quantistico e sia $(\mathcal{H}, \rho)$ una sua rappresentazione. Poiché l'operatore Hamiltoniano commuta con le simmetrie della dinamica si ha $H \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}^G(\mathcal{H})$.
Si suppone che $(\mathcal{H}, \rho)$ sia completamente riducibile, cioè:

$$\mathcal{H} \cong \bigoplus_i \mathcal{H}_i^{\oplus m_i} = \underbrace{\mathcal{H}_1 \oplus \ldots \oplus \mathcal{H}_1}_{m_1} \oplus \ldots \oplus \underbrace{\mathcal{H}_i \oplus \ldots \oplus \mathcal{H}_i}_{m_i} \oplus \ldots \tag{2.10}$$

dove $(\mathcal{H}_i, \rho_i)$ è una rappresentazione irriducibile e m_i è la sua degenerazione. Si può dimostrare che ciò è sempre possibile quando si hanno rappresentazioni unitarie finito dimensionali o, quando G è compatto, per generiche rappresentazioni unitarie o antiunitarie. Tale risultato è noto come teorema di Peter-Weyl.
Dalla (2.10) segue che, se $\rho(g)$ è lineare, allora è possibile definirlo con la seguente matrice a blocchi:

$$\rho(g) = \begin{pmatrix} \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \rho_i(g)^{\oplus m_i} & 0 \\ 0 & 0 & \ddots \end{pmatrix} \qquad \rho_i^{\oplus m_i} = \underbrace{\begin{pmatrix} \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \rho_i(g) & 0 \\ 0 & 0 & \ddots \end{pmatrix}}_{m_i} \tag{2.11}$$

Lo spazio degli endomorfismi tra le rappresentazioni $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}^{G}(\mathcal{H})$ è dato dalle matrici che commutano con $\rho(g)$, quindi dalla somma diretta delle matrici che commutano con $\rho_i^{\oplus m_i}$. Dal lemma di Schur si evince che $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}^{G}(\mathcal{H}_i)$ è isomorfo a un'algebra di divisione reale e associativa $\mathcal{D}_i$, dunque, per il teorema di Frobenius, a $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ o $\mathbb{H}$. Si ha quindi:

$$\mathrm{End}_{\mathbb{C}}^{G}(\mathcal{H}) \cong \bigoplus_i \mathcal{D}_i(m_i) \qquad \mathcal{D}_i = \begin{cases} \mathbb{R} \\ \mathbb{C} \\ \mathbb{H} \end{cases} \tag{2.12}$$

dove con $\mathcal{D}_i(m_i)$ si denotano le matrici quadrate $m_i \times m_i$ a valori in $\mathcal{D}_i$. Un'algebra che può essere scritta come somma di matrici definite su algebre di divisione è detta algebra semisemplice (per il teorema di Artin-Wedderburn).
Poiché $H \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}^{G}(\mathcal{H})$ e poiché deve essere autoaggiunto l'ensemble di Hamiltoniane risulta:

$$Z_H = \bigoplus_i \mathrm{Herm}(\mathcal{D}_i, m_i) \tag{2.13}$$

dove con $\mathrm{Herm}(\mathcal{D}_i, m_i)$ si denotano le matrici hermitiane $m_i \times m_i$ a valori in $\mathcal{D}_i$.

2.4 Problema di Dyson generalizzato

Si può generalizzare il problema di Dyson nel caso in cui $\chi = \pm 1$. Questo corrisponde a classificare famiglie di sistemi fisici in cui l'Hamiltoniana presenta un gap. In particolare non è possibile passare con continuità da una famiglia all'altra senza chiudere il gap o rompere le simmetrie del sistema. La risoluzione di tale problema è analoga al caso in cui $\chi = 1$ trattato precedentemente, sostituendo alle algebre le loro versioni $\mathbb{Z}_2$-graduate. Si ottiene, come nel caso precedente:

$$\mathrm{End}_{\mathbb{C}}^{G}(\mathcal{H}) \cong \bigoplus_i \mathcal{D}_i^s(m_i) \tag{2.14}$$

dove $\mathcal{D}_i^s(m_i)$ sono matrici $m_i \times m_i$ definite sulle superalgebre di divisione $\mathcal{D}_i^s$.
Esistono dieci superalgebre di divisione associative, reali e finito dimensionali, le tre completamente pari viste nel caso in cui $\chi = 1$ ($\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ e $\mathbb{H}$) e altre sette: $\mathbb{C}\ell_1$, $Cl_{\pm 1}$, $Cl_{\pm 2}$ e $Cl_{\pm 3}$.

2.4.1 Classificazione dei gruppi CT

In questo paragrafo si mostra come le dieci superalgebre del problema di Dyson generalizzato siano strettamente legate alla presenza di particolari simmetrie della dinamica.
Si considerano gruppi di simmetria $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$-graduati generati da due operatori antiunitari T e C tali che $\bar{T}^2 = \bar{C}^2 = (\bar{C}\bar{T})^2 = 1$ e tali che, rispettivamente, preservino e cambino il segno dell'Hamiltoniana. Generalmente si sceglie la simmetria di inversione temporale T e di particella-lacuna C. Per tali simmetrie si ha:

$$\begin{aligned} \phi(T) &= -1 \qquad & \phi(C) &= -1 \\ \tau(T) &= -1 \qquad & \tau(C) &= +1 \\ \chi(T) &= +1 \qquad & \chi(C) &= -1 \end{aligned} \tag{2.15}$$

In particolare, dalla definizione 2.4, si ha che T è un generatore pari di un'algebra graduata mentre C è un generatore dispari.

Un sistema fisico può avere o non avere T e C come simmetrie della dinamica. Un'altra possibilità è data dai sistemi che hanno simmetria CT pur non avendo né T né C come simmetrie della dinamica. Inoltre è noto che T e C possono quadrare a $+1$ o a -1 poiché antilineari e tali che $\bar{T}^2 = \bar{C}^2 = 1$ (essendo CT lineare è sempre possibile scegliere $(CT)^2 = 1$). Ci sono dieci possibili gruppi di simmetria, noti come gruppi CT.
Il seguente teorema risolve il problema di Dyson generalizzato per tali gruppi di simmetrie della dinamica.

Teorema 2.3. Sia G un gruppo di simmetria CT e sia (ρ, V) una sua rappresentazione irriducibile. Si ha che $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}^G(V)$ è isomorfo a una specifica superalgebra di Clifford, come mostrato nella seguente tabella:

gruppo di simmetria	T^2	C^2	$\mathrm{End}_{\mathbb{C}}^G(V)$
$\{1\}$			$\mathbb{C}$
$\{1, T\}$	$+1$		$\mathbb{R}$
$\{1, T\}$	-1		$\mathbb{H}$
$\{1, C\}$		$+1$	$C\ell_{-2}$
$\{1, C\}$		-1	$C\ell_{+2}$
$\{1, CT\}$			$\mathbb{C}\ell_1$
$\{1, C, T, CT\}$	$+1$	$+1$	$C\ell_{-1}$
$\{1, C, T, CT\}$	$+1$	-1	$C\ell_{+1}$
$\{1, C, T, CT\}$	-1	$+1$	$C\ell_{-3}$
$\{1, C, T, CT\}$	-1	-1	$C\ell_{+3}$

Tabella 2

Dimostrazione.

- $\{1\}$: In questo caso le rappresentazioni irriducibili di G sono definite sullo spazio $\mathbb{C}$. Si ha quindi $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}^G(\mathbb{C}) \cong \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}$.

