

Università degli Studi di Padova – Dipartimento di Ingegneria Industriale

Corso di Laurea in Ingegneria Meccanica

Relazione per la prova finale: IL PROBLEMA ELASTICO E ALCUNE SOLUZIONI ANALITICHE

Tutor universitario: Prof. Lorenzo Sanavia

Laureando: *Riccardo Bissacco*

Padova, 24/11/2022

Schema di presentazione:

1. Descrizione e analisi del problema
2. Risoluzione del problema piano
3. Lastra piana caricata: alcuni esempi di applicazione del metodo semi-inverso e del principio di sovrapposizione degli effetti
4. Cilindro assial simmetrico in deformazione piana: soggetto a pressione interna, esterna, tubo cerchiato, e soggetto a dilatazione termica
5. Metodi energetici: enunciato dei due teoremi energetici, proprietà estremali

- Mezzo continuo di Cauchy, soggetto a forze di massa F_i e a deformazioni anelastiche ϑ_{ij} (ad esempio termiche) nel volume V , a trazioni superficiali f_i sul contorno caricato S_F .
- *Obiettivo*: determinare la risposta del mezzo a tali azioni esterne $\longrightarrow s_i(\mathbf{x}), \varepsilon_{ij}(\mathbf{x}), \sigma_{ij}(\mathbf{x})$

Eq. di equilibrio, congruenza

$$\sigma_{i,j} + F_j = 0 \text{ in } V$$

$$\sigma_{ij} n_i = f_j \text{ su } S_F$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (s_{i,j} + s_{j,i}) \text{ in } V$$

$$s_i = \bar{s}_i \text{ su } S_u$$

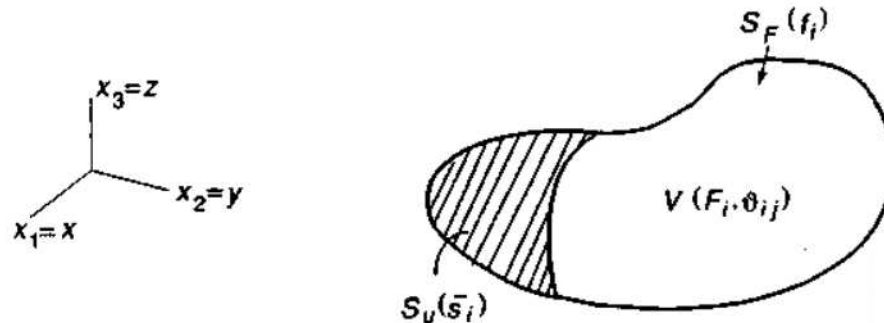


Fig. 4.1 Corradi Dall'acqua L., *Meccanica delle strutture: il comportamento dei mezzi continui*

Legame costitutivo elastico lineare

$$\sigma_{ij} = D_{ijkl} (\varepsilon_{kt} - \vartheta_{kt}) = D_{ijkl} e_{kt}$$

Energia di deformazione

$$\omega = \frac{1}{2} D_{ijkl} e_{ij} e_{kt} > 0,$$

$$\forall e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \vartheta_{ij} \neq 0$$

- Teorema che ci permette di dimostrare l'unicità della soluzione al problema elastico (ambito di piccoli spostamenti)

- Si dimostra ipotizzando ci siano 2 diverse soluzioni $(S_i^{(1)}, \varepsilon_{ij}^{(1)}, \sigma_{ij}^{(1)})$, $(S_i^{(2)}, \varepsilon_{ij}^{(2)}, \sigma_{ij}^{(2)})$

La cui differenza vale: $\Delta s_i = s_i^1 - s_i^2$; $\Delta \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^1 - \varepsilon_{ij}^2$; $\Delta \sigma_{ij} = \sigma_{ij}^1 - \sigma_{ij}^2$

- Per la linearità, si sostituiscono Δs_i , $\Delta \varepsilon_{ij}$, $\Delta \sigma_{ij}$ nelle equazioni di equilibrio e congruenza.
- Scrivendo la relazione di identità dei lavori virtuali:

$$\int \Delta \sigma_{ij} \Delta \varepsilon_{ij} dV = 0 = 2 \int \omega \Delta \varepsilon_{ij} dV$$

