UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA

"TULLIO LEVI-CIVITA"

CORSO DI LAUREA MAGISTRALE IN MATEMATICA

ALCUNI ASPETTI DEI FONDAMENTI DELLA MISURA DI LEBESGUE E SUE ESTENSIONI SUI REALI

Relatore

Dott. SAMUELE MASCHIO

Candidato

DOMENICO VECA

1130128

DATA DI LAUREA

11/12/2020

ANNO ACCADEMICO 2019/2020

Indice

Introduzione **1**

1 Concetti preliminari: la misura di Lebesgue su $\mathbb{R}$ e proprietà **3**

1.1 Costruzione di Caratheodory 3

1.2 Premisura ed estensione di una premisura 7

1.3 Misura di Lebesgue su $\mathbb{R}$ e proprietà 9

1.3.1 Proprietà della misura di Lebesgue su $\mathbb{R}$ 10

2 Insiemi non misurabili per la misura di Lebesgue su $\mathbb{R}$. **17**

2.1 L'insieme di Vitali 17

2.2 La costruzione di Bernstein 19

2.3 Insieme non misurabile associato a una base di Hamel di $\mathbb{R}$ su $\mathbb{Q}$ 28

2.4 Costruzione di Thomas 31

3 Estensioni invarianti della misura di Lebesgue su $\mathbb{R}$ **35**

Introduzione

Il seguente lavoro si propone di presentare alcuni aspetti fondazionali della misura di Lebesgue su $\mathbb{R}$, focalizzandosi sul problema delle sue possibili estensioni che preservino la proprietà di invarianza per traslazioni.

Nel primo capitolo abbiamo presentato la definizione della misura di Lebesgue tramite la costruzione di Caratheodory che permette di definire una misura su una σ-algebra a partire da una misura esterna definita sulle parti di un insieme. Una volta individuata la σ-algebra $\mathcal{L}$ dei misurabili secondo Lebesgue e aver notato che la misura su essa è invariante per traslazioni, è naturale chiedersi innanzitutto se $\mathcal{L}$ coincide con $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ o esistano alcuni sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ che non siano misurabili e, nel caso che la seconda opzione sia verificata, se esistono estensioni proprie della misura di Lebesgue a σ-algebre che contengano strettamente $\mathcal{L}$ che soddisfino l'invarianza per traslazioni, e in caso positivo, se esiste una tale estensione massimale.

Nel secondo capitolo abbiamo affrontato il primo di questi problemi. Nel 1905 il matematico italiano Giuseppe Vitali costruì un insieme, che prende il suo nome, tramite l'assioma di scelta, che non è misurabile secondo Lebsgue. In questo capitolo presenteremo sia la costruzione originale di Vitali, sia altre tre costruzioni, una che si basa sul concetto di insieme perfetto, una che utilizza una base di $\mathbb{R}$ come spazio vettoriale sul campo $\mathbb{Q}$ e una che utilizza metodi di teoria dei grafi.

Nel terzo capitolo invece dimostreremo, assumendo l'ipotesi del continuo, che la misura di Lebesgue può essere estesa mantenendo l'invarianza per traslazioni, ma che non esiste una tale estensione massimale. Per farlo riproporremo la dimostrazione di un teorema del matematico georgiano A. B. Kharazishvili, ma in un contesto facilitato dall'assunzione dell'ipotesi del continuo, nonché dalla scelta di lavorare con il caso specifico reale.

Capitolo 1

Concetti preliminari: la misura di Lebesgue su $\mathbb{R}$ e proprietà

In questo capitolo introduttivo vedremo come costruire in generale una σ-algebra, a partire da una misura esterna μ^*, su cui μ^* stessa sia una misura, tramite il teorema di Caratheodory; in particolare introdurremo la sigma-algebra degli insiemi Lebesgue misurabili su $\mathbb{R}$ che indicheremo con $\mathcal{L}$ e della misura di Lebegue m ad essa associata.

1.1 Costruzione di Caratheodory

Iniziamo con un concetto preliminare: quello di misura esterna.

Definizione 1.1. *Sia $X \neq \emptyset$. Una funzione μ^* definita su $\mathcal{P}(X)$ a valori in $\mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$ si dice **misura esterna** se gode delle seguenti proprietà:*

1. $\mu^*(\emptyset) = 0$.

2. *Monotonia: se $E \subseteq F$ allora $\mu^*(E) \leq \mu^*(F)$.*

3. *Sub-additività numerabile: per ogni famiglia numerabile* $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ *di sottoinsiemi di* X *si ha*

$$\mu^*(\bigcup_{i=0}^{+\infty} A_i) \leq \sum_{i=0}^{+\infty} \mu^*(A_i).$$

Proposizione 1.1. *Sia* $\mathcal{E}$ *un sottoinsieme di* $\mathcal{P}(X)$ *tale che* $\emptyset \in \mathcal{E}$ *e* $X \in \mathcal{E}$. *Sia inoltre* $\rho : \mathcal{E} \to [0, +\infty]$ *una funzione tale che* $\rho(\emptyset) = 0$. *Si definisca* $\mu^* : \mathcal{P}(X) \to [0, 1]$ *per ogni* $E \in \mathcal{P}(X)$ *come segue:*

$$\mu^*(E) = \inf \left\{ \sum_{i=0}^{+\infty} \rho(A_i) | A_i \in \mathcal{E}, E \subseteq \bigcup_{i=0}^{+\infty} A_i \right\} \tag{1.1}$$

Allora μ^* *è una misura esterna.*

Adesso vediamo come costruire una misura tramite la misura esterna con la definizione di μ^*-misurabile.

Definizione 1.2. *Sia* $X \neq \emptyset$ *e* μ^* *una misura esterna su* X. *Un sottoinsieme* $A \subseteq X$ *si dice* μ^****-misurabile*** *(o misurabile per* μ^**) se e solo se per ogni* $E \subseteq X$

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c). \tag{1.2}$$

Definizione 1.3. *Sia* $(X, \mathcal{M})$ *uno spazio misurabile e sia* μ *misura su X. Si dice che* μ *è* ***completa*** *se per ogni* $E \in \mathcal{M}$ *di misura nulla, ogni sottoinsieme* $F \subseteq E$ *appartiene ad* $\mathcal{M}$ *e ha misura nulla.*

Teorema 1.1 (Teorema di Caratheodory.)**.** *Sia* $X \neq \emptyset$ *e* μ^* *una misura esterna su* X. *Sia* $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(X)$ *l'insieme contenente tutti i sottoinsiemi* μ^**-misurabili di* X. *Allora* $\mathcal{M}$ *è una* σ*-algebra e la restrizione di* μ^* *su* $\mathcal{M}$ *è una misura completa.*

Dimostrazione. Dimostriamo che $\mathcal{M} = \big\{A \in \mathcal{P}|\, A\ \mu^* - misurabile\big\}$ è un'algebra chiusa rispetto all'unione numerabile di insiemi disgiunti.

1) $\emptyset$, $X \in \mathcal{M}$.

   Sia $E \in \mathcal{P}(X)$. Allora $\mu^*(E) = \mu^*(E) + 0 = \mu^*(E \cap X) + \mu^*(E \cap \emptyset)$. Questo permette di concludere dato che $X^c = \emptyset$ e $\emptyset^c = X$.

2) $\mathcal{M}$ è chiuso rispetto al complementare.

