



UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI PADOVA

Università degli Studi di Padova

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA “TULLIO LEVI-CIVITA”

Dipartimento di Fisica e Astronomia "Galileo Galilei"

Corso di Laurea Triennale in Matematica

Effemeridi e osservabilità da Padova di corpi del sistema solare

Relatore:

Prof. Paolo Cassata

Laureanda: Stefania Bordin

Matricola: 1189668

Anno Accademico 2022/2023

21 Aprile 2023

Sommario

La tesi si pone come obiettivo di ricavare le coordinate orizzontali note quelle equatoriali di un corpo celeste del sistema solare per valutarne la visibilità da Padova. A tal fine si esporranno le leggi di Keplero e si studieranno le orbite dei corpi celesti. Si presenterà inoltre un elaborato Python che calcolerà le conversioni di coordinate e fornirà grafici esplicativi dell'andamento giornaliero o annuale.

Indice

Capitolo 1	9
Introduzione	9
Capitolo 2	11
Cenni di geometria sferica	11
2.1 La Sfera Celeste	11
2.2 Sistemi di riferimento	12
2.3 Teoremi	14
Capitolo 3	17
Leggi di Keplero	17
3.1 Keplero, la vita	17
3.2 Evoluzione di un pensiero	17
3.3 Prima legge	18
3.4 Seconda legge	19
3.5 Terza legge	19
Capitolo 4	21
Posizioni assolute in cielo	21
4.1 Gli elementi orbitali	21
4.2 Altri angoli notevoli	23
4.3 Sistemi di riferimento	24
4.4 Effemeridi	25
Capitolo 5	29
Visibilità dalla Terra	29
5.1 Sistema orizzontale	29
5.2 Valutazioni	30
5.3 Horizons System e le effemeridi	31
Capitolo 6	33
Elaborazione dati	33
6.1 Risultati	33
Capitolo 7	39
Conclusioni	39
Appendice	41
Codice Python	41
A.1 Classi	41
A.2 Coordinate orizzontali	44
Bibliografia	47

Elenco delle figure

Figura 2.1: Descrive la trigonometria sferica, gli angoli considerati e in quale verso sono valutati positivi. (Karttunen, Kröger, Oja, Poutanen, & Donner, 2016).....	13
Figura 2.2: Coordinate di un punto P in un sistema di riferimento ruotato. (Karttunen, Kröger, Oja, Poutanen, & Donner, 2016).....	13
Figura 4.1: Sfera Celeste centrata nel Sole. I cerchi massimi indicati sono le proiezioni delle orbite di un pianeta indicato con X e della Terra, eclittica. (Tatum, Physics topics, Celestial Mechanics, Capitolo 10, 2023).....	22
Figura 4.2: Orbita ellittica di un corpo celeste, corrispondente al punto P, inserita in una circonferenza. (Tatum, Physics topics, Celestial Mechanics, Capitolo 2, 2023).....	26
Figura 5.1: Triangolo sferico sulla Sfera Celeste usato per derivare la trasformazione dal sistema orizzontale a equatoriale e viceversa. (Karttunen, Kröger, Oja, Poutanen, & Donner, 2016).....	30
Figura 6.1: Grafico che ha sull'asse delle ascisse l'azimut e sulle ordinate l'altezza relative all'osservazione del pianeta Giove nel giorno 1 Gennaio 2022. La prima valutazione avviene alle ore 00:00 italiane e corrisponde alla posizione individuata dal pallino blu. Le successive, a distanza di un'ora, sono segnate nel grafico dalle stelle e si susseguono nel verso dell'azimut crescente.....	33
Figura 6.2: Grafico azimut-altezza relativo al pianeta Giove valutato per 24 ore a distanza di un mese, 1 Gennaio e 1 Febbraio 2022.....	34
Figura 6.3: Grafico azimut-altezza relativo alla Luna valutato per 24 ore a distanza di due giorni, 1 Gennaio e 3 Gennaio 2022.	34
Figura 6.4: Schermata restituita da Python relativa al pianeta Giove osservato l'1 Gennaio 2022 (Appendice A2). Riporta sia valori ottenuti dall'applicazione delle formule sia risultati qualitativi.	35
Figura 6.5: Grafico dell'angolo orario a cui Giove sorge/tramonta nell'anno 2022.....	35
Figura 6.6: Grafico azimut-altezza relativo all'osservazione del pianeta Giove per ogni giorno dell'anno 2022 con rilevazione alle ore 00:00 italiane della giornata. Dopo la prima valutazione indicata dal pallino blu, le successive si susseguono nel verso dell'azimut crescente.....	35
Figura 6.7: Grafico azimut-altezza relativo all'osservazione del pianeta Giove per ogni giorno di due anni consecutivi 2022 e 2023 con rilevazione alle ore 00:00 italiane della giornata. Dopo la prima valutazione indicata dal pallino blu, le successive si susseguono nel verso dell'azimut crescente.....	36
Figura 6.8: Grafico azimut-altezza relativo all'osservazione della Luna per ogni giorno dell'anno 2022 con rilevazione alle ore 00:00 italiane della giornata. Dopo la prima valutazione indicata dal pallino blu, le successive si susseguono nel verso dell'azimut decrescente.....	36
Figura 6.9: Grafico azimut-altezza relativo all'osservazione della Luna per ogni giorno del Gennaio 2022 con rilevazione alle ore 00:00 italiane della giornata. Dopo la prima valutazione indicata dal pallino blu, le successive si susseguono nel verso dell'azimut decrescente.....	37
Figura 6.10: Grafico azimut-altezza relativo all'osservazione del pianeta Venere per ogni giorno dell'anno 2022 con rilevazione alle ore 00:00 italiane della giornata. Dopo la prima valutazione indicata dal pallino blu, le successive si susseguono nel verso dell'azimut crescente, successivamente per un periodo anche decrescente.....	37
Figura 6.11: Grafico azimut-altezza relativo all'osservazione del pianeta Marte per ogni giorno dell'anno 2022 con rilevazione alle ore 00:00 italiane della giornata. Dopo la prima valutazione indicata dal pallino blu, le successive si susseguono nel verso dell'azimut crescente.....	38

Figura 6.12: Grafico dell'altezza massima di Giove valutata giornalmente per due anni consecutivi 2023 e 2024..... 38

Figura 6.13: Grafico delle coordinate equatoriali di Giove valutate giornalmente per due anni consecutivi 2023 e 2024. 38

Capitolo 1

Introduzione

Sin dall'antichità l'uomo ha ritenuto importante dedicare del tempo all'osservazione del cielo. Tuttavia solo secoli dopo è riuscito a giungere ad una sua buona interpretazione. L'osservazione del cielo ha sempre portato l'uomo ad interrogarsi ed il suo studio fu incentivato anche da interessi pratici come quello legato all'orientamento: alcuni astri apparivano come "fissi" e per tale ragione venivano presi a riferimento. Un esempio è quello della Stella Polare che indicava il nord per l'emisfero boreale. Anche nell'ambito agricolo l'osservazione del cielo fu motivo di interesse per la comprensione del ciclo delle stagioni.

In questo elaborato verrà analizzata l'osservabilità di un corpo celeste del sistema solare da un ben preciso luogo di osservazione selezionato ed in particolare si è scelto come riferimento l'Osservatorio di Padova. Verrà posta l'attenzione in particolare sullo studio delle orbite dei più massicci corpi del sistema solare, i pianeti. Le loro orbite sono descritte dalle leggi di Keplero, ne verrà valutato il loro movimento e la loro posizione che possiamo individuare in cielo.

La tesi si svilupperà in due parti, una prima più teorica in cui verranno illustrate le nozioni matematiche necessarie ed introdotte le formule che verranno successivamente applicate nella seconda parte computazionale. Punto di partenza saranno le leggi di Keplero e lo studio delle orbite dei pianeti tramite la conoscenza degli elementi orbitali. Si proseguirà ricavando le formule matematiche che regolano lo spostamento dei pianeti attorno al Sole e quelle che permetteranno di individuare la posizione di un pianeta nella sua orbita. Ottenute queste informazioni sarà possibile effettuare le conversioni che permetteranno di identificare la posizione apparente del pianeta in cielo in ogni istante permettendo così ad un osservatore di individuarlo. Si otterrà quindi un cambiamento di coordinate tra due sistemi di riferimento geocentrici, quello equatoriale, con coordinate ascensione retta e declinazione, e quello orizzontale, con coordinate altezza e azimut. Quanto ottenuto per il passaggio da coordinate equatoriali ad orizzontali, sarà valido per qualsiasi corpo celeste del sistema solare, non solo per i pianeti.

Per una maggiore accuratezza, nella seconda parte, si otterranno le coordinate equatoriali dalle tavole numeriche, chiamate effemeridi, relative al pianeta o più in generale al corpo celeste. Le effemeridi si sono ricavate facendo riferimento al sito Horizons System di proprietà della NASA. La conversione in coordinate orizzontali agevolerà l'interpretazione sulla visibilità del corpo celeste. In particolare si potrà aver idea di quando questo sorge e tramonta, per quanto tempo resta visibile in una giornata, quale sarà la sua altezza massima in cielo e con un'analisi su un periodo più esteso se ne comprenderà anche la sua traiettoria. Disponendo di un telescopio tali informazioni permetteranno di seguire in ogni istante la posizione di un qualsiasi corpo celeste in cielo.

Capitolo 2

Cenni di geometria sferica

Le stelle e gli astri ci appaiono disposti in cielo su una sfera. Questa viene chiamata Sfera Celeste ed è una modellizzazione del cielo visto da un osservatore posizionato sulla Terra, al centro della sfera. Le stelle quindi appaiono tutte equidistanti; ne segue che tale condizione non fornisce informazioni sulle distanze delle stelle, ovvero non è noto il raggio di tale sfera. Di conseguenza la posizione apparente dei corpi celesti in cielo non ci fornisce alcuna informazione sulla distanza rispetto all'osservatore, ne' tanto meno permetterà di ricavarne informazioni di questo tipo.

Come appare evidente trattandosi di una disposizione sferica lo studio di una struttura di questa tipologia è incentrato sullo studio della geometria sferica. In particolare nel considerare posizioni reciproche di corpi celesti sulla sfera si farà uso delle nozioni riguardanti la trigonometria sferica. Tale architettura, una volta perfezionata, è di facile interpretazione in quanto restituisce una visione tridimensionale necessitando solamente di due coordinate per identificare la posizione in cielo. Si tratta di due coordinate angolari, ossia due angoli che si possono considerare come uno orizzontale e uno verticale dopo aver fissato un piano di riferimento.

Anche al fine di fissare la terminologia, di seguito verranno presentate alcune delle caratteristiche della Sfera Celeste necessarie per una sua definizione.

2.1 La Sfera Celeste

In una delle sue prime formulazioni, si considerò l'universo come contenuto in un guscio sferico finito e le stelle come punti fissi sulla sua superficie. Queste si immaginavano quindi equidistanti dalla Terra posta al centro dell'universo sferico.

Per molti versi, questo semplice modello ritorna ancora oggi utile per comprendere facilmente i moti diurni e annuali dei corpi celesti in cielo. Pertanto si manterrà anche qui come valida la rappresentazione del cielo come Sfera Celeste e, considerandola di raggio costante e praticamente infinito, si trascurerà la distanza dalla Terra, ossia il raggio.

Si intende per *cerchio massimo* l'intersezione tra la sfera e un piano passante per il suo centro. I cerchi massimi, o meglio i relativi piani su cui giacciono, determinano un sistema di riferimento dove i due angoli coordinati corrisponderanno ad un angolo sul cerchio massimo rispetto ad un fissato punto e un angolo verticale rispetto a tale cerchio ossia su un cerchio verticale passante per i due poli. Infatti ne consegue che una retta perpendicolare al piano su cui giace il cerchio massimo e passante per il centro della sfera identifica in modo univoco due punti opposti sulla superficie della sfera chiamati poli. Essendo i cerchi massimi non unici vi sono di conseguenza più scelte per il sistema di riferimento. I cerchi massimi di riferimento più comunemente scelti sono: quello corrispondenti alla proiezione dell'equatore della Terra sulla Sfera Celeste, ovvero l'equatore celeste, quello individuato dal piano dell'orizzonte di un osservatore posto sulla Terra, oppure quello corrispondente all'eclittica, ossia la traiettoria annuale apparente percorsa dal Sole sulla Sfera Celeste.

Tutti gli ulteriori cerchi sulla sfera, che non sono cerchi massimi, sono detti *cerchi minori*, ovvero si tratta di tutti quei cerchi ottenuti dall'intersezione tra la sfera e un qualunque piano non passante per il centro della sfera.

L'intersezione di tre cerchi massimi in punti distinti determinano una porzione di superficie della sfera chiamata *triangolo sferico*. Questo sarà lo strumento necessario per determinare posizioni reciproche tra corpi celesti. Vi è inoltre una corrispondenza biunivoca tra un lato del triangolo sferico e l'angolo al centro corrispondente dove la costante di proporzionalità è il raggio. Con angolo al centro corrispondente ad un lato del triangolo sferico si intende l'angolo che giace sul piano che contiene il centro della sfera e l'arco considerato, avente come vertice il centro della sfera e come lati i raggi della sfera relativi agli estremi del lato valutato. Dal momento che non viene tenuto conto della distanza dei corpi celesti dal centro della sfera, ovvero del raggio, ma solo della loro posizione sulla Sfera Celeste, si è soliti usare l'angolo al centro per indicare l'arco corrispondente e viceversa in base alla necessità, assumendo la costante di proporzionalità pari a uno. Una proprietà caratteristica dei triangoli sferici è che la somma dei loro angoli interni è maggiore della somma degli angoli interni di un triangolo piano, ovvero è maggiore di 180 gradi.

Convenzionalmente, per il triangolo sferico si utilizzano le seguenti notazioni: si indicano con le lettere minuscole a, b, c i lati e con le medesime lettere ma maiuscole A, B, C gli angoli interni al triangolo facendo attenzione a contrassegnare con la stessa lettera un lato ed il corrispondente angolo opposto.