- Essendo ω definita positiva: la relazione è valida se $\Delta \varepsilon_{ij} = 0$ e quindi: $\Delta \sigma_{ij} = 0$
- Dunque si afferma che la soluzione è unica, ma non necessariamente unica in termini di spostamenti, ma siccome quest'ultima deve corrispondere alle stesse deformazioni, le due soluzioni potrebbero differire per un moto rigido, ma è impedito dai vincoli su S_u

Spostamenti: Hip: $\vartheta_{ij} = 0$

Legame deformazioni-spostamenti :

$$\sigma_x = 2G \frac{\partial s_x}{\partial x} + \lambda \left(\frac{\partial s_x}{\partial x} + \frac{\partial s_y}{\partial y} + \frac{\partial s_z}{\partial z} \right) ; \quad \tau_{xy} = G \left(\frac{\partial s_x}{\partial y} + \frac{\partial s_y}{\partial x} \right) \text{ con } G, \lambda \text{ le due costanti di Lamè}$$

1. Ponendo le due relazioni in :

- Equazioni di equilibrio
- Condizioni al contorno

$$\sigma_x n_x + \tau_{yx} n_y + \tau_{zx} n_z = \dots =$$

Si ottengono le seguenti relazioni di Navier:

$$\nabla_2 s_i + \frac{1}{1-2\nu} s_{k,ki} + \frac{F_i}{G} = 0 \text{ in } V$$

$$(s_{i,j} + s_{j,i}) n_j + \frac{2\nu}{1-2\nu} s_{k,k} n_i = \frac{f_i}{G} \text{ su } S_F$$

2. corpo privo di vincoli e soggetto a forze di volume e superficie note e globalmente equilibrate, non si applicano le condizioni al contorno.

- il legame spostamenti-deformazione : sostituito da condizioni congruenza Interna \longrightarrow legame elastico forma inversa

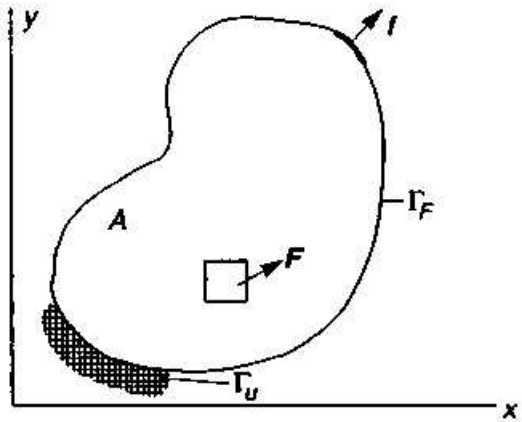
Si ricavano le seguenti equazioni di Mitchell-Beltrami

$$\nabla_2 \sigma_{ij} + \frac{1}{1+\nu} \sigma_{kk,ij} = 0$$

Metodi semi-inversi

Sfruttando : principio di sovrapposizione degli effetti (PSE), di equivalenza elastica (PEE)

- Problema piano: Siano : $F_z = 0$ in A ; $f_z = 0$ su Γ_f



$$s(x, y) = \begin{Bmatrix} s_x \\ s_y \end{Bmatrix} ; \varepsilon(x, y) = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} ; \sigma(x, y) = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}$$

Equazioni di equilibrio indefinite e al contorno:

Relazioni di congruenza:

Legame costitutivo elastico-lineare : $\sigma = d \varepsilon ; \varepsilon = a \sigma$

$$\tau_{zx} = \tau_{zy} = 0 \text{ e che } \sigma_z = \sigma_z(x, y) \longrightarrow \gamma_{zx} = \gamma_{zy} = 0$$

Il legame deformazioni-spostamenti impone che $\frac{\partial s_z}{\partial x} + \frac{\partial s_z}{\partial y} = 0$ Quindi $s_z = s_z(z) \longrightarrow \varepsilon_z = C$ e $s_z = Cz$

Seguendo un altro approccio , mediante le equazioni di congruenza interna, si otterrà $\varepsilon_z = C + C_1x + C_2y$

Fig. 4.4 Corradi Dall'acqua L., Meccanica delle strutture: il comportamento dei mezzi continui

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \\ \sigma_z \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} (1-\nu) & \nu & 0 & \nu \\ \nu & (1-\nu) & 0 & \nu \\ 0 & 0 & (1-2\nu)/2 & 0 \\ \nu & \nu & 0 & (1-\nu) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \varepsilon_z \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \varepsilon_z \end{Bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 & -\nu \\ -\nu & 1 & 0 & -\nu \\ 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 \\ -\nu & -\nu & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \\ \sigma_z \end{Bmatrix}$$