   Supponiamo che $A \in \mathcal{M}$; dobbiamo dimostrare che $A^c \in \mathcal{M}$, ma $\mu^*(E) = \mu^*(E \cap A^c) + \mu^*(E \cap (A^c)^c)$, dato che $(A^c)^c = A$.

3) $\mathcal{M}$ è chiusa rispetto all'unione finita ($\mathcal{M}$ è un algebra).

   Supponiamo che A, $B \in \mathcal{M}$; dobbiamo dimostrare che $A \cup B \in \mathcal{M}$ ovvero che per ogni $E \subseteq X$ si ha $\mu^*(E) = \mu^*(E \cap (A \cup B)) + \mu^*(E \cap (A \cup B)^c)$. Sappiamo che $A \in \mathcal{M}$, quindi

   $$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c) =$$

   $$\mu^*(E \cap A \cap B) + \mu^*(E \cap A \cap B^c) + \mu^*(E \cap A^c \cap B) + \mu^*(E \cap A^c \cap B^c)$$

   dove la seconda uguaglianza deriva dal fatto che B è μ^*-misurabile e quindi "spezza bene" $E \cap A$ e $E \cap A^c$. Osserviamo che $E \cap (A \cup B)$ si può scrivere come unione di tre insiemi disgiunti ovvero

   $$E \cap (A \cup B) = (E \cap A \cap B) \cup (E \cap A^c \cap B) \cup (E \cap A \cap B^c)$$

   e poichè μ^* gode della subadditività numerabile abbiamo che:

   $$\mu^*(E \cap (A \cup B)) \leq \mu^*(E \cap A \cap B) + \mu^*(E \cap A^c \cap B) + \mu^*(E \cap A \cap B^c)$$

   Osservato che $\mu^*(E \cap A^c \cap B^c) = \mu^*(E \cap (A \cup B)^c)$, otteniamo che

   $$\mu^*(E) \geq \mu^*(E \cap (A \cup B)) + \mu^*(E \cap (A \cup B)^c).$$

   Perveniamo alla tesi per subadditività.

4) μ^* è finitamente additiva.

Siano $A,\ B \in \mathcal{M}$ tali che $A \cap B = \emptyset$, dimostriamo che $\mu^*(A \cup B) = \mu^*(A) + \mu^*(B)$. Dato che A è μ^*-misurabile, allora:

$\mu^*(A \cup B) = \mu^*((A \cup B) \cap A) + \mu^*((A \cup B) \cap A^c) = \mu^*(A) + \mu^*(B)$.

5) $\mathcal{M}$ è una σ-algebra su cui μ^* è una misura.

Sia $\{A_i\}_{i \geq 1}$ una famiglia numerabile di elementi di $\mathcal{M}$ tali che $A_i \cap A_j = \emptyset$, per ogni $i \neq j$, e dimostriamo che $\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i \in \mathcal{M}$. Consideriamo gli insiemi $B_n := \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ che sono in $\mathcal{M}$, per ogni $n \geq 1$, e verifichiamo che $B := \bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i \in \mathcal{M}$ ovvero che per ogni $E \in \mathcal{P}(X)$, si ha $\mu^*(E) = \mu^*(E \cap B) + \mu^*(E \cap B^c)$.

Se $E \in \mathcal{P}(X)$, allora per ogni $n \in \mathbb{N}$,

$$\mu^*(E \cap B_n) = \mu^*(E \cap B_n \cap A_n) + \mu^*(E \cap B_n \cap A_n^c) = \mu^*(E \cap A_n) + \mu^*(E \cap B_{n-1}).$$

Sfruttando il fatto che B_{n-1} è μ^* misurabile e iterando il processo sino a B_1 si ha: $\mu^*(E \cap B_n) = \sum_{i=1}^{n} \mu^*(E \cap A_i)$, per ogni $n \geq 1$.

Utilizzando quest'ultima uguaglianza si ha che $\mu^*(E) = \mu^*(E \cap B_n) + \mu^*(E \cap B_n^c) \geq \sum_{i=1}^{n} \mu^*(E \cap A_i) + \mu^*(E \cap B^c)$ e poiché la disuguaglianza vale per ogni n allora

$$\mu^*(E) \geq \sum_{i=1}^{+\infty} \mu^*(E \cap A_i) + \mu^*(E \cap B^c) \geq \mu^*(E \cap B) + \mu^*(E \cap B^c).$$

Inoltre per la sub-additività di μ^* si ha $\mu^*(E) \leq \mu^*(E \cap B) + \mu^*(E \cap B^c)$ e questo implica che $\mu^*(E) = \mu^*(E \cap B) + \mu^*(E \cap B^c)$ e quindi $B \in \mathcal{M}$. Possiamo concludere che $\mathcal{M}$ é una σ-algebra e $\mu^*|_{\mathcal{M}}$ è una misura perché se poniamo $E = B$ allora

$$\mu^*(B) = \sum_{i=1}^{+\infty} \mu^*(B \cap A_i) + \mu^*(B \cap B^c) = \sum_{i=1}^{+\infty} \mu^*(B \cap A_i) = \sum_{i=1}^{+\infty} \mu^*(A_i).$$

6) $\mathcal{M}$ è completa.

Dimostriamo che tutti i sottoinsiemi di insiemi di misura nulla di $\mathcal{M}$ sono misurabili ed anch'essi di misura nulla ovvero che se $A \in \mathcal{M}$, $\mu^*(A) = 0$ e $B \subseteq A$, allora $B \in \mathcal{M}$ e $\mu^*(B) = 0$. Sia $E \in \mathcal{P}(X)$ allora per la subadditività di μ^* si ha che $\mu^*(E) \leq \mu^*(E \cap B) + \mu^*(E \cap B^c)$, ma $\mu^*(E \cap B)$ è nullo per la monotonia di μ^* dato che $E \cap B \subseteq B$, e poiché $E \cap B^c \subseteq E$, sempre per monotonia, si ha $\mu^*(E \cap B^c) \leq \mu^*(E)$, da cui otteniamo che $B \in \mathcal{M}$. Inoltre $\mu^*(B) = 0$ per la monotonia di μ^*.

$\square$

1.2 Premisura ed estensione di una premisura

Sia $X \neq \emptyset$ e $\mathcal{A}$ un'algebra di $\mathcal{P}(X)$, una **premisura** su X è una funzione $\mu_0 : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$, tale che:

1 $\mu_0(\emptyset) = 0$

2 se $\{A_i\}_{i \geq 1}$ è una famiglia di elementi di $\mathcal{A}$ tale che $A_i \cap A_j = \emptyset$, per ogni $i \neq j$, e $\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_j \in \mathcal{A}$, allora

$$\mu_0(\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{+\infty} \mu_0(A_i).$$

Ogni premisura induce una misura esterna sull'algebra di $\mathcal{P}(X)$.

Proposizione 1.2. *Sia μ_0 una premisura su un'algebra $\mathcal{A}$ di $\mathcal{P}(X)$ e μ^* la misura esterna su X indotta dalla premisura μ secondo la* (1.1) *allora:*

1. $\mu^*|_{\mathcal{A}} = \mu_0$

2. *Ogni elemento di $\mathcal{A}$ è μ^*-misurabile.*

Adesso enunceremo e dimostremero un importante teorema che garantisce l'esistenza e l'unicità di un'estensione di μ_0 premisura σ-finita su un' algebra $\mathcal{A}$ su $\mathcal{M} = \sigma(\mathcal{A})$, la σ-algebra generata da $\mathcal{A}$.