2.2 Sistemi di riferimento

Definite le principali caratteristiche della Sfera Celeste, risulta ora necessario fissare dei sistemi di riferimento. Come visto dalla non unicità dei cerchi massimi, la scelta di un sistema di riferimento non è unica ma è adattabile alle necessità del problema da considerare.

Come già anticipato, per determinare una posizione in cielo sul guscio sferico sono sufficienti due angoli.

Si consideri quindi la Sfera Celeste inserita in un sistema di riferimento ortogonale tridimensionale xyz la cui origine viene posizionata in corrispondenza del centro della sfera. Il piano xy corrisponde al piano del cerchio massimo di riferimento e l'asse z corrisponde all'asse ortogonale a tale piano e che congiunge i due poli.

Si procede definendo la coppia di angoli θ e ψ . L'angolo θ appartiene al piano ortogonale a xy sul quale giace il cerchio massimo passante per i poli e il punto interessato. È l'angolo al centro corrispondente all'arco di circonferenza con estremi l'intersezione del cerchio massimo con la sfera e il punto. Esso viene interpretato come l'altezza del punto rispetto al piano di riferimento xy . L'angolo ψ appartiene al piano xy e corrisponde all'arco di cerchio massimo che verrà misurato in verso antiorario a partire dall'asse x positivo verso l'intersezione del cerchio massimo passante per i poli e il punto con il piano di riferimento. Tramite questi due angoli è possibile ricorrere alle coordinate sferiche¹ per identificare la posizione dei corpi celesti in cielo. Inoltre, poiché il raggio è irrilevante, si può assegnargli valore unitario.

¹ Coordinate polari e sferiche: le coordinate polari sono coordinate due dimensionali definite da una fascia di rette e uno di circonferenze concentriche aventi lo stesso centro. Ogni punto del piano è definito dall'intersezione tra una retta e una circonferenza e individuato da un angolo e un raggio. In tre dimensioni si utilizzano invece le coordinate sferiche definite da due fasci, uno di rette e uno di sfere concentriche, entrambi con lo stesso centro. Ogni punto dello spazio è corrisponde all'intersezione di una sfera e di una retta ed è identificato da due angoli e un raggio. Il sistema di coordinate sferiche valutato su un piano corrisponde al sistema di coordinate polari.

Segue che le coordinate ortogonali associate hanno la seguente espressione in coordinate sferiche:

$$x = \cos(\psi) \cos(\theta) \quad y = \cos(\psi) \sin(\theta) \quad z = \sin(\psi) \quad (2.1)$$

Ora, noto un sistema di riferimento ortogonale, è sempre possibile considerarne un secondo ottenuto dal precedente tramite una rotazione di un angolo χ attorno al suo asse x . In questo modo si ottiene un secondo sistema di coordinate ortogonali x', y', z' che può essere rappresentato in coordinate sferiche con una descrizione analoga alle precedenti tramite gli angoli θ' e ψ' , ovvero:

$$x' = \cos(\psi') \cos(\theta') \quad y' = \cos(\psi') \sin(\theta') \quad z' = \sin(\psi') \quad (2.2)$$

Noti entrambi i sistemi di riferimento un punto sulla superficie della sfera avrà due distinte rappresentazioni che possono essere messe in relazione. Si considerino i due riferimenti applicati alla stessa sfera, come in Figura 2.1, questi avranno in comune l'origine e un asse (gli assi x e x'). Allora, poiché due punti distinti sulla superficie della sfera sono congiunti da archi di cerchi massimi, è possibile costruire un triangolo sferico avente come lati i due archi definiti tra il punto considerato e rispettivamente il polo relativo a ciascun sistema di riferimento e l'arco che congiunge i due poli.

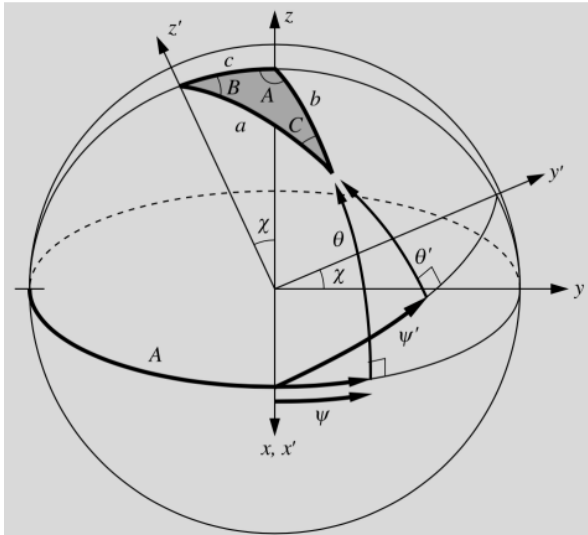


Figura 2.1: Descrive la trigonometria sferica, gli angoli considerati e in quale verso sono valutati positivi. (Karttunen, Kröger, Oja, Poutanen, & Donner, 2016)

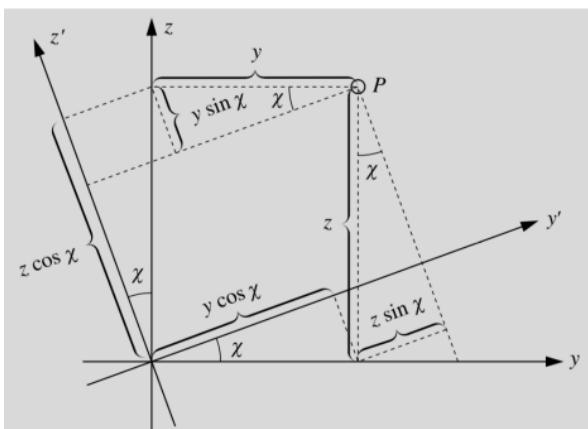


Figura 2.2: Coordinate di un punto P in un sistema di riferimento ruotato. (Karttunen, Kröger, Oja, Poutanen, & Donner, 2016)

Segue che è possibile, con semplici trasformazioni, passare dal sistema di coordinate xyz al sistema $x'y'z'$ per la rappresentazione di uno stesso punto. Questo si attua applicando le seguenti formule conseguenze del fatto che i due sistemi hanno un asse in comune e che per le trasformazioni delle restanti due coordinate ci si può restringere all'analisi su un piano, come mostrato in Figura 2.2.

$$x = x' \quad (2.3)$$

$$y' = y \cos \chi + z \sin \chi \quad (2.4)$$

$$z' = z \cos \chi - y \sin \chi \quad (2.5)$$

In questo modo si sono ottenute le trasformazioni relative alle coordinate ortogonali ma nota la relazione con le coordinate sferiche, tramite le opportune sostituzioni, si ricavano le seguenti espressioni.

$$\cos \psi' \cos \theta' = \cos \psi \cos \theta \quad (2.6)$$

$$\sin \psi' \cos \theta' = \sin \psi \cos \theta \cos \chi + \sin \theta \sin \chi \quad (2.7)$$

$$\sin \theta' = \sin \theta \cos \chi - \sin \chi \sin \psi \cos \theta \quad (2.8)$$

Queste equazioni saranno richiamate anche in seguito poiché consentiranno la definizione delle trasformazioni da un sistema di coordinate astronomiche ad un altro.

2.3 Teoremi

È bene ricordare alcuni teoremi che risultano valere per i triangoli sferici. Questi teoremi esplicitano alcune relazioni che coinvolgono sia angoli che lati e risultano paragonabili a teoremi già noti e validi per i triangoli piani.

I tre teoremi che verranno presentati risultano in qualche modo tra loro collegati poiché si ricavano dalle stesse dimostrazioni.

Il primo teorema è il *Teorema del seno sferico*. Esso è paragonabile all'omonimo teorema valido per i triangoli piani² ed afferma che il rapporto tra il seno di un lato e il seno dell'angolo opposto corrispondente resta costante.

$$\frac{\text{sen}(a)}{\text{sen}(A)} = \frac{\text{sen}(b)}{\text{sen}(B)} = \frac{\text{sen}(c)}{\text{sen}(C)} \quad (2.9)$$

Dimostrazione:

Si considerino una sfera ed un suo triangolo sferico. Si immagini di posizionare un sistema di riferimento ortogonale xyz come in Figura 2.1 con l'origine nel centro della sfera e avete l'asse z passante per un vertice del triangolo, ad esempio quello relativo all'angolo A facendo riferimento alla notazione precedentemente introdotta. Si consideri ora un secondo sistema di riferimento ortogonale x'y'z', ottenuto ruotando il precedente rispetto all'asse x di un angolo χ e avente l'asse z' in corrispondenza di un altro vertice del triangolo sferico, ad esempio quello relativo all'angolo B. Con questa rappresentazione è possibile definire gli angoli associati alle coordinate sferiche come:

$$\begin{aligned} \psi &= A - 90^\circ & \theta &= 90^\circ - b \\ \psi' &= 90^\circ - B & \theta' &= 90^\circ - a & \chi &= c \end{aligned} \quad (2.10)$$

Sostituendo ora questi valori alla prima delle formule di trasformazione tra due sistemi di riferimento ruotati (2.6), sopra riportate, si ottiene:

$$\cos(90^\circ - B) \cos(90^\circ - a) = \cos(A - 90^\circ) \cos(90^\circ - b) \quad (2.11)$$

Ovvero, ricordando le formule goniometriche:

$$\cos(90^\circ - a) = \sin(a) \quad (2.12)$$

$$\cos(-a) = \cos(a) \rightarrow \cos(a - 90^\circ) = \sin(a) \quad (2.13)$$

² Teorema dei seni (o di Eulero) per triangoli: in un qualsiasi triangolo è costante il rapporto tra la misura di un lato e il seno dell'angolo opposto corrispondente. $\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$

Si ottiene la prima delle relazioni cercate

$$\sin(B) \sin(a) = \sin(A) \sin(b) \quad (2.14)$$

Infine, permutando la scelta degli angoli per i quali passano gli assi z e z' dei due sistemi di riferimento, si ottengono le restanti relazioni:

$$\sin(B) \sin(c) = \sin(C) \sin(b) \quad (2.15)$$

$$\sin(C) \sin(a) = \sin(A) \sin(c) \quad (2.16)$$

Con questo si conclude la dimostrazione poiché si è ricavato il teorema (2.9).

Ripercorrendo la dimostrazione, utilizzano però la terza equazione (2.8) invece della prima, si ottiene il *Teorema del coseno sferico*.

Questo teorema è paragonabile a quello di Carnot per i triangoli piani³; permette di calcolare il coseno di un lato del triangolo sferico qualora siano noti gli altri due lati e l'angolo fra questi compreso.

$$\cos(a) = \cos(b) \cos(c) + \cos(A) \sin(b) \sin(c) \quad (2.17)$$

Dimostrazione:

Analogamente a quanto fatto nel dimostrare il teorema del seno sferico, si consideri la terza equazione di trasformazione (2.8) e sostituendo i valori relativi agli angoli (2.10) si ricava:

$$\sin(90^\circ - a) = \sin(90^\circ - b) \cos(c) - \sin(c) \sin(A - 90^\circ) \cos(90^\circ - b) \quad (2.18)$$

Ricordando le uguaglianze goniometriche:

$$\sin(90^\circ - a) = \cos(a) \quad (2.19)$$

$$\sin(a) = -\sin(a) \rightarrow \sin(a - 90^\circ) = -\cos(a) \quad (2.20)$$

$$\cos(90^\circ - a) = \sin(a) \quad (2.21)$$

Segue la relazione cercata (2.17).

Infine, ripetendo il procedimento anche per la seconda equazione di trasformazione (2.7), si ricava una terza relazione valida per i triangoli sferici, ovvero il *Teorema della proiezione*, anch'esso analogo a quello omonimo per i triangoli piani⁴:

$$\cos(B) \sin(a) = -\cos(A) \sin(b) \sin(c) + \cos(b) \sin(c) \quad (2.22)$$

Dimostrazione:

Si proceda come nelle precedenti dimostrazioni sostituendo le espressioni associate ai diversi angoli (2.10):

$$\sin(90^\circ - B) \cos(90^\circ - a) = \sin(A - 90^\circ) \cos(90^\circ - b) \cos(c) + \sin(90^\circ - b) \sin(c) \quad (2.23)$$

Sfruttando le formule goniometriche come nelle precedenti dimostrazioni, si ricava l'uguaglianza cercata (2.22).

³ Teorema del coseno (o di Carnot) per triangoli: in un triangolo qualsiasi il quadrato di un lato è uguale alla somma dei quadrati degli altri due diminuita del doppio prodotto di questi due lati per il coseno dell'angolo fra essi compreso. $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(\alpha)$

⁴ Teorema della proiezione per triangoli: in un qualunque triangolo, la misura di un lato è uguale alla somma dei prodotti delle misure di ciascuno degli altri due per il coseno degli angoli che essi formano con il primo. $a = b \cos(\gamma) + c \cos(\beta)$

Capitolo 3

Leggi di Keplero

3.1 Keplero, la vita

Il tedesco Johannes Kepler, più comunemente noto in Italia come Giovanni Keplero, fu astronomo, matematico e teologo luterano. Nacque a Weil der Stadt nel Württemberg (Germania Meridionale) il 27 dicembre 1571 e morì a Ratisbona il 15 novembre 1630.

Nacque in una famiglia di umili origini ed essendo debole di salute fu indirizzato alla vita ecclesiastica. Questo gli permise di frequentare il seminario dell'Università di Tubinga dove si appassionò di astronomia. Lasciò gli studi teologici per dedicarsi all'insegnamento della matematica.

Keplero pubblicò varie opere fra cui l'*Astronomia Nova*, nella quale espone le prime due leggi che portano il suo nome, e l'*Harmonice Mundi*, che contiene la terza.