Matrici che descrivono la risoluzione del problema elastico:

1. Nelle deformazioni: $S_z = \varepsilon_z = 0 \rightarrow$ Determinando le matrici d ed a

$$d = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-2\nu)}{2} \end{bmatrix}$$

Fig. 4.30 Corradi Dall'acqua L., *Meccanica delle strutture: il comportamento dei mezzi continui*

1. Nelle tensioni: $\sigma_z = 0 \rightarrow$ Ottenendo le matrici d ed a

$$a = \frac{1+\nu}{E} \begin{bmatrix} 1-\nu & -\nu & 0 \\ -\nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$d = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\nu/2 \end{bmatrix}$$

$$a = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1-\nu) \end{bmatrix}$$

La formulazione in termini di tensioni permette di ottenere:

$\nabla_4 \varphi = 0$ detta Funzione di Airy, in cui

$$\varphi = F(f_x, f_y) ; \frac{\partial \varphi}{\partial n} = G(f_x, f_y) \text{ su } \Gamma$$

- Applicazione del metodo semi-inverso:

1. Ipotizzo funzione di tensione

2. Determino tensioni $\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}$, $\sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$,

$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} - F_x y - F_y x$ e verifico condizioni di congruenza

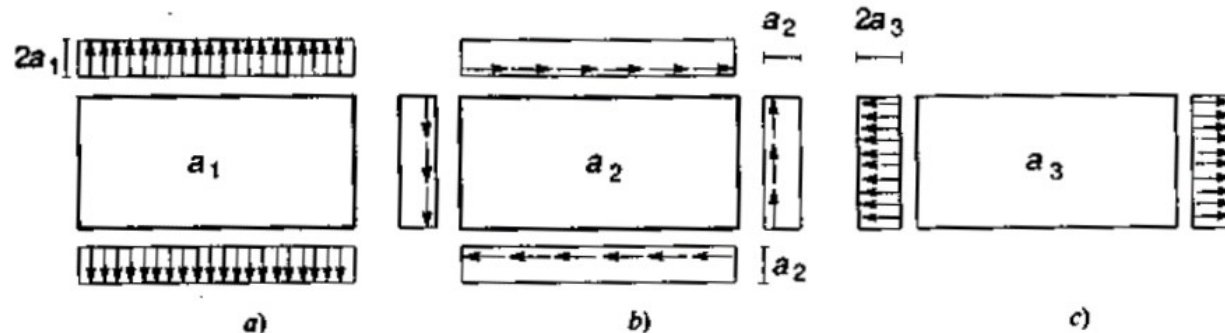


Fig. 4.13 Corradi Dall'acqua L., Meccanica delle strutture: il comportamento dei mezzi continui

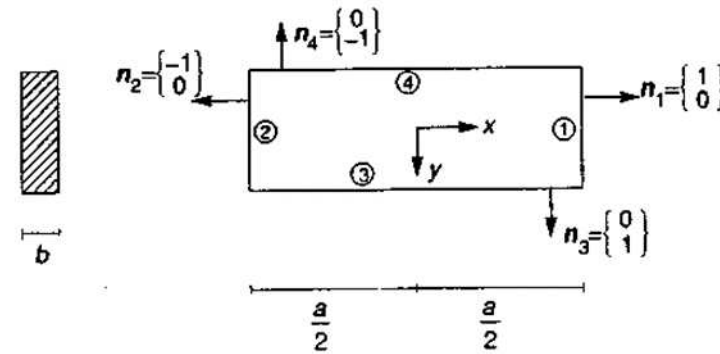


Fig.4.12 Corradi Dall'acqua L., Meccanica delle strutture: il comportamento dei mezzi continui

- **Funzione di tensione quadratica:**

- $\varphi(x, y) = a_1 x^2 + a_2 xy + a_3 y^2$

- $\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 2a_3$; $\sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 2a_1$

- $\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} - F_x y - F_y x = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = -a_2$

- **Funzione di tensione cubica:** $\varphi(x, y) = b_1x^3 + b_2x^2y + b_3xy^2 + b_4y^3$
- Tensioni: $\sigma_x = 2b_3x + 6b_4y$; $\sigma_y = 6b_1x + 2b_2y$; $\tau_{xy} = -2(b_2x + b_3y)$
- Se $b_1 = b_2 = b_3 = 0 \longrightarrow \sigma_x = 6b_4y$; $\sigma_y = \tau_{xy} = 0$
- $b_1 = b_3 = b_4 = 0 \longrightarrow \sigma_x = 0$; $\sigma_y = 2b_2y$; $\tau_{xy} = -2b_2x$