Teorema 1.2 (Teorema di esistenza ed unicità dell'estensione di una premisura)**.** *Sia $X \neq \emptyset$, $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ algebra, μ_0 premisura σ-finita su $\mathcal{A}$ e $\mathcal{M}$ la σ-algebra generata da $\mathcal{A}$. Allora esiste un unica misura μ estensione di μ_o a $\mathcal{M}$. Essa è tale che $\mu = \mu^*|_{\mathcal{M}}$, con μ^* la misura esterna costruita da μ_o.*

Dimostrazione. Proviamo prima l'esistenza e poi l'unicità.

1. Esistenza. Deriva dal teorema di Caratheodory.

2. Unicità

   Sia ν un altra misura tale che $\nu|_{\mathcal{A}} = \mu_0$, fisso un $E \in M$ con $\mu(E) < +\infty$ e verifichiamo le due diseguaglianze:

   (a) $\nu(E) \leq \mu(E)$.

   Fisso $\epsilon > 0$. Esiste una famiglia $\{A_i\}_{i\geq 1} \subseteq \mathcal{A}$ tale che $E \subseteq \bigcup_{i\geq 1} A_i$ e $\sum_{i\geq 1} \mu_0(A_i) \leq \mu(E) + \epsilon$. Sia $A = \bigcup_{i\geq 1} A_i \in \mathcal{M}$. Usando la monotonia e la sub-additività di μ si ha che

   $$\nu(E) \leq \nu(A) \leq \sum_{i=1}^{+\infty} \nu(A_i) = \sum_{i=1}^{+\infty} \mu_0(A_i) \leq \mu(E) + \epsilon.$$

   Per l'arbitrarietà di ϵ la diseguaglianza risulta verificata.

   (b) $\mu(E) \leq \nu(E)$.

   Sia $\{A_i\}_{i\geq 1} \subseteq \mathcal{A}$ e $A = \bigcup_{i\geq 1} A_i$. Per la continuità dal basso di ν si ha

   $$\nu(A) = \nu(\bigcup_{i=1}^{+\infty}(A_i)) = \lim_{n\to\infty} \nu(\bigcup_{i=1}^{n} A_j) \in \mathcal{A},$$

   e poichè $\nu|_{\mathcal{A}} = \mu_0 = \mu|_{\mathcal{A}}$ allora

   $$\lim_{n\to+\infty} \nu(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \lim_{n\to+\infty} \mu(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \mu(A).$$

Quindi troviamo una famiglia $\{A_i\}_{i\geq 1} \subseteq \mathcal{A}$ tale che $E \subseteq \bigcup_{i\geq 1} A_i$ e $\sum_{i\geq 1} \mu_0(A_i) \leq \mu(E)+\epsilon$ e osserviamo che $\mu(A\backslash E) = \mu(A)-\mu(E) \leq \epsilon$ e $\mu(A) \leq \sum_{i=1}^{n} \mu_0(A_i) \leq \mu(E) + \epsilon$. Allora

$$\mu(E) \leq \mu(A) = \nu(A) = \nu(E)+\nu(A\backslash E) \leq \nu(E)+\mu(A\backslash E) \leq \nu(E)+\epsilon$$

e per l'arbitrarietà di ϵ si ha che $\mu(E) \leq \nu(E)$ da cui otteniamo $\mu(E) = \nu(E)$.

$\square$

1.3 Misura di Lebesgue su $\mathbb{R}$ e proprietà

Sia $X = \mathbb{R}$, $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R})$ l'algebra di plurintervalli intesi come unione finita disgiunta di intervalli ovvero $]a,b] = \bigcup_{i=1}^{n}]a_i, b_i]$ di $\mathbb{R}$, dove $]a_i, b_i] \cap]a_j, b_j] = \emptyset$, per ogni $i \neq j$, e sia $m_o : \mathcal{P} \to [0, \infty]$ la premisura definita da

$$m_o(]a,b]) = \sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i)$$

Se $E \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ definisco la misura esterna di Lebesgue m^*, tramite la (1.1) come:

$$m^*(E) = \inf \left\{ \sum_{i=0}^{+\infty} m_o(I_i) | I_i \in \mathcal{P} \text{ e } E \subseteq \bigcup_{i=0}^{+\infty} I_i \right\} \tag{1.3}$$

Il teorema di Caratheodory ci fornisce una σ-algebra $\mathcal{L}$ degli insiemi m^*-misurabili che chiamiamo la σ-algebra degli insiemi Lebesgue-misurabili su cui la restrizione della misura esterna è una misura detta la **misura di Lebesgue** m su $\mathbb{R}$. Essa è completa ed è l'unica estensione della premisura m_o grazie al teorema di esistenza ed unicità dell'estensione di una premisura.

Inoltre sappiamo che vale

$$m([0,1]) = 1. \tag{1.4}$$

La misura di Lebesgue m su $\mathbb{R}$ è **σ-finita** perchè

$$\mathbb{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}}]n, n+1]$$

e $\mathbb{Z}$ è numerabile.

1.3.1 Proprietà della misura di Lebesgue su $\mathbb{R}$

Sia $(\mathbb{R}, \mathcal{L}, m)$ lo spazio con la misura di Lebesgue m, allora m gode delle seguenti proprietà:

Regolarità dall'esterno

Se $E \in \mathcal{L}$ allora $m(E) = inf\{m(U) | U$ aperto e $U \supseteq E\}$

Dimostrazione. Distinguiamo due casi:

1. $m(E) = \infty$.

   $E \subseteq U \Rightarrow m(U) = \infty$ (per monotonia di m).

2. $m(E) < +\infty$

   Poiché $m^*|_{\mathcal{L}} = m$, preso $E \in \mathcal{L}$ si ha che

   $$m(E) = inf\{\sum_{j=1}^{+\infty} m(I_j) | I_j \text{ plurintevallo di } \mathbb{R} \text{ e } \bigcup_{j=1}^{+\infty} I_j \supseteq E\}.$$

   Allora fissato un $\epsilon > 0$, esiste una famiglia $\{I_j\}_{j \geq 1}$ di plurintervalli tali che $\sum_{j \geq 1} m(I_j) \leq m(E) + \epsilon$ e per ogni $j \geq 1$ esiste un aperto $U_j \supseteq I_j$ tale che $m(U_j) \leq m(I_j) + \frac{\epsilon}{2^j}$. Considero l'aperto $U = \bigcup_{j \geq 1} U_j$ allora per la monotonia di m si ha

   $$m(U) \leq \sum_{j=1}^{+\infty} m(U_i) \leq \sum_{j=1}^{+\infty} (m(I_j) + \frac{\epsilon}{2^j}) = \sum_{j=1}^{+\infty} m(I_j) + \epsilon \leq m(E) + 2\epsilon$$

   da cui otteniamo la tesi.