- $\{1, T\}$: Poiché non sono presenti generatori dispari si può considerare il caso non graduato. Per $T^2 = +1$ si rappresenta il gruppo di simmetria su $\mathbb{C}$ e si definisce T tale che $Tz = \bar{z}$ con $z \in \mathbb{C}$. Sia $w \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}^G(\mathbb{C})$, dato che deve valere $wTz = Twz$ allora si ha $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}^G(\mathbb{C}) \cong \mathbb{R}$. Per $T^2 = -1$ si rappresenta il gruppo di simmetria su $\mathbb{C}^2$ e si sceglie T dato dalla seguente trasformazione non graduata, antilineare e tale che $T^2 = -1$:

$$T \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\bar{z}_2 \\ \bar{z}_1 \end{pmatrix} \tag{2.16}$$

dove $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}^G(\mathbb{H})$ è dato dalle matrici che commutano con T, siano $a, b, c, d \in \mathbb{C}$:

$$\begin{cases} T \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\bar{c}\bar{z}_1 - \bar{d}\bar{z}_2 \\ \bar{a}\bar{z}_1 + \bar{b}\bar{z}_2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} T \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b\bar{z}_1 - a\bar{z}_2 \\ d\bar{z}_1 - c\bar{z}_2 \end{pmatrix} \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}^G(V) \tag{2.17}$$

Da cui $d = \bar{a}$ e $c = -\bar{b}$. Siano $a = a_1 + a_2 i$ e $b = b_1 + b_2 i$ con $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$, gli elementi di $\mathrm{End}^G_{\mathbb{C}}(V)$ sono nella forma:

$$\begin{pmatrix} a_1 + a_2 i & b_1 + b_2 i \\ -b_1 + b_2 i & a_1 - a_2 i \end{pmatrix} = a_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} + b_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + b_2 \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \tag{2.18}$$

Dunque $\mathrm{End}^G_{\mathbb{C}}(V) \cong \mathbb{H}$

- $\{1, C\}$: Si rappresentano i gruppi di simmetria associato a $C\ell_{\pm 2}$ su $V = \mathbb{C}^{1|1}$. Siano $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, la mappa C è data da:

$$C \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pm \bar{z}_2 \\ \bar{z}_1 \end{pmatrix} \tag{2.19}$$

Dalla definizione 2.5 segue che C commuta con gli elementi pari di $\mathrm{End}^G_{\mathbb{C}}(V)$ mentre anticommuta con quelli dispari. Siano $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, si ha:

$$\begin{cases} C \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pm \bar{c}\bar{z}_1 \pm \bar{d}\bar{z}_2 \\ \bar{a}\bar{z}_1 + \bar{b}\bar{z}_2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a & -b \\ -c & d \end{pmatrix} C \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b\bar{z}_1 \pm a\bar{z}_2 \\ d\bar{z}_1 \mp c\bar{z}_2 \end{pmatrix} \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ \mp\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \in \mathrm{Hom}^G_{\mathbb{C}}(V) \tag{2.20}$$

I generatori dell'algebra $\mathrm{End}^G_{\mathbb{C}}(V)$ sono dunque:

$$e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \mp 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ \pm i & 0 \end{pmatrix} \tag{2.21}$$

Da cui $\mathrm{End}^G_{\mathbb{C}}(V) \cong C\ell_{\mp 2}$

- $\{1, CT\}$: Si rappresenta il gruppo di simmetria associato a $\mathbb{C}\ell_1$ su $V = \mathbb{C}^{1|1}$. Siano $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, la mappa CT è data da:

$$CT = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.22}$$

Siano $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, si ha:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & c \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.23}$$

Da cui $d = a$ e $c = -b$, quindi $\mathrm{End}^G_{\mathbb{C}}(V) \cong \mathbb{C}\ell_1$

- $\{1, C, T, CT\}$: Se $T^2 = +1$ e $C^2 = \pm 1$ si ottiene, con un ragionamento analogo a quello del punto effettuato precedentemente, che gli elementi che commutano con C sono dati dalla relazione (2.20). Definendo T tale che $T(z) = \bar{z}$ con $z \in \mathbb{C}^2$ si ha $\mathrm{End}^G_{\mathbb{C}}(V) \cong C\ell_{\mp 1}$. Quando $T^2 = -1$ e $C^2 = \pm 1$ si rappresenta il gruppo di simmetria associato a $C\ell_{\pm 3}$ su $\mathbb{C}^{2|2}$. Si definiscono gli operatori C e T come segue:

$$C \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pm \bar{z}_3 \\ \pm \bar{z}_4 \\ \bar{z}_1 \\ \bar{z}_2 \end{pmatrix} \qquad T \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\bar{z}_2 \\ \bar{z}_1 \\ -\bar{z}_4 \\ \bar{z}_3 \end{pmatrix} \tag{2.24}$$

Si rappresentano gli elementi in $\mathrm{End}^G_{\mathbb{C}}(V)$ come matrici 2×2 in cui ogni entrata è una matrice 2×2 complessa. Gli elementi che commutano con C sono dati dalla relazione (2.20) con $a, b \in \mathbb{C}(2)$. Dato che gli elementi di $\mathrm{End}^G_{\mathbb{C}}(V)$ commutano con T si ha che le matrici a e b rispettano entrambe la relazione (2.17). Gli elementi di $\mathrm{End}^G_{\mathbb{C}}(V) \cong C\ell_{\mp 3}$ sono nella seguente forma, dove $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}$:

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} & -\bar{\delta} & \bar{\gamma} \\ \mp\bar{\gamma} & \mp\bar{\delta} & \bar{\alpha} & \bar{\beta} \\ \pm\delta & \mp\gamma & -\beta & \alpha \end{pmatrix} \in \mathrm{End}^G_{\mathbb{C}}(V) \cong C\ell_{\mp 3} \tag{2.25}$$

□

Si consideri ora un generico gruppo di simmetrie della dinamica G. Sia $G_0 \subseteq G$ il sottogruppo normale i cui elementi g_0 soddisfano $\phi(g_0) = \tau(g_0) = 1$. Il gruppo quoziente $U \coloneqq G/G_0$ è un gruppo CT, la superalgebra di divisione associata al gruppo G è la stessa associata al gruppo U. Per maggiori dettagli si veda [Moo15].
Se $\mathcal{H}$ è completamente riducibile, ossia è possibile scriverlo come somma diretta di rappresentazioni irriducibili si ottiene, per i gruppi CT, la relazione (2.14).

3 Sistemi fermionici

In questa sezione ci si focalizza sui sistemi fermionici. In particolare si illustra la seconda quantizzazione e successivamente si classificano i sistemi fermionici in dieci classi, similmente a come effettuato nel problema di Dyson generalizzato. Per maggiori dettagli sulla seconda quantizzazione si veda per esempio [FW03] e [CDL19]. Per approfondimenti sulla classificazione dei sistemi fermionici è possibile consultare [HHZ05], [SCR10], [Zir10] e [AZ97].

3.1 Seconda quantizzazione

Un sistema a N particelle è descritto dalla seguente funzione d'onda:

$$\Psi(\mathbf{r}) = CP^{A;S} \prod_{i=1}^{N} \psi_i(\mathbf{r}_i) \tag{3.1}$$

dove $\psi_i(\mathbf{r}_i)$ è la i-esima funzione d'onda di singola particella, C è una costante di normalizzazione e $P^{A;S}$ è l'operatore di antisimmetrizzazione (per sistemi fermionici) o di simmetrizzazione (per sistemi bosonici).
Lo spazio di Hilbert $\mathcal{H}^A_N$ ($\mathcal{H}^S_N$) che descrive un sistema di N fermioni (bosoni) identici è il sottospazio antisimmetrico (simmetrico) di $\mathcal{H}_N \coloneqq \mathcal{H}_1^{\otimes N}$, dove si denota con $\mathcal{H}_1$ lo spazio di Hilbert di particella singola. Sia $\{|u_1\rangle, |u_2\rangle, \ldots, |u_i\rangle, \ldots\}$ una base ortonormale di $\mathcal{H}_1$. Un generico vettore di base di $\mathcal{H}_N$ è dato da $|1 : u_i\rangle \otimes |2 : u_j\rangle \otimes \ldots \otimes |N : u_k\rangle \coloneqq \underbrace{|u_i\rangle \otimes |u_j\rangle \otimes \ldots \otimes |u_k\rangle}_{N}$.