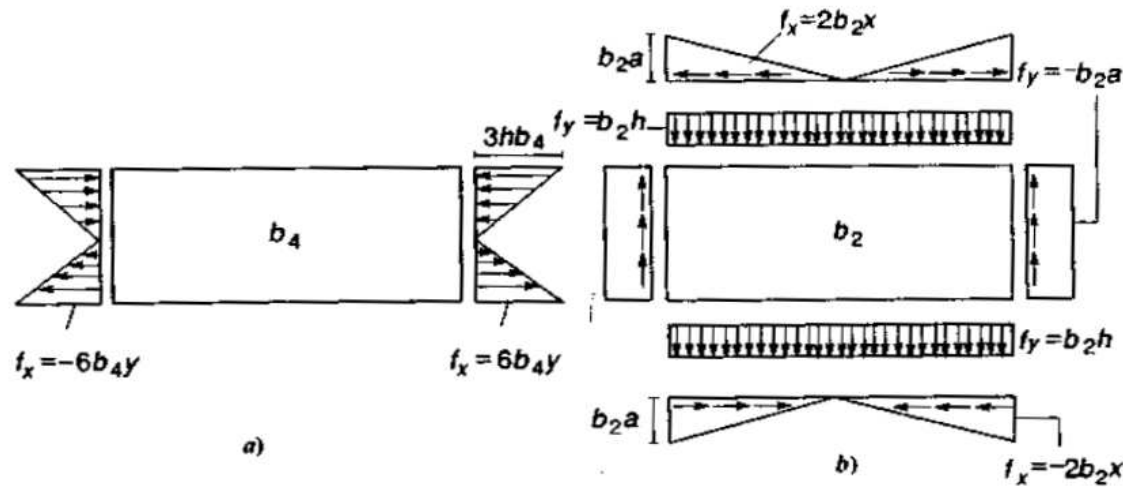


Fig. 4.14 Corradi Dall'acqua L., *Meccanica delle strutture: il comportamento dei mezzi continui*

- **Funzione di tensione di quarto e quinto grado:** non rispettano le condizioni di congruenza.
- Valide mediante un'approssimazione

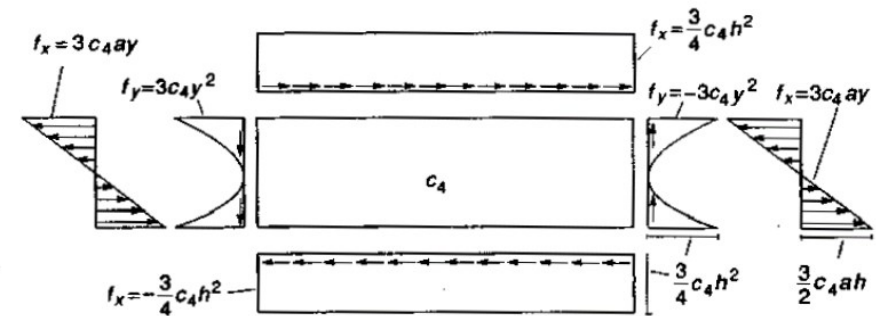


Fig. 4.15 Corradi Dall'acqua L., *Meccanica delle strutture: il comportamento dei mezzi continui* 9

- Lastra rettangolare: momento flettente e taglio costante: utilizzando il PSE, ipotizzando

- $a_2 = -\frac{3}{2} t$ $b_4 = \frac{a}{h^2} t$; $c_4 = \frac{2}{h^2} t$

- $\varphi(x, y) = t \left(-\frac{3}{2} xy + \frac{a}{h^2} y^3 + \frac{2}{h^2} xy^3 \right)$