□

Regolarità dall'interno

Se $E \in \mathcal{L}$ allora $m(E) = sup\{m(K)|\ K$ compatto e $K \subseteq E\}$

Dimostrazione. Lavoriamo su due casi:

1. E limitato.

   Se E è chiuso allora l'estremo superiore delle misure dei K è il massimo, perché E è un compatto. Se E non è chiuso allora esiste una parte di frontiera che non appartiene ad E e considero $\bar{E} \setminus E$ che posso approssimare con un aperto $U \supseteq \bar{E} \setminus E$ tale che

   $$m(U) \leq m(\bar{E} \setminus E) + \epsilon = m(\bar{E}) - m(E) + \epsilon$$

   perché $E \subseteq \bar{E}$. Sia $K = \bar{E} \cap U^c$; esso è compatto perché $\bar{E}$ è compatto e U^c è chiuso, e pertanto la loro intesezione è un compatto. Osserviamo che $K \subseteq E$ perché preso un $x \in K$ si ha che

   $$x \in \bar{E} \text{ e } x \in U^c \subseteq (\bar{E} \cap E^c)^c \subseteq \bar{E}^c \cup E$$

   e quindi $x \in \bar{E} \cap (\bar{E}^c \cup E) = E$. Inoltre possiamo scrivere

   $$K = \bar{E} \cap (U \cap \bar{E})^c$$

   quindi si ha

   $$m(K) = m(\bar{E}) - m(U \cap \bar{E}) \geq m(\bar{E}) - m(U) \geq m(\bar{E}) - m(\bar{E}) + m(E) - \epsilon$$

   da cui la tesi.

2. E illimitato.

   Consideriamo la famiglia $\{A_i\}_{j \geq 1}$ dove $A_i :=]-i, 1-i] \cup]i-1, i]$ sono unione finita di intervalli limitati. Abbiamo che $\mathbb{R} = \bigcup_{i \geq 1} A_i$ e $A_i \cap A_j =$

$\emptyset$. L'insieme $E_i = E \cap A_i$ è limitato; pertanto esiste un insieme compatto K_i tale che

$$m(K_i) \geq m(E_i) - \frac{\epsilon}{2^i}$$

per ogni $i \geq 1$. Sia l'insieme compatto $C_n = \bigcup_{i=1}^n K_i$ e si noti che $K_i \cap K_j = \emptyset$; ottengo una successione crescente $\{C_n\}_{n\geq 1}$ e sia $C = \bigcup_{n\geq 1} C_n$. Per la continuità dal basso di m si ha che $m(C) = \lim_{n\to+\infty} m(C_n)$. Osserviamo che

$$m(C_n) = \sum_{i=1}^n m(K_i) \geq \sum_{i=1}^n m(E_i) - \epsilon$$

e che $m(E) = \lim_{n\to+\infty} m(\bigcup_{i=1}^n E_i)$.

Se $m(E) < +\infty$, sia $\tilde{n}$ abbastanza grande in modo tale che $m(\bigcup_{j=1}^{\tilde{n}} E_j) \geq m(E) - \epsilon$; abbiamo che $m(C_{\tilde{n}}) \geq m(E) - 2\epsilon$ da cui la tesi. Se $m(E) = +\infty$ allora per ogni $a > 0$ esiste un $\tilde{n}$ tale che $m(\bigcup_{i=1}^{\tilde{n}} E_i) \geq a$; allora $m(C_{\tilde{n}}) \geq a - \epsilon$.

□

Da queste due proprietà otteniamo la seguente caratterizzazione degli elementi di $\mathcal{L}$:

Proposizione 1.3. *Se $E \in \mathcal{L}$ allora $E = A_1 \cup N_1 = A_2 \setminus N_2$ dove $A_1 \in F_\sigma$, $A_2 \in G_\delta$ e $m(N_1) = m(N_2) = 0$.*

Dimostrazione. Procediamo con la dimostrazione considerando i due casi distinti:

1. $m(E) < +\infty$.

   Per le proprietà di regolarità di m esistono un K_j e un aperto U_j tale che $K_i \subseteq E \subseteq U_i$ e

$$m(U_j) - \frac{1}{2^j} \leq m(E) \leq m(K_j) + \frac{1}{2^j}.$$

Siano $A_1 = \bigcup_{j\geq 1} K_j \in F_\delta$ e $A_2 = \bigcap_{j\geq 1} U_j \in G_\delta$. Allora $A_1 \subseteq E \subseteq A_2$. Dimostriamo che $m(E \setminus A_1) = m(A_2 \setminus E) = 0$, infatti

$$m(E \setminus A_1) = m(E) - m(A_1) \leq m(E) - m(K_j) \leq \frac{1}{2^j}$$

per ogni $j \geq 1$, allora $m(E \setminus A_1) = 0$. Anche

$$m(A_2 \setminus E) = m(A_2) - m(E) \leq m(U_j) - m(E) \leq \frac{1}{2^j}$$

per ogni $j \geq 1$, pertanto $m(A_2 \setminus E) = 0$.

2. $m(E) = \infty$.

Consideriamo la famiglia $\{I_k\}_{k\geq 1}$ dove gli I_k sono unione finita di plurintervalli tali che, per ogni $k \geq 1$, $0 < m(I_k) < +\infty$ e $I_i \cap I_k = \emptyset$, per ogni $i \neq k$, e $\mathbb{R} = \bigcup_{k\geq 1} I_k$. Per ogni $k \geq 1$, $E \cap I_k$ ha misura finita allora troviamo $A_{1,k} \in F_\sigma$, $A_{2,k} \in G_\delta$ e $N_{1,k}$ e $N_{2,k}$ di misura nulla tali che $E \cap I_k$ si può scrivere come

$$E \cap I_k = A_{1,k} \cup N_{1,k} = A_{2,k} \setminus N_{2,k}.$$

Sia $A_1 = \bigcup_{k\geq 1} A_{1,k} \in F_\delta$ e $A_2 = \bigcap_{k\geq 1} A_{2,k} \in G_\delta$.
Se consideriamo $N_1 = \bigcup_{k\geq 1} N_{1,k}$ allora per la subadditività di m si ha $m(N_1) \leq \sum_{k\geq 1} m(N_{1,k}) = 0$. Pertanto E si può scrivere come $E = A_1 \cup N_1$. Per trovare l'altra scrittura di E è necessario sfruttare la complementarietà degli aperti con i chiusi. Se $E \cap I_k = A_{2,k} \cap N_{2,k}^c$ allora $(E \cap I_k)^c = (A_{2,k}^c \cup N_{2,k})$ dove $A_{2,k}^c \in F_\sigma$ e $m(N_{2,k}) = 0$. Pertanto $E^c = A_2^c \cup N_2$; ma $A_2^c = \cup_{k\geq 1} A_{2,k}^c$ è un unione numerabile di chiusi e $m(N_2) \leq \sum_{k\geq 1} m(N_{2,k}) = 0$, allora

$$E = A_2 \cap N_2^c = A_2 \setminus N_2.$$

$\square$

Invarianza per traslazioni

(Invarianza isometrica per $n \geq 2$)

Se $E \in \mathcal{L}$ allora $x + E \in \mathcal{L}$ e $m(x + E) = m(E)$, per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Dimostrazione. Lavoriamo per casi:

1. E plurintervallo di $\mathbb{R}$.

   Sia $E = \prod_{i=1}^{n} [a_i, b_i]$ un plurintervallo di $\mathbb{R}$ e sia $x{+}E = \prod_{i=1}^{n}]a_i + x, b_i + x]$ il suo traslato, con $x \in \mathbb{R}$. La premisura m_o sull'algebra dei plurintervalli $\mathcal{A}$ (che genera la σ-algebra dei Borelliani) è invariante per traslazione e poiché la misura di Lebesgue m è l'unica estensione di m_o si ha che

   $$m(E) = m_o(E) = m_o(x + E) = m(x + E)$$

   da cui la tesi.