Si definisce n_i il numero di particelle nello stato $|u_i\rangle$. È possibile quindi esprimere la funzione d'onda di uno stato di N particelle identiche come segue:

$$|\underbrace{u_i, \ldots, u_i}_{n_i}, \underbrace{u_j, \ldots, u_j}_{n_j}, \ldots\rangle = \sqrt{\frac{N!}{n_i! n_j! \ldots}} P^{A;S} \underbrace{|u_i\rangle \otimes \ldots \otimes |u_i\rangle}_{n_i} \otimes \underbrace{|u_j\rangle \otimes \ldots \otimes |u_j\rangle}_{n_j} \otimes \ldots \tag{3.2}$$

dove si ha:

$$n_i + n_j + \ldots = N \tag{3.3}$$

Ci si concentrerà, da qui in avanti, solamente sui sistemi fermionici. Per tali sistemi è noto che, per il principio di esclusione di Pauli, in uno stato non è possibile avere due o più fermioni identici, si ha quindi $n_i = 0$ oppure $n_i = 1$, dunque, se $|u_i\rangle \neq |u_j\rangle \neq \ldots \neq |u_k\rangle$:

$$|u_i, u_j, \ldots, u_k\rangle = \sqrt{N!}A|1 : u_i\rangle \otimes |2 : u_j\rangle \otimes \ldots \otimes |N : u_k\rangle \tag{3.4}$$

dove A è l'operatore di antisimmetrizzazione.
Se presenti termini ripetuti si ha:

$$|u_i, u_j, \ldots, u_l, \ldots, u_l, \ldots, u_k\rangle = 0 \tag{3.5}$$

Esplicitando l'operatore di antisimmetrizzazione si ottiene:

$$|u_i, u_j, \ldots, u_k\rangle = \frac{1}{\sqrt{N!}} \sum_{\pi} \epsilon_\pi |\pi(1) : u_i\rangle \otimes |\pi(2) : u_j\rangle \otimes \ldots \otimes |\pi(N) : u_k\rangle \tag{3.6}$$

dove si denota con π una generica permutazione di $\{1, 2, \ldots, N\}$ e con ϵ_π il suo segno. Lo stato è dunque una sovrapposizione di $N!$ ket ortogonali tra loro. Da tale relazione segue che:

$$|\ldots, u_i, u_j, \ldots\rangle = -|\ldots, u_j, u_i, \ldots\rangle \tag{3.7}$$

3.1.1 Operatori di creazione e distruzione

È spesso utile adottare un formalismo di seconda quantizzazione dove il numero di particelle non è fissato. Sia $\mathcal{H}_n^A$ lo spazio di Hilbert di n fermioni identici, si definisce lo spazio di Fock $\mathcal{H}_F$ come segue:

$$\mathcal{H}_F = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{H}_n^A \tag{3.8}$$

Uno stato nello spazio di Fock è dato da $|u_i, u_j, \ldots\rangle$, dove non si hanno vincoli sul numero totale di stati di particella singola $|u_i\rangle$, non vale quindi la relazione (3.3). $\mathcal{H}_0$ è definito come lo spazio contenente un solo stato $|0\rangle$, in cui $n_i = 0$ per ogni i.
Si definiscono operatori $a_i^\dagger$, detti operatori di creazione, come segue:

$$\begin{aligned} &a_i^\dagger|u_j, \ldots\rangle = |u_i, u_j, \ldots\rangle && \text{se } u_i \text{ non era occupato} \\ &a_i^\dagger|u_j, \ldots, u_i, \ldots\rangle = 0 && \text{se } u_i \text{ era occupato} \end{aligned} \tag{3.9}$$

Il suo aggiunto a_i è detto operatore di distruzione poiché $\langle u_i, u_j, \ldots|a_i^\dagger|u_j, \ldots\rangle = 1$, da cui:

$$\begin{aligned} &a_i|u_i, u_j, \ldots\rangle = |u_j, \ldots\rangle && \text{se } u_i \text{ era occupato} \\ &a_i|u_j, \ldots\rangle = 0 && \text{se } u_i \text{ non era occupato} \end{aligned} \tag{3.10}$$

Si calcolano le relazioni di anticommutazione tra a_i e a_j:

$$\begin{gathered} a_i^\dagger a_j^\dagger|u_k, \ldots\rangle = |u_i, u_j, u_k, \ldots\rangle \\ a_j^\dagger a_i^\dagger|u_k, \ldots\rangle = |u_j, u_i, u_k, \ldots\rangle = -|u_i, u_j, u_k, \ldots\rangle \end{gathered} \tag{3.11}$$

Da cui $a_i^\dagger a_j^\dagger = -a_j^\dagger a_i^\dagger$. Prendendone l'aggiunto si ha $a_j a_i = -a_i a_j$. Analogamente:

$$\begin{gathered} a_i^\dagger a_j |u_j, u_k, \ldots\rangle = |u_i, u_k, \ldots\rangle \\ a_j a_i^\dagger |u_j, u_k \ldots\rangle = a_j^\dagger |u_i, u_j, u_k, \ldots\rangle = -a_j^\dagger |u_j, u_i, u_k, \ldots\rangle = -|u_i, u_k, \ldots\rangle \end{gathered} \tag{3.12}$$

Si hanno dunque le seguenti relazioni di anticommutazione tra a e $a^\dagger$:

$$\{a_i, a_j\} = 0 \qquad \{a_i^\dagger, a_j^\dagger\} = 0 \qquad \{a_i, a_j^\dagger\} = \delta_{ij} \tag{3.13}$$

3.1.2 Operatori di particella singola

Sia $f_q : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_1$ un operatore lineare che agisce su una singola particella q del sistema (ad esempio l'operatore momento o momento angolare di singola particella). L'analogo operatore che agisce su ognuna delle particelle nello spazio $\mathcal{H}_N$ (quindi l'operatore momento o momento angolare del sistema) risulta:

$$F_N = \sum_{q=1}^{N} f_q \tag{3.14}$$

Si dimostra che è possibile esprimere tale operatore sullo spazio di Fock $\mathcal{H}_F$ in termini di a e $a^\dagger$. Sia $\{|u_1\rangle, |u_2\rangle, \ldots, |u_i\rangle, \ldots\}$ una base di $\mathcal{H}_1$, l'operatore F_N in tale base risulta:

$$F_N = \sum_{q=1}^{N} f_q = \sum_{q=1}^{N} \sum_{i,j} |q : u_i\rangle\langle q : u_i| f_q |q : u_j\rangle\langle q : u_j| = \sum_{i,j} f_{ij} \sum_{q=1}^{N} |q : u_i\rangle\langle q : u_j| \tag{3.15}$$

dove f_{ij} sono gli elementi di matrice di f nella base scelta, è indipendente da q poiché si ha un sistema di particelle identiche.
Si applica $\sum_{q=1}^{N} |q : u_i\rangle\langle q : u_j|$ a uno stato $|u_l, \ldots, u_k, \ldots\rangle$. Usando la relazione (3.4) e noto che $\sum_{q=1}^{N} |q : u_i\rangle\langle q : u_j|$ commuta con A poiché simmetrico per scambio di particelle si ha:

$$\begin{gathered} \left(\sum_{q=1}^{N} |q : u_i\rangle\langle q : u_j| \right) |u_l, \ldots, u_k, \ldots\rangle = \\ = \sqrt{N!} A \left(\sum_{q=1}^{N} |q : u_i\rangle\langle q : u_j| \right) (|1 : u_l\rangle \otimes \ldots \otimes |q : u_k\rangle \otimes \ldots) \end{gathered} \tag{3.16}$$

L'unico termine non nullo della sommatoria è quello per cui $|q : u_k\rangle = |q : u_j\rangle$. La posizione di tale termine è ininfluente dato che si somma su tutte le particelle q, è necessario solamente che $|u_j\rangle$ sia occupato e, se $|u_i\rangle \neq |u_j\rangle$, che $|u_i\rangle$ sia libero. In queste condizioni si ha:

$$\begin{gathered} \sqrt{N!} A \left(\sum_{q=1}^{N} |q : u_i\rangle\langle q : u_j| \right) (|1 : u_l\rangle \otimes \ldots \otimes |q : u_j\rangle \otimes \ldots) = \\ = \sqrt{N!} A \left(|1 : u_l\rangle \otimes \ldots \otimes |q : u_i\rangle \otimes \ldots \right) = |u_l, \ldots, u_i, \ldots\rangle \end{gathered} \tag{3.17}$$

L'operatore $\sum_{q=1}^{N} |q : u_i\rangle\langle q : u_j|$ è dunque uguale all'operatore $a_i^\dagger a_j$. Sia $|u_j\rangle$ occupato e, se $|u_i\rangle \neq |u_j\rangle$, sia $|u_i\rangle$ libero:

$$a_i^\dagger a_j |u_l, \ldots, u_j, \ldots\rangle = \pm a_i^\dagger a_j |u_j, u_l, \ldots, \ldots\rangle = \pm |u_i, u_l, \ldots, \ldots\rangle = |u_l, \ldots, u_i, \ldots\rangle \tag{3.18}$$

