



# UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Dipartimento di Fisica e Astronomia “Galileo Galilei”

Corso di Laurea in Fisica

Tesi di Laurea

Modelli nucleari per l'interazione di pairing

Relatore

Prof. Lorenzo Fortunato

Laureando

Andrea Andreini

Anno Accademico 2018/2019

## Indice

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Il modello a shell</b>	<b>3</b>
2.1	Il modello a particella singola . . . . .	3
2.2	L'interazione residua tra nucleoni di valenza . . . . .	5
<b>3</b>	<b>Nuclei con due nucleoni di valenza</b>	<b>7</b>
3.1	Spazio di valenza a sub-shell singola . . . . .	8
3.1.1	Funzione d'onda nello schema- $J$ . . . . .	8
3.1.2	Autovalori ed autofunzioni dell'Hamiltoniana completa . . . . .	8
3.2	Spazio di valenza con $m$ subshell . . . . .	9
3.2.1	Funzione d'onda nello schema- $J$ . . . . .	10
3.2.2	Autovalori ed autofunzioni dell'Hamiltoniana completa . . . . .	10
<b>4</b>	<b>Nuclei con molteplici nucleoni di valenza</b>	<b>12</b>
4.1	Spazio di valenza a sub-shell singola . . . . .	13
4.1.1	Funzione d'onda nello schema- $J$ . . . . .	13
4.1.2	Autovalori ed autofunzioni dell'Hamiltoniana completa . . . . .	15
4.2	Spazio di valenza con $m$ sub-shell . . . . .	16
4.2.1	Funzione d'onda nello schema- $J$ . . . . .	17
4.2.2	Autovalori ed autofunzioni dell'Hamiltoniana completa . . . . .	18
4.3	Il numero quantico di seniorità . . . . .	19

## 1 Introduzione

Nell'ambito della Fisica Nucleare, il modello a shell costituisce senza dubbio una delle rappresentazioni più semplici ed al tempo stesso eleganti del nucleo atomico. La relativa importanza contemporanea, oltre che storica, è comprovata dal sistematico utilizzo che ne viene fatto, tutt'oggi, per la descrizione di molteplici fenomeni nucleari. La presente tesi si pone l'obiettivo di indagare, nell'ambito del modello a shell, il complesso sistema a molti corpi rappresentato dal nucleo atomico. Più in particolare, la trattazione verterà sulla descrizione dell'interazione agente tra nucleoni identici, responsabile della grande ricchezza di livelli che caratterizza gli spettri energetici nucleari. Con ragionevole approssimazione, tale interazione verrà separata in due contributi distinti: un termine principale di "campo medio", atto a rappresentare la maggior parte dell'interazione, ed un termine secondario, detto di "interazione residua", destinato a descrivere la componente di interazione non associabile al primo contributo. Al termine di campo medio è dedicata la parte iniziale della tesi, la quale si propone di fornire una rapida ma sufficientemente esaustiva descrizione della forma più basilare di modello a shell. Partendo da qui, i capitoli successivi saranno dedicati all'evoluzione di questa forma di modello che si ottiene perturbando il campo medio con il termine di interazione residua: la trattazione verterà innanzitutto sulla descrizione di alcuni semplici tipi di sistemi nucleari, per poi passare ad analizzare sistemi più generali. In queste sezioni, particolare attenzione sarà dedicata alla descrizione dell'opportuna funzione d'onda associata a tali sistemi, la quale verrà poi utilizzata nella descrizione teorica dei relativi spettri energetici. Infine, un particolare occhio di riguardo sarà dedicato, in alcune parti del testo e nella sezione finale, alla componente più intensa dell'interazione residua, nota come "interazione di pairing": tale componente ricopre un ruolo di grande importanza nella descrizione dei sistemi nucleari, essendo indispensabile per la caratterizzazione dei relativi stati fondamentali.

## 2 Il modello a shell

Nel seguente capitolo viene presentata innanzitutto una rapida descrizione del modello a shell nella sua forma più basilare. La seconda sezione, invece, è dedicata alla descrizione dell'utilità dell'introduzione di un'interazione residua, oltre che delle principali proprietà che la caratterizzano.

### 2.1 Il modello a particella singola

I sistemi nucleari costituiscono esempi particolari di sistemi a molti corpi interagenti. Trattando in tutta generalità un nucleo atomico costituito da  $A$  nucleoni, esso risulta descritto dalla seguente Hamiltoniana [1]:

$$H = \sum_{i=1}^A T_i + \sum_{i<j}^A W_{ij}(\vec{r}_{ij}) \quad , \quad (2.1)$$

costituita da termini di energia cinetica e di energia potenziale. L'interazione nucleare forte effettiva agente tra i nucleoni è modellizzata da una somma di  $A(A-1)/2$  potenziali a due corpi, a priori formalmente differenti l'uno dall'altro e dipendenti dalle coordinate relative dei nucleoni che compongono ciascuna coppia. Ad eccezione di rarissimi casi particolari, la risoluzione dell'equazione di Schrödinger per un sistema nucleare descritto dall'Hamiltoniana (2.1) risulta analiticamente impossibile. Si rivela dunque necessaria l'adozione di un modello semplificato, in grado sia di rendere trattabile la risoluzione dell'equazione agli autovalori per l'Hamiltoniana sia di fornire, allo stesso tempo, una descrizione sufficientemente adeguata del sistema fisico. Storicamente, il modello a shell rappresenta uno dei modelli semplificati di maggior successo nell'ambito della descrizione di molte proprietà nucleari: tale denominazione deriva dalla disposizione in "gusci" di differente energia che il modello fornisce per i nucleoni, per certi versi simile alla disposizione degli elettroni in orbitali.

L'adozione del modello a shell per la descrizione dei nuclei atomici è principalmente supportata dall'evidenza sperimentale dell'esistenza dei cosiddetti "numeri magici". Per definizione, essi rappresentano particolari valori di  $Z$  (numero di protoni) e di  $N$  (numero di neutroni) in corrispondenza dei quali i nuclei atomici sono caratterizzati da notevole stabilità (a loro volta, essi sono detti "nuclei magici"). In aggiunta, i nuclei che possiedono numeri magici sia di protoni sia di neutroni prendono il nome di "nuclei doppiamente magici" e sono caratterizzati da un legame nucleare ancora più intenso. Di seguito sono elencati i principali numeri magici:

$$Z = 2, 8, 20, 28, 50, 82 \quad \text{oppure} \quad N = 2, 8, 20, 28, 50, 82, 126 \quad .$$

Oltre a quelli elencati, esistono altri valori di  $Z$  e di  $N$  associati a picchi di stabilità, seppur di più modesta entità: tali numeri vengono detti "semi-magici". Il primo successo del modello a shell fu ottenuto proprio grazie alla giustificazione teorica dell'esistenza dei numeri magici, interpretati come i valori di  $Z$  e di  $N$  in corrispondenza dei quali avviene una chiusura di shell.

L'assunzione fondamentale su cui si basa l'intera struttura del modello a shell è la possibilità di introdurre un potenziale fittizio che approssimi l'interazione tra ogni nucleone ed il sistema dei restanti  $A-1$  nucleoni. Questo potenziale, nel seguito denominato "campo medio", è supposto essere centrale, ovvero dipendente unicamente dalla distanza tra ogni nucleone e l'ipotetico centro del nucleo. Con l'introduzione del campo medio  $U(r)$ , i contributi di potenziale nell'Hamiltoniana generale vengono separati nel seguente modo [2]:

$$H = \sum_{i=1}^A T_i + \sum_{i=1}^A U(r_i) + H_{res} \equiv H_0 + H_{res} \quad , \quad (2.2)$$

dove

$$H_{res} = \sum_{i < j}^A W_{ij}(\vec{r}_{ij}) - \sum_{i=1}^A U(r_i) \quad (2.3)$$

rappresenta la componente di interazione non inclusa nel campo medio e prende il nome di “interazione residua”. Questo contributo all’Hamiltoniana totale verrà trascurato nel seguito della presente sezione, per poi essere trattato a fondo in quelle successive.

Considerare il solo contributo di  $H_0$  all’energia del sistema equivale a trattare i nucleoni come formalmente *non* interagenti: in conseguenza di ciò,  $H_0$  può essere scomposta in una somma di termini operatoriali di particella singola, ognuno dei quali agente sulla funzione d’onda associata ad un solo nucleone. Il problema si riduce allora alla risoluzione dell’equazione di Schrödinger per una singola particella:

$$[T + U(r)]\psi(\vec{r}, \vec{\sigma}) = [T + U(r)]\varphi(\vec{r})\chi_s(\vec{\sigma}) = E\varphi(\vec{r})\chi_s(\vec{\sigma}) \quad , \quad (2.4)$$

dove la funzione d’onda è stata scomposta nel prodotto tra la componente spaziale e quella di spin (con  $s = \pm 1/2$ ).

Al fine di risolvere l’equazione (2.4), è necessario a questo punto scegliere una precisa forma per il campo medio. La scelta più frequente ricade su un “potenziale di Woods-Saxon”, ovvero un tipo di potenziale centrale che possiede la seguente forma analitica [1]:

$$U_W(r) = -\frac{V_0}{1 + e^{(r-r_0)/a}} \quad , \quad (2.5)$$

dove  $V_0$  (positivo) definisce la profondità della buca di potenziale,  $r_0$  denota il raggio a metà altezza e  $a$  rappresenta la diffusività della funzione sulla superficie nucleare. Ciascuno di questi parametri può essere variato per modificare le proprietà del potenziale di Woods-Saxon, a seconda delle caratteristiche del nucleo in esame.

Risolvendo la (2.4) facendo uso del potenziale (2.5), le autofunzioni risultanti hanno la forma generale:

$$\psi_E(\vec{r}, \vec{\sigma}) = R_{nl}(r)Y_{lm}(\theta, \phi)\chi_s(\vec{\sigma}) \quad . \quad (2.6)$$

A causa della forma complessa del campo medio utilizzato, le componenti radiali  $R_{nl}(r)$  non sono in generale determinabili analiticamente. I numeri quantici  $n$  ed  $l$  sono legati al numero quantico principale  $N$  dalla seguente relazione:

$$N = 2(n - 1) + l \quad , \quad (2.7)$$

e, in merito all’energia degli stati, valgono i seguenti fatti:

- stati con gli stessi valori di  $n$  ed  $l$  sono degeneri in energia; dunque, considerando che  $m$  può variare tra  $-l$  ed  $l$  a passi interi e che  $s$  può assumere sempre e solo due valori distinti, la degenerazione di ogni autospazio è pari a  $2(2l + 1)$ ;
- se due stati hanno valori differenti di  $N$ , lo stato con  $N$  minore ha sempre energia minore;
- se due stati hanno valori uguali di  $N$ , lo stato con  $l$  maggiore ha sempre energia minore.