2. $E \in \mathcal{L} \Rightarrow x + E \in \mathcal{L}$.

   Sia $E = A \cup N$, dove $A \in F_\sigma$ (unione numerabile di chiusi) e $m(N) = 0$, allora $x + E = (x + A) \cup (x + N)$. Poiché $A = \bigcup_{i\geq 1} C_i$ (C_i chiuso) allora $x + A = \bigcup_{i\geq 1} C_i + x$ è un chiuso perché le traslazioni sono omomorfismi, pertanto $x + A \in F_\sigma \subseteq \mathcal{L}$. Dimostramo adesso che $x + N \in \mathcal{L}$ e $m(x + N)$=0. Consideriamo la misura esterna m^* costruita tramite la premisura m_0 sull'algebra dei plurintervalli $\mathcal{A}$ di $\mathbb{R}$ tale che

   $$m^*(x + N) = inf\{\sum_{i=1}^{+\infty} m_o(A_i)|A_i \in A \text{ e } x + N \subseteq \bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i\}.$$

   Se fosse che $m^*(x + N) = 0$ allora $x + N \in \mathcal{L}$.

   Infatti preso $E \subseteq X$, per la subadditività di m^*, si ha

   $$m^*(E) \leq m^*(E \cap (x + N)) + m^*(E \cap (x + N)^c) = m^*(E \cap (x + N)^c)$$

e per la monotonia di m^* si ha

$$m^*(E \cap (x+N)^c) \leq m^*(E).$$

Fissiamo un $\epsilon > 0$ e sia $m(N) = 0$ allora esiste una famiglia $\{A_i\}_{i\geq 1} \subseteq \mathcal{A}$ tale che $N \subseteq \bigcup_{i\geq 1} A_i$ e $\sum_{i\geq 1} m_o(A_i) < \epsilon$. Come abbiamo visto prima $\{x + A_i\} \subseteq \mathcal{A}$ e quindi $x + N \subseteq \bigcup_{i\geq 1}(x + A_i)$ e $\sum_{i\geq 1} m_0(x + A_i) = \sum_{i\geq 1} m_0(A_i) < \epsilon$, pertanto $m^*(x + N) = 0$ ne segue che $x + N \in \mathcal{L}$.

3. $m(x + E) = m(E)$.

   Se $E = A \cup N$ con $A \in F_\sigma$ e $m(N) = 0$ allora $(x+E) = (x+A) \cup (x+N)$. Quindi

$$m(E + x) = m(A + x) = m_0(A + x) = m_0(A) = m(E).$$

$\square$

Capitolo 2

Insiemi non misurabili per la misura di Lebesgue su $\mathbb{R}$.

2.1 L'insieme di Vitali

Per costruire l'insieme di Vitali, abbiamo bisogno di enunciare l'assioma della scelta che indicheremo con **AC**:

Assioma 2.1 (AC). *Sia $\mathcal{X}$ un insieme di insiemi tale che per ogni $X \in \mathcal{X}$ si ha $X \neq \emptyset$. Allora esiste una funzione $\Phi : \mathcal{X} \to \cup_{X \in \mathcal{X}} X$ tale che per ogni $X \in \mathcal{X}$ si ha $\Phi(X) \in X$.*

Teorema 2.1. *Se vale **AC** allora esiste un sottoinsieme V di $\mathbb{R}$ non misurabile per la misura di Lebesgue m su $\mathbb{R}$.*

Dimostrazione. Per semplicità possiamo considerare l'intervallo $X = [0, 1] \subseteq \mathbb{R}$ e la relazione di equivalenza $\sim$ su X definita da

$$x \sim y \iff x - y = q \in \mathbb{Q} \tag{2.1}$$

La relazione $\sim$ è effettivamente una relazione di equivalenza. Infatti:

1. per ogni $x \in X$ allora $x - x = 0 \in \mathbb{Q}$

2. per ogni $x, y \in X$, se $x - y = q \in \mathbb{Q}$ allora $y - x = -(x - y) = -q \in \mathbb{Q}$.

3. per ogni $x, y, z \in X$, se $x - y = q \in \mathbb{Q}$ e $y - z = q' \in \mathbb{Q}$ allora $x - z = x - y + y - z = q + q' \in \mathbb{Q}$.

Sia $X' := X/\sim$ l'insieme delle classi di equivalenza rispetto alla relazione $\sim$ ovvero degli insiemi $[x]_\sim := \{x' \in X | \, x' \sim x\}$. Per l'assioma della scelta **AC** esiste un sottoinsieme $V \subseteq \mathbb{R}$ tale che $|V \cap [x]| = 1$ per ogni $x \in X$, ovvero V contiene uno e un solo elemento per ogni classe di equivalenza in X'. Chiamiamo V l'insieme di **Vitali**.
Osserviamo che vale la seguente proprietà:

$$\forall q, q' \in \mathbb{Q}, q \neq q' \Rightarrow (V + q) \cap (V + q') = \emptyset \tag{2.2}$$

perché se $y \in (V + q) \cap (V + q')$ allora esistono $v, v' \in V$ tale che:

$$y = v + q = v' + q'$$

da cui

$$v - v' = q' - q \in \mathcal{Q}$$

da cui

$$v \sim v'$$

e per la costruzione tramite **AC** di V si ha quindi che $v' = v$ e $q' = q$.

Notiamo che $[0, 1] \subseteq \cup_{q \in [-1,1] \cap \mathbb{Q}} (V + q) \subseteq [-1, 2]$. Ragionando per assurdo supponiamo che $V \in \mathcal{L}$; per la monotonia di m e per la numerabilità di $\mathbb{Q} \cap [-1, 1]$ si ha

$$m([0, 1]) \leq \sum_{q \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]} m(V + q) \leq m([-1, 2])$$

ne segue, per l'invarianza per traslazioni di m, che

$$1 \leq \sum_{q \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]} m(V) \leq 3$$

Poiché abbiamo assunto che V sia misurabile allora abbiamo due casi:

1. $m(V) = 0$, e in questo caso si ottiene $1 \leq 0$.

2. $m(V) > 0$, e in questo caso si ottiene $+\infty \leq 3$

In entrambi i casi otteniamo un assurdo; pertanto l'insieme V non è un sottoinsieme misurabile di $\mathbb{R}$ secondo Lebesgue. $\square$

Si noti che in particolare la dimostrazione del precedente teorema ci dice anche che non può esistere un'estensione a $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ della misura di Lebesgue che sia invariante per traslazioni (in presenza dell'assioma di scelta).

2.2 La costruzione di Bernstein

Per trattare gli insiemi di Bernstein e dimostrarne l'esistenza occorre introdurre una versione equivalente dell'assioma di scelta ovvero il teorema del buon ordinamento. Pertanto daremo dei richiami teorici su relazioni d'ordine, relazioni d'ordine totale, relazioni di buon ordine, insiemi ben ordinati, insiemi transitivi e numeri ordinali (o semplicemente ordinali).