3.2 Evoluzione di un pensiero

Gli astronomi antichi disponevano di limitate risorse per la comprensione dell'universo e si basavano esclusivamente sulle loro osservazioni ad occhio nudo o tramite rudimentali strumenti. L'unico punto di osservazione era chiaramente dalla Terra e da essa i corpi celesti appaiono ruotarvi attorno. Ne seguì che le prime teorie descrivevano una visione geocentrica dell'universo, ovvero si credeva che tutti gli astri ruotassero attorno alla Terra. Uno dei primi modelli per il sistema solare fu quello presentato da Tolomeo che, attorno all'anno 100 d.C., riassumendo e rielaborando tutti gli studi precedenti degli antichi greci, presentò un modello di sfere concentriche cristalline perfette dove la Terra occupava il centro mentre Sole e pianeti si muovevano ciascuno su una delle sfere concentriche. La sfera più esterna era quella riservata a tutte le stelle che erano considerate "fisse". Solo attorno al 1500 si affermò l'idea di un modello non geocentrico. Fu Copernico ad introdurre l'idea rivoluzionaria di un sistema solare eliocentrico, ossia con il Sole come fulcro delle orbite dei corpi del sistema solare. Però nemmeno in questo modello si rinunciò alle orbite circolari tradizionali. Quello che mise in discussione entrambi questi modelli fu il fatto che le osservazioni non combaciavano con i dati teorici. Si era infatti osservato che alcuni pianeti percorrevano un moto apparente retrogrado. Per tentare di risolvere questa anomalia vennero introdotti degli espedienti basati su epicicli e deferenti. Si ipotizzò che ciascun pianeta si muovesse su una circonferenza, epiciclo, il cui centro si spostava percorrendo un'altra circonferenza di raggio maggiore, deferente. In questo modo il corpo celeste orbitava attorno al centro del sistema solare percorrendo anche dei loop retrogradi che sembravano giustificare quanto riportato dalle osservazioni. Fu Keplero a far tesoro di tutte queste scoperte per poi arrivare a descrivere più correttamente il sistema solare, ovvero come un sistema eliocentrico nel quale i pianeti ruotano attorno al Sole percorrendo orbite ellittiche.

Oggi anche grazie alle nuove scoperte tecnologiche e ai nuovi strumenti d'osservazione possiamo affermare che il sistema solare è un sistema eliocentrico con orbite ellittiche non complanari situato in un braccio della galassia chiamata Via Lattea.

3.3 Prima legge

“L’orbita dei pianeti intorno al Sole è un’ellisse con il Sole in uno dei fuochi”

Come anticipato, già con il modello copernicano si era stabilito che i pianeti ruotassero attorno al Sole e non che fosse il Sole a ruotare attorno alla Terra come sembrava dal moto apparente. L’idea innovativa verificata da Keplero fu che le orbite dei pianeti descrivevano delle ellissi più o meno schiacciate, e non delle circonferenze, con il Sole in corrispondenza di uno dei due fuochi.

Da studi più accurati, è emerso che per quanto riguarda i pianeti che posseggono dei satelliti, come nel caso della Terra con la Luna, a muoversi lungo l’ellisse non è esattamente il centro del pianeta ma bensì il baricentro tra il pianeta e i suoi satelliti.

Si chiama *ellisse* (Candilere & Bertapelle, 2011) il luogo geometrico dei punti su un piano per i quali la somma delle distanze da due punti fissati, F_1 e F_2 , detti fuochi, è uguale ad una data costante $2a > 0$. Considerando un sistema di riferimento cartesiano, ponendo i fuochi sull’asse delle ascisse simmetrici rispetto all’origine, $F_1 = (-f, 0)$ e $F_2 = (f, 0)$, si ha che un punto $P = (x, y)$, appartiene all’ellisse se, e solo se,

$$\|P - F_1\| + \|P - F_2\| = 2a \quad (3.1)$$

Ovvero

$$\sqrt{(x + f)^2 + y^2} + \sqrt{(x - f)^2 + y^2} = 2a \quad (3.2)$$

che è equivalente all’equazione

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (3.3)$$

ove $b^2 = a^2 - f^2$.

Quest’ultima è l’equazione di un’ellisse con centro nell’origine degli assi cartesiani.

L’ellisse presenta due assi di simmetria ortogonali con l’origine come centro di simmetria; le costanti $a > b > 0$ vengono usate per indicare gli assi dell’ellisse rispettivamente con la lettera a il semiassi maggiori e con b quello minori.

Nel caso generico in cui il centro dell’ellisse non coincide con l’origine degli assi cartesiani di riferimento si ha che il suo centro si trova come intersezione dei suoi assi di simmetria. Esso avrà coordinate $C = (x_c, y_c)$ e l’equazione dell’ellisse sarà del tipo

$$\frac{(x - x_c)^2}{a^2} + \frac{(y - y_c)^2}{b^2} = 1 \quad (3.4)$$

Il parametro che quantifica quanto è “schiacciata” l’ellisse è l’eccentricità indicata con e .

$$e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} \quad (3.5)$$

Per un’ellisse l’eccentricità assume un valore compreso tra 0 e 1, dove, qualora assuma i valori estremi, ricade nei casi degeneri. Se l’eccentricità è minima, ovvero vale zero, essa degenera in una circonferenza ed asse maggiore e minore hanno la stessa lunghezza. Se invece l’eccentricità è massima, ossia vale uno, la circonferenza degenera in un segmento di lunghezza equivalente all’asse maggiore con i fuochi agli estremi.

Si noti anche che la distanza tra i due fuochi vale $2ae$ da cui vale:

$$\|O - F_1\| = \|O - F_2\| = ae \quad (3.6)$$

3.4 Seconda legge

“Nel suo moto attorno al Sole, un pianeta spazza un’area di orbita uguale in tempi uguali”

Questa seconda legge precisa in che modo il pianeta percorre la sua orbita.

L’area considerata in questa legge è il settore dell’ellisse delimitato dall’arco percorso dal pianeta nell’intervallo di tempo considerato e dai due raggi che congiungono gli estremi di tale arco al fuoco dell’ellisse in cui è situato il Sole. Segue che, trattandosi di un’ellisse e non di una circonferenza, la distanza da un fuoco, ossia dal Sole, varia al variare della posizione lungo la sua orbita. Affinché l’area spazzata resti costante considerando stessi intervalli di tempo, gli archi percorsi saranno di lunghezze diverse. Segue anche che, per lo stesso motivo, la velocità non resterà costante in ogni posizione dell’orbita. La velocità viene calcolata come rapporto tra variazione di spazio e variazione di tempo, da cui considerando stessi intervalli di tempo si avrà una velocità direttamente proporzionale allo spostamento. Per avere aree spazzate uguali si devono avere archi percorsi di lunghezza maggiore quando il pianeta è più vicino al Sole e minori quando più lontano. Per questa ragione ciascun pianeta si muove più rapidamente al Perielio, che corrisponde al punto dell’orbita più vicino al Sole, e più lentamente all’Afelio, il punto dell’orbita più lontano rispetto al Sole. Ciò che resta costante è il momento angolare.

3.5 Terza legge

“I pianeti più distanti dal Sole orbitano con velocità angolare minore, secondo una precisa formula $P^2 = Ka^3$ ”

Come visto dalla precedente legge la velocità non resta costante percorrendo l’orbita, lo stesso avviene per la velocità angolare. La velocità angolare è definita come rapporto tra la variazione di angolo e la variazione di tempo. Dalla legge precedente si è chiarito che in intervalli di tempo uguali gli archi percorsi possono essere di diverse lunghezze, pertanto anche gli angoli soggiacenti tali archi non saranno congruenti. Di conseguenza anche la velocità angolare varierà proporzionalmente all’angolo spazzato.

P indica il periodo di rivoluzione del pianeta attorno al Sole, ovvero il tempo impiegato dal pianeta per percorrere l’intera orbita; a , come in precedenza, indica il semiasse maggiore dell’orbita.

Nel caso gravitazionale, la costante K assume il seguente valore:

$$K = \frac{4\pi^2}{G(m_1 + m_2)} \quad (3.7)$$

G è la costante di gravitazione universale che vale $G = 6,67 \times 10^{-11} \frac{m^3}{kg \cdot s^2}$, m_1 è la massa del Sole che è approssimativamente di $2 \times 10^{30} kg$ e m_2 la massa del pianeta considerato. La legge completa assume quindi la seguente formula

$$P^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{G(m_1 + m_2)} \quad (3.8)$$

Pertanto il quadrato del periodo è direttamente proporzionale al cubo del semiasse maggiore tramite la costante K .

Si noti che tramite le leggi di Keplero si definisce l’orbita di un pianeta e come viene percorsa, ma quello che definisce effettivamente come si muove un corpo celeste è la legge di Newton. Considerando il moto di un pianeta ristretto all’interazione di soli due corpi

(Sole-pianeta), viene approssimato al problema dei due corpi soggetti ad una forza di tipo gravitazionale. Quella che vale è la legge fondamentale della fisica ovvero la legge di gravitazione universale dove m_1 e m_2 indicano come sopra rispettivamente la massa del Sole e del pianeta e r indica il raggio ovvero la distanza tra i due corpi considerati

$$\vec{F} = \frac{Gm_1m_2}{r^2} \cdot \frac{-\vec{r}}{r} = -Gm_1m_2 \frac{\vec{r}}{r^3} \quad (3.9)$$

E uguagliando questa alla *seconda legge fondamentale della dinamica* $\vec{F} = m\vec{a}$ si ottiene la legge del moto per il pianeta:

$$m_2\vec{a}_2 = -Gm_1m_2 \frac{\vec{r}}{r^3} \quad (3.10)$$

Capitolo 4

Posizioni assolute in cielo

Le leggi di Keplero e le nozioni di geometria in precedenza ricordate, forniscono una buona teoria per descrivere le orbite dei pianeti. Ripensando però ai sistemi di Tolomeo e Copernico, che sembravano coerenti da un punto di vista teorico, quanto visto non è sufficiente a confermare la reale validità.

Va quindi sviluppato un modo oggettivo tramite il quale ricavare le misurazioni celesti e con questi dati verificare quanto stabilito dalla teoria. Per far ciò è necessario basarsi su l'unico strumento a disposizione, l'osservazione del cielo, ricavandone mappe o immagini dalle quali poter trarre misurazioni convertibili in dati utilizzabili. Tali dati infine dovranno permettere di determinare l'orbita del corpo celeste.

4.1 Gli elementi orbitali

In questo capitolo si presenteranno gli elementi orbitali, ossia i parametri che descrivono l'orbita di ciascun corpo celeste. Tramite gli elementi orbitali risulterà possibile ricavare l'effemeride del corpo, vale a dire una previsione giornaliera della posizione del corpo stesso nel cielo.

Si procederà di seguito coll'analizzare le orbite dei corpi celesti ed in particolare ci si soffermerà sulle orbite ellittiche come quelle dei pianeti del Sistema Solare. A tal fine si presenteranno gli elementi orbitali che le identificano univocamente. Per i corpi celesti le cui orbite non sono ellittiche ma paraboliche o iperboliche la trattazione è simile a meno di riadattare gli elementi orbitali, in particolare quello corrispondente al semiasse.

I valori degli elementi orbitali si determinano dalle osservazioni. Nelle prime fasi di studio di un corpo celeste non ancora catalogato si hanno a disposizione poche osservazioni per cui gli si assegnano elementi orbitali con valori preliminari. Solo successivamente, avendo a disposizione un numero sempre maggiore di osservazioni (almeno per una singola opposizione⁵), questi valori verranno modificati per ricavarne dati sempre più accurati.

Nello spazio tri-dimensionale gli elementi orbitali che determinano l'orbita ellittica sono sei:

- a , è il *semiasse maggiore* dell'orbita
- e , è l'*eccentricità* dell'orbita
- i , è l'*inclinazione* dell'orbita
- Ω , è la *longitudine del nodo ascendente*
- ω , è l'*argomento del Perielio*
- T , è il *tempo di passaggio al Perielio*

⁵ L'opposizione astronomica è il momento migliore per osservare la maggior parte dei pianeti del sistema solare e altri corpi celesti poiché questi appaiono nel loro stato più ampio e luminoso nel cielo notturno. Opposizione astronomica significa che un pianeta si trova dalla parte opposta al Sole rispetto alla Terra; ovvero l'angolo Sole-Terra-pianeta è di 180°.

Il punto P si trova in corrispondenza della proiezione del Perielio dell'orbita del pianeta sulla Sfera Celeste ed è un punto fisso. Si ricordi che il Perielio corrisponde al punto dell'orbita nel quale il pianeta si trova alla massima distanza dal Sole. Altro punto fisso è quello indicato con il simbolo \varOmega ed è chiamato *nodo ascendente*, ovvero una delle due intersezioni sulla Sfera Celeste tra il piano dell'orbita del pianeta e dell'eclittica. L'altra intersezione opposta è detta *nodo discendente*. L'ultimo dei punti evidenziati è il punto fisso conosciuto come *punto Gamma* γ che rappresenta il punto di intersezione primaverile tra l'eclittica e l'equatore celeste. L'unico punto mutevole è il punto X che indica la proiezione del pianeta osservato sulla Sfera Celeste ed è di conseguenza una posizione che varia al percorrere dell'orbita da parte del pianeta.

Per quanto riguarda gli elementi orbitali, il semiasse maggiore e l'eccentricità sono già stati definiti nel Capitolo 2 dove si è descritta l'ellisse. In aggiunta si ricordi solamente che l'unità di misura del semiasse maggiore è l'Unità Astronomica AU e 1 AU equivale a 149'597'870'707 m.

Per *inclinazione* i si intende l'angolo compreso tra il piano dell'orbita del pianeta e il piano dell'eclittica e si misura in gradi. Essa assume valori compresi tra 0 e 180 gradi. Quando essa è maggiore di 90° il pianeta sta percorrendo la sua orbita in verso opposto rispetto al movimento della Terra attorno al Sole. Se invece è minore di 90°, la rotazione è concorde con quella della Terra.