Il segno $\pm$ è dovuto a un eventuale cambio di segno dato dalla permutazione che porta $|u_j\rangle$ a sinistra, tale segno viene annullato dalla permutazione che porta $|u_i\rangle$ dove precedentemente si trovava $|u_j\rangle$. Nel caso in cui non valgano le condizioni di occupazione degli stati descritte precedentemente $a_i^\dagger a_j |u_l, \ldots\rangle = 0$.
F_N può quindi essere scritto come segue:

$$F_N = F = \sum_{i,j} f_{ij} a_i^\dagger a_j \tag{3.19}$$

Si nota che in tale formulazione F è indipendente dal numero totale di particelle N.
In generale è sempre possibile scrive un generico operatore lineare $g(q_1, q_2, \ldots, q_m)$ che agisce sullo spazio di Hilbert $\underbrace{\mathcal{H}_1 \otimes \ldots \otimes \mathcal{H}_1}_{m}$ in termini di a e $a^\dagger$ poiché:

$$g(q_1, q_2, \ldots, q_m) = \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_m} c_{i_1, i_2, \ldots, i_m} f^1_{i_1}(q_1) \otimes f^2_{i_2}(q_2) \otimes \ldots \otimes f^m_{i_m}(q_m) \tag{3.20}$$

dove $f^1, f^2, \ldots, f^m$ sono operatori lineari di singola particella e sono quindi esprimibili in termini di a e $a^\dagger$.

3.1.3 Operatori di Majorana

Si considera un sistema fermionico finito dimensionale, cioè un sistema fermionico in cui lo spazio di Hilbert di particella singola $\mathcal{H}_1$ ha dimensione finita M, una sua base è dunque $\{|u_1\rangle, |u_2\rangle, \ldots, |u_M\rangle\}$. Si definiscono gli operatori di Majorana γ come segue:

$$\begin{aligned} \gamma_{2j-1} &= a_j^\dagger + a_j \\ \gamma_{2j} &= i(a_j^\dagger - a_j) \end{aligned} \qquad j = 1, \ldots, M \tag{3.21}$$

Si nota che gli operatori di Majorana sono autoaggiunti e reali. Si calcolano le loro relazioni di anticommutazione:

$$\begin{aligned} \{\gamma_{2j-1}, \gamma_{2k-1}\} &= \{a_j^\dagger + a_j, a_k^\dagger + a_k\} = \{a_j^\dagger, a_k^\dagger\} + \{a_j^\dagger, a_k\} + \{a_j, a_k^\dagger\} + \{a_j, a_k\} = 2\delta_{jk} \\ \{\gamma_{2j}, \gamma_{2k}\} &= -\{a_j^\dagger - a_j, a_k^\dagger - a_k\} = -\{a_j^\dagger, a_k^\dagger\} + \{a_j^\dagger, a_k\} + \{a_j, a_k^\dagger\} - \{a_j, a_k\} = 2\delta_{jk} \\ \{\gamma_{2j-1}, \gamma_{2k}\} &= i\{a_j^\dagger - a_j, a_k^\dagger - a_k\} = i\{a_j^\dagger, a_k^\dagger\} - i\{a_j^\dagger, a_k\} + i\{a_j, a_k^\dagger\} - i\{a_j, a_k\} = 0 \end{aligned} \tag{3.22}$$

Si nota che gli operatori $\{\gamma_j\}_{j=1,\ldots,2M}$ sono delle rappresentazioni dei generatori dell'algebra di Clifford $C\ell_{+2M}$ poiché rispettano la condizione (1.2) dove Q è la metrica euclidea.
Invertendo la relazione (3.21) si ha:

$$\begin{aligned} a_j &= \frac{1}{2}(\gamma_{2j-1} + i\gamma_{2j}) \\ a_j^\dagger &= \frac{1}{2}(\gamma_{2j-1} - i\gamma_{2j}) \end{aligned} \tag{3.23}$$

È quindi possibile esprimere un generico operatore lineare in funzione degli operatori di Majorana. Per gli operatori di particella singola si ha:

$$F = \sum_{j=1}^{M} \sum_{k=1}^{M} f_{jk} a_j^\dagger a_k = \frac{1}{4} \sum_{j=1}^{M} \sum_{k=1}^{M} f_{jk}(\gamma_{2j-1}\gamma_{2k-1} + \gamma_{2j}\gamma_{2k} - i\gamma_{2j}\gamma_{2k-1} + i\gamma_{2j-1}\gamma_{2k}) \tag{3.24}$$

È utile riscrivere tale relazione come segue:

$$F = \frac{i}{4} \sum_{j=1}^{2M} \sum_{k=1}^{2M} A_{jk} \gamma_j \gamma_k \tag{3.25}$$

dove A_{jk} sono gli elementi di una matrice A. A è antisimmetrica poiché sostituendo ad A la matrice $\frac{1}{2}(A - A^t)$ si ottiene lo stesso operatore F:

$$\begin{aligned} \frac{i}{4} \sum_{jk} \frac{1}{2}(A_{jk} - A_{kj}) \gamma_j \gamma_k &= \frac{i}{4} \sum_{jk} \frac{1}{2} A_{jk} \gamma_j \gamma_k - \frac{i}{4} \sum_{jk} \frac{1}{2} A_{kj} \gamma_j \gamma_k = \\ &= \frac{i}{4} \sum_{jk} \frac{1}{2} A_{jk} \gamma_j \gamma_k + \frac{i}{4} \sum_{kj} \frac{1}{2} A_{kj} \gamma_k \gamma_j = \frac{i}{4} \sum_{jk} A_{jk} \gamma_j \gamma_k \end{aligned} \tag{3.26}$$

Si dimostra inoltre che quando l'operatore F è un osservabile, quindi quando $F^\dagger = F$, si ha $A_{jk} = \bar{A}_{jk}$, quindi la matrice A è reale:

$$\frac{i}{4} \sum_{jk} A_{jk} \gamma_j \gamma_k = \left(\frac{i}{4} \sum_{jk} A_{jk} \gamma_j \gamma_k \right)^\dagger = -\frac{i}{4} \sum_{jk} \bar{A}_{jk} \gamma_k \gamma_j = \frac{i}{4} \sum_{jk} \bar{A}_{jk} \gamma_j \gamma_k \tag{3.27}$$

Si deduce che gli operatori di particella singola hermitiani sono rappresentazioni degli elementi dell'algebra di Clifford $C\ell_{+2M}$ poiché gli operatori di Majorana sono generatori di tale algebra.

Per descrivere generici operatori lineari è necessario estendere $C\ell_{+2M}$ a $C\ell_{+2M} \otimes \mathbb{C}$ attraverso una struttura complessa I (la scelta non è univoca). Formalmente $\mathcal{H}_F$ è un $\mathbb{C}$-modulo sull'algebra $C\ell_{+2M} \otimes \mathbb{C}$, ossia esiste un morfismo $\rho_F : C\ell_{+2M} \otimes \mathbb{C} \to \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathcal{H}_F)$ dove $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathcal{H}_F)$ è lo spazio degli operatori $\mathbb{C}$-lineari su $\mathcal{H}_F$. L'algebra $C\ell_{+2M} \otimes \mathbb{C}$ viene inoltre munita del seguente antiautomorfismo:

$$\begin{array}{rccc} * : & C\ell_{+2M} \otimes \mathbb{C} & \longrightarrow & C\ell_{+2M} \otimes \mathbb{C} \\ & A \otimes z & \longmapsto & A^t \otimes \bar{z} \end{array} \tag{3.28}$$

tale che $\rho_F(c)^\dagger = \rho_F(c^*)$ per ogni $c \in C\ell_{+2M} \otimes \mathbb{C}$.