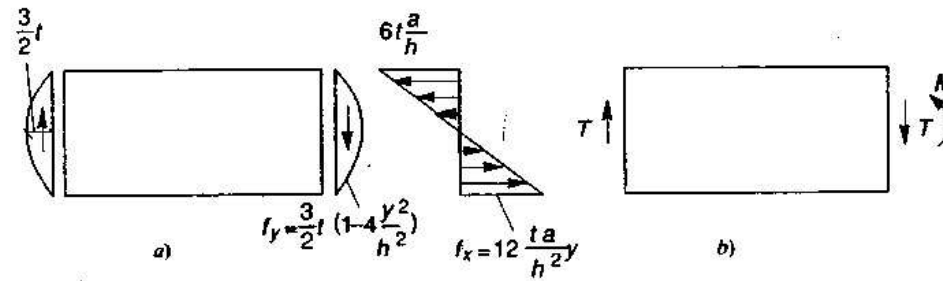


Fig. 4.17 Corradi Dall'acqua L., Meccanica delle strutture: il comportamento dei mezzi continui

- Lastra rettangolare: soggetto a carico uniforme trasversale e vincolato agli estremi

- Ipotizzando un polinomio di quinto grado, e i seguenti coefficienti:

- $a_1 = -\frac{1}{4} p$ $b_2 = \frac{3}{4} \frac{p}{h}$; $d_4 = -\frac{1}{h^3} p$

- $\varphi(x, y) = p \left(-\frac{1}{4} x^2 + \frac{3}{4} \frac{1}{h} x^2 y - \frac{1}{h^3} x^2 y^3 + \frac{1}{5h^3} y^5 \right)$

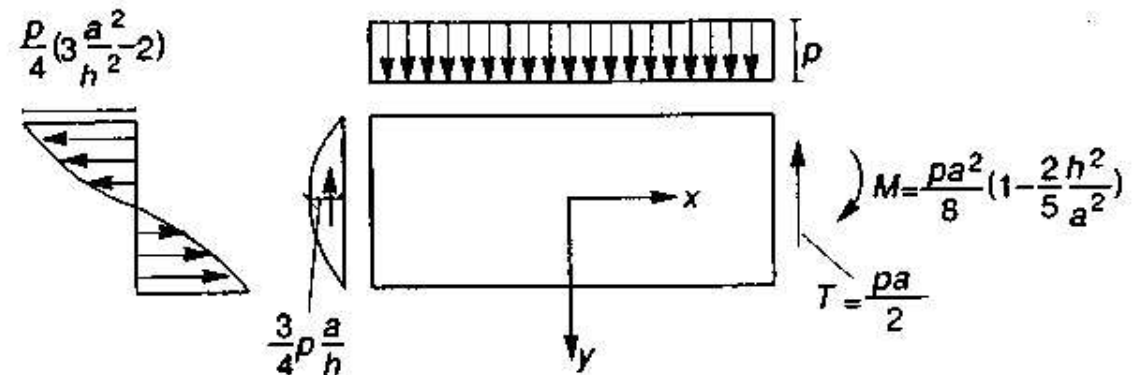


Fig. 4.18 Corradi Dall'acqua L., Meccanica delle strutture: il comportamento dei mezzi continui

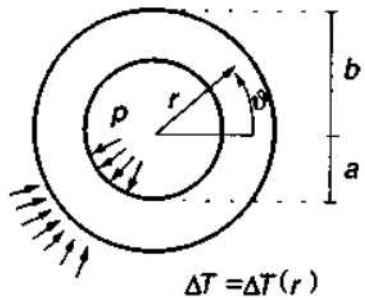


Fig. 4.22 sez. cilindrica. Coordinate polari Corradi Dall'acqua L., Meccanica delle strutture: il comportamento dei mezzi continui

$$\frac{d\sigma_r}{dr} - \frac{\sigma_\theta - \sigma_r}{r} = 0$$

$$\frac{d\varepsilon_\theta}{dr} + \frac{\varepsilon_\theta - \varepsilon_r}{r} = 0$$



Equazione indefinita di equilibrio e equazione di congruenza interna

- Se cilindro: soggetto a sola pressione interna p:

$$\sigma_r = -p \frac{a^2}{b^2 - a^2} \frac{b^2 - r^2}{r^2} = -\frac{p}{\beta^2 - 1} \frac{\beta^2 - \rho^2}{\rho^2}$$

$$\sigma_\theta = p \frac{a^2}{b^2 - a^2} \frac{b^2 + r^2}{r^2} = \frac{p}{\beta^2 - 1} \frac{\beta^2 + \rho^2}{\rho^2}$$