La serie di autospazi energetici, al variare dei numeri quantici  $n$  ed  $l$ , riesce a spiegare la successione di numeri magici rilevati sperimentalmente fino al numero magico 28, mentre fallisce in tal senso per i numeri superiori. Al fine di descrivere la successione nella sua interezza, Maria Goeppert-Mayer e Hans Jensen [3] proposero l’aggiunta di un potenziale di perturbazione ad  $H_0$ , al fine di rimuovere ulteriormente la degenerazione dei livelli energetici. Tale potenziale, detto di “spin-orbita”, può essere rappresentato ad esempio dal seguente operatore [1]:

$$V_{\vec{L} \cdot \vec{S}} = k \frac{dU_W}{dr} \vec{L} \cdot \vec{S} \quad , \quad (2.8)$$

dove  $k$  è una costante negativa. Secondo la teoria perturbativa, per calcolare le correzioni all'energia imperturbata di un autospazio energetico, è sufficiente costruire una base di autovettori per il potenziale di perturbazione e successivamente calcolarne i valori medi sugli autovettori stessi. Nel caso in esame, una base per (2.8) all'interno di un certo autospazio con numeri quantici  $n$  ed  $l$  è data dagli autovettori comuni di  $(\vec{J})^2 \equiv (\vec{L} + \vec{S})^2$  e  $J_z$ . Eseguendo il calcolo dei valori medi, ogni autospazio imperturbato con  $l \neq 0$  viene suddiviso in due nuovi autospazi energetici: l'autospazio di  $(\vec{J})^2$  associato al numero quantico  $l + 1/2$  (abbassato in energia) e l'autospazio di  $(\vec{J})^2$  associato al numero quantico  $l - 1/2$  (alzato in energia). Le correzioni all'autovalore imperturbato sono rispettivamente proporzionali a  $-(l + 1)/2$  e  $l/2$ , come si verifica facilmente calcolando i valori medi di (2.8).

Grazie a questa ulteriore rimozione di degenerazione, è ora possibile spiegare efficacemente l'intera serie di numeri magici. Una dettagliata suddivisione dei nuovi autospazi energetici ordinati in energia è consultabile in [3], pagina 58. Nel seguito della trattazione, con il termine "sub-shell" si intenderà un preciso autospazio del quadrato del momento angolare totale di particella singola, associato ai numeri quantici  $n$ ,  $l$  e  $j$ . Con il termine "shell", invece, si intenderà un insieme di sub-shell comprese tra due numeri magici, secondo lo schema di livelli determinato nella precedente discussione. I nuclei atomici verranno frequentemente suddivisi in due sotto-sistemi:

- il sotto-sistema di nucleoni di "core" (o semplicemente "core"), costituito da numeri magici o almeno semi-magici sia di protoni sia di neutroni: quindi, questo sotto-sistema riempie sempre completamente un determinato numero di sub-shell;
- il sotto-sistema di nucleoni di valenza, costituito da nucleoni disposti all'interno di sub-shell parzialmente occupate (più alte in energia rispetto al core).

Infine, per tutti i sistemi nucleari studiati nei prossimi capitoli, il momento angolare totale di tutti i nucleoni coinvolti verrà sempre denotato con  $\vec{J}$ , senza alcuna eccezione; le lettere  $J$  ed  $M$ , inoltre, indicheranno sempre i numeri quantici associati alle autofunzioni comuni di  $(\vec{J})^2$  e  $J_z$ .

## 2.2 L'interazione residua tra nucleoni di valenza

La precedente sezione è giunta a delineare le caratteristiche fondamentali della forma più basilare del modello a shell, denominata "modello a particella singola". Nonostante la sua relativa semplicità, tale modello ha il pregio di spiegare alcune significative proprietà di molti sistemi nucleari. Per esempio, è possibile descrivere in parte lo spettro energetico dei nuclei che possiedono un unico nucleone di valenza. Accoppiando i momenti angolari totali  $\vec{J}_i$  di tutte le particelle costituenti il core (in numero pari), l'unico autospazio di  $(\vec{J})^2$  permesso dalle regole di composizione è quello associato a  $J = 0$ . Di conseguenza, il core non influisce nella determinazione del momento angolare complessivo di tutte le particelle presenti, il quale dipende esclusivamente dall'unico nucleone di valenza.

Il modello precedentemente discusso si rivela invece inadeguato quando si tratta di descrivere lo spettro di nuclei che possiedono più di un nucleone di valenza: un semplice sguardo rivela la presenza di livelli non interpretabili con la semplice occupazione da parte dei nucleoni delle diverse sub-shell disponibili. Da un punto di vista analitico, descrivendo i nucleoni di valenza tramite la sola componente imperturbata dell'Hamiltoniana, risulta infatti che, fissata la configurazione, i diversi autospazi possibili del quadrato del momento angolare totale sono tutti degeneri in energia. Questa circostanza è però smentita dagli spettri sperimentali, dove appaiono livelli ad energie distinte caratterizzati da un preciso valore del numero quantico  $J$ . Per far fronte a questa problematica, è necessario introdurre nell'Hamiltoniana che descrive il sistema il termine che rappresenta l'interazione residua tra nucleoni, precedentemente trascurato.

Nella successiva trattazione, seguendo l'approssimazione utilizzata in [2] e [4], il sistema dei nucleoni di core verrà considerato inerte e dunque non interagente con i nucleoni di valenza; questi ultimi verranno descritti dalla seguente

Hamiltoniana:

$$H_{val} = \sum_{i=1}^B T_i + \sum_{i=1}^B V(r_i) + H_{res, val} \equiv H_{0, val} + H_{res, val} \quad , \quad (2.9)$$

con

$$V(r_i) = U_W(r_i) + k \frac{dU_W}{dr_i} \vec{L}_i \cdot \vec{S}_i \quad (2.10)$$

e

$$H_{res, val} = \sum_{i < j}^B W_{ij}(\vec{r}_{ij}) - \sum_{i=1}^B V(r_i) \quad . \quad (2.11)$$

In (2.9)  $H_{0, val}$  rappresenta la componente imperturbata dell'Hamiltoniana, mentre  $H_{res, val}$  si riferisce all'interazione residua agente unicamente tra i B nucleoni di valenza. D'ora in avanti, i due contributi verranno indicati semplicemente con  $H_0$  e  $H_{res}$ , rispettivamente. In generale, una funzione preposta alla modellizzazione di  $H_{res}$  deve soddisfare molte delle più elementari proprietà di simmetria (invarianza per scambio tra nucleoni identici, invarianza rotazionale...); tenuto conto di ciò, come illustrato in [5], un modello generale per  $H_{res}$  può essere costituito sia da termini centrali sia da termini che dipendono dai momenti angolari orbitali e di spin dei nucleoni presenti. Tuttavia, molti fenomeni nucleari possono essere spiegati con il semplice utilizzo di un'interazione puramente centrale, che dipenda cioè dalla sola distanza relativa tra i nucleoni. Per questo motivo, nel seguito della trattazione  $H_{res}$  verrà modellizzata dalla seguente espansione [6]:

$$H_{res} = \sum_{i < j}^B V(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|) \equiv \sum_{i < j}^B V_{ij} \quad , \quad (2.12)$$

ovvero come una somma di potenziali centrali a due corpi. Se il core è costituito da numeri magici (o almeno semi-magici) di protoni e neutroni, come imposto nella precedente sezione, ed è di conseguenza dotato di notevole stabilità, l'approssimazione di separazione tra core e nucleoni di valenza risulta accettabile e conduce ad un buon accordo con i dati sperimentali.

L'interazione residua (2.12), essendo costituita da potenziali centrali, è rotazionalmente invariante e di conseguenza commuta sia con il quadrato del momento angolare totale  $(\vec{J})^2$  sia con  $J_z$ ; inoltre, fissato l'autospazio di  $(\vec{J})^2$ , essa è indipendente dall'autovettore di  $J_z$ . Da un punto di vista sperimentale, la scelta dell'espressione (2.12) per  $H_{res}$  trova la propria giustificazione nel preciso valore di  $J$  associato ad ogni livello energetico e nella mancanza di uno splitting tra livelli caratterizzati dallo stesso valore di  $J$ , ma da un diverso valore di  $M$ . Nelle prossime sezioni verrà sviluppata la procedura per la determinazione delle autofunzioni di  $H_{val}$  e per il calcolo delle correzioni agli autovalori imperturbati. Prima di poter fare ciò, è necessario introdurre preliminarmente il concetto di "spazio di valenza", che definisce le orbite di particella singola accessibili ai nucleoni di valenza. Il principio di esclusione di Pauli nega a questi ultimi l'accesso alle sub-shell di core, poiché già completamente occupate. A priori, nulla vieta invece l'accesso alle sub-shell superiori, che possono essere energeticamente anche molto distanti dal core. Tuttavia, se l'intento è quello di dare una giustificazione teorica ai soli primi stati eccitati di un certo nucleo (che non si distanzino dallo stato fondamentale per più di qualche  $MeV$ ), è possibile prendere in considerazione solamente le prime sub-shell disponibili, evitando l'utilizzo di uno spazio di Hilbert inutilmente esteso.

Come descritto in [7], un metodo efficace per determinare l'opportuno spazio di valenza è quello di considerare, dato un nucleo con due nucleoni identici di valenza, il nucleo che ne contiene uno solo ed osservarne lo spettro energetico. Quest'ultimo appare caratterizzato da alcuni livelli eccitati interpretabili con l'occupazione da parte del nucleone delle diverse sub-shell superiori al core, come discusso precedentemente. La distanza energetica tra questi livelli eccitati e lo stato fondamentale fornisce una stima sull'entità della separazione tra le varie sub-shell e può quindi indicare l'adeguato spazio di valenza da adottare.

### 3 Nuclei con due nucleoni di valenza

I nuclei che possiedono due nucleoni di valenza rappresentano naturalmente i casi più semplici da trattare. Per semplicità, la trattazione verterà sui nuclei caratterizzati da un numero magico o semi-magico di protoni o di neutroni, in modo che i nucleoni di valenza siano identici.