La *longitudine (eclittica) del nodo ascendente* Ω è l'angolo misurato verso est dal punto Gamma γ al nodo ascendente \varOmega . Essa è misurata in gradi e può assumere valori compresi tra 0 e 360 gradi.

L'*argomento del Perielio* ω è l'angolo in gradi misurato dal nodo ascendente \varOmega alla proiezione del Perielio P, valutato nella direzione del moto del pianeta.

Il *tempo di passaggio al Perielio* T è il tempo di riferimento al quale la posizione del pianeta X corrisponde al punto di Perielio P.

4.2 Altri angoli notevoli

Come già detto gli elementi orbitali descrivono pienamente l'orbita e quindi permettono di ricavare le altre grandezze necessarie per il suo studio.

Come primo dato si può quindi ricavare la *longitudine del Perielio*, ovvero l'angolo $\tilde{\omega}$ misurato in gradi. Per orbite dirette si calcola come la somma di Ω e ω ; mentre per orbite retrograde, esso è la differenza dei due angoli. Un'orbita si dice retrograda quando viene percorsa in verso opposto rispetto al moto della Terra. Quindi $\tilde{\omega} = \Omega - \omega$ per orbite retrograde, mentre $\tilde{\omega} = \Omega + \omega$ per orbite che non lo sono.

L'*anomalia vera* del pianeta in un certo istante di tempo t è l'angolo v . Viene misurata in gradi ed è l'angolo lungo l'orbita del pianeta tra il punto di Perielio P e il pianeta stesso X. Conseguenza della seconda legge di Keplero è che il pianeta percorre la sua orbita con velocità non costante, ma dipendente dalla distanza dal Sole. Si può allora immaginare di considerare un "pianeta medio" che si muova lungo l'orbita con velocità angolare costante pari a $2\pi/P$ dove P indica il periodo dell'orbita. In questo modo anche l'angolo tra pianeta e Perielio varia in modo costante e viene chiamato *anomalia media* M al tempo $(t - T)$ dal passaggio al Perielio, dove T è il tempo relativo all'istante di passaggio al Perielio. Tale grandezza è misurabile e vale:

$$M = \frac{2\pi (t - T)}{P} \quad (4.1)$$

D'ora in poi, per quanto riguarda la terminologia, con il termine "vera" si farà riferimento al moto effettivo del pianeta, mentre con "media" ci si riferirà al pianeta medio

Viene indicato con $\theta = \omega + v$ l'*argomento di latitudine* del pianeta al tempo t ed esso corrisponde all'angolo in gradi misurato dal nodo ascendente al pianeta.

Con $l = \Omega + \theta$ si indica la *longitudine vera* del pianeta. È un angolo espresso in gradi e calcolato tramite le seguenti semplici sostituzioni: $l = \Omega + \theta = \theta + \omega + v = \tilde{\omega} + v$.

Analogamente con $L = \Omega + \omega + M = \tilde{\omega} + M$ si indica la *longitudine media*, ovvero quella relativa al pianeta medio.

Trattandosi di angoli, per la loro determinazione sarà fondamentale tener conto del problema della scelta dei quadranti. Un'informazione che a questo scopo tornerà utile è che gli angoli di anomalia media M , eccentricità e e anomalia vera v non devono appartenere allo stesso quadrante.

Inoltre non è necessario inserire il *periodo* P dell'orbita tra gli elementi orbitali poiché, noto il semiasse maggiore, è immediato ricavarlo dalla terza legge di Keplero (3.8).

4.3 Sistemi di riferimento

Noti gli elementi orbitali, per ciascun corpo celeste ogni punto della sua orbita è univocamente determinato e pertanto è possibile calcolare le effemeridi di tale corpo. Ovvero è possibile conoscere la posizione del corpo giorno per giorno sia nel passato che nel futuro.

Preventivamente vanno però ben definiti i sistemi di riferimento da utilizzare per calcolare tali coordinate.

Di seguito si esporranno quattro diversi sistemi di riferimento, tutti espressi tramite coordinate sferiche. Tali sistemi varieranno per scelta del posizionamento dell'origine degli assi e per piano di riferimento.

Coordinate orbitali eliocentriche. Gli assi ortogonali di riferimento vengono chiamati \underline{xyz} e come origine viene preso il punto in corrispondenza del centro del Sole. Viene scelto come piano di riferimento quello dell'orbita del pianeta e come direzione positiva dell'asse \underline{x} quella del Perielio dell'orbita. Le posizioni dei corpi vengono generalmente espresse in coordinate sferiche tramite la distanza dal Sole r e la vera anomalia v . Poiché il pianeta segue l'orbita ne deriva che la componente \underline{z} della sua posizione sarà sempre zero, mentre per le componenti \underline{x} e \underline{y} varranno le relazioni corrispondenti alle associate coordinate polari.

$$\underline{x} = r \cos(v) \quad \underline{y} = r \sin(v) \quad \underline{z} = 0 \quad (4.2)$$

Coordinate eclittiche eliocentriche. Gli assi ortogonali di riferimento sono indicati con XYZ e anche in questo caso l'origine corrisponde con il Sole. Come piano di riferimento, come dice il nome stesso, viene scelto quello dell'eclittica della Terra e come direzione positiva dell'asse X quella del punto Gamma γ . Anche queste coordinate vengono espresse tramite le coordinate sferiche per mezzo della distanza dal Sole r , longitudine λ e latitudine β eclittiche. La longitudine eliocentrica eclittica è l'angolo relativo all'arco di circonferenza sull'eclittica della Terra che va dal punto Gamma alla proiezione del corpo celeste sull'eclittica mentre la latitudine è l'angolo su un cerchio verticale. Generalmente quindi, per un pianeta, tutte e tre le coordinate saranno diverse da zero e varrà:

$$X = r \cos(\beta) \cos(\lambda) \quad Y = r \cos(\beta) \sin(\lambda) \quad Z = r \sin(\beta) \quad (4.3)$$

Coordinate equatoriali eliocentriche. In questo caso per indicare gli assi di riferimento useremo le tre lettere greche $\xi\eta\zeta$ e come origine viene scelto un punto in corrispondenza del Sole. Come per le coordinate eclittiche, anche in questo caso l'asse ξ punta nella direzione del punto Gamma γ mentre come piano di riferimento viene preso il piano dell'equatore terrestre. Sarà utile all'analisi denominare con ε l'angolo tra l'asse Z del

sistema di coordinate eclittiche e l'asse ζ , che corrisponde anche all'angolo tra il piano XY, il piano dell'orbita della Terra, ed il piano $\xi\eta$, il piano dell'equatore terrestre.

Il sistema equatoriale si evince essere una rotazione del sistema eclittico. Segue che le coordinate equatoriali sono ottenute da quelle eclittiche moltiplicate per la matrice di rotazione di angolo ε .

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\varepsilon) & -\sin(\varepsilon) \\ 0 & \sin(\varepsilon) & \cos(\varepsilon) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

Coordinate equatoriali geocentriche. A differenza delle precedenti queste coordinate considerano come origine il punto in corrispondenza del centro della Terra. Come piano di riferimento viene considerato il piano su cui giace la proiezione sulla Sfera Celeste dell'equatore terrestre. Gli assi di riferimento ortogonali sono indicati con xyz e l'asse x è orientato, come nei due sistemi precedenti, nella direzione del punto Gamma γ . La posizione del pianeta viene espressa tramite le coordinate sferiche per mezzo della distanza dal centro della Terra Δ , l'*ascensione retta* α e la *declinazione* δ .

$$x = \Delta \cos(\delta) \cos(\alpha) \quad y = \Delta \cos(\delta) \sin(\alpha) \quad z = \Delta \sin(\delta) \quad (4.5)$$

Conoscere la declinazione significa sapere su che cerchio della Sfera Celeste parallelo all'equatore il relativo corpo celeste si muove. Ma, ad un osservatore, per individuare un corpo celeste in cielo non è sufficiente conoscere declinazione e ascensione retta poiché quest'ultima è legata al punto Gamma solidale alla Sfera Celeste e che appare muoversi in cielo. È quindi necessario introdurre una coordinata locale legata all'ascensione retta, il *tempo siderale*:

$$\phi = h + \alpha \quad (4.6)$$

dove h è l'*angolo orario* misurato in senso orario dal meridiano sud⁸ al corpo celeste considerato. Il tempo siderale corrisponde all'angolo orario del punto Gamma e può essere misurato puntando un telescopio su una stella facilmente riconoscibile, leggendo il suo angolo orario sul quadrante del telescopio e sommandogli l'ascensione retta ricavata da un catalogo.

La direzione dell'asse di rotazione della Terra rimane quasi costante e quindi anche il piano dell'equatore ad esso ortogonale. Per questa ragione queste coordinate sono considerate assolute e usate per compilare cataloghi.

Ascensione retta e declinazione sono gli angoli di riferimento in cui verranno restituiti i dati dalle effemeridi.

4.4 Effemeridi

Noti gli elementi orbitali di un corpo celeste è possibile generare l'effemeride. Si tratta di una tavola numerica di dati calcolati, che forniscono per un corpo celeste le coordinate e altri elementi variabili nel tempo a intervalli prefissati e costanti.

Qui di seguito si presenterà il procedimento necessario alla generazione dell'effemeride, in particolare si ricaveranno i dati della tabella associati alla posizione, relativamente ad un generico istante di tempo t . Il procedimento sviluppato prevede di calcolare le coordinate equatoriali geocentriche tramite un'analisi che parte dalle coordinate eliocentriche orbitali, per passare poi attraverso quelle eclittiche ed equatoriali.

⁸ È il meridiano della Sfera Celeste e la direzione nord o sud è definita considerando l'intersezione con l'orizzonte, in base a quale punto cardinale attraversa.

Si assumano come noti gli elementi orbitali ed M_0 . Si considerino i, Ω, ω riferiti a J2000.0 (mezzogiorno UT del 1° gennaio 2000) e si supponga di voler calcolare le coordinate equatoriali di un corpo celeste ad un indicato tempo t .

Si inizi calcolando l'*anomalia media* M dalla formula:

$$M - M_0 = \frac{2\pi}{P}(t - t_0) \quad (4.7)$$

La quantità $2\pi/P$ è chiamata moto medio (equivale alla velocità angolare orbitale media del pianeta) e di solito viene indicata con il simbolo n .

Dalla approssimazione della terza legge di Keplero con costante $K = 1$ è possibile calcolare il moto medio n nella sua usuale unità di misura, gradi al giorno, poiché il periodo varrà $P^2 = a^3$ e sarà calcolato in tempo siderale, ricordando che un anno siderale equivale a 365,25636 giorni e 2π equivale a 360 gradi.

È possibile ora, dalla formula (4.7), ricavare l'*anomalia media* M .

Si prosegue ricavando l'*anomalia di eccentricità* E , che permetterà a sua volta di calcolare l'*anomalia vera* v . Per comprendere al meglio i significati di tali angoli si osservi la Figura 4.2 dove è rappresentata l'orbita ellittica del pianeta inserita in una circonferenza di raggio a .

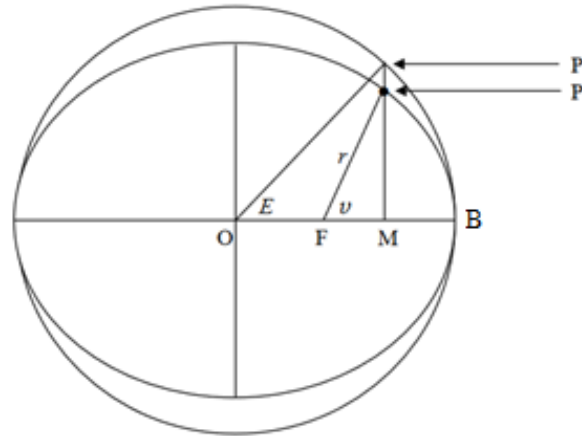


Figura 4.2: Orbita ellittica di un corpo celeste, corrispondente al punto P, inserita in una circonferenza. (Tatum, Physics topics, Celestial Mechanics, Capitolo 2, 2023)

Si supponga che il pianeta si trovi al Perielio e quindi che il valore del tempo sia $t = T$. Nell'intervallo di tempo $(t - T)$ l'area spazzata dai raggi vettore sarà il settore dell'ellisse FBP . Poiché dalla seconda legge di Keplero sappiamo che il raggio vettore spazza aree uguali in tempi uguali, tale area varrà $(t - T)/P$ dell'area totale dell'ellisse ovvero:

$$A(FBP) = \frac{(t - T)\pi ab}{P} \quad (4.8)$$

Si consideri ora l'area della porzione di circonferenza FBP' . Ogni ordinata di quest'area varrà a/b volte l'ordinata corrispondente nell'area FBP da cui:

$$A(FBP') = \frac{(t - T)\pi a^2}{P} \quad (4.9)$$

Si noti che quest'ultima area equivale all'area del settore circolare $OP'B$ meno l'area del triangolo $OP'F$. L'area del triangolo si ricava dalla formula mentre per calcolare l'area del settore circolare è sufficiente applicare una proporzione.

$$A(OP'F) = \frac{1}{2} \cdot OF \cdot P'M = \frac{1}{2} \cdot ae \cdot a \sin(E) = \frac{1}{2} a^2 e \sin(E) \quad (4.10)$$

$$A(OP'B) = \frac{E}{2\pi} \cdot \pi a^2 = \frac{1}{2} E a^2 \quad (4.11)$$

Ricordando che:

$$A(FBP') = A(OP'B) - A(OP'F) \rightarrow \frac{(t-T)\pi a^2}{P} = \frac{1}{2}Ea^2 - \frac{1}{2}a^2 e \sin(E) \quad (4.12)$$

Moltiplicando per due e semplificando il quadrato del semiasse maggiore, si ricava la relazione cercata che lega l'anomalia media all'eccentricità media:

$$M = \frac{(t-T)2\pi}{P} = E - e \sin(E) \quad (4.13)$$

Si è così ricavata un'equazione trascendentale dalla quale, essendo M già nota poiché precedentemente calcolata, è possibile ricavare E .