$$\sigma_z = 2\nu p \frac{a^2}{b^2 - a^2} = 2\nu \frac{p}{\beta^2 - 1} = cost$$

Dove $\rho = \frac{r}{a}$

$\beta = \frac{b}{a}$

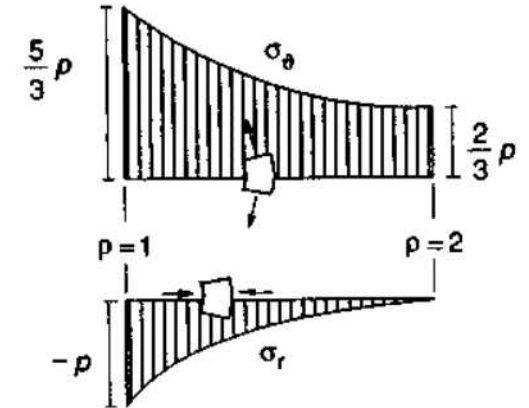


Fig. 4.23 Corradi Dall'acqua L., Meccanica delle strutture: il comportamento dei mezzi continui

- Se cilindro: soggetto a sola pressione esterna q:

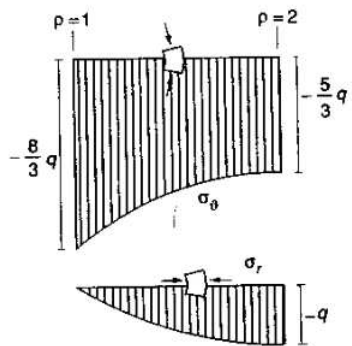


Fig. 4.24 Corradi Dall'acqua L., Meccanica delle strutture: il comportamento dei mezzi continui

- Se cilindro soggetto a $\Delta T(r)$

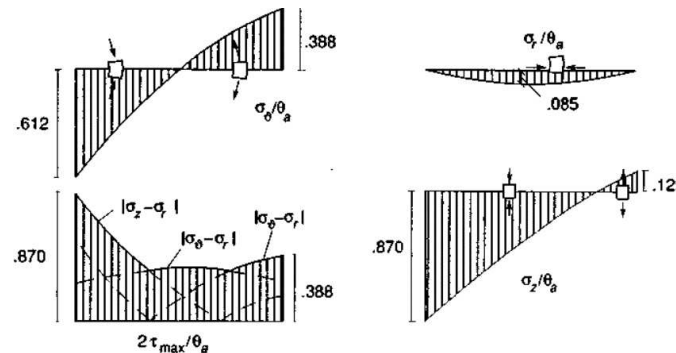


Fig. 4.30 Corradi Dall'acqua L., Meccanica delle strutture: il comportamento dei mezzi continui

- Tubo cerchiato: andamento finale delle tensioni

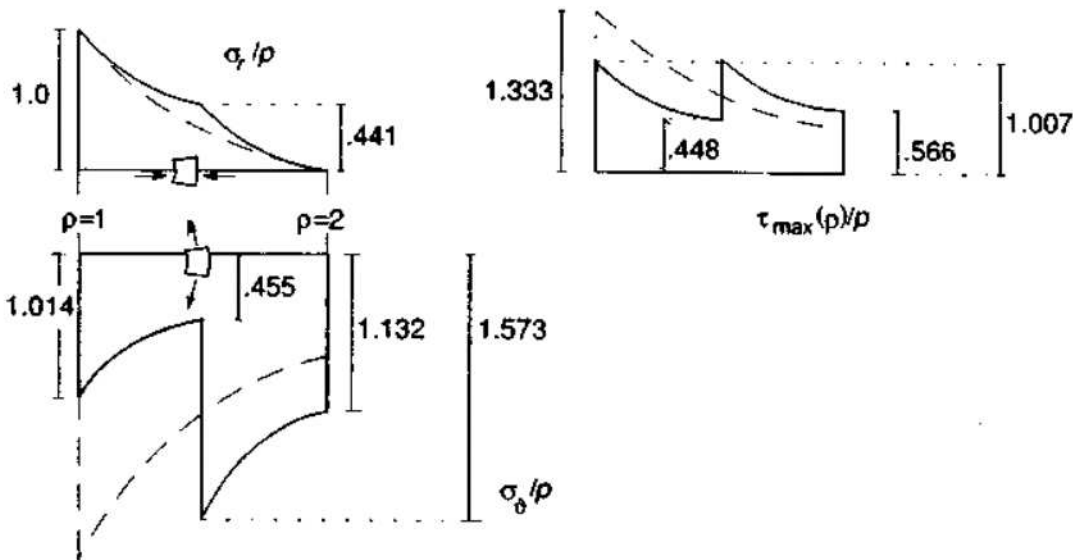


Fig. 4.28 Corradi Dall'acqua L., Meccanica delle strutture: il comportamento dei mezzi continui

$$\tau_{max}(\rho) = \begin{cases} \frac{144}{143} \frac{p}{\rho^2} & 1,0 \leq \rho \leq 1,5 \\ \frac{324}{143} \frac{p}{\rho^2} & 1,5 \leq \rho \leq 2,0 \end{cases}$$