Definizione 2.1. *Una relazione $\leq$ su un insieme X si dice **d'ordine parziale** se gode delle seguenti proprietà:*

1. *$x \leq x$, per ogni $x \in X$ (antiriflessiva)*

2. *$x \leq y$ e $y \leq x$ implica $x = y$, per ogni $x, y \in X$ (antisimmetrica)*

3. *se $x \leq y$ e $y \leq z$ allora $x \leq z$, per ogni $x, y, z \in X$ (transitiva)*

Definizione 2.2. *Una relazione $<$ su un insieme X si dice* ***d'ordine parziale stretto*** *se gode delle seguenti proprietà:*

1. *$x \not< x$, per ogni $x \in X$ (antiriflessiva)*

2. *se $x < y$ e $y < z$, allora $x < z$, per ogni $x, y, z \in X$ (transitiva)*

La coppia $(X, <)$ si dice insieme **strettamente parzialmente ordinato**

.

Definizione 2.3. *Una relazione d'ordine parziale stretto $<$ su un insieme X si dice* ***totale*** *se per ogni $x, y \in X$, $x < y$ oppure $y > x$ oppure $x = y$.*

In tal caso la coppia $(X, <)$ si dice insieme **totalmente ordinato**.

Definizione 2.4. *Una relazione d'ordine parziale stretto $<$ su un insieme X si dice* ***di buon ordine*** *se ogni sottoinsieme non vuoto di X ammette un elemento minino rispetto a $<$, ovvero un elemento x tale che, per ogni $y \in X$, $x = y$ o $x < y$.*

La coppia $(X, <)$ si dice un insieme **ben ordinato** e un insieme ben ordinato è sempre anche totalmente ordinato (infatti ogni coppia di suoi elementi ha un minimo).

Definizione 2.5. *Un insieme X si dice* ***transitivo*** *se ogni elemento di X è un sottoinsieme di X.*

Definizione 2.6. *Un insieme α si dice* ***numero ordinale*** *(o ordinale) se è transitivo e ben ordinato rispetto dalla relazione di appartenenza $\in$.*

La classe degli ordinali sarà indicata con **Ord** e scriveremo $\alpha < \beta$ per indicare $\alpha \in \beta$; **Ord** stessa, come classe, è ben ordinata da $<$; inoltre è possibile definire funzioni per ricorsione sugli ordinali e dimostrare proposizioni per induzione su di essi (si rimanda per i dettagli a "Set theory, The Third Millennium Edition, revised and expanded" di T. Jech).

Ci limitiamo qui a dimostrare alcune proprietà degli ordinali di interesse cruciale per il seguito.

Definizione 2.7. *Sia α un ordinale e $\beta \in \alpha$. Allora si dice* ***segmento iniziale*** *di α generato da $\beta \in \alpha$ l'insieme:*

$$\alpha_\beta = \{x \in \alpha | x < \beta\}$$

Si può notare subito che per ogni $\beta \in \alpha$ si ha che $\alpha_\beta = \beta$.

Definiamo $\alpha + 1 = \alpha \cup \{\alpha\}$ il **successore** di α. L'ordinale $\alpha = \beta + 1$ è il successore di β e se α non è il successore di alcun ordinale β, allora $\alpha = \sup\{\beta | \, \beta < \alpha\}$ è chiamato **ordinale limite**.

Prima di procedere alla dimostrazione del teorema di esistenza ed unicità di un ordinale isomorfo ad un insieme ben ordinato abbiamo bisogno delle seguenti proposizioni:

Proposizione 2.1. *Se esiste un isomorfismo tra due ordinali α e β allora essi sono uguali.*

Dimostrazione. Supponiano che esista un isomorfismo, ovvero una funzione $f : \alpha \to \beta$ biunivoca che preservi l'ordine. Dimostramo che f è l'identità. Supponiamo per assurdo che esista

$$\gamma = min\{x \in \alpha | f(x) \neq x\}$$

e consideramo la restrizione di f al segmento iniziale α_γ: si ottiene un isomo- morfismo

$$g = f|_{\alpha_\gamma} : \alpha_\gamma \to \beta_{f(\gamma)}$$

che è l'identità; quindi $\alpha_\gamma = \beta_{f(\gamma)}$ e poichè il segmento iniziale di α (risp. di β) generato da γ (risp. da $f(\gamma)$) coincide con γ (risp. con $f(\gamma)$) allora $\gamma = f(\gamma)$. Pertanto perveniamo ad una contraddizione. $\square$

La seguente è una conseguenza del buon ordinamento della classe degli ordinali rispetto a $\in$:

Proposizione 2.2 (Tricotomia degli Ordinali)**.** *Siano α e β due ordinali. Allora vale sono uno ed un solo caso:*

1. $\alpha = \beta$;

2. $\alpha \in \beta$;

3. $\beta \in \alpha$

Proposizione 2.3. *Sia X un insieme di ordinali allora:*

$$X\,\text{è un ordinale} \iff X\,\text{è transitivo}$$

Dimostrazione. L'implicazione ($\Rightarrow$) è banale. Dimostriamo l'implicazione ($\Leftarrow$), ovvero supponiamo che X sia un insieme transitivo di ordinali e verifichiamo che X è ben ordinato rispetto alla relazione di appartenenza $\in$. Dalla tricotomia degli ordinali, $(X, \in)$ è totalmente ordinato. Sia $Z \subseteq X$ un insieme non vuoto e prendiamo $\xi \in Z$. Se $\xi = \min Z$ abbiamo concluso. Altrimenti esiste un elemento $\alpha \in Z$ con $\alpha \in \xi$ e pertanto $\xi \cap Z$ è un insieme non vuoto di ξ. Esiste allora $\beta = min(\xi \cap Z)$ e si ottiene che $\beta = minZ$. $\square$

Teorema 2.2. *Per ogni $(X, <)$ insieme ben ordinato esiste un unico ordinale $(\alpha, \in)$ tale che:*

$$(X, <) \cong (\alpha, \in) \tag{2.3}$$

Dimostrazione. 1. Unicità. Supponiamo che esistano due ordinali α β tali che esistono isomorfismi $f : X \to \alpha$ e $g : X \to \beta$. Se consideriamo la funzione $g \circ f^{-1}$, essa è un isomorfismo tra α e β allora, per la **proposizione 2.2.** si ha l'uguaglianza.

2. Esistenza. Sia $B = \{x \in X |\ X_x \text{ è isomorfo a un ordinale}\}$, dove X_x denota l'insieme $\{y \in X|\ y < x\}$ ovvero il segmento iniziale generato da x rispetto alla relazione $<$. Per ogni $x \in X$ denotiamo con $\beta(x)$ l'ordinale isomorfo a X_x. L'insieme

$$\{\beta(x)|x \in B\}$$

è un insieme transitivo di ordinali, infatti se $\alpha \in \beta(x)$ per un certo $x \in B$ allora α è isomorfo a un segmento iniziale di X_x e tale isomorfismo è ottenuto dalla restrizione a α dell'isomorfismo tra $\beta(x)$ e X_x. Pertanto esiste un $y \in B$ con $y < x$ tale che $\alpha = \beta(y)$.

Dunque per la **proposizione 2.3**, l'insieme $\{\beta(x)|x \in B\}$ è un ordinale. Pertanto otteniamo un isomorfismo tra B e l'ordinale $\{\beta(x)|x \in B\}$. Se $B \neq X$, allora esiste $x_0 \in X$ tale che $B = X_{x_0}$. Ma B è isomorfo a un ordinale e dunque $x_0 \in B = X_{x_0}$ pervenendo a un assurdo.