Resta ora da trovare la relazione che lega E alla vera anomalia v .

Dalla Figura 4.2 si comprende che le coordinate del punto P possono essere espresse nel seguente modo:

$$x = a \cos(E) \quad y = b \sin(E) \quad (4.14)$$

Si verifica quindi facilmente che tali coordinate soddisfano l'equazione dell'ellisse (3.3) e permettono di calcolarne il raggio vettore r tramite il teorema di Pitagora applicato al triangolo FMP:

$$r^2 = PM^2 + FM^2 = PM^2 + (OM - OF)^2 = (b \sin(E))^2 + (a \cos(E) - ae)^2 = b^2 \sin^2(E) + a^2 (\cos(E) - e)^2 \quad (4.15)$$

Tramite le sostituzioni $\sin^2 E = 1 - \cos^2 E$ e $b^2 = a^2(1 - e^2)$ si ricava la relazione per r , da cui si ottiene quanto cercato, ovvero la relazione tra l'eccentricità media e l'anomalia media:

$$r = a(1 - e \cos(E)) \quad (4.16)$$

$$\cos(v) = \frac{FM}{r} = \frac{a(\cos(E) - e)}{a(1 - e \cos(E))} = \frac{\cos(E) - e}{1 - e \cos(E)} \quad (4.17)$$

$$\sin(v) = \frac{PM}{r} = \frac{b \sin(E)}{a(1 - e \cos(E))} = \frac{\sqrt{1 - e^2} \sin(E)}{1 - e \cos(E)} \quad (4.18)$$

A questo punto si sono calcolati sia l'anomalia vera sia il raggio vettore e pertanto si può ricavare l'argomento di latitudine $\theta = \omega + v$.

Si veda la Figura 4.1, considerando il triangolo sferico di vertici $NX\delta$ è possibile ricavare la latitudine eclittica β applicando il teorema del seno sferico (2.9) visto nel Capitolo 2:

$$\frac{\sin(\beta)}{\sin(i)} = \frac{\sin(\omega + v)}{\sin(90^\circ)} \rightarrow \sin(\beta) = \sin(\omega + v) \cdot \sin(i) \quad (4.19)$$

Essendo β un angolo compreso tra -90° e $+90^\circ$, il valore ottenuto da questa relazione è unico.

Tramite il teorema delle proiezioni (2.22) è possibile ricavare il seno di $\lambda - \Omega$:

$$\cos(i) \sin(\omega + v) = -\cos(90^\circ) \sin(\beta) \sin(\lambda - \Omega) + \cos(\beta) \sin(\lambda - \Omega) \quad (4.20)$$

$$\sin(\lambda - \Omega) = \frac{\cos(i) \sin(\omega + v)}{\cos(\beta)} \quad (4.21)$$

E tramite il teorema del coseno (2.17) anche il coseno della stessa quantità:

$$\cos(\omega + v) = \cos(\beta) \cos(\lambda - \Omega) + \cos(90^\circ) \sin(\beta) \sin(\lambda - \Omega) \quad (4.22)$$

$$\cos(\lambda - \Omega) = \frac{\cos(\omega + v)}{\cos(\beta)} \quad (4.23)$$

Noti entrambi i valori è possibile identificare il corretto angolo $\lambda - \Omega$ da cui ricavare il valore di λ .

A questo punto sono stati calcolati r , λ , β ed è possibile effettuare il primo cambio di coordinate (4.3), passando da coordinate eliocentriche aventi come piano di riferimento l'orbita del pianeta considerato a quelle con piano di riferimento quello dell'orbita della Terra.

Per passare poi al sistema di riferimento equatoriale avente come piano di riferimento quello dell'equatore della Terra (4.4) è sufficiente conoscere l'angolo ε di inclinazione tra piano dell'equatore e il piano dell'orbita della Terra ed applicare la matrice di rotazione alle coordinate eliocentriche ellittiche come visto sopra. Si ricordi che ε è l'obliquità dell'eclittica e va sempre valutata rispetto ad una precisa epoca, convenzionalmente J2000.0.

Si tratta ora di effettuare l'ultimo cambio di coordinate spostando l'origine del sistema di riferimento dal Sole alla Terra (4.5). Allora le coordinate dell'oggetto cercato saranno le precedenti del sistema equatoriale a cui viene aggiunta la posizione del Sole (x_0 , y_0 , z_0). Ovvero:

$$x = x_0 + \xi \quad y = y_0 + \eta \quad z = z_0 + \zeta \quad (4.24)$$

Tuttavia il calcolo delle coordinate del Sole non è un'operazione semplice come può apparire. Un metodo è quello di ripetere il procedimento precedente partendo dagli elementi orbitali della Terra e, facendo riferimento ad un sistema con origine il Sole, calcolarne le posizioni. Allora le coordinate geocentriche del Sole saranno quelle della Terra con i segni opposti. Tuttavia questo procedimento non è abbastanza accurato poiché la presenza della Luna ha un peso rilevante nel calcolo delle esatte coordinate. La Terra non compie un'ellisse perfetta attorno al Sole ma è il baricentro tra Terra e Luna a seguire tale orbita.

Si supponga per semplicità di conoscere le coordinate del Sole rispetto alla Terra così da poter calcolare le coordinate ortogonali del corpo celeste cercato nel sistema geocentrico. Tramite le usuali trasformazioni da coordinate ortogonali a coordinate sferiche (2.1), è possibile ricavare le coordinate sferiche relative, dipendenti dagli angoli associati ad ascensione retta α e declinazione δ , e indicando con Δ la distanza dalla Terra. Si ha:

$$\alpha = \arccos\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) = \arcsin\left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) \quad (4.25)$$

$$\delta = \arcsin\left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right) \quad (4.26)$$

$$\Delta = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (4.27)$$

L'ascensione retta viene comunemente indicata in unità di tempo. Pertanto dall'equazione se ne ricava un valore in gradi che andrà convertito in ore. Un'ora equivale a 15 gradi, un minuto a 15 primi e un secondo a 15 secondi di grado.

Va ricordato che i risultati ottenuti sono relativi agli elementi orbitali in una precisa epoca. A causa delle perturbazioni dei pianeti le orbite sono in continuo cambiamento. Inoltre come anticipato, in tutti i problemi che coinvolgono angoli, è necessario far attenzione al problema della scelta del quadrante. Per tale ragione, per calcolare un angolo tramite formule inverse è importante calcolare sia coseno che seno in modo da confrontare i due valori per sceglierne il corretto angolo.

Capitolo 5

Visibilità dalla Terra

Dal capitolo precedente sono ora noti gli aspetti teorici necessari all'individuazione della posizione di un corpo celeste durante il moto lungo la sua orbita. A partire da tali conoscenze è possibile improntare uno studio relativo alla posizione apparente in cielo di un corpo celeste.

Si sono finora ricavati, in particolare, i valori di ascensione retta e declinazione, ovvero la posizione assoluta in cielo del corpo celeste con riferimento geocentrico. Queste informazioni vanno a comporre in parte le effemeridi relative. Per continuare lo studio a obiettivo dell'elaborato è necessario procedere ad un'analisi specifica per il luogo di osservazione.

In questo capitolo si presenteranno valutazioni relative ad un selezionato corpo del sistema solare. Anche al fine di una maggiore accuratezza, non si inizierà l'analisi dagli elementi orbitali della sua orbita, ma si sfrutteranno valori già calcolati tramite il tool di Horizons System. Questo tool restituisce le effemeridi complete del corpo celeste e in particolare, effettuando automaticamente le operazioni in precedenza descritte, restituisce le coordinate equatoriali cercate.

5.1 Sistema orizzontale

Per osservatori posizionati sulla Terra sistemi di riferimento come quelli mostrati al capitolo precedente, che hanno come riferimenti punti della Sfera Celeste slegati dalla posizione della Terra, per quanto assoluti, risultano meno adatti ad un utilizzo pratico.

Al fine di valutare la visibilità di un corpo celeste da un certo luogo, è più conveniente definire un ulteriore sistema di riferimento a partire dall'orizzonte relativo alla posizione dell'osservatore. Si tratterà quindi, a differenza dei sistemi di coordinate illustrati al capitolo precedente, di un sistema di riferimento dipendente dalla posizione, in particolare dalla latitudine del luogo ϕ , e dall'istante di tempo in cui avviene l'osservazione.

Questo sistema di coordinate viene chiamato *sistema orizzontale alt-azimutale*. Esso risulta essere un sistema geocentrico e considera come piano di riferimento il piano tangente alla Terra passante per il punto di osservazione, ovvero il piano che incrocia la Sfera Celeste all'orizzonte. La Sfera Celeste viene costruita immaginando il centro in corrispondenza dell'osservatore. Il punto sulla Sfera Celeste verticalmente sopra l'osservatore è chiamato Zenit, mentre il suo antipodale Nadir. Si chiama cerchio verticale il cerchio massimo passante per lo Zenit e quindi anche per il Nadir, e meridiano il cerchio verticale passante per i poli Nord e Sud celesti⁹. Come prima coordinata sferica di riferimento si considera l'*azimut* A il quale è l'angolo longitudinale sul piano dell'orizzonte compreso tra la verticale del corpo e il punto cardinale Sud. Viene misurato in senso orario ed ha un valore compreso tra 0 e 360 gradi. La seconda coordinata di riferimento è l'*altezza* a , ovvero l'angolo latitudinale tra il piano dell'orizzonte e il corpo celeste. Essa viene misurata quindi sul cerchio verticale e per questo assume valori compresi tra -90 e +90 gradi. Infine con z si indica la *distanza dallo Zenit* che equivale a $z = 90^\circ - a$.

Questo sistema di riferimento può essere pensato come una rotazione del sistema equatoriale e per questo le sue coordinate sferiche si possono ricavare da quelle equatoriali per mezzo del cambio di coordinate da un sistema all'altro, come presentato nel Capitolo 2 relativo alla geometria della Sfera Celeste (2.3-5).

⁹ I poli celesti sono i punti corrispondenti all'intersezione tra la Sfera Celeste e l'asse di rotazione della Terra.

Le equazioni di trasformazione dal sistema equatoriale a quello alt-azimutale espresse in coordinate sferiche, sono riportate qui sotto. Esse si ottengono dalle equazioni in precedenza ricavate (2.6-8) in cui si sostituiscono i corrispondenti angoli valutati come segue:

$$\begin{aligned} \psi &= 90^\circ - h & \theta &= \delta \\ \psi' &= 90^\circ - A & \theta' &= a & \chi &= -(90^\circ - \phi) \end{aligned} \quad (5.1)$$

Da cui:

$$\sin(A)\cos(a) = \sin(h)\cos(\delta) \quad (5.2)$$

$$\cos(A)\cos(a) = \cos(h)\cos(\delta)\sin(\phi) - \sin(\delta)\cos(\phi) \quad (5.3)$$

$$\sin(a) = \cos(h)\cos(\delta)\cos(\phi) + \sin(\delta)\sin(\phi) \quad (5.4)$$

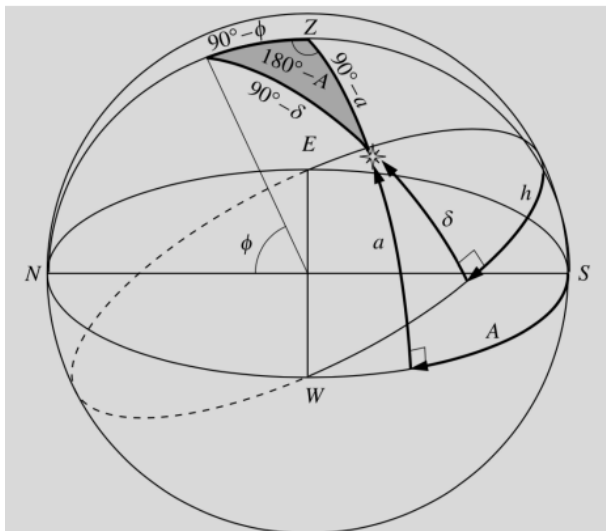


Figura 5.1: Triangolo sferico sulla Sfera Celeste usato per derivare la trasformazione dal sistema orizzontale a equatoriale e viceversa. (Karttunen, Kröger, Oja, Poutanen, & Donner, 2016)

Tali equazioni vanno valutate nel seguente modo: dall'ultima delle tre equazioni (5.4) si identifica univocamente l'altezza a poiché si tratta di un angolo compreso tra -90° e $+90^\circ$ e quindi individuato correttamente dalla funzione arcoseno. Successivamente sostituendo il valore ottenuto nelle altre due equazioni (5.2-3), tramite la loro combinazione, è possibile ricavare anche l'azimut A .¹⁰

5.2 Valutazioni

Il vantaggio dell'utilizzo del sistema di riferimento sopra descritto risulta evidente chiedendosi quando un corpo celeste appare visibile per un osservatore. Essendo il piano di riferimento quello dell'orizzonte, questo avviene per ogni corpo celeste con altezza positiva. In particolare sarà possibile calcolare quando tale corpo sorge o tramonta, ovvero quando raggiunge altezza zero, e anche quale sarà la sua altezza massima della giornata. Per calcolare l'altezza massima in cielo si procede notando che un corpo celeste raggiunge l'altezza massima quando questo passa per il meridiano sud. Il passaggio al meridiano sud corrisponde alla posizione avente come angolo orario h zero ore che corrisponde a zero gradi. Per calcolare la culminazione superiore è sufficiente applicare l'equazione (5.4) con $h = 0$.