- Si va a forzare un cilindro all'interno di un altro
- Riscaldare un cilindro (di raggio c_1) fino a produrre una dilatazione termica che permette di inserire un cilindro di raggio leggermente inferiore $c_2 < c_1$

$$\sigma_r(\rho) = \begin{cases} -\frac{p}{143} \left(\frac{144}{\rho^2} - 1 \right) & 1,0 \leq \rho \leq 1,5 \\ -\frac{p}{143} \left(\frac{324}{\rho^2} - 81 \right) & 1,5 \leq \rho \leq 2,0 \end{cases}$$

$$\sigma_\theta(\rho) = \begin{cases} \frac{p}{143} \left(\frac{144}{\rho^2} + 1 \right) & 1,0 \leq \rho \leq 1,5 \\ \frac{p}{143} \left(\frac{324}{\rho^2} + 81 \right) & 1,5 \leq \rho \leq 2,0 \end{cases}$$

- Semispazio elastico, omogeneo e isotropo, privo di forze di volume, soggetto ad un carico lineare q

$$\sigma_x = -\frac{2q}{\pi y} \operatorname{sen}^2 \vartheta \cos^2 \vartheta \quad ; \quad \sigma_y = -\frac{2q}{\pi y} \cos^4 \vartheta \quad ; \quad \tau_{xy} = -\frac{2q}{\pi y} \operatorname{sen} \vartheta \cos^3 \vartheta$$

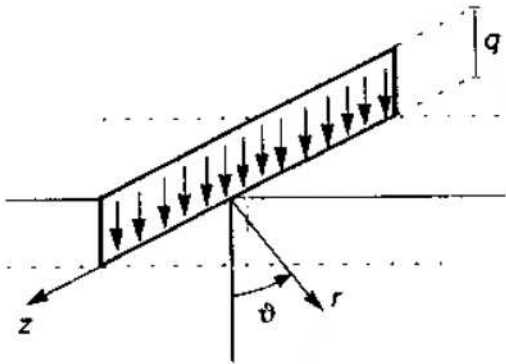


Fig. 4.32 Corradi Dall'acqua L.,
Meccanica delle strutture: il
comportamento dei mezzi continui

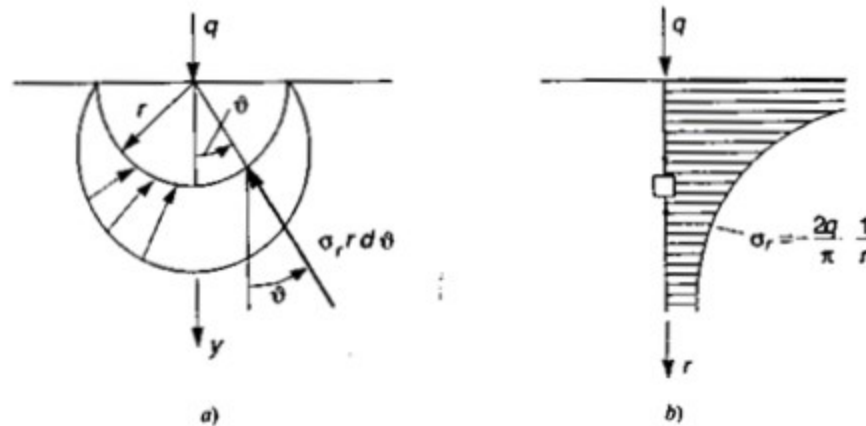


Fig. 4.34 Corradi Dall'acqua L.,
Meccanica delle strutture: il
comportamento dei mezzi continui