3.2 Simmetrie dei sistemi fermionici

È possibile rappresentare un gruppo di simmetria G sia sullo spazio di Fock $\mathcal{H}_F$ con la mappa $\rho : G \to \mathrm{Aut}_{\mathbb{R}}(\mathcal{H}_F)$ sia sull'algebra degli operatori $\mathbb{C}$-lineari $C\ell_{+2M} \otimes \mathbb{C}$ con la mappa $\alpha : G \to \mathrm{Aut}_{\mathbb{R}}(C\ell_{+2M} \otimes \mathbb{C})$. $\rho(g)$ e $\alpha(g)$ sono lineari (antilineari) quando $\phi(g) = +1$ ($\phi(g) = -1$). Tali rappresentazioni devono essere compatibili tra loro, cioè:

$$\rho(g)\rho_F(c)\rho(g)^{-1} = \rho_F(c') = \rho_F(\alpha(g)c) \tag{3.29}$$

dove $g \in G$, $\rho_F(c) \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathcal{H}_F)$ e $c, c' \in C\ell_{+2M} \otimes \mathbb{C}$. È necessario inoltre preservare la struttura dell'algebra di Clifford in modo tale da preservare le relazioni di anticommutazione tra gli operatori di Majorana. Le trasformazioni che preservano le forme quadratiche in $\mathbb{R}^{2M}$ sono le trasformazioni ortogonali. Sia $Q \in \mathrm{O}(2M)$, si deve avere:

$$\rho(g)\gamma_j\rho(g)^{-1} = \sum_i Q_{ij}(g)\gamma_i \tag{3.30}$$

Si estende la mappa $\mathbb{R}$-lineare $Q : G \to \mathrm{O}(2M)$ a una mappa $\mathbb{C}$-lineare o $\mathbb{C}$-antilineare $\alpha : G \to \mathrm{Aut}_{\mathbb{R}}(C\ell_{+2M} \otimes \mathbb{C})$ coerentemente con $\phi(g)$.

3.2.1 Simmetrie della dinamica dei sistemi fermionici liberi

Se si considera un sistema di fermioni liberi l'Hamiltoniana è un operatore di particella singola dato dalla relazione (3.25). Sia G il gruppo di simmetrie della dinamica, si applica una simmetria $\rho(g)$ all'Hamiltoniana del sistema H, usando le relazioni (3.29) e (2.8) si ha:

$$\begin{aligned}\rho(g)H\rho(g)^{-1} = \rho(g)\left(\frac{i}{4}\sum_{jk} A_{jk}\gamma_j\gamma_k\right)\rho(g)^{-1} = \frac{\phi(g)i}{4}\sum_{jklm} A_{jk}Q_{lj}(g)Q_{mk}(g)\gamma_l\gamma_m = \\ = \frac{\phi(g)i}{4}\sum_{lm}(Q(g)AQ(g)^t)_{mn}\gamma_l\gamma_m = \chi(g)H\end{aligned} \tag{3.31}$$

Perché la relazione sia valida si deve avere:

$$Q(g)AQ(g)^t = \tau(g)A \tag{3.32}$$

dove A è una matrice antisimmetrica reale e $Q(g) \in \mathrm{O}(2M)$.

3.3 Classificazione dei sistemi fermionici

La classificazione degli ensemble di Hamiltoniane nei sistemi fermionici si basa su una pubblicazione di Heinzner, Huckleberry e Zirnbauer [HHZ05]. La trattazione che verrà descritta in seguito segue l'idea di Milnor in [MSW69]. Per maggiori dettagli si veda [SCR10].
Le matrici A sono antisimmetriche, dunque sono elementi dell'algebra di Lie $\mathfrak{so}(2M)$, dove il prodotto di Lie è il commutatore di matrici. Sia G il gruppo di simmetrie della dinamica del sistema fermionico, sia $g \in G$ e sia $Q(g) \in \mathrm{O}(2M)$, si definiscono i seguenti sottospazi di $\mathfrak{so}(2M)$:

$$\begin{aligned}\mathfrak{k} = \{A \in \mathfrak{so}(2M) | Q(g)A = AQ(g)\ \forall g \in G\} \\ \mathfrak{p} = \{A \in \mathfrak{so}(2M) | Q(g)A = \tau(g)AQ(g)\ \forall g \in G\}\end{aligned} \tag{3.33}$$

Dalla relazione (3.32) segue che il sottospazio $\mathfrak{p}$ è quello contenente le matrici cercate, ossia quelle che definiscono l'ensemble di Hamiltoniane del sistema. Si definisce inoltre $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$. Siano $k, k' \in \mathfrak{k}$ e $p, p' \in \mathfrak{p}$, poiché si ha:

$$[k,k'] \in \mathfrak{k} \qquad [p,k] \in \mathfrak{p} \qquad [p,p'] \in \mathfrak{k} \tag{3.34}$$

si evince che $\mathfrak{k}$ è un'algebra di Lie mentre $\mathfrak{p}$ no poiché $[p,p'] \in \mathfrak{k}$. Anche $\mathfrak{g}$ è un'algebra di Lie con il seguente prodotto di Lie:

$$[k \oplus p, k' \oplus p'] = ([k,k'] + [p,p']) \oplus ([k,p'] + [p,k']) \tag{3.35}$$

Tale prodotto è infatti bilineare, antisimmetrico e rispetta l'identità di Jacobi.
Si nota inoltre che $\mathfrak{k}$ e $\mathfrak{p}$ sono gli autospazi di un automorfismo $\theta : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, detto involuzione di Cartan, tale che $\theta(k) = +1$ e $\theta(p) = -1$ per ogni $k \in \mathfrak{k}$ e per ogni $p \in \mathfrak{p}$. Se $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{k}$ sono semisemplici tale decomposizione di $\mathfrak{g}$ in $\mathfrak{k}$ e $\mathfrak{p}$ è detta decomposizione di Cartan. Si dimostra che $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{k}$ come definite precedentemente sono semisemplici:

Dimostrazione. Gli elementi di $\mathfrak{k}$ per definizione sono le mappe che commutano con le matrici ortogonali che rappresentano il gruppo di simmetria del sistema. Si è dimostrato nel paragrafo

2.3 che se G è compatto allora $\mathfrak{k}$ è semisemplice. Per dimostrare che $\mathfrak{g}$ è semisemplice è utile considerare gli elementi di $\mathfrak{g}$ nella seguente forma:

$$\begin{pmatrix} k+p & 0 \\ 0 & k-p \end{pmatrix} \in \mathfrak{g}$$

dove $k \otimes \mathbb{1}_2 \in \mathfrak{k}$ e $p \otimes \sigma_3 \in \mathfrak{p}$. Si nota che tale definizione rispetta la relazione (3.34). Tale matrice commuta con la seguente rappresentazione del gruppo di simmetria G su $\mathbb{R}^{2M} \oplus \mathbb{R}^{2M}$:

$$g \mapsto \begin{cases} \begin{pmatrix} Q(g) & 0 \\ 0 & Q(g) \end{pmatrix} & \tau(g) = +1 \\ \\ \begin{pmatrix} 0 & Q(g) \\ Q(g) & 0 \end{pmatrix} & \tau(g) = -1 \end{cases} \tag{3.36}$$

dove $g \in G$ e $Q(g) \in \mathrm{O}(2M)$. Con un ragionamento analogo a quello effettuato per $\mathfrak{k}$ si dimostra che anche $\mathfrak{g}$ è semisemplice. □

Siano K e K' i gruppi di Lie associati rispettivamente alle algebre di Lie $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{k}$, è noto che quando $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ è una decomposizione di Cartan allora K/K' è un gruppo di Lie con algebra di Lie $\mathfrak{g}/\mathfrak{k}$. Si ha inoltre che $\mathfrak{p}$ è isomorfo allo spazio tangente all'identità di K/K'. Classificare gli ensemble di Hamiltoniane nei sistemi fermionici consiste quindi nel classificare i gruppi K/K', detti spazi simmetrici classici. È stato dimostrato da Cartan che esistono esattamente 10 famiglie di spazi simmetrici classici, elencate in tabella 3. Per ulteriori dettagli si veda [Hel01].

3.3.1 Classificazione degli spazi simmetrici classici

È possibile costruire tutte le famiglie di spazi simmetrici classici a partire dalle algebre di Clifford reali e complesse non graduate. Si inizia classificando quelle ottenute dalle algebre reali.