In generale, lo spazio di Hilbert associato ad un sistema di due particelle è dato dal prodotto tensore degli spazi di particella singola:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}^{(1)} \otimes \mathcal{H}^{(2)} \quad . \quad (3.1)$$

L'autofunzione energetica che descrive un sistema di due generiche particelle non interagenti e sottoposte al potenziale (2.10) è data dal prodotto delle due autofunzioni di particella singola:

$$\Psi(1, 2) = \psi_{n_1 l_1 j_1 m_1}(1) \psi_{n_2 l_2 j_2 m_2}(2) \quad , \quad (3.2)$$

dove  $(1, 2)$  rappresenta una notazione abbreviata per indicare l'insieme delle variabili spaziali e di spin associate alla prima e alla seconda particella. Trascurando le componenti radiali e fissando i numeri quantici  $l$  e  $j$  per entrambe le autofunzioni, al variare di  $-j_1 < m_1 < j_1$  e  $-j_2 < m_2 < j_2$  l'insieme delle (3.2) costituisce una base per il seguente sottospazio di (3.1):

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_{j_1} \otimes \mathcal{H}_{j_2} \quad , \quad (3.3)$$

dove gli spazi fattori denotano gli autospazi di  $(\vec{J}_1)^2$  e  $(\vec{J}_2)^2$  associati ai valori scelti di  $j_1$  e  $j_2$ .

Accoppiando  $\vec{J}_1$  e  $\vec{J}_2$ , è possibile definire una nuova base di (3.3) tramite le autofunzioni comuni di  $(\vec{J})^2 = (\vec{J}_1 + \vec{J}_2)^2$  e  $J_z = J_{1,z} + J_{2,z}$ . Esprimendo queste ultime in termini delle (3.2):

$$\Psi_{j_1 j_2, JM}(1, 2) = \sum_{m_1, m_2} \langle j_1 m_1, j_2 m_2 | JM \rangle \psi_{n_1 l_1 j_1 m_1}(1) \psi_{n_2 l_2 j_2 m_2}(2) \quad , \quad (3.4)$$

dove  $|j_1 - j_2| < J < j_1 + j_2$  e  $-J < M < J$ , con  $J$  ed  $M$  interi. I simboli tra parentesi angolari denotano i coefficienti di Clebsch-Gordan e sono tali da normalizzare le autofunzioni.

La descrizione del sistema composto dai due nucleoni di valenza, in aggiunta, deve essere compatibile con il principio di indistinguibilità tra fermioni identici. In conseguenza di ciò, l'autofunzione energetica associata deve risultare antisimmetrica per lo scambio dei nucleoni. Se questi ultimi non sono interagenti (ovvero, l'Hamiltoniana che li descrive è  $\hat{H}_0$ ), le autofunzioni corrette si ottengono antisimmetrizzando le (3.2):

$$\Psi^{as}(1, 2) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\psi_{j_1 m_1}(1) \psi_{j_2 m_2}(2) - \psi_{j_1 m_1}(2) \psi_{j_2 m_2}(1)] \quad ; \quad (3.5)$$

nella precedente espressione sono stati omissi per brevità i numeri quantici  $n$  ed  $l$ , che d'ora in avanti verranno sempre sottintesi. Queste ultime autofunzioni definiscono un modello di rappresentazione noto come *schema- $m$* : tale denominazione deriva dal fatto che esse sono autofunzioni *antisimmetriche* comuni di  $H_0$  e  $J_z = J_{1,z} + J_{2,z}$ , per l'autovalore  $\hbar M = \hbar(m_1 + m_2)$ . Inoltre, le (3.5) rappresentano stati *entangled*: l'indistinguibilità tra particelle identiche comporta quindi l'impossibilità di associare, a priori, una funzione d'onda ben definita ad un determinato nucleone.

Se si ammette l'esistenza di un'interazione residua tra i due nucleoni di valenza, è necessario perturbare  $H_0$  con il potenziale centrale a due corpi  $V_{12}$  (caso particolare di (2.12)), il quale agisce sullo spazio (3.1). Il primo passo per la costruzione delle autofunzioni dell'Hamiltoniana completa consiste nella trasformazione dallo *schema- $m$*  delle (3.5) ad uno *schema- $J$* : per definizione, quest'ultimo modello di rappresentazione caratterizza l'insieme di autofunzioni *antisimmetriche* comuni di  $H_0$ ,  $(\vec{J})^2 = (\vec{J}_1 + \vec{J}_2)^2$  e  $J_z = J_{1,z} + J_{2,z}$ .



### 3.1 Spazio di valenza a sub-shell singola

Per alcuni nuclei, è possibile descrivere efficacemente il relativo spettro a bassa energia considerando uno spazio di valenza costituito da una sola sub-shell, associata ai numeri quantici  $n, l$  (sempre sottintesi) e  $j$ . In questa situazione, i nucleoni sono quindi associati alla configurazione  $(nl_j)^2 \equiv (j)^2$ .

#### 3.1.1 Funzione d'onda nello schema- $J$

Prendendo in considerazione una sola sub-shell, le funzioni d'onda che descrivono i nucleoni di valenza appartengono al sottospazio (3.3), dove ora  $j_1 = j_2 \equiv j$ . Quest'ultimo sottospazio può essere scomposto in una somma diretta di autospazi di  $(\vec{J})^2$ , ciascuno dei quali associato ad un valore intero del numero quantico  $J$  compreso tra 0 e  $2j$ .

Nella situazione in esame, dall'insieme delle (3.5), al variare di  $-j < m_1, m_2 < j$ , si ottiene la funzione identicamente nulla per ogni coppia di valori uguali di  $m_1$  e  $m_2$ : quindi, le (3.5) non costituiscono una base per (3.3). In conseguenza di questo fatto, anche le autofunzioni nello schema- $J$  ottenute a partire dalle (3.5) non costituiscono una base: in altre parole, per alcuni valori di  $J$  (a priori permessi dalle regole di composizione) non esistono stati antisimmetrici per lo scambio dei nucleoni. Esplicitamente, tramite le (3.5) è possibile costruire le seguenti autofunzioni nello schema- $J$  [6]:

$$\Psi_{j^2, JM}^{as}(1, 2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{m_1, m_2} \langle jm_1, jm_2 | JM \rangle [\psi_{jm_1}(1)\psi_{jm_2}(2) - \psi_{jm_1}(2)\psi_{jm_2}(1)] \quad , \quad (3.6)$$

per un certo set di valori di  $J$  e  $M$ . Sfruttando una nota proprietà dei coefficienti di Clebsch-Gordan (dimostrata in [8]),

$$\langle jm_1, jm_2 | JM \rangle = (-1)^{2j-J} \langle jm_2, jm_1 | JM \rangle \quad , \quad (3.7)$$

è possibile esprimere le (3.6) in termini delle (3.4):

$$\Psi_{j^2, JM}^{as}(1, 2) = \frac{1}{2} [\Psi_{j^2, JM}(1, 2) - (-1)^{2j-J} \Psi_{j^2, JM}(1, 2)] = \frac{1}{2} \Psi_{j^2, JM}(1, 2) [1 - (-1)^{2j-J}] \quad , \quad (3.8)$$

dove, rispetto a (3.6), è comparso un nuovo fattore di normalizzazione. L'espressione (3.8) è stata ricavata accoppiando il momento angolare del nucleone associato alle variabili "1" con quello del nucleone associato alle variabili "2". Dal momento che  $2j$  assume solo valori dispari, da (3.8) si ottengono autofunzioni identicamente nulle per ogni valore dispari di  $J$ : quindi, lo schema- $J$  per la descrizione del sistema di valenza è costituito da tutte e sole le autofunzioni (3.4) associate a valori *pari* di  $J$ .

In conclusione, è stato dimostrato che, come conseguenza del principio di indistinguibilità tra particelle identiche, gli unici autospazi di  $(\vec{J})^2$  utilizzabili per la descrizione del sistema di due nucleoni identici sono quelli associati a valori pari di  $J$ , poiché sono gli unici a possedere la necessaria proprietà di antisimmetria.

#### 3.1.2 Autovalori ed autofunzioni dell'Hamiltoniana completa

Le autofunzioni nello schema- $J$  trovate nel precedente paragrafo costituiscono una base per il seguente sottospazio di (3.3) (con  $j_1 = j_2 \equiv j$ ):

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{J \text{ pari}}^{2j-1} \mathcal{H}_J = \mathcal{H}_0 \oplus \dots \oplus \mathcal{H}_{2j-1} \quad , \quad (3.9)$$

dove  $\mathcal{H}_J$  denota un certo autospazio di  $(\vec{J})^2$ ; nel seguito, tale notazione manterrà sempre quest'ultimo significato. Poiché la funzione d'onda che descrive il sistema di due nucleoni identici è necessariamente contenuta all'interno di

(3.9), è sufficiente considerare la restrizione dell'Hamiltoniana completa  $H_{val}$  a quest'ultimo sottospazio. Modellizzando l'interazione residua per mezzo del potenziale centrale  $V_{12}$ , le (3.4) con valori pari di  $J$  sono simultaneamente autofunzioni anche di  $H_{val}$ . Allora, scegliendo queste ultime come base di (3.9),  $H_{val}$  è rappresentata da una matrice diagonale. I valori medi calcolati sulle autofunzioni di base (ovvero, gli elementi di matrice appartenenti alla diagonale) sono dati da:

$$\begin{aligned} \int (\Psi_{j^2, JM}^{as})^* \hat{H}_{val} \Psi_{j^2, JM}^{as} d(1)d(2) &= \int (\Psi_{j^2, JM}^{as})^* (\hat{H}_0 + \hat{H}_{val}) \Psi_{j^2, JM}^{as} d(1)d(2) = \\ &= 2\epsilon_j + \Delta E_j(J) \quad , \end{aligned} \quad (3.10)$$

dove la correzione all'energia imperturbata, denotata con  $\Delta E_j(J)$ , è una funzione *iniettiva* di  $J$ . Di conseguenza, la presenza dell'interazione residua comporta una rimozione parziale della degenerazione di (3.9), generandone la suddivisione in  $(2j - 1)/2$  differenti autospazi energetici.