□

Teorema 2.3 (**Teorema del buon ordinamento**). *Ogni insieme può essere ben ordinato.*

Dimostrazione. Sia X un insieme non vuoto (il caso vuoto è banale) e consideriamo l'insieme dei suoi sottoinsiemi non vuoti $\mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\}$. Allora esiste una funzione di scelta:

$$s : \mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\} \to X \tag{2.4}$$

tale che $s(A) \in A$. Fissiamo anche un elemento $\overline{y} \notin X$. Definiamo una successione di $(x_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{Ord}}$ di elementi di $X \cup \{\overline{y}\}$ e una successione $(A_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{Ord}}$ di sottoinsiemi di X tramite la seguente ricorsione transfinita:

$$\begin{cases} x_0 := s(X) \ A_0 := X \setminus \{x_0\} \\ \\ \begin{cases} x_{\alpha+1} := s(A_\alpha) & \text{se } A_\alpha \neq \emptyset \text{ e } A_{\alpha+1} := A_\alpha \setminus \{x_{\alpha+1}\} \\ x_{\alpha+1} := \bar{y} & \text{e } A_{\alpha+1} := \emptyset \text{ altrimenti} \end{cases} \\ \\ \begin{cases} x_\alpha := s(\bigcap_{\beta<\alpha} A_\beta) & A_\alpha := (\bigcap_{\beta<\alpha} A_\beta) \setminus \{x_\alpha\} \text{ se } \bigcap_{\beta<\alpha} A_\beta \neq \emptyset \\ x_\alpha := \bar{y} & A_\alpha := \emptyset \qquad \text{altrimenti} \end{cases} \quad \alpha \text{ limite} \end{cases}$$

Si considera il più piccolo β tale che $x_\beta = \bar{y}$; tale β esiste, altrimenti avremmo una dimostrazione (tramite l'assioma di rimpiazzamento) che gli ordinali formano un insieme, e quindi un assurdo. Ovviamente, per ogni $\alpha > \beta$, $x_\alpha = \overline{y}$.

L'insieme $\{x_\alpha | \alpha < \beta\} = X$ e pertanto X può essere ben ordinato; infatti per ogni $\alpha, \alpha' < \beta$ possiamo porre

$$x_\alpha < x_{\alpha'} \iff \alpha < \alpha'$$

Questo conclude la dimostrazione. □

Adesso entriamo nel cuore dello studio degli insiemi di Bernstein, iniziando con la definizione di insieme perfetto.

Definizione 2.8. *Un insieme $P \subseteq \mathbb{R}$ si dice **perfetto** in $\mathbb{R}$ se è un insieme chiuso non vuoto privo di punti isolati rispetto alla sua topologia relativa.*

Teorema 2.4 (Cantor-Bendixson)**.** *Ogni insieme chiuso F di $\mathbb{R}$ infinito non numerabile è unione di un insieme perfetto e un insieme al più numerabile.*

Dimostrazione. Sia F un insieme chiuso infinito non numerabile. Se X è un insieme chiuso, denotiamo con X' il derivato di X ovvero l'insieme dei punti di accumulazione di X; ovviamente X' è chiuso e $X' \subseteq X$. Per determinare l'insieme perfetto contenuto in F ricorriamo alla ricorsione transfinita: definiamo una successione transfinita di sottoinsiemi di F come segue

1. $F_0 = F$
2. $F_{\alpha+1} = F'_\alpha$
3. $F_\alpha = \bigcap_{\gamma<\alpha} F_\gamma$ con α limite.

Pertanto se F_α contiene ancora punti isolati continuiamo a applicare l'operazione di derivazione.

Otteniamo cosi una catena decrescente $\{F_\alpha\}_{\alpha \in Ord}$ di chiusi. Poniamo

$$P := \bigcap_{\alpha \in Ord} F_\alpha$$

Se $F_\theta = F_{\theta+1}$ per qualche θ, allora $P = F_\theta$. Se così fosse, l'insieme F_θ sarebbe formato solo da punti di accumulazione e sarebbe dunque perfetto (se fossimo in grado di dimostrare che non è vuoto). Dimostriamo dunque che esiste un tale θ. Se così non fosse $F - P$ sarebbe una classe, ma sappiamo che $F - P$ è un insieme.

Adesso dimostriamo che $F - P$ ha cardinalità al più numerabile.

Sia $\{I_n | n \in \mathbb{N}\}$ una enumerazione degli intervalli ad estremi razionali di $\mathbb{R}$. Sappiamo che $F - P = \bigcup_{\alpha<\theta}(F_\alpha \setminus F'_\alpha)$. Se prendiamo un elemento $a \in F - P$ allora esisterà un unico α tale che a è un punto isolato di F_α. Indichiamo con $n(a)$ il minimo indice n tale che $F_\alpha \cap I_n = \{a\}$. Si noti ora che se $\alpha < \beta$, allora per ogni $b \in F_\beta \setminus F'_\beta$ si ha che $a \neq b$ e quindi che $b \notin I_{n(a)}$ (dato che $b \in F_\alpha$); quindi $n(a) \neq n(b)$. Per la corrispondenza iniettiva $a \mapsto n(a)$ otteniamo che $F - P$ è al più numerabile.

Questo ci permette in particolare di concludere che P è non vuoto (dato che F è infinito non numerabile) e che quindi è perfetto. $\square$

Teorema 2.5. *Ogni sottoinsieme perfetto P di $\mathbb{R}$ ha la stessa cardinalità di $\mathbb{R}$.*

Dimostrazione. Dato un insieme perfetto P, basta trovare una funzione iniettiva $F : \{0,1\}^\omega \to P$. Sia S l'insieme di tutte le succesioni finite di 0 e di 1. Tramite l'induzione sulla lunghezza degli $s \in S$ possiamo definire degli intevalli chiusi I_s tali che per ogni n e per tutti gli $s \in S$ di lunghezza n:

1. $I_s \cap P$ è perfetto,
2. I_s ha diametro $\leq 1/n$,
3. I_{s*0}, $I_{s*1} \subset I_s$ e $I_{s*o} \cap I_{s*1} = \emptyset$.

Se prendo una funzione $f \in \{0,1\}^\omega$, l'insieme $P \cap \bigcap_{n=0}^{\infty} I_{f|n}$ ha esattamente un elemento, $F(f)$, che appartiene a P. La funzione F così definita è la funzione iniettiva cercata. $\square$

Corollario 2.1. *Ogni sottoinsieme chiuso di $\mathbb{R}$ è finito, numerabile o continuo.*

Definizione 2.9. *Un insieme $X \subseteq \mathbb{R}$ si dice di* ***Bernstein*** *se per ogni insieme perfetto $P \subseteq \mathbb{R}$ si ha che $P \cap X \neq \emptyset$ e $P \cap (\mathbb{R} \setminus X) \neq \emptyset$.*

Osserviamo che se X è un insieme di Bernstein lo è anche $\mathbb{R} \setminus X$.