¹⁰ La funzione arcoseno è biettiva e definita nell'insieme $[-1, 1]$ e ha come codominio $[-\pi/2, \pi/2]$. Mentre la funzione arcocoseno è anch'essa biettiva e definita nell'intervallo $[-1, 1]$ ma ha come codominio $[0, \pi]$. Si ha quindi che il codominio della funzione arcoseno coincide con l'intervallo di definizione dell'altezza mentre il codominio della funzione arcocoseno è la metà dell'intervallo di definizione dell'azimut e per questo viene meno l'unicità del risultato.

Si ottiene:

$$\sin(a) = \cos(\delta) \cos(\phi) + \sin(\delta) \sin(\phi) = \begin{cases} \cos(\phi - \delta) = \sin(90^\circ - \phi + \delta) \\ \cos(\delta - \phi) = \sin(90^\circ - \delta + \phi) \end{cases} \quad (5.5)$$

Da cui si ricavano due formulazioni e se $\phi - \delta > 0$ viene scelta la prima delle due uguaglianze, corrispondente ad un corpo celeste che culmina a sud dello Zenit, mentre se $\delta - \phi > 0$, viene scelta la seconda per culminazione a nord dello Zenit. Da queste si ricavano i corrispondenti valori per altezza massima, sempre relativamente a culminazione a sud e a nord dello Zenit.

$$a_{max} = \begin{cases} 90^\circ - \phi + \delta \\ 90^\circ + \phi - \delta \end{cases} \quad (5.6)$$

Allo stesso modo si ottiene l'altezza relativa alla culminazione inferiore. L'altezza minima viene raggiunta quando l'angolo orario vale $h = 12$ ore ovvero 180 gradi:

$$\begin{aligned} \sin(a) &= -\cos(\delta) \cos(\phi) + \sin(\delta) \sin(\phi) = \\ &= \begin{cases} -\cos(\phi + \delta) = \sin(\phi + \delta - 90^\circ) \\ -\cos(-\phi - \delta) = \sin(-\phi - \delta - 90^\circ) \end{cases} \end{aligned} \quad (5.7)$$

$$a_{min} = \begin{cases} \phi + \delta - 90^\circ \\ -\phi - \delta - 90^\circ \end{cases} \quad (5.8)$$

Dove la prima soluzione è associata a corpi celesti che anti-culminano a nord dello Zenit per i quali vale $\phi + \delta > 0$ e la seconda per quelli che anti-culminano a sud ovvero se risulta $-\phi - \delta > 0$.

Per quanto riguarda la posizione in cui un corpo celeste sorge o tramonta, questa è intuitivamente quella corrispondente ad altezza zero. Dalla (5.4) è quindi possibile ricavare $\cos(h)$ assegnando $a = 0^\circ$.

$$\cos(h) = -\tan(\delta) \tan(\phi) \quad (5.9)$$

Tramite la funzione inversa arcocoseno, essa restituisce i due valori di angolo orario relativi al sorgere e tramontare¹¹, dai quali è possibile ricavare il tempo siderale associato (4.6) e il relativo valore in ore tramite la conversione vista al capitolo precedente.

5.3 Horizons System e le effemeridi

Per proseguire lo studio si è fatto riferimento a rilevazioni già note e si sono ottenute le effemeridi, in particolare per quanto riguarda le coordinate equatoriali relative ad un corpo celeste si è utilizzato il sistema *JPL Horizons On-Line Ephemeris System*.

Si tratta di un servizio che fornisce l'accesso ai dati chiave del sistema solare e produce accurate effemeridi per più di un milione e mezzo di corpi celesti, veicoli spaziali e diversi punti dinamici del sistema solare.

Le effemeridi riportano dati che possono essere relativi ad un tempo passato ma anche futuro e per questo permettono di produrre previsioni di come evolverà il sistema. Per tale ragione risultano utili in operazioni come l'individuazione di corpi in cielo poiché conoscendone le coordinate sarà facilitata l'operazione di ricerca e posizionamento di un telescopio che potrà seguire l'obiettivo in ogni istante. Altre applicazioni per le quali

¹¹ Per l'influenza di tutti i moti che coinvolgono la Terra e il corpo celeste osservato ma principalmente a causa del moto di rotazione della Terra attorno al proprio asse nella direzione da Ovest verso Est, i corpi celesti ci appaiono sorgere circa in direzione Est e tramontare circa in direzione Ovest.

effemeridi di questo tipo forniscono dati utili sono ad esempio il tracciamento di nuovi corpi celesti o la pianificazione di missioni spaziali.

Horizons System permette di generare informazioni tramite cinque diverse tipologie di output personalizzabili: si può selezionare tra Dati Osservabili, Vettori di stato cartesiani, Elementi orbitali osculanti, Avvicinamenti ravvicinati ai pianeti e ai 16 asteroidi più grandi e File di traiettoria binaria SPK per piccoli corpi (asteroidi e comete).

Fra le ulteriori personalizzazioni vi è anche la possibilità di selezionare il luogo di osservazione di riferimento ed il periodo per cui ricavare i dati.

Si tratta di un sistema molto articolato poiché largamente personalizzabile con la possibilità di ottenere svariati dati per diverse categorie. Tuttavia l'utilizzo che ne è stato fatto ai fini di questo elaborato è molto limitato. Si è trattato esclusivamente di ottenere i dati relativi alla categoria dei Dati Osservabili per quanto riguarda un corpo celeste del sistema solare e applicare tramite un programma realizzato appositamente tali risultati.

Così procedendo si sono in primo luogo definiti periodi di tempo e posizione di osservazione e selezionato il corpo celeste da valutare, per poi poter ricavare tramite le effemeridi in particolare i dati relativi ad ascensione retta, declinazione e tempo siderale associati. Tramite le conversioni sopra illustrate (5.2-4) è stato possibile passare dal sistema di riferimento equatoriale a quello orizzontale.

Per ricavare invece la latitudine del luogo di osservazione si è fatto riferimento all'applicazione Stellarium¹² e, sempre tramite quest'applicazione si è verificata la correttezza delle trasformazioni applicate, verificando che i dati combaciassero a meno di scelta di sistema di riferimento¹³.

¹² Stellarium è un planetario virtuale che fornisce una rappresentazione 3D del cielo come sarebbe visto a occhio nudo o con l'ausilio di binocolo o telescopio.

¹³ Il sistema di riferimento come definito al capitolo precedente considera nel sistema di riferimento orizzontale come zero dell'azimut l'intersezione con il meridiano sud, mentre il sistema di riferimento di Stellarium il meridiano nord. Pertanto ci sarà una differenza di 180° fra i due valori ottenuti.

Capitolo 6

Elaborazione dati

Sono state fin ora richiamate tutte le conoscenze necessarie per poter studiare la visibilità dei corpi celesti. Dopo aver ricavato le coordinate orizzontali è immediato comprendere se il corpo celeste si trova in una posizione visibile o meno e anche produrne dei grafici per meglio visualizzarne l'effettivo andamento in cielo.

La visibilità di un corpo dipende anche dalla sua luminosità che viene misurata in magnitudini. Ai fini di questo elaborato si considererà visibile ogni corpo celeste che si troverà in una posizione in cielo al di sopra dell'orizzonte rispetto all'osservatore.

6.1 Risultati

L'elaborazione proposta nei capitoli precedenti vale per un qualsiasi corpo celeste valutato da un qualsiasi punto di osservazione sulla Terra. Ai fini di esibire delle rappresentazioni grafiche dei risultati ottenuti, si è fatto riferimento ai soli corpi del sistema solare per i quali è possibile ricavare le effemeridi tramite Horizons System.

Si è realizzato un apposito programma tramite il linguaggio di programmazione Python, parzialmente riportato nell'Appendice, che utilizza le equazioni come descritte al capitolo precedente. Prende come input il file .txt con le effemeridi, scaricabile tramite il sistema Horizons System, e restituisce come output dati utilizzabili dal programma. Dalla lettura del file si ricavano le stringhe con i valori relativi a declinazione, ascensione retta e tempo siderale associati al corpo celeste selezionato. Tramite poi l'utilizzo di classi, esso produce le conversioni da stringhe ai valori numerici in gradi che potrà applicare alle formule (5.2-4) per ricavarne altezza e azimut associati. Tramite la (5.6) si ottiene l'altezza massima e tramite la (4.6) l'angolo orario.

Come luogo di osservazione si è scelto l'Osservatorio di Padova che ha una latitudine pari a $\phi = +45^{\circ} 24' 28.69''$ e il tempo è riferito al fuso orario italiano.

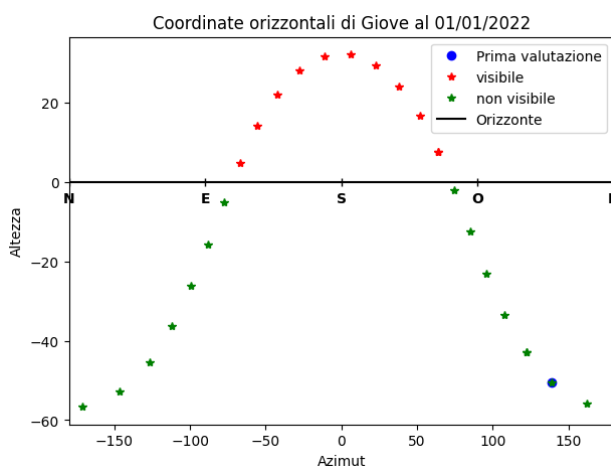


Figura 6.1: Grafico che ha sull'asse delle ascisse l'azimut e sulle ordinate l'altezza relative all'osservazione del pianeta Giove nel giorno 1 Gennaio 2022. La prima valutazione avviene alle ore 00:00 italiane e corrisponde alla posizione individuata dal pallino blu. Le successive, a distanza di un'ora, sono segnate nel grafico dalle stelle e si susseguono nel verso dell'azimut crescente.

Si inizi col visualizzare l'andamento giornaliero di un corpo celeste in cielo. Tramite il sito Horizons System si ricavano le coordinate equatoriali nell'arco di una giornata a intervalli

di un'ora. Da queste si ottengono le coordinate orizzontali e si inseriscono i valori in un grafico azimut-altezza (Figura 6.1).¹⁴

Si nota che il corpo celeste ha un andamento che segue una curva a campana. Questa è la riproduzione del suo moto apparente in cielo, ovvero oggi giorno osserviamo i corpi celesti sorgere, raggiungere l'altezza massima e tramontare per poi sorgere il giorno successivo. L'andamento di tale curva risulta lo stesso per ogni giornata ma in generale i valori di altezza e azimut non coincidono principalmente a causa dell'inclinazione dell'asse di rotazione terrestre e del moto di rotazione e rivoluzione della Terra. Anche il moto proprio dei corpi celesti influisce in questo scostamento ma, soprattutto per corpi molto distanti, è poco rilevante in una prima approssimazione. Per giorni successivi la variazione è quasi impercettibile e dipende dalla distanza del corpo osservato rispetto alla Terra ma comparando valutazioni più distanziate nel tempo se ne nota la differenza. Se ad esempio si considera la Luna, già al giorno successivo si noterà uno scostamento dal grafico rispetto al giorno precedente, mentre osservando invece Giove i grafici saranno quasi coincidenti (Figure 6.2-3).

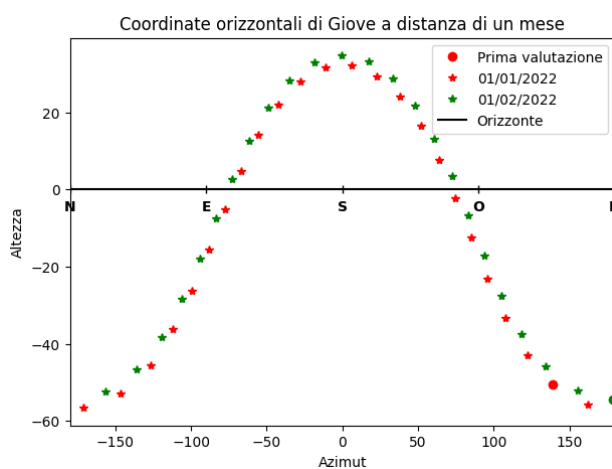


Figura 6.2: Grafico azimut-altezza relativo al pianeta Giove valutato per 24 ore a distanza di un mese, 1 Gennaio e 1 Febbraio 2022.

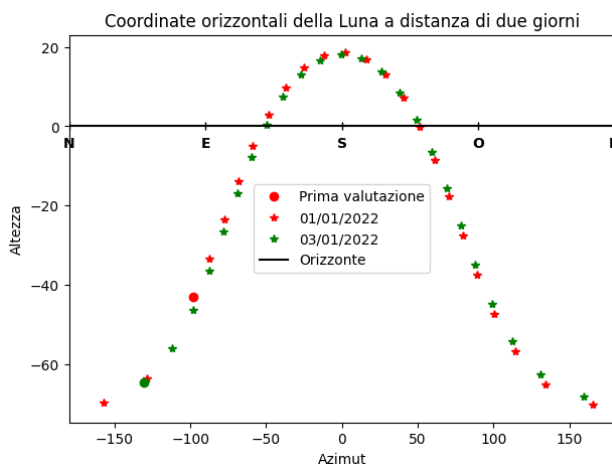


Figura 6.3: Grafico azimut-altezza relativo alla Luna valutato per 24 ore a distanza di due giorni, 1 Gennaio e 3 Gennaio 2022.

Rappresentazioni come la Figura 6.1, in cui ogni stelletta riportata corrisponde alla posizione in un preciso orario, permettono valutazioni intuitive, ma estremamente approssimative. Dal grafico si legge all'incirca l'altezza massima raggiunta e si ha anche un'idea qualitativa del tempo per cui il corpo celeste sarà visibile contando quante stellette risultano sopra l'orizzonte, essendo queste associate ad un orario.

¹⁴ Il tempo in Horizons System è valutato nel sistema UT. Per ricavare l'orario italiano è necessario aggiungere un'ora, due ore quando entra in vigore l'ora legale.