In tutta generalità, la conseguenza più rilevante di questo splitting è il marcato abbassamento, rispetto al valore imperturbato, dell'unico stato caratterizzato da  $J = 0$ , il quale assurge a stato fondamentale del sistema. Dettagliate rappresentazioni grafiche di questo effetto sono presenti in [6] e [9]. Se i due nucleoni sono descritti da quest'ultimo stato, essi vengono detti "appaiati". Nella letteratura, l'interazione che interessa le coppie di nucleoni appaiati è nota come "interazione di pairing". Essendo associata all'abbassamento energetico più netto tra tutti quelli subiti dagli stati di buon momento angolare, l'interazione di pairing rappresenta la componente più intensa dell'interazione residua totale agente sui nucleoni di valenza. Una spiegazione di questa proprietà risiede nella struttura peculiare dell'autofunzione associata a  $J = 0$ . Da (3.4) si può notare come quest'ultima si ottenga da una miscela di prodotti di autofunzioni di particella singola caratterizzate da valori di  $m$  opposti:

$$\Psi_{j^2, 00}^{as}(1, 2) = \sum_{m=-j}^j \langle jm, j - m | 00 \rangle \psi_{jm}(1) \psi_{j-m}(2) \quad ; \quad (3.11)$$

ciascuno di questi prodotti può essere ottenuto sperimentalmente a seguito di un'opportuna misura eseguita sul sistema fisico, con probabilità data dal quadrato del relativo coefficiente di Clebsch-Gordan. L'abbassamento in energia subito da (3.11) trova quindi spiegazione osservando che autofunzioni caratterizzate dallo stesso valore di  $j$  e da valori di  $m$  opposti sono interamente sovrapposte: in questa situazione, in termini di densità di probabilità, le particelle occupano la stessa regione di spazio e tendono ad interagire molto più intensamente. Una discussione più dettagliata di questo fenomeno, sviluppata nell'ambito della teoria degli urti, è consultabile in [10].

## 3.2 Spazio di valenza con $m$ subshell

L'utilizzo di spazi di valenza costituiti da molteplici sub-shell conduce generalmente ad un migliore accordo tra calcoli teorici e risultati sperimentali. I modelli di questo tipo presentano una caratteristica peculiare che li distingue nettamente dai più semplici modelli con spazi a sub-shell singola: in questa nuova situazione, si ammette che i nucleoni di valenza possano occupare le diverse sub-shell disponibili disponendosi potenzialmente in ogni possibile configurazione permessa. In conseguenza di questo fatto si realizza un effetto noto come "mescolamento di configurazioni", che comporta importanti complicazioni nel calcolo delle correzioni degli autovalori energetici imperturbati e nella determinazione delle autofunzioni dell'Hamiltoniana completa. La generica configurazione associabile ai nucleoni di valenza è indicata con  $(j_h)(j_k)$ , con gli indici  $h$  e  $k$  eventualmente uguali e compresi tra 1 ed  $m$ .

### 3.2.1 Funzione d'onda nello schema- $J$

Esistono due tipi di configurazioni possibili per il sistema di nucleoni di valenza: il primo tipo è associato a nucleoni posti all'interno di una stessa sub-shell tra quelle permesse, mentre il secondo è associato a nucleoni posti in sub-shell differenti. Per quanto riguarda il primo tipo di configurazione, le autofunzioni nello schema- $J$  sono state determinate nel paragrafo 3.1.1: si tratta di tutte e sole le (3.4) associate a valori pari di  $J$ .

Se i nucleoni sono associati ad una configurazione del secondo tipo, le relative autofunzioni nello schema- $J$  possono essere determinate seguendo la stessa procedura descritta in precedenza. In questa situazione, le autofunzioni dell'Hamiltoniana imperturbata (3.5), al variare di  $-j_1 < m_1 < j_1$  e  $-j_2 < m_2 < j_2$  (dove ora  $j_1 \neq j_2$ ), costituiscono una base per il sottospazio (3.3). Di conseguenza, anche le autofunzioni nello schema- $J$  ottenute da combinazioni lineari delle (3.5) ne formano una base. Queste combinazioni risultano essere del tutto simili alle (3.6):

$$\Psi_{j_1 j_2, JM}^{as}(1, 2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{m_1, m_2} \langle j_1 m_1, j_2 m_2 | JM \rangle [\psi_{j_1 m_1}(1) \psi_{j_2 m_2}(2) - \psi_{j_1 m_1}(2) \psi_{j_2 m_2}(1)] \quad . \quad (3.12)$$

In questo caso, l'antisimmetria delle autofunzioni imperturbate (3.5) non pone alcuna limitazione all'accoppiamento dei momenti angolari: in altre parole, esistono autospazi antisimmetrici di  $(\vec{J})^2$  per ogni valore intero di  $J$  tale che  $|j_1 - j_2| < J < j_1 + j_2$ .

### 3.2.2 Autovalori ed autofunzioni dell'Hamiltoniana completa

Se si assume che, fissate le  $m$  sub-shell, siano realizzabili tutte le configurazioni permesse per i due nucleoni di valenza, lo spazio di Hilbert su cui agisce l'Hamiltoniana completa è dato da una somma diretta di tutti i possibili spazi di configurazione singola (ciascuno dei quali della forma di (3.3)):

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{h \leq k}^m (\mathcal{H}_{j_h} \otimes \mathcal{H}_{j_k}) = (\mathcal{H}_{j_1} \otimes \mathcal{H}_{j_1}) \oplus (\mathcal{H}_{j_1} \otimes \mathcal{H}_{j_2}) \oplus \dots \oplus (\mathcal{H}_{j_m} \otimes \mathcal{H}_{j_m}) \quad . \quad (3.13)$$

Gli spazi-addendi che compaiono in (3.13) possono essere classificati in spazi del primo tipo o in spazi del secondo tipo, a seconda della configurazione che li caratterizza. Per ciascuno degli  $m$  spazi-addendi del primo tipo, l'insieme delle (3.4) con valori pari di  $J$ , come visto nel paragrafo 3.1.1, costituisce una base per un sottospazio della medesima forma di (3.9):

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{J \text{ pari}}^{2j_l - 1} \mathcal{H}_J = \mathcal{H}_0 \oplus \dots \oplus \mathcal{H}_{2j_l - 1} \quad , \quad (3.14)$$

con  $1 \leq l \leq m$ . L'insieme delle (3.12), invece, costituisce una base per ogni spazio-addendo del secondo tipo. Unendo in somma diretta tutti i sottospazi (3.14) e tutti gli spazi-addendi del secondo tipo, si ottiene un sottospazio di (3.13) che può essere espresso nella seguente forma:

$$\mathcal{H} = \underbrace{\mathcal{H}_{J_1} \oplus \dots \oplus \mathcal{H}_{J_1}}_{a_{J_1} \text{ volte}} \oplus \underbrace{\mathcal{H}_{J_2} \oplus \dots \oplus \mathcal{H}_{J_2}}_{a_{J_2} \text{ volte}} \oplus \dots \oplus \mathcal{H}_{J_m} \quad , \quad (3.15)$$

ovvero come somma diretta di autospazi antisimmetrici di  $(\vec{J})^2$ , ciascuno dei quali associato ad un certo valore di  $J$  e presente in  $a_J$  versioni indipendenti. Scegliendo come base di quest'ultimo sottospazio un'opportuna unione delle basi (3.4) e delle basi (3.12) e considerando la restrizione dell'Hamiltoniana completa al solo sottospazio stesso, la matrice rappresentativa risulta essere diagonale a blocchi (indicati con  $M_{J_i, M_i}$ ):

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} \mathcal{M}_{J_1, -J_1} & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{M}_{J_1, J_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathcal{M}_{J_2, -J_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \mathcal{M}_{J_k, J_k} \end{pmatrix} . \quad (3.16)$$

L'ordine dei blocchi associati ad uno stesso valore di  $J$  è pari ad  $a_J$ . Tramite la risoluzione di un'opportuna equazione secolare, la diagonalizzazione di ciascun blocco permette la determinazione di una base di (3.15) composta da autofunzioni di  $H_{val}$ . In generale, queste ultime non appartengono più ad una configurazione ben definita dei nucleoni di valenza. Dall'altro lato, al fine di calcolare le correzioni agli autovalori energetici imperturbati è sufficiente procedere con la diagonalizzazione di un solo blocco per ogni valore di  $J$ , poiché tali correzioni, come in precedenza, sono indipendenti da  $M$ . Il numero potenziale di correzioni differenti è pari all'ordine dei blocchi per il valore scelto di  $J$ .

La procedura di diagonalizzazione descritta nel seguito è tratta da [6]. Si supponga che, definiti i valori di  $J$  ed  $M$ , esistano  $k$  autofunzioni antisimmetriche indipendenti, denotate con  $\Psi_{j^2, JM_i}^{as}$  ( $i = 1, \dots, k$ ). Il relativo blocco all'interno di (3.16) è quindi di ordine  $k$ . L'insieme delle  $\Psi_{j^2, JM_i}^{as}$  è ortonormale, poiché ogni autofunzione è contenuta all'interno di un differente autospazio dell'Hamiltoniana imperturbata, che è un operatore autoaggiunto. Le autofunzioni di  $H_{val}$  si ottengono da un'opportuna combinazione lineare:

$$H_{val} \sum_{i=1}^k \alpha_i \Psi_{j^2, JM_i}^{as} = E \sum_{i=1}^k \alpha_i \Psi_{j^2, JM_i}^{as} , \quad (3.17)$$

dove i coefficienti  $\alpha_i$  sono scelti in modo tale da normalizzare la funzione finale, e dunque soddisfano:

$$\sum_{i=1}^k \alpha_i^2 = 1 . \quad (3.18)$$

Prendendo il prodotto scalare, a sinistra, con  $\Psi_{j^2, JM_l}^{as}$ , la somma a secondo membro si semplifica per via dell'ortonormalità dell'insieme di autofunzioni:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k \alpha_i \int (\Psi_{j^2, JM_l}^{as})^* H_{val} \Psi_{j^2, JM_i}^{as} d(1)d(2) &\equiv \sum_{i=1}^k \alpha_i H_{li} = \alpha_l E \Rightarrow \\ \Rightarrow \sum_{i \neq l}^k \alpha_i H_{li} + \alpha_l (H_{ll} - E) &= 0 , \end{aligned} \quad (3.19)$$

dove i termini  $H_{li}$  sono gli elementi del blocco di (3.16) associato a  $J$  e  $M$ . Considerando tutti i valori di  $l = 1, \dots, k$ , le (3.19) costituiscono un sistema lineare di  $k$  equazioni per le  $k$  incognite  $\alpha_i$ . Richiedere che il sistema abbia soluzione è equivalente a richiedere che il determinante della matrice dei coefficienti sia nullo:

$$\det \begin{pmatrix} H_{11} - E & H_{12} & \dots & H_{1k} \\ H_{21} & H_{22} - E & \dots & H_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{k1} & H_{k2} & \dots & H_{kk} - E \end{pmatrix} = 0 \quad . \quad (3.20)$$

Quest'ultima risulta essere un'equazione di ordine  $k$  per l'autovalore  $E$ , e può quindi fornirne  $k$  soluzioni potenzialmente differenti. Una volta determinati i vari elementi di matrice che compaiono in (3.20), ciascuna di queste soluzioni, se inserita in (3.19), determina univocamente l'insieme  $\{\alpha_i\}_{i=1,\dots,k}$ , e dunque l'autofunzione di  $H_{val}$ . Il modulo quadro di  $\alpha_l$  determina la probabilità che, in seguito ad un'opportuna misura eseguita sul sistema, si ottenga come autofunzione finale la  $\Psi_{j^2, JMl}^{as}$  e si realizzi la configurazione associata.