Si consideri una rappresentazione su uno spazio reale $16r$-dimensionale dell'algebra di Clifford $C\ell_{-8d}$, con $2^{4d} = 16r$. Siano J_i le matrici $16r \times 16r$ che rappresentano i generatori di tale algebra, si può dimostrare che le matrici J_i possono essere scelte antisimmetriche e tali che $J_i^2 = -\mathbb{1}$. Si ha dunque:

$$\begin{aligned} J_i J_j + J_j J_i &= -2\delta_{ij} \\ J_i^t = -J_i &= J_i^{-1} \end{aligned} \tag{3.37}$$

Si nota che i generatori J_i così scelti sono contenuti anche in $\mathrm{O}(16r)$ oltre che in $\mathfrak{so}(16r)$.
Si considerano i seguenti gruppi:

$$K_i = \{g \in K_0 | gJ_k = J_k g \quad k = 1, \dots i\} \tag{3.38}$$

dove si sceglie $K_0 = \mathrm{O}(16r)$. Si ha dunque:

$$K_0 \supset K_1 \supset K_2 \supset \dots \tag{3.39}$$

1. È possibile rappresentare J_1 con la seguente matrice a blocchi, poiché rispetta le relazioni $J_1^t = -J_1$ e $J_1^2 = -\mathbb{1}$:
$$J_1 = \mathrm{diag}\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right]_{16r\times 16r} \tag{3.40}$$
Si considerano gli elementi di K_0 come matrici $8r \times 8r$ in cui ogni entrata è una matrice 2×2 reale. J_1 agisce in egual modo su ogni entrata:
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \tag{3.41}$$
Gli elementi di K_1 sono dunque matrici $8r \times 8r$ in cui ogni entrata è una matrice nella forma $a\mathbb{1} + bI$ dove I è la seguente struttura complessa:
$$I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.42}$$
La trasposizione di I vista come matrice reale equivale alla sua coniugazione complessa. Si ha dunque $K_1 = \mathrm{U}(8r)$.

2. Per determinare K_2 si può scegliere:
$$J_2 = \mathrm{diag}\left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right]_{16r\times 16r} \tag{3.43}$$
Si considerano gli elementi di K_2 come matrici $4r \times 4r$ dove ogni entrata è una matrice reale 4×4. Siano A, B, C e D nella forma $a\mathbb{1}_2 + bI$ con $a, b \in \mathbb{R}$ e I data dalla (3.42), si ha:
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D^t & -C^t \\ -B^t & A^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \tag{3.44}$$
Da cui, denotando $A = a\mathbb{1}_2 + bI$ e $B = c\mathbb{1}_2 + dI$:
$$\begin{pmatrix} A & B \\ -B^t & A^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\mathbb{1}_2 + bI & c\mathbb{1}_2 + dI \\ -c\mathbb{1}_2 + dI & a\mathbb{1}_2 - bI \end{pmatrix} = a\mathbb{1}_4 + b\mathbf{I} + c\mathbf{J} + d\mathbf{K} \tag{3.45}$$
dove $\mathbf{I}$, $\mathbf{J}$ e $\mathbf{K}$ sono:
$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \qquad \mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1}_2 \\ -\mathbb{1}_2 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{K} = \mathbf{IJ} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \tag{3.46}$$
Si ha quindi $K_2 = \mathrm{Sp}(4r) \coloneqq \mathrm{U}(4r, \mathbb{H})$.

3. Aggiungendo un ulteriore generatore J_3 si ha la decomposizione dello spazio $\mathbb{R}^{16r}$ in due sottospazi ortogonali poiché $S_1^2 = +1$ con $S_1 \coloneqq J_1J_2J_3$. Si ha quindi $\mathbb{R}^{16r} = V_+ \oplus V_-$ dove V_+ e V_- sono rispettivamente gli autospazi di S_1 con autovalori $+1$ e -1. Il sottogruppo di $\mathrm{Sp}(4r)$ che commuta con S_1, J_1 e J_2 è $\mathrm{Sp}(n_+) \times \mathrm{Sp}(n_-)$, dove si ha $n_+ = \dim_{\mathbb{H}}(V_+)$, $n_- = \dim_{\mathbb{H}}(V_-)$ e $n_+ + n_- = 4r$.

4. Sia $n_+ = n_- = 2r$, si aggiunge un ulteriore generatore J_4. Dato che $M_1 \coloneqq J_3J_4$ anticommuta con S_1 allora M_1 mappa elementi di V_+ in V_- e viceversa. Si ha inoltre che M_1 commuta con J_1 e con J_2 quindi preserva la struttura quaternionica degli spazi. Dato che M_1 è un isomorfismo tra V_+ e V_- (per questo motivo si è posto $n_+ = n_- = 2r$) si ha $K_4 = \mathrm{Sp}(2r)$.

5. Introducendo J_5 si nota che $S_2 \coloneqq J_1J_4J_5$ commuta con S_1 e quadra a $+1$, si ha dunque la decomposizione di V_+ (o V_-) in due autospazi ortogonali W_+ e W_-. J_2 anticommuta con S_2 quindi, analogamente a come spiegato nel punto 4, mappa elementi di W_+ in elementi di W_- e viceversa. Dato che S_2 commuta con J_1 ma non con J_2 viene conservata solamente la struttura complessa ma non la struttura quaternionica. Si ha dunque $K_5 = \mathrm{U}(2r)$

6. Aggiungendo J_6 si nota che $S_3 \coloneqq J_2J_4J_6$ decompone ulteriormente lo spazio W_+ (o W_-) in due autospazi ortogonali X_+ e X_- poiché commuta con S_1 e con S_2. J_1 anticommuta con S_3 quindi mappa elementi di X_+ in X_- e viceversa, inoltre la struttura complessa non viene conservata, da cui $K_6 = \mathrm{O}(2r)$.

7. Si introduce J_7 e si nota che $S_4 \coloneqq J_1J_6J_7$ commuta con S_1, con S_2 e con S_3. Si ha dunque un'ulteriore decomposizione di X_+ (o X_-) in due sottospazi mutuamente ortogonali Y_+ e Y_-, da cui $K_7 = \mathrm{O}(m_+)\times\mathrm{O}(m_-)$ con $m_+ = dim_{\mathbb{R}}(Y_+)$, $m_- = dim_{\mathbb{R}}(Y_-)$ e $m_+ + m_- = 2r$.

8. Si pone $m_+ = m_- = r$ e si introduce J_8. Si ha che $M_2 \coloneqq J_7J_8$ commuta con S_1, S_2 e S_3 ma anticommuta con S_4. Analogamente al punto 4 M_2 mappa elementi di Y_+ in Y_- e viceversa, si ha quindi $K_8 = \mathrm{O}(r)$

L'algebra di Lie associata a K_i è:

$$\mathfrak{g}_i = T(K_i) = \{A \in \mathfrak{so}(16r) | AJ_k = J_kA \quad k = 1, \dots i\} \tag{3.47}$$

Sia $A_i \in \mathfrak{g}_i$, si definisce la mappa $\theta_i : \mathfrak{g}_i \to \mathfrak{g}_i$ tale che $\theta_i(A_i) = J_{i+1}A_iJ_{i+1}^{-1}$. Poiché $\theta_i^2(A_i) = A_i$ la mappa θ_i decompone $\mathfrak{g}_i$ in due autospazi $\mathfrak{g}_i = \mathfrak{k}_i \oplus \mathfrak{p}_i$ dove $\mathfrak{k}_i$ è l'autospazio con autovalore $+1$ e $\mathfrak{p}_i$ quello con autovalore -1, si nota che $\mathfrak{k}_i = \mathfrak{g}_{i+1}$ mentre $\mathfrak{p}_i$ è:

$$\mathfrak{p}_i = T(K_i/K_{i+1}) = \{A \in \mathfrak{so}(16r) | AJ_k = J_kA \quad k = 1, \dots i \ \wedge \ AJ_{i+1} = -J_{i+1}A\} \tag{3.48}$$