Per un'analisi più accurata, l'altezza massima si ottiene dalla relazione (5.6) e applicando la (5.9) si determinano gli angoli orari in cui il corpo celeste sorge e tramonta. Dall'angolo orario tramite la conversione vista al Capitolo 4 si ricava l'equivalente valore in ore¹⁵ e la differenza tra l'orario a cui sorge e tramonta corrisponde all'intervallo di tempo per cui risulterà visibile. Inoltre se ne può ricavare il tempo siderale tramite la (4.6).

```

Ricerca delle coordinate di Giove
nel giorno 2022-Jan-01
Il luogo di osservazione è: Osservatorio di Padova

La magnitudine apparente è di -2.1301599999999996

DALLA SOLA OSSERVAZIONE DEI DATI
Il corpo celeste risulta visibile per circa 10 ore
Sorge prima delle 10:00 UT e tramonta dopo le 19:00 UT

TRAMITE LE FORMULE
L'angolo orario a cui sorge è -77.242552 gradi e a cui tramonta 77.242552 gradi
E nel sistema di riferimento corrispondono a 18.850497 e 5.149503 ore
Culmina a Sud dello Zenith ad un'altezza di 32.310277 gradi
Anti-culmina a Nord dello Zenith ad un'altezza di -56.873784 gradi
Non è circumpolare
>>>

```

Figura 6.4: Schermata restituita da Python relativa al pianeta Giove osservato l'1 Gennaio 2022 (Appendice A2). Riporta sia valori ottenuti dall'applicazione delle formule sia risultati qualitativi.

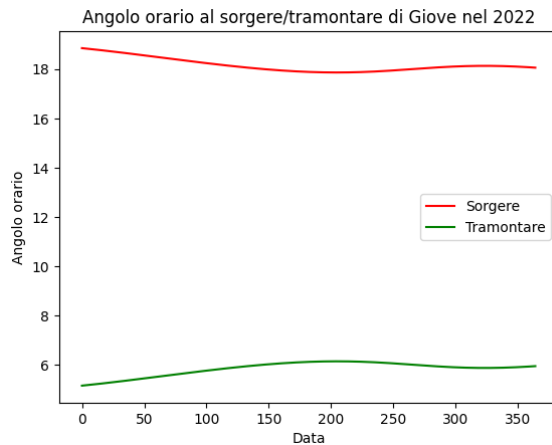


Figura 6.5: Grafico dell'angolo orario a cui Giove sorge/tramonta nell'anno 2022.

Si consideri ora anche l'andamento annuale: per ciascun giorno dell'anno si sono calcolate le rispettive coordinate orizzontali alla stessa ora, alle 00:00 italiane del giorno. Quello che se ne ricava è l'andamento della posizione del corpo celeste all'orario indicato e se ne nota la variazione come in Figura 6.6.

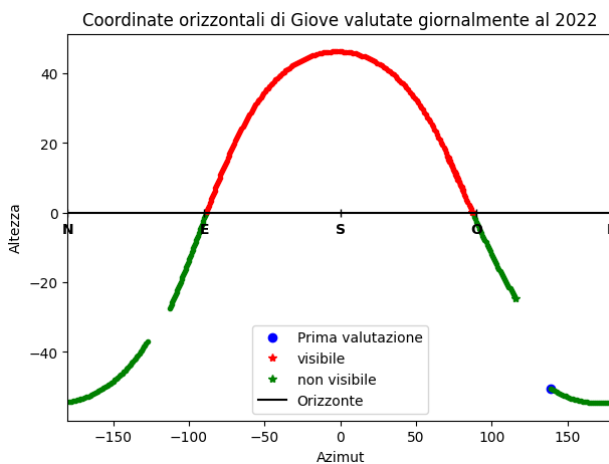


Figura 6.6: Grafico azimut-altezza relativo all'osservazione del pianeta Giove per ogni giorno dell'anno 2022 con rilevazione alle ore 00:00 italiane della giornata. Dopo la prima valutazione indicata dal pallino blu, le successive si susseguono nel verso dell'azimut crescente.

¹⁵ Il valore in ore dell'angolo orario non corrisponde all'ora locale o UT poiché quest'ultima è associata all'angolo orario del Sole.

Anche in questo caso la curva è di tipo a campana ma presenta due “salti”. Il primo a sinistra è dovuto al cambio da ora solare a legale italiana e per lo stesso motivo vi è una sovrapposizione tra azimut 50 e 100 gradi. Il secondo “salto” è dovuto al fatto che il pianeta impiega più di un anno per tornare ad avere l’azimut iniziale. Confrontando la stessa valutazione per due anni consecutivi (Figura 6.7) si nota che i grafici non si sovrappongono come accadeva per quelli giornalieri. Questo avviene anche a causa del moto di rivoluzione del pianeta attorno al Sole, il periodo di rivoluzione di Giove attorno al Sole è di circa 12 anni quindi molto maggiore di quello della Terra. Valutando l’andamento per più anni consecutivi si nota la curva traslare verso l’alto fino a un massimo per poi invertire il moto fino ad un minimo e tornare a salire periodicamente.

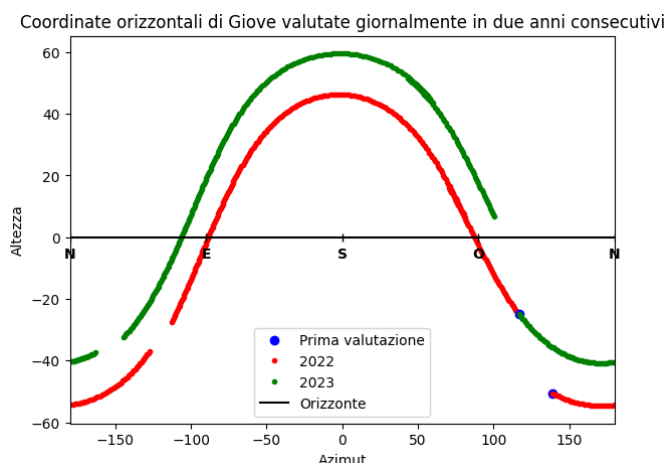


Figura 6.7: Grafico azimut-altezza relativo all’osservazione del pianeta Giove per ogni giorno di due anni consecutivi 2022 e 2023 con rilevazione alle ore 00:00 italiane della giornata. Dopo la prima valutazione indicata dal pallino blu, le successive si susseguono nel verso dell’azimut crescente.

Andamento simile è associato anche ai corpi celesti molto distanti dalla Terra. Consideriamo invece la Luna che orbita attorno alla Terra con un periodo di rivoluzione di circa 16 giorni. Si vede che in un anno passa per lo stesso azimut allo stesso orario ripetute volte (Figura 6.8), la prima volta dopo poco meno di un mese (Figura 6.9). Il tempo che impiega a tornare allo stesso azimut è maggiore del suo periodo di rivoluzione a causa del moto della Terra. Nel momento in cui la Luna completa il suo moto di rivoluzione, la Terra sarà ruotata diversamente rispetto all’inizio della rivoluzione lunare e quindi sarà necessario ulteriore tempo affinché la Luna torni visibile dal punto di osservazione o torni ad avere lo stesso azimut iniziale ad un fissato orario.

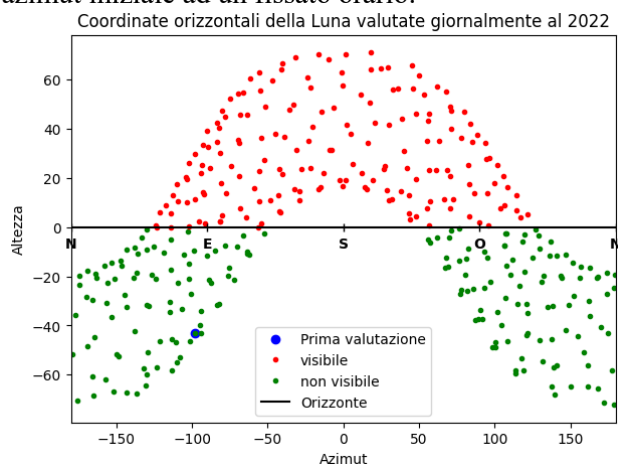


Figura 6.8: Grafico azimut-altezza relativo all’osservazione della Luna per ogni giorno dell’anno 2022 con rilevazione alle ore 00:00 italiane della giornata. Dopo la prima valutazione indicata dal pallino blu, le successive si susseguono nel verso dell’azimut decrescente.

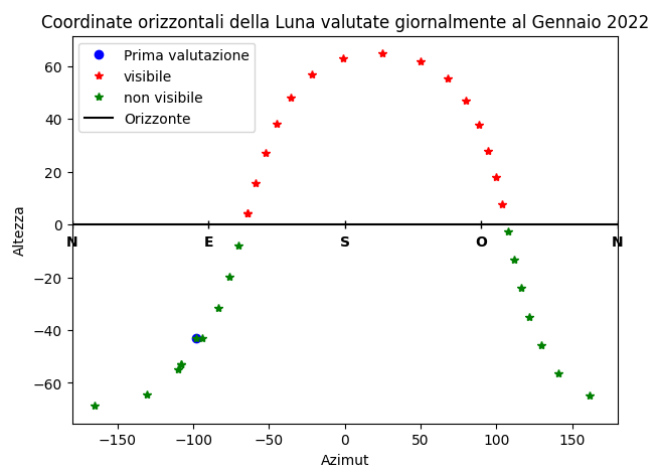


Figura 6.9: Grafico azimut-altezza relativo all'osservazione della Luna per ogni giorno del Gennaio 2022 con rilevazione alle ore 00:00 italiane della giornata. Dopo la prima valutazione indicata dal pallino blu, le successive si susseguono nel verso dell'azimut decrescente.

Diversa ancora è la situazione per corpi celesti la cui orbita si trova sempre all'interno di quella della Terra. Si consideri il pianeta Venere; questo orbita attorno al Sole con un semiasse maggiore più piccolo rispetto a quello della Terra e ha un periodo di rivoluzione di circa 225 giorni (Figura 6.11). Si nota che Venere ripassa per la stessa posizione. Questo avviene a conferma del fatto che la Terra non è il centro del sistema solare e quindi vediamo il pianeta Venere compiere la sua orbita attorno al Sole. I due salti sono sempre legati al cambio da ora legale a solare altrimenti varierebbe con più continuità.

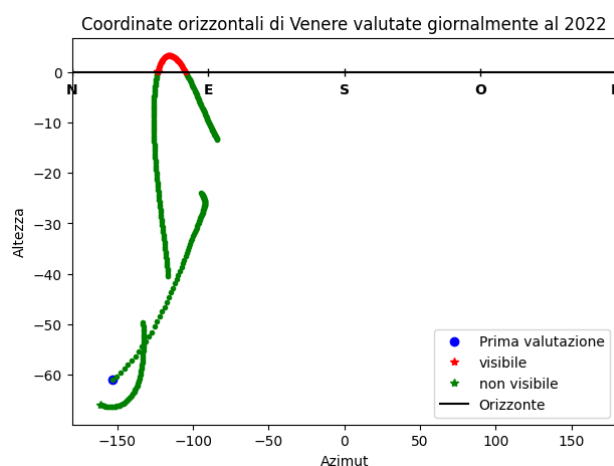


Figura 6.10: Grafico azimut-altezza relativo all'osservazione del pianeta Venere per ogni giorno dell'anno 2022 con rilevazione alle ore 00:00 italiane della giornata. Dopo la prima valutazione indicata dal pallino blu, le successive si susseguono nel verso dell'azimut crescente, successivamente per un periodo anche decrescente.

Come ultimo esempio si consideri il pianeta Marte che ha un'orbita più grande di quella della Terra ma è relativamente vicino rispetto ad altri pianeti del sistema solare. Anche in questo caso si ottiene una curva simile a quella di tipo a campana ma più deformata (Figura 6.11). Come visto per il pianeta Giove, l'andamento dell'altezza di Marte presenta un primo salto a causa del cambio dell'ora da solare a legale e una sovrapposizione attorno all'azimut -50° dovuta allo stesso motivo. La curva termina ad azimut diverso rispetto a quello iniziale poiché è necessario un periodo più lungo di un anno per tornare alla posizione della prima valutazione.

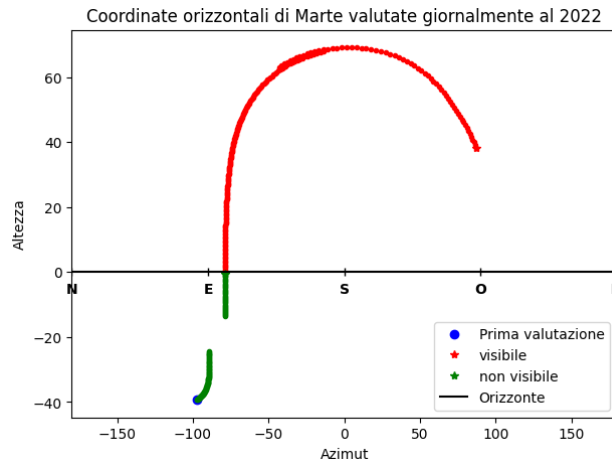


Figura 6.11: Grafico azimut-altezza relativo all'osservazione del pianeta Marte per ogni giorno dell'anno 2022 con rilevazione alle ore 00:00 italiane della giornata. Dopo la prima valutazione indicata dal pallino blu, le successive si susseguono nel verso dell'azimut crescente.

Va precisato che grafici della tipologia della Figura 6.11, che rappresentano le coordinate ad un fisato orario della giornata, non sono indicativi della visibilità del corpo celeste in quella giornata ma solamente di quella all'orario indicato. Per affermare se un corpo celeste risulta visibile in una giornata è necessario valutarne l'altezza massima raggiunta.

Per questa ragione, si osservi come varia l'altezza massima di un corpo celeste nel corso di uno e due anni consecutivi. Ad esempio il pianeta Giove risulta sempre visibile nei due anni considerati (Figura 6.12). L'altezza massima cresce, per poi decrescere per un certo intervallo di tempo e tornare successivamente a crescere. Questo è dovuto alla presenza dei moti retrogradi, visibili in Figura 6.13, che i pianeti esterni del Sistema Solare sembrano compiere quando vengono superati dalla Terra lungo le loro orbite.