Il blocco associato a  $J = 0$  è in generale di ordine  $m$ , ovvero pari al numero di sub-shell disponibili. Questo fatto si spiega osservando che l'accoppiamento dei momenti angolari può produrre uno stato con  $J = 0$  se e solo se  $j_1 = j_2$ ; all'interno di (3.13) esistono  $m$  prodotti tensori tra spazi associati allo stesso valore di  $j$ , quindi il numero di stati con  $J = 0$  è esattamente  $m$ . In tutta generalità, come illustrato graficamente da [6] ed [10], il calcolo degli autovalori tramite (3.20) produce un deciso abbassamento per uno solo degli  $m$  stati (non necessariamente quello associato alla sub-shell più bassa in energia), mentre mantiene tutti gli altri nelle vicinanze dei livelli imperturbati. Tale abbassamento, dovuto all'interazione di pairing, risulta più marcato di quello subito da qualunque altro stato con  $J \neq 0$ : lo stato fondamentale risulta quindi, in generale, caratterizzato da  $J = 0$ , e si ottiene un ottimo accordo, anche dal punto di vista quantitativo, con i risultati sperimentali.

## 4 Nuclei con molteplici nucleoni di valenza

Nel seguente capitolo verrà sviluppata la procedura teorica per determinare lo spettro a bassa energia dei nuclei che possiedono  $n$  nucleoni di valenza identici. Come in precedenza, viene assunta l'assenza di interazione tra questi ultimi ed il core, caratterizzato da numeri magici o semi-magici di protoni e neutroni.

In generale, un sistema composto da  $n$  particelle è descritto dal seguente spazio di Hilbert:

$$\mathcal{H} = \bigotimes_i^n \mathcal{H}_i = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \otimes \dots \otimes \mathcal{H}_n \quad , \quad (4.1)$$

dove i singoli fattori rappresentano gli spazi di particella singola. La funzione d'onda di un sistema di  $n$  nucleoni identici deve risultare, come in precedenza, antisimmetrica per ogni possibile scambio tra nucleoni. Se questi ultimi non interagiscono l'uno con l'altro e sono sottoposti al potenziale (2.10), l'Hamiltoniana che li descrive è  $H_0$  e le relative autofunzioni definiscono uno schema- $m$  [8], ottenuto da una generalizzazione di (3.5):

$$\Psi^{as}(1, \dots, n) = \frac{1}{\sqrt{n!}} \sum_{\sigma} (-1)^s \prod_{i=1}^n \psi_{j_i m_i}(\sigma(i)) \quad . \quad (4.2)$$

Nella precedente espressione, la sommatoria è eseguita su tutte le possibili permutazioni dell'insieme  $\{i\}_{i=1\dots n}$ , con gli elementi disposti inizialmente in ordine crescente;  $s$  è pari al numero di scambi effettuati tra gli elementi dell'insieme per ottenere l'ordine finale.

Analogamente al caso discusso nel precedente capitolo, l'Hamiltoniana che descrive un sistema di  $n$  nucleoni interagenti si ottiene perturbando  $H_0$  con un termine di interazione residua, dato da una somma di potenziali centrali a due corpi [6]:

$$H_{res} = \sum_{i < j}^n V(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|) \equiv \sum_{i < j}^n V_{ij} \quad . \quad (4.3)$$

Al fine di rappresentare tale Hamiltoniana tramite una matrice che sia almeno diagonale a blocchi, è necessario effettuare una trasformazione dallo schema- $m$  ad uno schema- $J$ , utilizzando quindi un opportuno insieme di autofunzioni comuni di  $(\vec{J})^2$  e  $J_z$ . L'accoppiamento di  $n$  momenti angolari ( $n > 2$ ) presenta in generale alcune complicazioni rispetto al caso particolare discusso nel precedente capitolo.

## 4.1 Spazio di valenza a sub-shell singola

Nonostante considerare spazi di valenza a sub-shell singola conduca raramente ad un buon accordo con le evidenze sperimentali (soprattutto se sono presenti molteplici nucleoni di valenza), gli spazi di questo tipo rappresentano il modello più semplice per la descrizione di uno spettro energetico e costituiscono il punto di partenza per la realizzazione di modelli più generali. In questa situazione, i nucleoni di valenza si trovano in configurazione  $(j)^n$ . Fissata la sub-shell, a causa del principio di esclusione, il numero massimo di nucleoni disponibili al suo interno è pari a  $2j$  (un'unità in meno rispetto alla dimensione della sub-shell, poiché questa è intesa essere parzialmente occupata). Tuttavia, in termini di composizione dei momenti angolari, le configurazioni con  $n$  e  $2j + 1 - n$  nucleoni sono del tutto equivalenti, come illustrato in [3]; in altre parole, in entrambi i casi si ottiene lo stesso numero di autospazi indipendenti per ogni valore di  $J$ . Quindi, è sufficiente considerare sub-shell che contengano al massimo  $(2j + 1)/2$  nucleoni.

### 4.1.1 Funzione d'onda nello schema- $J$

Lo spazio di Hilbert a cui appartiene la funzione d'onda per il sistema di nucleoni di valenza è dato da un sottospazio di (4.1):

$$\mathcal{H} = \underbrace{\mathcal{H}_j \otimes \mathcal{H}_j \otimes \dots \otimes \mathcal{H}_j}_{n \text{ volte}} \quad , \quad (4.4)$$

dove  $\mathcal{H}_j$  denota un certo autospazio del quadrato del momento angolare di particella singola. Il set di autofunzioni imperturbate (4.2), al variare di  $\{m_i\}_{i=1, \dots, n}$ , non costituisce una base per (4.4): se  $m_h = m_k$ , per qualunque coppia di valori di  $h$  e  $k$ , si ottiene infatti una funzione identicamente nulla. Allo stesso modo, anche il set di autofunzioni nello schema- $J$  non costituisce una base: come in precedenza, non tutti i valori di  $J$  permessi dalle regole di composizione sono associati ad autospazi di  $(\vec{J})^2$  completamente antisimmetrici.

La procedura più naturale per ottenere le autofunzioni antisimmetriche comuni di  $(\vec{J})^2$  e  $J_z$  consiste nell'accoppiamento successivo dei momenti angolari  $\vec{J}_i$  di particella singola, scegliendo numeri quantici permessi dal principio di esclusione. Tuttavia, per una ragione che sarà chiarita nel paragrafo successivo, risulta più conveniente adottare una procedura di accoppiamento differente [7]. Quest'ultima prevede la separazione del sistema di nucleoni di valenza in due sotto-sistemi: il primo è formato da  $n - 2$  nucleoni scelti arbitrariamente, mentre il secondo è costituito dalla coppia di nucleoni rimanenti. Denotando con  $\vec{J}'$  il momento angolare totale del primo sotto-sistema e con  $\vec{K}$  quello del secondo, il primo passo consiste nella costruzione delle autofunzioni antisimmetriche comuni di  $(\vec{J}')^2$  e  $J'_z$  e, separatamente, di  $(\vec{K})^2$  e  $K_z$ . Se, per esempio, i nucleoni del secondo sotto-sistema sono associati agli indici "n - 1" ed "n", le relative

autofunzioni antisimmetriche sono date da:

$$\Psi_{j^2, KH}^{as}(n-1, n) = \sum_{m_{n-1}, m_n} \langle jm_{n-1}, jm_n | KH \rangle \psi_{jm_{n-1}}(n-1) \psi_{jm_n}(n) \quad , \quad (4.5)$$

dove  $K$  e  $H$  denotano i numeri quantici associati agli autovettori di  $(\vec{K})^2$  e  $K_z$ , con  $K$  che può assumere tutti i valori pari compresi tra 0 e  $2j-1$ . Le autofunzioni antisimmetriche per il primo sotto-sistema sono ottenibili tramite accoppiamenti successivi. Nel seguito,  $\vec{I}_l$  (con  $l \geq 1$ ) denoterà il momento angolare derivante dall'accoppiamento  $l$ -esimo, mentre i numeri quantici associati agli autovettori di  $(\vec{I}_l)^2$  e  $I_{l,z}$  saranno indicati con  $I_l$  ed  $M_l$ . Per semplicità, si consideri come accoppiamento di partenza quello delle particelle associate alle variabili “1” e “2”. Le relative autofunzioni antisimmetriche sono analoghe alle (4.5):

$$\Psi_{j^2, I_1 M_1}^{as}(1, 2) = \sum_{m_1, m_2} \langle jm_1, jm_2 | I_1 M_1 \rangle \psi_{jm_1}(1) \psi_{jm_2}(2) \quad , \quad (4.6)$$

con valori pari di  $I_1$ . A questo punto,  $\vec{I}_1$  e  $\vec{J}_3$  vengono accoppiati per formare le autofunzioni comuni di  $(\vec{I}_2)^2$  e  $I_{2,z}$  (denotate con  $\Psi[j^2(I_1)j; I_2 M_2]$ ), le quali sono antisimmetriche solo per lo scambio tra i primi due nucleoni. Si può dimostrare [8] che l'autofunzione completamente antisimmetrica per il sistema costituito dalle particelle “1”, “2” e “3” è esprimibile come opportuna combinazione lineare delle  $\Psi[j^2(I_1)j; I_2 M_2]$ :

$$\Psi_{j^3, I_2 M_2 \alpha}^{as}(1, 2, 3) = \sum_{I_1} \langle j^2(I_1), j | j^3(I_2 \alpha) \rangle \Psi[j^2(I_1)j; I_2 M_2] \quad , \quad (4.7)$$

dove il numero quantico aggiuntivo  $\alpha$  è introdotto per distinguere eventuali autovettori antisimmetrici indipendenti associati agli stessi valori di  $I_2$  e  $M_2$ . I coefficienti che compaiono in (4.7) sono generalmente noti come “coefficients of fractional parentage” (letteralmente, “coefficienti di accoppiamento frazionario”) e nel seguito saranno denotati con l'acronimo “c.a.f”. Nella precedente espressione, essi sono scelti in modo tale da normalizzare la funzione. Le proprietà di simmetria del sistema permettono di affermare [7] che i c.a.f. non dipendono da  $M_2$  e inoltre non variano sostituendo il nucleone “3” con un altro appartenente al primo sotto-sistema. Si tratta inoltre di numeri reali, il cui quadrato fornisce la probabilità che si realizzi un preciso accoppiamento intermedio tra i primi due nucleoni, in seguito ad un'opportuna misura eseguita sul sistema.