Sono state trovate dunque otto famiglie di spazi simmetrici classici, i restanti due derivano dalle algebre di Clifford complesse.
Si consideri una rappresentazione su $\mathbb{C}^{2r}$ dell'algebra di Clifford $\mathbb{C}\ell_{2d}$, con $2^d = 2r$. Siano J_i le matrici $2r \times 2r$ che rappresentano i generatori di tale algebra, si può dimostrare che è possibile scegliere $J_i^\dagger = -J_i = J_i^{-1}$. Le matrici J_i sono contenute sia in $\mathrm{U}(2r)$ che in $\mathfrak{u}(2r)$. Si definisce, analogamente al caso reale:

$$K_i = \{g \in K_0 | gJ_k = J_kg \quad k = 1, \dots i\} \tag{3.49}$$

Si sceglie $K_0 = \mathrm{U}(2r)$.
L'algebra di Lie associata a K_i e la sua decomposizione di Cartan, analogamente al caso precedente, risultano:

$$\mathfrak{g}_i = T(K_i) = \{A \in \mathfrak{u}(2r) | AJ_k = J_kA \quad k = 1, \dots i\} \tag{3.50}$$

$$\mathfrak{p}_i = T(K_i/K_{i+1}) = \{A \in \mathfrak{u}(2r) | AJ_k = J_k A \quad k = 1, \dots i \ \wedge \ AJ_{i+1} = -J_{i+1}A\} \tag{3.51}$$

Si determinano le famiglie di spazi simmetrici classici nel caso complesso:

1. Si rappresenta J_1 con la seguente matrice a blocchi:

$$J_1 = i \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1}_r \\ \mathbb{1}_r & 0 \end{pmatrix} \tag{3.52}$$

   Siano $A, B, C, D \in \mathbb{C}(r)$, si ha:

$$\begin{pmatrix} 0 & i\mathbb{1}_r \\ i\mathbb{1}_r & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i\mathbb{1}_r \\ -i\mathbb{1}_r & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D & C \\ B & A \end{pmatrix} \tag{3.53}$$

   Da cui $A = D$ e $B = C$. Attraverso una trasformazione unitaria si ha:

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A+B & 0 \\ 0 & A-B \end{pmatrix} \tag{3.54}$$

   Perché tale matrice sia unitaria si deve avere $A + B$ e $A - B$ unitari, da cui si deduce $K_1 = \mathrm{U}(r) \times \mathrm{U}(r)$.

2. Si rappresenta J_2 con la seguente matrice a blocchi:

$$J_2 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1}_r \\ -\mathbb{1}_r & 0 \end{pmatrix} \tag{3.55}$$

   Si ha:

$$\begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1}_r \\ -\mathbb{1}_r & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A+B & 0 \\ 0 & A-B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\mathbb{1}_r \\ \mathbb{1}_r & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A-B & 0 \\ 0 & A+B \end{pmatrix} \tag{3.56}$$

   Da cui $A + B = A - B$, quindi $K_2 = \mathrm{U}(r)$.

3.3.2 Simmetrie CT e spazi simmetrici classici

In questa sezione si mostra che per ognuno degli spazi simmetrici K_i/K_{i+1} nella tabella 3 esiste un gruppo di simmetrie della dinamica tale per cui la famiglia di Hamiltoniane (3.25) invarianti è data da $A \in T(K_i/K_{i+1}) := \mathfrak{p}_i$. Più esplicitamente, per ogni $\mathfrak{p}_i$ si determina uno spazio di Hilbert di particella singola con un'azione di un gruppo di simmetria G e la corrispondente famiglia H di Hamiltoniane di particella singola G-invarianti, tali per cui l'Hamiltoniano dello spazio di Fock sia (3.25) con $A \in \mathfrak{p}_i$. Similmente a come effettuato nel paragrafo 2.4.1 ci si concentra sui gruppi di simmetria CT. Per tali simmetrie, coerentemente con (2.15), si ha $TH = HT$ e $CH = -HC$.

- $\mathfrak{p}_0$: A anticommuta con J_1. Si definisce lo spazio di Hilbert come $\mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^{16r}$ con una struttura complessa $I = -i\sigma_2 \otimes \mathbb{1}$ e $\xi = \sigma_3 \otimes \mathbb{1}$ come operatore di coniugazione complessa. L'operatore Hamiltoniano $H = -i\sigma_2 \otimes A$ è hermitiano. ξ si comporta come una simmetria di particella-lacuna C tale che $C^2 = +1$ poiché, per definizione, antilineare e tale che $\xi^2 = +1$. È possibile identificare $\xi \otimes J_1$ come una simmetria di inversione temporale T tale che $T^2 = -1$ poiché $(\xi \otimes J_1)(-i\sigma_2 \otimes A) = (-i\sigma_2 \otimes A)(\xi \otimes J_1)$.

- $\mathfrak{p}_1$: A commuta con J_1 e anticommuta con J_2. Dato che J_1 quadra a -1 e commuta con A è possibile vederlo come una struttura complessa I su $\mathbb{R}^{16r} \cong \mathbb{C}^{8r}$, si definisce $H = J_1 A = IA$ hermitiano. Poiché J_2 anticommuta con I e poiché $J_2 IA = IAJ_2$, J_2 si comporta come una simmetria T che quadra a -1.

Nei prossimi casi, fino a $\mathfrak{p}_5$, si indica con $\mathcal{H}$ lo spazio di Hilbert $\mathbb{R}^{16r}$ con struttura complessa $I = J_1$ e si considera l'Hamiltoniana $H = IA$.

- $\mathfrak{p}_2$: A commuta con J_1 e J_2 mentre anticommuta con J_3. J_2 agisce come una simmetria C che quadra a -1 e J_3 come una simmetria T che quadra a -1.

- $\mathfrak{p}_3$: A commuta con J_1, J_2 e J_3 mentre anticommuta con J_4. È possibile definire gli operatori $S_1 \coloneqq J_1 J_2 J_3$ e $M_1 = J_3 J_4$, come effettuato nel paragrafo 3.3.1. L'operatore lineare S_1 decompone lo spazio di Hilbert $\mathcal{H}$ in due sottospazi V_+ e V_- con autovalori $+1$ e -1. L'operatore M_1 mappa elementi di V_+ in V_- e viceversa, è possibile restringere l'Hamiltoniana al sottospazio di Hilbert $V_+ \subset \mathcal{H}$, $V_+ \cong \mathbb{R}^{8r} \cong \mathbb{C}^{4r}$. È necessario che gli operatori sullo spazio di Hilbert V_+ commutino con S_1, J_4 non è quindi una simmetria su tale spazio. Nel sottospazio V_+ vale la relazione $J_3 = -IJ_2$, ed entrambi J_2 e J_3 si comportano come simmetrie C che soddisfano la condizione $C^2 = -1$.

- $\mathfrak{p}_4$: A commuta con J_1, J_2, J_3 e J_4 mentre anticommuta con J_5. Ci si restringe nuovamente al sottospazio $V_+ \cong \mathbb{R}^{8r}$. Oltre agli operatori J_2 e J_3 che si comportano come simmetrie C che quadrano a -1 si ha l'operatore $J_2 J_4 J_5$ che commuta con S_1 e definisce una simmetria T che quadra a $+1$.

- $\mathfrak{p}_5$: A commuta con J_1, J_2, J_3, J_4 e J_5 mentre anticommuta con J_6. Si definisce l'operatore lineare $S_2 \coloneqq J_1 J_4 J_5$ che divide il sottospazio V_+ in due autospazi W_+ e W_-. J_2 mappa elementi di W_+ in W_- e viceversa, è possibile quindi restringersi allo spazio di Hilbert $W_+ \cong \mathbb{R}^{4r}$. Gli operatori antilineari che commutano sia con S_1 che con S_2 sono $J_2 J_4 J_6$, $J_3 J_4 J_6$, $J_2 J_5 J_6$ e $J_3 J_5 J_6$, tutti questi operatori si comportano come una simmetria T che quadra a $+1$.