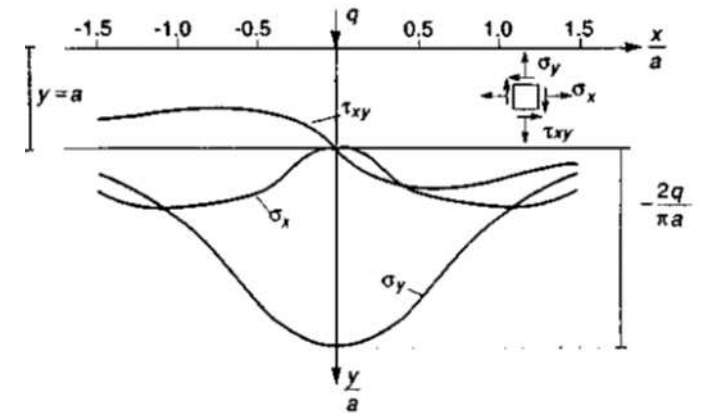


Fig. 4.35 Corradi Dall'acqua L., Meccanica
delle strutture: il comportamento dei mezzi
continui

HIP: Processo deformativo avviene a spese del potenziale energia di deformazione ($\omega = \int_0^\varepsilon \sigma d\varepsilon$)

o della sua trasformata di Legendre (definita da $\gamma(\sigma) = \int_0^\sigma \varepsilon d\sigma$)

- **Stazionarietà dell'Energia Potenziale Totale**

Nella classe delle soluzioni congruenti, il funzionale $V(\widehat{s}_i)$ è stazionario in corrispondenza di una soluzione equilibrata

$$V(\widehat{s}_i) = \int \omega \widehat{\varepsilon}_{ij} dV - \int F_j \widehat{s}_j dV - \int f_j \widehat{s}_j dS$$

- **Stazionarietà dell'Energia Complementare Totale**

Nella classe delle soluzioni equilibrate, il funzionale $\Pi(\sigma_{ij}^)$ è stazionario in corrispondenza di una soluzione congruente.*

$$\Pi(\sigma_{ij}^*) = \int \gamma(\sigma_{ij}^*) dV - \int \sigma_{ij}^* n_i \bar{s}_i dS$$

Purché si abbia un minimo è necessario che la derivata seconda dei funzionali risulti definita positiva:

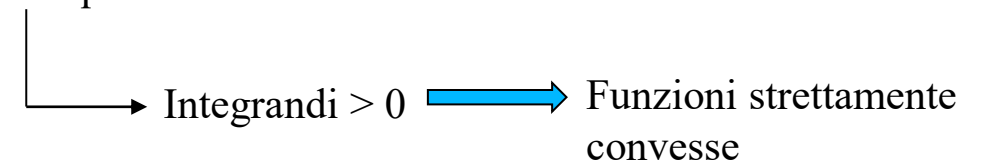
$$\frac{1}{2} \delta^2 V > 0 \quad \forall \widehat{\delta s}_j ; \quad \frac{1}{2} \delta^2 \Pi > 0 \quad \forall \delta \sigma_{ij}^*$$

Determinando le derivate seconde dei funzionali, si ottiene:

$$\frac{1}{2} \delta^2 V = \frac{1}{2} \int \delta^2 \omega dV = \frac{1}{2} \int \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial \widehat{\varepsilon}_{ij} \partial \widehat{\varepsilon}_{kt}} \right) \widehat{\delta \varepsilon}_{ij} \widehat{\delta \varepsilon}_{kt} dV$$



$$\frac{1}{2} \delta^2 \Pi = \frac{1}{2} \int \delta^2 \gamma dV = \frac{1}{2} \int \left(\frac{\partial^2 \gamma}{\partial \sigma_{ij}^* \partial \sigma_{kt}^*} \right) \delta \sigma_{ij}^* \delta \sigma_{kt}^* dV$$

Condizione sufficiente: le due funzioni $\omega(\varepsilon_{ij})$ e $\gamma(\varepsilon_{ij})$ siano ovunque strettamente convesse



- Dunque, si afferma che:

$$V(\widehat{s}_i) \geq V(s_i^\circ) \quad ; \quad \Pi(\sigma_{ij}^*) \geq \Pi(\sigma_{ij}^\circ) \quad \longrightarrow \quad \text{In cui: } V(s_i^\circ) \text{ e } \Pi(\sigma_{ij}^\circ) \text{ rappresentano i punti di stazionarietà}$$

- Presentazione e risoluzione problema elastico nel piano
- Metodi semi-inversi  Varietà di soluzioni  Applicazioni ed esempi
- Metodi energetici

BIBLIOGRAFIA

- Corradi Dall'acqua L., Meccanica delle strutture: il comportamento dei mezzi continui, McGraw-Hill, Milano 1992
- Fig. dal medesimo libro