Successivamente,  $\vec{I}_2$  e  $\vec{J}_4$  vengono accoppiati in modo da formare le  $\Psi[j^3(I_2 \alpha)j; I_3 M_3]$ , dove la notazione ha lo stesso significato visto in precedenza. Allora, l'autofunzione completamente antisimmetrica per le particelle “1”, “2”, “3” e “4” si ottiene dalla seguente combinazione lineare:

$$\Psi_{j^4, I_3 M_3 \beta}^{as}(1, 2, 3, 4) = \sum_{I_2, \alpha} \langle j^3(I_2 \alpha), j | j^4(I_3 \beta) \rangle \Psi[j^3(I_2 \alpha)j; I_3 M_3] \quad . \quad (4.8)$$

A questo punto, è possibile iterare la procedura descritta fino ad ottenere il set di autofunzioni completamente antisimmetriche per i primi  $n-2$  nucleoni. Una volta ottenute queste,  $\vec{I}_{n-3}$  e  $\vec{K}$  vengono accoppiati per ottenere le autofunzioni nello schema- $J$  per l'intero sistema di nucleoni di valenza, denotate con  $\Psi[j^{n-2}(I_{n-3} \gamma)j^2(K); JM]$  (antisimmetriche solo per scambi che coinvolgono nucleoni appartenenti allo stesso sotto-sistema). Come in precedenza, il set di autofunzioni completamente antisimmetriche si ottiene da una combinazione lineare delle  $\Psi[j^{n-2}(I_{n-3} \gamma)j^2(K); JM]$ :

$$\Psi_{j^n, JM \lambda}^{as}(1, \dots, n) = \sum_{I_{n-3}, \gamma, K} \langle j^{n-2}(I_{n-3} \gamma), j^2(K) | j^n(J \lambda) \rangle \Psi[j^{n-2}(I_{n-3} \gamma), j^2(K); JM] \quad , \quad (4.9)$$

dove i coefficienti, anch'essi denominati “c.a.f.”, posseggono tutte le proprietà viste in precedenza. A causa del principio di indistinguibilità e della conseguente antisimmetrizzazione delle funzioni d'onda, quelli generati dalle (4.9), per i

valori di  $J$  permessi, rappresentano gli unici autospazi di  $(\vec{J})^2$  a cui può essere associato un sistema di  $n$  nucleoni di valenza identici.

#### 4.1.2 Autovalori ed autofunzioni dell'Hamiltoniana completa

Come già accennato in precedenza, l'insieme delle (4.9) non costituisce una base per lo spazio di Hilbert completo (4.4), ma solo per il suo seguente sottospazio:

$$\mathcal{H} = \underbrace{\mathcal{H}_{J_1} \oplus \dots \oplus \mathcal{H}_{J_1}}_{b_{J_1} \text{ volte}} \oplus \underbrace{\mathcal{H}_{J_2} \oplus \dots \oplus \mathcal{H}_{J_2}}_{b_{J_2} \text{ volte}} \oplus \dots \oplus \mathcal{H}_{J_m} \quad , \quad (4.10)$$

dove ogni  $\mathcal{H}_{J_i}$  (con  $J_h \neq J_k, \forall h \neq k$ ) rappresenta un certo autospazio di  $(\vec{J})^2$ , del quale esistono  $b_{J_i}$  versioni indipendenti costituite da vettori antisimmetrici. Nella notazione utilizzata in (4.9),  $b_{J_i}$  corrisponde al numero di valori possibili per il numero quantico aggiuntivo  $\lambda$ , per quel dato valore di  $J$ . Considerando la restrizione dell'Hamiltoniana completa  $H_{val}$  a quest'ultimo sottospazio e scegliendo le (4.9) come base, la matrice rappresentativa è diagonale a blocchi (indicati con  $\mathcal{M}_{J_i, M_i}$ ):

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} \mathcal{M}_{J_1, -J_1} & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{M}_{J_1, J_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathcal{M}_{J_2, -J_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \mathcal{M}_{J_m, J_m} \end{pmatrix} \quad , \quad (4.11)$$

dove l'ordine di ogni blocco, dipendente da  $J$  ma non da  $M$ , è pari a  $b_{J_i}$ .

La diagonalizzazione di ciascun blocco, seguendo la stessa procedura descritta nel paragrafo 3.2.2, conduce alla determinazione delle autofunzioni di  $H_{val}$  (ovvero, degli stati stazionari associabili al sistema di nucleoni di valenza). Per il calcolo delle correzioni all'energia imperturbata è sufficiente diagonalizzare un solo blocco per ogni valore di  $J$ , essendo esse indipendenti da  $M$ .

Al fine di diagonalizzare un determinato blocco, è necessario calcolare preliminarmente i relativi elementi di matrice. Siccome l'interazione residua è espressa da una somma di potenziali a due corpi, risulta di grande utilità la procedura di accoppiamento seguita per costruire le (4.9). In queste ultime, due dei nucleoni di valenza vengono distinti da tutti gli altri. Distinguendo i nucleoni associati alle variabili "i" e "j", il calcolo del contributo del potenziale  $V_{ij}$  (tratto dall'interazione residua (4.3)) all'elemento di matrice può essere eseguito direttamente. Si consideri, ad esempio, il contributo dovuto a  $V_{12}$ . Quest'ultimo termine di potenziale agisce solo sulle funzioni d'onda contrassegnate dalle variabili "1" e "2", lasciando invariate le altre. Allora, distinguendo i primi due nucleoni dagli altri [7]:

$$\begin{aligned} & \int (\Psi_{j^n, JM\lambda}^{as})^* V_{12} \Psi_{j^n, JM\lambda}^{as} d(1)d(2) \dots d(n) = \\ & = \sum_{I_{n-3}, \gamma, K} \langle j^{n-2}(I_{n-3}\gamma), j^2(K) | j^n(J\lambda') \rangle \langle j^{n-2}(I_{n-3}\gamma), j^2(K) | j^n(J\lambda) \rangle \times \end{aligned}$$



$$\times \sum_{M_{n-3}, H} (\langle I_{n-3} \gamma M_{n-3}, KH | JM \rangle)^2 \int (\Psi_{j^2, KH}^{as})^* V_{12} \Psi_{j^2, KH}^{as} d(1)d(2) \quad , \quad (4.12)$$

dove ogni numero quantico ha lo stesso significato espresso nel paragrafo 4.1.1 . Il calcolo dell'elemento di matrice (non necessariamente appartenente alla diagonale) inizia scomponendo le autofunzioni come mostrato in (4.9). Le  $\Psi[j^{n-2}(I_{n-3}\gamma)j^2(K); JM]$ , al variare di  $I_{n-3}$ ,  $\gamma$  e  $K$ , sono ortogonali tra loro. Dunque, come mostrato nella riga intermedia, gli unici prodotti che compaiono fuori dal prodotto scalare sono quelli tra c.a.f. con gli stessi valori dei suddetti numeri quantici. In generale, se esistono diverse autofunzioni indipendenti associate agli stessi valori di  $J$  ed  $M$ , i c.a.f. che ne costituiscono le espansioni (4.9) sono diversi tra loro. Come mostrato in (4.12), del prodotto scalare iniziale resta solo quello tra le funzioni associate agli indici "1" e "2", poiché  $V_{12}$  non agisce sulle  $\Psi_{j^{n-2}, I_{n-3} M_{n-3} \gamma}^{as}(1, \dots, n-2)$  (queste ultime sono normalizzate e sono state usate per costruire le  $\Psi[j^{n-2}(I_{n-3}\gamma)j^2(K); JM]$ , accoppiando  $\vec{I}_{n-3}$  e  $\vec{K}$ ). Infine, come visto nel paragrafo 3.1.2,  $V_{12}$  è diagonale nell'insieme di autofunzioni costituito dalle  $\Psi_{j^2, KH}^{as}$ : per questo motivo, fuori dall'integrale in (4.12) compaiono solo prodotti tra coefficienti di Clebsch-Gordan con gli stessi valori di  $M_{n-3}$  ed  $H$ .

Isolando una diversa coppia di nucleoni scelti arbitrariamente e seguendo la medesima procedura di accoppiamento, i c.a.f. che compaiono in (4.9) non variano. Inoltre, i  $n(n-1)/2$  potenziali  $V_{ij}$  che compaiono nell'interazione residua (4.3) sono formalmente uguali tra loro. Dunque, ciascuno di essi fornisce lo stesso contributo ad ogni elemento di matrice. Si giunge quindi alla seguente formula generale:

$$\begin{aligned} & \int (\Psi_{j^n, JM\lambda'}^{as})^* (H_0 + H_{res}) \Psi_{j^n, JM\lambda}^{as} d(1)d(2) \dots d(n) = \\ & = n\epsilon_j \delta_{\lambda\lambda'} + \frac{n(n-1)}{2} \int (\Psi_{j^n, JM\lambda'}^{as})^* V_{12} \Psi_{j^n, JM\lambda}^{as} d(1)d(2) \dots d(n) \quad ; \end{aligned} \quad (4.13)$$

il primo addendo in (4.13) rappresenta il contributo dato dall'Hamiltoniana imperturbata, presente solo se l'elemento di matrice appartiene alla diagonale.