- $\mathfrak{p}_6$: A commuta con J_1, J_2, J_3, J_4, J_5 e J_6 mentre anticommuta con J_7. Si definisce l'operatore lineare $S_3 \coloneqq J_2 J_4 J_6$ che decompone il sottospazio W_+ in due autospazi X_+ e X_-. J_1 anticommuta con S_3, dunque mappa elementi di X_+ in X_- e viceversa. Dato che non è possibile utilizzare J_1 come struttura complessa su $X_+ \cong \mathbb{R}^{2r}$ si considera lo spazio di Hilbert $\mathbb{R}^2 \otimes X_+$ con una struttura complessa $I = -i\sigma_2 \otimes \mathbb{1}$, $\xi = \sigma_3 \otimes \mathbb{1}$ come operatore di coniugazione complessa e le Hamiltoniane date da $H = -i\sigma_2 \otimes A$. Gli operatori che commutano con S_1, con S_2 e con S_3 sono $J_1 J_6 J_7$, $J_2 J_5 J_7$, $J_3 J_4 J_7$ e $J_3 J_5 J_6$. Si ha $(\xi \otimes J_1 J_6 J_7)(-i\sigma_2 \otimes A) = (-i\sigma_2 \otimes A)(\xi \otimes J_1 J_6 J_7)$, dunque $\xi \otimes J_1 J_6 J_7$ si comporta come una simmetria T che quadra a $+1$ (analogamente a $\xi \otimes J_2 J_5 J_7$ e a $\xi \otimes J_3 J_4 J_7$). L'operatore $\xi \otimes J_3 J_5 J_6$ si comporta invece come una simmetria C che quadra anch'essa a $+1$.

- $\mathfrak{p}_7$: A commuta con J_1, J_2, J_3, J_4, J_5, J_6 e J_7 mentre anticommuta con J_8. L'operatore lineare $S_4 \coloneqq J_1 J_6 J_7$ decompone X_+ in due autospazi Y_+ e Y_-, $M_2 \coloneqq J_7 J_8$ mappa elementi di Y_+ in Y_- e viceversa. Anche in questo caso si considera lo spazio di Hilbert $\mathbb{R}^2 \otimes Y_+$ con una struttura complessa $I = -i\sigma_2 \otimes \mathbb{1}$, un operatore di coniugazione complessa $\xi = \sigma_3 \otimes \mathbb{1}$ e le Hamiltoniane date da $H = -i\sigma_2 \otimes A$. Nessun operatore commuta simultaneamente con S_1, S_2, S_3 e S_4 ad eccezione di loro stessi. L'unica simmetria è data dunque dalla struttura reale ξ che si comporta come una simmetria C che quadra a $+1$.

Per le famiglie di spazi simmetrici classici che derivano dalle algebre di Clifford complesse si ha invece:

- $\mathfrak{p}_0$: È possibile descrivere una generica Hamiltoniana sullo spazio di Hilbert $\mathbb{C}^{2r}$ nella forma $H = iA$ dove $A \in \mathfrak{u}(2r)$, ossia $A^\dagger = -A$. Dato che J_1 è $\mathbb{C}$-lineare e anticommuta con A si ha $J_1 iA = -iAJ_i$, ossia J_1 si comporta come una simmetria CT.

- $\mathfrak{p}_1$: Dato che J_1 commuta con A e $J_1^2 = +1$ tale operatore decompone lo spazio di Hilbert $\mathbb{C}^{2r}$ in due autospazi Z_+ e Z_- con autovalori rispettivamente $+1$ e -1. J_2 anticommuta con J_1 dunque mappa elementi di Z_+ in Z_- e viceversa. Ci si riduce allo spazio di Hilbert Z_+, il gruppo di simmetria è quindi $\{1\}$.

Riassumendo si ha la seguente tabella, la colonna "nome" riporta i nomi dati alle famiglie di spazi simmetrici classici nella letteratura:

$\mathfrak{p}_i$	gruppo di simmetria	T^2	C^2	K_i/K_{i+1}	nome
$\mathfrak{p}_0$	$\{1, C, T, CT\}$	-1	$+1$	$\mathrm{O}(16r)/\mathrm{U}(8r)$	DIII
$\mathfrak{p}_1$	$\{1, T\}$	-1		$\mathrm{U}(8r)/\mathrm{Sp}(4r)$	AII
$\mathfrak{p}_2$	$\{1, C, T, CT\}$	-1	-1	$\mathrm{Sp}(4r)/\mathrm{Sp}(2r) \times \mathrm{Sp}(2r)$	CII
$\mathfrak{p}_3$	$\{1, C\}$		-1	$\mathrm{Sp}(2r) \times \mathrm{Sp}(2r)/\mathrm{Sp}(2r) \cong \mathrm{Sp}(2r)$	C
$\mathfrak{p}_4$	$\{1, C, T, CT\}$	$+1$	-1	$\mathrm{Sp}(2r)/\mathrm{U}(2r)$	CI
$\mathfrak{p}_5$	$\{1, T\}$	$+1$		$\mathrm{U}(2r)/\mathrm{O}(2r)$	AI
$\mathfrak{p}_6$	$\{1, C, T, CT\}$	$+1$	$+1$	$\mathrm{O}(2r)/\mathrm{O}(r) \times \mathrm{O}(r)$	BDI
$\mathfrak{p}_7$	$\{1, C\}$		$+1$	$\mathrm{O}(r) \times \mathrm{O}(r)/\mathrm{O}(r) \cong \mathrm{O}(r)$	D
$\mathfrak{p}_0$	$\{1, CT\}$			$\mathrm{U}(2r)/\mathrm{U}(r) \times \mathrm{U}(r)$	AIII
$\mathfrak{p}_1$	$\{1\}$			$\mathrm{U}(r) \times \mathrm{U}(r)/\mathrm{U}(r) \cong \mathrm{U}(r)$	A

Tabella 3

Riferimenti bibliografici

[AZ97] Alexander Altland e Martin R. Zirnbauer. "Nonstandard symmetry classes in mesoscopic normal-superconducting hybrid structures". In: *Physical Review B* 55.2 (gen. 1997), pp. 1142–1161. ISSN: 1095-3795. DOI: 10.1103/physrevb.55.1142.

[CDL19] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu e F. Laloë. *Quantum Mechanics, Volume 3: Fermions, Bosons, Photons, Correlations, and Entanglement*. Wiley, dic. 2019. ISBN: 9783527345557.

[Dys62] Freeman J. Dyson. "The Threefold Way. Algebraic Structure of Symmetry Groups and Ensembles in Quantum Mechanics". In: *Journal of Mathematical Physics* 3.6 (nov. 1962), pp. 1199–1215. ISSN: 0022-2488. DOI: 10.1063/1.1703863.

[FW03] Alexander Fetter e John Walecka. *Quantum Theory of Many-Particle System*. Vol. 25. Gen. 2003. DOI: 10.1063/1.3071096.

[Hel01] Sigurdur Helgason. *Differential Geometry, Lie Groups, and Symmetric Spaces*. Vol. 34. American Mathematical Society, 2001. ISBN: 9780821828489.

[HHZ05] P. Heinzner, A. Huckleberry e M.R. Zirnbauer. "Symmetry Classes of Disordered Fermions". In: *Communications in Mathematical Physics* 257.3 (mag. 2005), pp. 725–771. ISSN: 1432-0916. DOI: 10.1007/s00220-005-1330-9.

[LM90] H. Blaine Lawson e Marie-Louise Michelsohn. *Spin Geometry (PMS-38), Volume 38*. Princeton: Princeton University Press, 1990. ISBN: 9781400883912. DOI: doi:10.1515/9781400883912.

[Moo15] Gregory W. Moore. "Quantum Symmetries and K-Theory". In: *Quantum Mechanics And The 10-Fold Way*. Lug. 2015. URL: https://www.physics.rutgers.edu/~gmoore/PiTP-LecturesA.pdf.

[MSW69] J. Milnor, M. SPIVAK e R. WELLS. *Morse Theory. (AM-51), Volume 51*. Princeton University Press, 1969. ISBN: 9780691080086. URL: http://www.jstor.org/stable/j.ctv3f8rb6.

[Ren20] Pierre Renaud. *CLIFFORD ALGEBRAS LECTURE NOTES ON APPLICATIONS IN PHYSICS*. Nov. 2020. URL: https://hal.science/hal-03015551.

[SCR10] Michael Stone, Ching-Kai Chiu e Abhishek Roy. "Symmetries, dimensions and topological insulators: the mechanism behind the face of the Bott clock". In: *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* 44.4 (dic. 2010), p. 045001. ISSN: 1751-8121. DOI: 10.1088/1751-8113/44/4/045001.

[Zir10] Martin R. Zirnbauer. *Symmetry Classes*. 2010. arXiv: 1001.0722 [math-ph].