Figura 6.12: Grafico dell'altezza massima di Giove valutata giornalmente per due anni consecutivi 2023 e 2024.

Coordinate equatoriali di Giove valutate giornalmente al 2023 e 2024

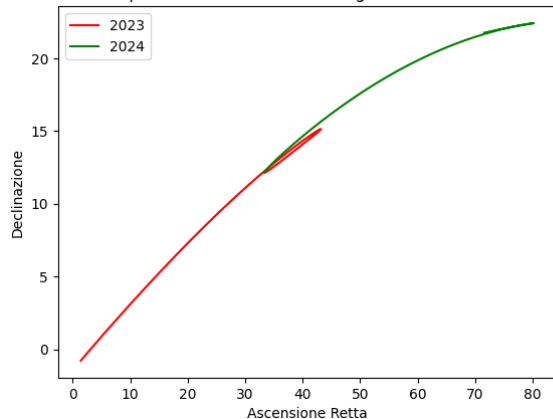


Figura 6.13: Grafico delle coordinate equatoriali di Giove valutate giornalmente per due anni consecutivi 2023 e 2024.

Capitolo 7

Conclusioni

Si è compreso, osservando le effemeridi restituite, che in una giornata i valori delle coordinate equatoriali, ascensione retta e declinazione, variano di qualche primo di grado, mentre le coordinate orizzontali, altezza e azimuth, variano largamente in quanto nella loro determinazione influisce l'angolo orario dipendente dallo scorrere del tempo a causa della rotazione terrestre.

Per questa ragione quello osservabile dalla Terra è solo il moto apparente dei corpi celesti. Come si può evincere dai grafici esibiti, ottenuti tramite il programma Python appositamente realizzato per trasformare le coordinate equatoriali in alt-azimutali, in una giornata osserviamo i corpi celesti sorgere e poi tramontare ad orari che variano nel corso dell'anno a causa del moto di rivoluzione della Terra attorno al Sole. Il moto di rivoluzione terrestre comporta che per ogni giorno le rilevazioni non coincideranno con quelle del giorno precedente, in particolare varierà l'altezza massima raggiunta.

In una giornata i corpi celesti appaiono seguire una traiettoria approssimabile ad una circonferenza, centrata sull'asse di rotazione terrestre, sulla superficie della Sfera Celeste. Nel tempo per cui risultano visibili da un osservatore, appaiono compiere archi simmetrici rispetto al meridiano sud dove raggiungono l'altezza massima in cielo, sorgendo in direzione est e tramontando a ovest. Ne segue che maggiore è l'altezza massima raggiunta maggiore sarà il tempo per cui il corpo celeste risulterà visibile.

Queste considerazioni valgono per ciascun corpo celeste e in particolare anche per il Sole. Il moto apparente del Sole ha come conseguenza l'alternarsi delle stagioni. L'arco compito dal Sole infatti risulta più alto in estate e più basso in inverno comportando rispettivamente un maggiore e minore periodo di luce.

Appendice

Codice Python

A.1 Classi

Sotto sono riportate le righe di codice che definiscono le classi Python create per implementare il programma esibito al paragrafo successivo.

```
from math import *

class AR:
    """
    Rappresenta l'ascensione retta

    Parametri:
    x : str()

    OreinGradi() converte la stringa in gradi
    Restituisce un valore float()
    """
    def __init__(self, x):
        self.x = [int(x[:2]), int(x[3:5]), float(x[6:])]
    def OreinGradi(self):
        return self.x[0]*15 + self.x[1]*15/60 + self.x[2]*15/3600

class DEC:
    """
    Rappresenta la declinazione

    Parametri:
    x : str()

    inGradi() converte la stringa in gradi
    Restituisce un valore float()
    """
    def __init__(self, x):
        self.x = [x[0], int(x[1:3]), int(x[4:6]), float(x[7:])]
    def inGradi(self):
        A = self.x[1] + self.x[2]/60 + self.x[3]/3600
        A1 = str(A)
        A2 = self.x[0] + A1
        return float(A2)
```

```

class theta:
    """
    Rappresenta il tempo siderale apparente

    Parametri:
    x : str()

    OreinGradi() converte la stringa in gradi
    Restituisce un valore float()
    """
    def __init__(self, x):
        self.x = [int(x[:2]), int(x[3:5]), float(x[6:])]
    def OreinGradi(self):
        return self.x[0]*15 + self.x[1]*15/60 + self.x[2]*15/3600

class a:
    """
    Rappresenta l'altezza

    Parametri:
    h : float()
        angolo orario
    DEC : float()
        declinazione
    phi : float()
        latitudine del luogo di osservazione

    calcola() cambio di coordinate da equatoriali ad orizzontali
    Restituisce l'altezza in gradi come float()
    """
    def __init__(self, h, DEC, phi):
        self.h = radians(h)
        self.DEC = radians(DEC)
        self.phi = radians(phi)
    def calcola(self):
        B = cos(self.h)*cos(self.DEC)*cos(self.phi)
        C = sin(self.DEC)*sin(self.phi)
        a = asin(B + C)
        return degrees(a)

class A:
    """
    Rappresenta l'Azimut

    Parametri:
    h : float()
        angolo orario
    DEC : float()
        declinazione
    a : float()
        altezza
    phi : float()
        latitudine del luogo

    calcola() cambio di coordinate da equatoriali ad orizzontali
    Restituisce l'azimut in gradi come float()
    """

```

```

def __init__(self, h, DEC, a, phi):
    self.h = radians(h)
    self.DEC = radians(DEC)
    self.a = radians(a)
    self.phi = radians(phi)
def calcola(self):
    sA = sin(self.h)*cos(self.DEC)/cos(self.a)
    A = asin(sA)
    D = cos(self.h)*cos(self.DEC)*sin(self.phi)
    F = sin(self.DEC)*cos(self.phi)
    cA1 = (D - F)/cos(self.a)
    A1 = acos(cA1)
    if A==A1:
        return degrees(A)
    else :
        if sA>=0 and cA1>=0:
            return degrees(A)
        if sA>=0 and cA1<0:
            return degrees(A1)
        if sA<0 and cA1>=0:
            return degrees(A)
        if sA<0 and cA1<0:
            return -degrees(A1)

class phi:
    """
    Rappresenta la latitudine del luogo di osservazione

    Parametri:
    x : str()

    inGradi() converte la stringa in gradi
    Restituisce un valore float()
    """
    def __init__(self, x):
        self.x = [x[0], int(x[1:3]), int(x[4:6]), float(x[7:])]
    def inGradi(self):
        A = self.x[1] + self.x[2]/60 + self.x[3]/3600
        A1 = str(A)
        A2 = self.x[0] + A1
        return float(A2)

class MAG:
    """
    Rappresenta la magnitudine apparente del corpo celeste

    Parametri:
    x : str()

    """
    def __init__(self, x):
        self.x = x
    def Val(self):
        M = float(self.x)
        return M

```

A.2 Coordinate orizzontali

Sotto sono riassunte le righe del codice Python che calcola le coordinate orizzontali ricavate da quelle equatoriali, prodotte dal tool di Horizons System, e analizza la visibilità del corpo celeste. Sono omesse le righe di codice che visualizzano i grafici.

```
from math import *
from Classi import *

# PARAMETRI DI RICERCA MODIFICABILI
NomeFile = 'horizons_results_.txt' #file di Horizons System scaricato
obiettivo = 'Giove' # corpo celeste da studiare
luogo = 'Osservatorio di Padova' # posizione dell'osservatore
sphi = '+45 24 28.69' # Latitudine luogo in gradi
# In base alla tabella di dati di cui dispongo decido da che
# posizione iniziare la valutazione:
s = 0 # posizione di inizio
passo = 1 # step tra un dato e l'altro da scegliere

'''
Creo una lista TAB che contiene le righe del file relative alle
coordinate da valutare
Poi creo altre liste per le coordinate equatoriali ed alt-azimutali
Le righe del file sono di tipo stringa quindi per ogni dato ne
considero le relative posizioni
Coordinate equatoriali: ascensione retta AR
                        declinazione DEC
theta è il tempo siderale apparente
h è l'angolo orario
Mag è la magnitudine
Coordinate orizzontali: Altezza a
                        Azimut A
'''

TAB = []
with open(NomeFile, 'r') as source: # Apre il file
    reading = False
    while True:
        line = source.readline() # Legge una linea
        if not line: # Se la linea è vuota (fine del file)
            break
        if not reading: #non ho è l'inizio della tabella
            reading = line.startswith("$$SOE") #inizio tabella
            continue
        if line.startswith("$$EOE"): #fine della tabella
            break
        TAB.append(line)

f = len(TAB) # la posizione di fine
phi = phi(sphi).inGradi() # latitudine del luogo in gradi

# COORDINATE ORIZZONTALI
''' Valutazione annuale o giornaliera '''
AscensioneRetta = [] # ascensioni rette in gradi
Declinazione = [] # declinazioni in gradi
Altezza = [] # altezze relative al tempo in gradi
Azimut = [] # azimut relativi al tempo in gradi
Magnitudine = [] # magnitudine apparente
```

```

for i in range(s, f, passo):
    riga = TAB[i]
    sAR = riga[23:34]
    sDEC = riga[35:46]
    stheta = riga[48:61]
    smag = riga[64:70]
    AR_ = AR(sAR).OreinGradi()
    DEC_ = DEC(sDEC).inGradi()
    Mag_ = MAG(smag).Val()
    theta_ = theta(stheta).OreinGradi()
    h_ = theta_ - AR_
    a_ = a(h_, DEC_, phi).calcola()
    Altezza.append(a_)
    Az_ = A(h_, DEC_, a_, phi).calcola()
    Azimut.append(Az_)
    AscensioneRetta.append(AR_)
    Declinazione.append(DEC_)
    Magnitudine.append(Mag_)

# ALTEZZA MASSIMA
''' Valutazione annuale '''
Altezza_max = [] # altezze massime relative ad ogni giorno in gradi
for i in range(len(Declinazione)):
    DEC_ = Declinazione[i]
    if phi - DEC_ < 0: # culmina a Nord dello Zenith
        amax = 90 + phi - DEC_
    elif phi - DEC_ == 0: # culmina allo Zenith
        amax = 90
    else: # culmina a Sud dello Zenith
        amax = 90 - phi + DEC_
    Altezza_max.append(amax)

# VALUTAZIONI GIORNALIERE
''' Calcolo approssimativo del tempo per cui è visibile il corpo
celeste e del suo sorgere e tramontare '''
Cont = []
for i in range(f):
    if Altezza[i]>=0:
        Cont.append(1)
    else:
        Cont.append(0)
ore = Cont.count(1) # approssimazione del numero di ore visibile

date = []
for i in range(f):
    if Cont[i]==1:
        temp = TAB[i][1:18]
        date.append(temp)
    else:
        continue
giorno = date[0][:11] #giorno considerato
sorge = date[0][12:] #primo orario della tabella a cui è visibile
tramonta = date[-1][12:]#ultimo orario della tabella a cui è visibile

```

```

''' Calcolo della culminazione del corpo celeste considerando come
declinazione quella media della giornata '''
dec = mean(Declinazione)
if phi - dec < 0: # culmina a Nord dello Zenith
    amax = 90 + phi - dec
    culmina = 'a Nord dello Zenith'
elif phi - dec == 0: # culmina allo Zenith
    amax = 90
    culmina = 'allo Zenith'
else: # culmina a Sud dello Zenith
    amax = 90 - phi + dec
    culmina = 'a Sud dello Zenith'

if phi + dec > 0: # anti-culmina a Nord dello Zenith
    amin = dec + phi - 90
    aculmina = 'a Nord dello Zenith'
elif phi + dec == 0:
    amin = -90
    aculmina = 'al Nadir'
else: # anti-culmina a Sud dello Zenith
    amin = -dec - phi - 90
    aculmina = 'a Sud dello Zenith'

if dec + phi > 90: # è circumpolare
    cir = "E'"
else: # non è circumpolare
    cir = 'Non è'

rdec = radians(dec)
rphi = radians(phi)
ch = -(tan(rdec)*tan(rphi))
rh1 = acos(ch)
rh2 = -acos(ch)
h1 = degrees(rh1) # angolo orario a cui tramonta in gradi
h2 = degrees(rh2) # angolo orario a cui sorge in gradi
h1_ = h1/15 # angolo orario a cui tramonta in ore
h2_ = 24+h2/15 # angolo orario a cui sorge in ore

```

Bibliografia

- Candilere, M., & Bertapelle, A. (2011). *Algebra lineare e primi elementi di geometria*. Milano: McGraw-Hill.
- Karttunen, H., Kröger, P., Oja, H., Poutanen, M., & Donner, J. K. (2016). *Fundamental Astronomy*. Springer.
- Laboratory, J. P. (2022). *Horizons System*. (California Institute of Technology) Tratto da <https://ssd.jpl.nasa.gov/horizons/>
- Stellarium*. Tratto da <https://stellarium.org/>
- Tatum, J. B. (2023). *Physics topics, Celestial Mechanics, Capitolo 10*. Tratto da <https://www.astro.uvic.ca/~tatum/celmechs/celm10.pdf>
- Tatum, J. B. (2023). *Physics topics, Celestial Mechanics, Capitolo 2*. Tratto da <https://www.astro.uvic.ca/~tatum/celmechs/celm2.pdf>
- Tatum, J. B. (2023). *Physics topics, Celestial Mechanics, Capitolo 9*. Tratto da <https://www.astro.uvic.ca/~tatum/celmechs/celm9.pdf>
- Treccani*. (2013). Tratto da [https://www.treccani.it/enciclopedia/keplero_\(Enciclopedia-della-Matematica\)/](https://www.treccani.it/enciclopedia/keplero_(Enciclopedia-della-Matematica)/)