## 4.2 Spazio di valenza con $m$ sub-shell

Nella maggior parte dei casi, per descrivere efficacemente lo spettro a bassa energia di un nucleo con  $n$  nucleoni di valenza è necessario utilizzare spazi di valenza costituiti da  $m$  sub-shell, con  $m > 1$ . Considerare questo tipo di spazi significa ammettere che gli  $n$  nucleoni possano disporsi in modi differenti all'interno delle sub-shell permesse, esaurendo tutte le possibilità: in altre parole, si realizza lo stesso "mescolamento di configurazioni" descritto nel caso con due soli nucleoni di valenza. Come in quest'ultimo caso, è possibile ottenere autospazi indipendenti di  $(\vec{J})^2$  associati ad un certo valore di  $J$  sfruttando diverse configurazioni. Tuttavia, con più di due nucleoni, la situazione è generalmente più complicata. Anche rimanendo all'interno di una determinata configurazione, infatti, autospazi indipendenti di  $(\vec{J})^2$  per lo stesso  $J$  sono ottenibili sfruttando differenti accoppiamenti intermedi, come sarà descritto nel prossimo paragrafo.

Una generica configurazione di nucleoni è indicata con  $(j_1)^{n_1}(j_2)^{n_2} \dots (j_m)^{n_m}$ , dove  $n_i$ , detto " $i$ -esimo numero di occupazione", denota il numero di nucleoni posti all'interno dell' $i$ -esima sub-shell. A differenza del caso discusso nella sezione 4.1, è necessario ammettere che ciascuna sub-shell possa contenere anche fino a  $2j_i + 1$  nucleoni (ed essere quindi completamente occupata). Infatti, in primis, i numeri di occupazione non sono indipendenti l'uno dall'altro, dal momento che soddisfano banalmente la seguente condizione:

$$\sum_{i=1}^m n_i = n \quad . \quad (4.14)$$

Di conseguenza, ad esempio, occupare la  $k$ -esima sub-shell con  $n_k$  nucleoni di valenza non è equivalente ad occuparla con  $2j_k + 1 - n_k$  di essi, poiché tale modifica si traduce in una variazione arbitraria degli altri numeri di occupazione. Inoltre, una o più sub-shell completamente occupate non costituiscono un caso banale in termini di composizione dei momenti angolari, differentemente dal caso dello spazio di valenza a sub-shell singola.

### 4.2.1 Funzione d'onda nello schema- $J$

Per la generica configurazione  $(j_1)^{n_1}(j_2)^{n_2} \dots (j_m)^{n_m}$ , la funzione d'onda per il sistema di nucleoni di valenza appartiene al seguente sottospazio di (4.1):

$$\mathcal{H} = \underbrace{\mathcal{H}_{j_1} \otimes \dots \otimes \mathcal{H}_{j_1}}_{n_1 \text{ volte}} \otimes \underbrace{\mathcal{H}_{j_2} \otimes \dots \otimes \mathcal{H}_{j_2}}_{n_2 \text{ volte}} \otimes \dots \otimes \mathcal{H}_{j_m} \equiv \mathcal{H}_{j_1}^{n_1} \otimes \dots \otimes \mathcal{H}_{j_m}^{n_m} \quad , \quad (4.15)$$

dove la notazione per gli autospazi di particella singola ha lo stesso significato visto in (4.4). Ad eccezione del semplice caso in cui sia presente al più un nucleone in ogni sub-shell, l'insieme delle (4.2) non costituisce una base per (4.15): come già visto più volte in precedenza, ciò è equivalente ad affermare che il sistema di nucleoni di valenza non sia descrivibile per mezzo di alcuni autospazi di  $(\vec{J})^2$  a priori ottenibili accoppiando i momenti angolari, per qualche valore di  $J$ .

Nel seguito, il momento angolare totale delle particelle contenute nell' $i$ -esima sub-shell sarà indicato con  $\vec{J}_{n_i}$ . La procedura di realizzazione dello schema- $J$  inizia costruendo autofunzioni antisimmetriche comuni di  $(\vec{J}_{n_i})^2$  e  $J_{n_i,z}$  ( $\forall i = 1, \dots, m$ ), seguendo la stessa metodologia descritta nella sezione precedente. Alleggerendo leggermente la notazione utilizzata in (4.9), tali autofunzioni sono denotate con  $\Psi_{J_{n_i} M_{n_i} \lambda_{n_i}}^{as}(n_i)$ , dove “ $n_i$ ” tra parentesi tonde rappresenta una notazione abbreviata per l'insieme di variabili associate alle  $n_i$  particelle. Successivamente, le  $\Psi_{J_{n_i} M_{n_i} \lambda_{n_i}}^{as}(n_i)$  vengono moltiplicate tra loro e viene realizzata una somma tra tutte le possibili permutazioni dei prodotti risultanti. In questo modo, si ottiene il seguente set di autofunzioni completamente antisimmetriche [8]:

$$\Psi^{as}(1, \dots, n) = \frac{1}{\sqrt{m!}} \sum_{\sigma} (-1)^s \prod_{i=1}^m \Psi_{J_{n_i} M_{n_i} \lambda_{n_i}}^{as}(n_{\sigma(i)}) \quad , \quad (4.16)$$

formalmente simili alle (4.2).

In generale, le autofunzioni comuni di  $(\vec{J})^2$  e  $J_z$  sono esprimibili come un'opportuna combinazione lineare delle (4.16). Per costruirle, è sufficiente accoppiare i momenti angolari  $\vec{J}_{n_i}$  seguendo un ordine arbitrario. Siccome ogni  $\vec{J}_{n_i}$  è associato ad un gruppo di nucleoni contenuto all'interno di una sub-shell differente, tutti i numeri quantici di momento angolare dovuti all'accoppiamento di 2 o più nucleoni sono permessi, nei limiti imposti dalle regole di composizione.

E' possibile, ad esempio, seguire la seguente procedura:

1. accoppiare  $\vec{J}_{n_1}$  e  $\vec{J}_{n_2}$ , ottenendo gli autovettori comuni di  $(\vec{I}_1)^2 \equiv (\vec{J}_{n_1} + \vec{J}_{n_2})^2$  e  $I_{1,z} \equiv J_{n_1,z} + J_{n_2,z}$  associati ai numeri quantici  $I_1$  ed  $H_1$ ;
2. accoppiare  $\vec{I}_1$  e  $\vec{J}_{n_3}$ , ottenendo gli autovettori comuni di  $(\vec{I}_2)^2$  e  $I_{2,z}$  associati ai numeri quantici  $I_2$  ed  $H_2$ ;
3. procedere in ordine fino all'accoppiamento di  $\vec{I}_{m-1}$  e  $\vec{J}_{n_m}$ , ottenendo l'autovettore comune di  $(\vec{J})^2$  e  $J_z$  con i valori di  $J$  ed  $M$  desiderati.

L'autofunzione antisimmetrica normalizzata risultante da questo ordine di accoppiamento si ottiene allora dalla seguente combinazione lineare delle (4.16), tramite somme di prodotti dei coefficienti di Clebsch-Gordan [8]:

$$\begin{aligned} & \Psi_{JM}^{as}(1, \dots, n) = \\ & = \frac{1}{\sqrt{m!}} \sum_M \langle J_{n_1} M_{n_1}, J_{n_2} M_{n_2} | I_1 H_1 \rangle \langle I_1 H_1, J_{n_3} M_{n_3} | I_2 H_2 \rangle \dots \left( \sum_{\sigma} (-1)^s \prod_{i=1}^m \Psi_{J_{n_i} M_{n_i} \lambda_{n_i}}^{as}(n_{\sigma(i)}) \right), \end{aligned} \quad (4.17)$$

dove la prima sommatoria è eseguita al variare dell'insieme di numeri quantici  $M = \{M_{n_1}, M_{n_2}, H_1, M_{n_3}, \dots, H_{m-1}, M_{n_m}\}$ . Come accennato prima, tutti i valori di  $I_k$  ( $k = 1, \dots, m-1$ ) e di  $J$  sono permessi, entro i limiti imposti dal relativo accoppiamento. In generale, possono esistere autovettori indipendenti associati agli stessi valori di  $J$  e  $M$ , ottenibili tramite differenti accoppiamenti intermedi. Una volta fissate le  $m$  sub-shell e scelto l'ordine di accoppiamento, il set di numeri quantici  $\{\{I_k\}_{k=1, \dots, m-1}, J, M\}$  caratterizza univocamente una precisa autofunzione. Inoltre, autofunzioni associate a diversi valori di almeno un numero quantico del precedente set sono ortogonali tra loro, come dimostrato in [8].

#### 4.2.2 Autovalori ed autofunzioni dell'Hamiltoniana completa

Ammettendo che siano realizzabili tutte le configurazioni possibili di nucleoni di valenza, l'Hamiltoniana completa agisce sul seguente spazio di Hilbert:

$$\mathcal{H} = \bigoplus_N (\mathcal{H}_{j_1}^{n_1} \otimes \dots \otimes \mathcal{H}_{j_m}^{n_m}) \quad , \quad (4.18)$$

ovvero sulla somma diretta di tutti i possibili spazi di configurazione singola (4.15). Tale somma diretta è eseguita al variare dell'insieme di numeri di occupazione  $N = \{n_i\}_{i=1, \dots, m}$ , ciascuno dei quali può assumere valori interi compresi tra 0 e  $2j_i + 1$  (sempre rispettando il vincolo (4.14)).

Le (4.17) rappresentano tutte e sole le autofunzioni nello schema- $J$  che possono descrivere il sistema di nucleoni di valenza; esse costituiscono una base per un sottospazio di (4.15) che può essere espresso nella medesima forma di (4.10), ovvero come somma diretta di differenti autospazi di  $(\vec{J})^2$  (quelli costituiti da autofunzioni completamente antisimmetriche). Sommando direttamente tutti questi sottospazi (in numero pari a quello delle configurazioni possibili) si ottiene un sottospazio di (4.18), anch'esso esprimibile nella forma di (4.10):

$$\mathcal{H} = \underbrace{\mathcal{H}_{J_1} \oplus \dots \oplus \mathcal{H}_{J_1}}_{c_{J_1} \text{ volte}} \oplus \underbrace{\mathcal{H}_{J_2} \oplus \dots \oplus \mathcal{H}_{J_2}}_{c_{J_2} \text{ volte}} \oplus \dots \oplus \mathcal{H}_{J_m} \quad ; \quad (4.19)$$

la base più naturale per quest'ultimo spazio si ottiene da un'unione di basi del tipo di (4.17).

Scegliendo quest'ultima base e considerando la restrizione dell'Hamiltoniana completa al sottospazio (4.19), la matrice che rappresenta quest'ultima è formalmente simile alla (4.11). Nella situazione in esame, tuttavia, ciascun blocco è associato ad una varietà molto più ricca di autofunzioni dello schema- $J$ . Come accennato all'inizio della sezione 4.2, fissato un certo valore di  $J$ , il numero di autospazi indipendenti di  $(\vec{J})^2$  dipende sia dal numero di configurazioni possibili (ciascuna delle quali può potenzialmente "fornire" molteplici di questi autospazi) sia dal numero di accoppiamenti intermedi differenti realizzabili all'interno di una stessa configurazione. Al crescere del numero di nucleoni di valenza e del numero di sub-shell disponibili, è facilmente intuibile il deciso aumento del numero di autospazi indipendenti di  $(\vec{J})^2$ , che può arrivare, nei casi più estremi, anche alle centinaia di milioni. Ovviamente, la diagonalizzazione di blocchi di ordine così elevato risulta manualmente intrattabile; non a caso, i progressi nei calcoli teorici nell'ambito del modello a shell sono storicamente andati di pari passo con i progressi dell'informatica, che hanno col tempo permesso la realizzazione di software utili allo scopo.

Il problema del calcolo degli elementi di matrice risulta notevolmente più complicato rispetto al caso descritto nel paragrafo 4.1.2, e non verrà trattato. Generalmente, fissato un certo elemento di matrice, risulta utile separare l'interazione (4.3) in due parti:

- un'interazione agente tra nucleoni posti all'interno della stessa sub-shell;
- un'interazione agente tra nucleoni posti in differenti sub-shell.

L'interazione del primo tipo fornisce un contributo soltanto se l'elemento di matrice è calcolato tra due autofunzioni caratterizzate dalla stessa configurazione (ovvero, associate a identici set di numeri di occupazione) e dagli stessi valori di  $J_{n_i}$ ; la ragione di questo fatto è da ricercarsi nell'antisimmetria delle autofunzioni utilizzate. Il calcolo di tale contributo risulta relativamente semplice, potendo essere eseguito sfruttando una diretta generalizzazione di (4.13). Il secondo tipo di interazione, invece, fornisce nella maggior parte dei casi un contributo non nullo. Il calcolo di quest'ultimo prevede la costruzione delle autofunzioni di sub-shell singola (4.9) facendo uso di specifici schemi di accoppiamento, dipendenti da quali e da quanti nucleoni di valenza sia di interesse isolare. In [7] è possibile trovare una descrizione dettagliata di questa procedura nel caso di uno spazio di valenza a 2 sub-shell.

### 4.3 Il numero quantico di seniorità

Se una coppia di nucleoni di valenza è descritta dall'autofunzione di  $(\vec{J})^2$  associata a  $J = 0$ , i nucleoni stessi, per definizione, vengono detti "appaiati". Allora, riprendendo quanto detto nel paragrafo 3.1.2, l'interazione di pairing è definita come la componente di interazione residua che interessa le coppie di nucleoni appaiati. Essa è responsabile, in generale, di un marcato abbassamento in energia dello stato caratterizzato da  $J = 0$  rispetto al livello imperturbato, che non trova eguali negli altri stati di buon momento angolare. Se nel caso con due nucleoni di valenza lo stato con  $J = 0$  è immediatamente associabile alla formazione di una coppia di nucleoni appaiati, lo stesso non si può dire per configurazioni più complesse. Ad esempio, nella configurazione  $(9/2)^4$  esistono *due* autofunzioni completamente antisimmetriche indipendenti associate a  $J = 0$  [8]. Per costruirle, un possibile schema di accoppiamento dei momenti angolari prevede la formazione di due coppie di nucleoni appaiati, dal cui successivo accoppiamento si ottiene banalmente una delle due autofunzioni. In alternativa, è possibile considerare la formazione di due coppie di nucleoni *non* appaiati, entrambe associate ad uno stesso autospazio del quadrato del relativo momento angolare: in questo modo, il successivo accoppiamento di questi ultimi può condurre alla costruzione, in un caso particolare, dell'altra autofunzione con  $J = 0$ .

Si può dimostrare [7] che questo preciso schema di accoppiamento è generalizzabile ad una qualunque configurazione a sub-shell singola  $(j)^n$ , per ogni  $j$  e per ogni  $n$ ; in altre parole, ciascuna delle autofunzioni di buon momento angolare (4.9) è caratterizzata da un certo numero di coppie di nucleoni appaiati. Di conseguenza, il numero di nucleoni *non* appaiati può essere considerato come un vero e proprio numero quantico aggiuntivo (ovvero, come un caso particolare del numero quantico  $\lambda$  comparso in (4.9)) e definisce la "seniorità" dello stato fisico; esso è generalmente indicato con la lettera  $v$ , iniziale del termine ebraico "vethék" (traduzione dell'italiano "anzianità").

L'utilità dell'adozione di questo particolare numero quantico risiede nel fatto che, per spazi di valenza a singola sub-shell, esso risulti essere conservato: in altre parole, è possibile associare una ben precisa seniorità ad ogni autofunzione dell'Hamiltoniana completa. Se la seniorità è sufficiente a caratterizzare univocamente ognuna di queste autofunzioni, la matrice che rappresenta l'Hamiltoniana completa rispetto ad esse è diagonale. La conservazione della seniorità è comprovata, oltre che a livello teorico, anche a livello sperimentale, dove non si osservano fenomeni di "mescolamento di seniorità" che non siano trascurabili con ottima approssimazione (alcuni esempi della conservazione della seniorità a livello sperimentale possono essere trovati in [7]).

Considerato il marcato abbassamento energetico subito dalle coppie di nucleoni appaiati, le quali costituiscono sotto-sistemi dotati di grande stabilità, è intuitivo supporre che lo stato fondamentale della configurazione  $(j)^n$  sia caratterizzato da un numero quantico di seniorità minimo. Per  $n$  pari, ciò si traduce nella presenza di  $n/2$  coppie di nucleoni appaiati; per  $n$  dispari, invece, nella presenza di un singolo nucleone spaiato. Una dimostrazione teorica di questo fatto (presente in [8]) deriva dal calcolo dell'elemento di matrice sulla diagonale associato allo stato fondamentale. Si può infatti dimostrare che, per  $n$  pari, se esiste una sola autofunzione antisimmetrica con  $J = 0$ ,

$$\int (\Psi_{j^n,00}^{as})^* (H_0 + H_{res}) \Psi_{j^n,00}^{as} d(1)d(2) \dots d(n) = n\epsilon_j + \frac{n}{2} \int (\Psi_{j^2,00}^{as})^* (V_{12}) \Psi_{j^2,00}^{as} d(1)d(2) \quad , \quad (4.20)$$

mentre, per  $n$  dispari, se esiste una sola autofunzione antisimmetrica con  $J = j$ ,

$$\int (\Psi_{j^n,00}^{as})^* (H_0 + H_{res}) \Psi_{j^n,00}^{as} d(1)d(2) \dots d(n) = n\epsilon_j + \frac{n-1}{2} \int (\Psi_{j^2,00}^{as})^* (V_{12}) \Psi_{j^2,00}^{as} d(1)d(2) \quad ; \quad (4.21)$$

sia la (4.20) sia la (4.21) mettono chiaramente in evidenza il fatto che, con i suddetti stati, il contributo dell'interazione residua all'elemento di matrice sia dovuto esclusivamente all'interazione di pairing, fornendo una prova della validità del concetto di seniority. Per concludere, se da un lato è possibile associare un valore minimo di  $v$  agli stati fondamentali, dall'altro, come naturale conseguenza, è possibile caratterizzare gli stati eccitati con un numero minore di coppie di nucleoni appaiati.

Come fatto intuire in precedenza, il solo numero quantico di seniority può non essere sufficiente a caratterizzare univocamente ogni stato stazionario: questa circostanza si presenta per valori sufficientemente elevati di  $j$  e di  $n$ . In questi casi, è necessaria l'adozione di ulteriori numeri quantici aggiuntivi; poiché la seniorità è comunque conservata, l'Hamiltoniana del sistema di valenza risulta essere rappresentata da una matrice diagonale a blocchi, ciascuno dei quali associato a precisi valori di  $J$ ,  $M$  e  $v$ . E' da rimarcare inoltre il fatto che il numero quantico  $v$  sia conservato solo considerando spazi di valenza a sub-shell singola: per spazi più generali, si presenta la miscela di tutte le configurazioni possibili, ed ogni autofunzione dell'Hamiltoniana completa non è più associabile ad un valore di  $v$  ben definito.

In conclusione, la bontà del numero quantico di seniorità, almeno nel caso di spazi di valenza a sub-shell singola, evidenzia inequivocabilmente la grande rilevanza dell'interazione di pairing, la cui comprensione permette di ottenere una spiegazione semplice e generale alle evidenze sperimentali riguardanti gli stati fondamentali.

## Riferimenti bibliografici

- [1] L. Fortunato, *Appunti di Fisica Nucleare*, GEDI Gruppo Editoriale S.p.A., s.l., 2019.
- [2] C. Bertulani, *Nuclear Physics in a Nutshell*, Princeton University Press, Princeton, 2007.
- [3] M. Goeppert-Mayer, H. Jensen, *Elementary Theory of Nuclear Shell Structure*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1955.
- [4] W. Alberico, *Introduzione alla Fisica Nucleare*, La Scientifica Editrice, Torino, 1989.
- [5] K. Krane, *Introductory Nuclear Physics*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1988.
- [6] K. Heyde, *Basic Ideas and Concepts in Nuclear Physics*, Institute of Physics Publishing, Bristol, 1994.
- [7] R. D. Lawson, *Theory of the Nuclear Shell Model*, Oxford University Press, New York, 1980.
- [8] A. de-Shalit, I. Talmi, *Nuclear Shell Theory*, Academic Press Inc., Londra, 1963.
- [9] K. Heyde, *The Nuclear Shell Model*, Springer-Verlag, Heidelberg, 2004.
- [10] B. Cohen, *Concepts of Nuclear Physics*, McGraw-Hill, Inc., 1971.