Teorema 2.6. *Se X è un insieme di Bernstein allora $X \notin \mathcal{L}$.*

Dimostrazione. Dimostriamo che se $X \in \mathcal{L}$, allora X non è di Bernstein. Supponiamo che $X \in \mathcal{L}$, allora possiamo supporre senza perdere in generalità che $m(X) > 0$. Poiché X è di misura positiva esiste un chiuso K di misura positiva tale che $K \subseteq X$. Dato che K ha misura positiva esso è infinito ma non può essere numerabile; pertanto esso deve contenere un insieme perfetto P. Pertanto $P \cap (\mathbb{R} \setminus X) = \emptyset$ e X non è di Bernstein. $\square$

Proposizione 2.4. *Se $\mathcal{P}$ è l'insieme degli insiemi perfetti allora $|\mathcal{P}| = |\mathbb{R}|$.*

Dimostrazione. E' chiaro che

$$|\mathcal{P}| \leq |\{\text{chiusi di } \mathbb{R}\}| = |\{\text{aperti di } \mathbb{R}\}|$$

Gli aperti di $\mathbb{R}$ sono unione numerabile di intervalli aperti disgiunti, e la cardinalità di tali unioni è minore o uguale a $|\{\text{intervalli aperti di } \mathbb{R}\}|^{|\mathbb{N}|}$. Ogni intervallo aperto è unione numerabile di un insieme di intervalli aperti ad estremi in $\mathbb{Q}$ quindi

$$|\{\text{intervalli aperti di } \mathbb{R}\}| \leq |\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}|^{|\mathbb{N}|} = |\mathbb{N}|^{|\mathbb{N}|} = |\mathbb{R}|$$

Dunque

$$|\mathcal{P}| \leq |\mathbb{R}|^{|\mathbb{N}|} = |\mathbb{R}|.$$

D'altra parte tutti gli intervalli chiusi di lunghezza 1 sono perfetti e l'insieme di questi ha la cardinalità di $\mathbb{R}$. Dunque $|\mathcal{P}| = |\mathbb{R}|$. $\square$

Teorema 2.7. *Se vale **AC**, esiste un sottoinsieme di Bernstein di $\mathbb{R}$.*

Dimostrazione. Per il teorema del buon ordinamento, l'insieme degli insiemi perfetti $\mathcal{P}$ ammette un buon ordiamento, quindi è possibile costruire una successione transfinita contenente tutti gli insiemi perfetti:

$$\{P_\xi : \xi < \pi\}$$

dove $\pi := \min\{\xi \in \mathrm{Ord} | \pi = |\mathbb{R}|\}$ e tale che

$$\mathcal{P} = \{P_\xi | \xi < \pi \text{ , } \xi \text{ pari}\} = \{P_\xi | \xi < \pi, \xi \text{ dispari}\}$$

Inoltre usando **AC**, possiamo costruire una successione $\{x_\xi\}_{\xi<\pi}$ tale che

1. per ogni ξ , $x_\xi \in P_\xi$

2. $x_\xi \neq x_{\xi'}$, per ogni $\xi' < \xi$

dato che per ogni $\xi < \pi$ e per ogni insieme perfetto P si ha che $|\xi| < |\mathbb{R}| = |P|$. Se consideriamo $X := \{x_\xi | \xi < \pi \ , \ \xi \text{ dispari}\}$, esso è un insieme di Bernstein.

□

2.3 Insieme non misurabile associato a una base di Hamel di $\mathbb{R}$ su $\mathbb{Q}$

Per costruire una base di Hamel è necessario il lemma di Zorn che è a sua volta una forma equivalente dell'assioma di scelta (rispetto alla teoria degli insiemi **ZF**).

Definizione 2.10. *Sia $(X, \leq)$ un insieme con un ordine parziale:*

1. *un sottoinsieme $S \subseteq X$ si dice **catena** se per ogni x, $y \in S$ si ha che $x \leq y$ oppure $y \leq x$;*

2. *se $S \subseteq X$ e $x \in X$, x è un **maggiorante** di S se $x \geq y$ per ogni $y \in S$;*

3. *un elemento $m \in X$ è **massimale** in $(X, \leq)$ se è l'unico maggiorante di se stesso ovvero se per ogni $x \in X$ si ha che $m \nleq x$.*

Assioma 2.2 (Lemma di Zorn)**.** *Sia $(X, \leq)$ un insieme con un ordine parziale. Se ogni sua catena ammette maggiorante allora $(X, \leq)$ ha un elemento massimale.*

Lemma 2.1 (Lemma di Lebesgue)**.** *Sia $X \in \mathcal{L}$ tale che $m(X) > 0$. Allora esiste $\delta > 0$ tale che per ogni $x \in \mathbb{R}$, se $|x| < \delta$, allora $(X + x) \cap X \neq \emptyset$.*

Dimostrazione. Sia $X \in \mathcal{L}$ tale che $m(X) > 0$. Possiamo supporre senza perdere in generalità che X sia limitato (e che pertanto la sua misura sia finita), altrimenti possiamo considerare $X \cap [-n, n]$ che ha misura strettamente positiva per qualche $n \in \mathbb{N}$. Per la regolarità della misura di Lebesgue possiamo trovare un chiuso C e un aperto A tali che:

$$C \subseteq X \subseteq A \text{ e } m(A) < \frac{4}{3} m(C)$$

In particolare dato che A si può scrivere come unione numerabile di intervalli aperti disgiunti, esiste un intervallo aperto $I \subseteq A$ tale che

$$m(I) < \frac{4}{3} m(I \cap C)$$

Poniamo $\delta := \frac{1}{2} m(I)$ e sia $x \in \mathbb{R}$, tale che $|x| < \delta$. Allora

$$\frac{3}{2} m(I) = \frac{3}{4} m(I) + \frac{3}{4} m(I) < m(I \cap C) + m((I \cap C) + x).$$

Se ora $I \cap C$ e $(I \cap C) + x$ fossero disgiunti avremmo che

$$m(I \cap C) + m((I \cap C) + x) = m((I \cap C) \cup (I \cap C) + x)) \leq m(I \cup (I + x)) \leq \frac{3}{2} m(I)$$

da cui otterremmo un assurdo. Quindi

$$\emptyset \neq (I \cap C) \cap ((I \cap C) + x) \subseteq X \cap (X + x)$$

e si conclude la dimostrazione. □

Definizione 2.11. *Una base di **Hamel** di uno spazio vettoriale V su un campo $\mathbb{K}$ è un insieme $B = \{x_i\}_{i \in I}$ di elementi di V tali che gli elementi di ogni sottoinsieme finito $\bar{B}$ di B sono linearmente indipendenti (in tal caso diciamo che B è indipendente) e che ogni elemento $x \in V$ non nullo si scrive come*

$$x = \sum_{i \in F} a_i x_i$$

dove $F \subseteq I$ è un sottoinsieme finito di indici e per ogni $i \in F$ si ha che $a_i \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$.

Teorema 2.8. *Ogni spazio vettoriale V ammette una base di Hamel.*

Dimostrazione. Sia V uno spazio vettoriale su un campo $\mathbb{K}$. Consideriamo l'insieme parzialmente ordinato $(\mathcal{P}, \subseteq)$ dove $\mathcal{P} = \{X \subseteq V | X \text{ è indipendente}\}$ e $\subseteq$ è la relazione di inclusione. Se $\mathcal{C}$ è una catena di $\mathcal{P}$ allora

$$\bar{C} = \bigcup_{X \in \mathcal{C}} X$$

è un maggiorante per $\mathcal{C}$ ovvero è un elemento di $\mathcal{P}$ tale che per ogni $X \in \mathcal{C}$ si ha $X \subseteq \bar{C}$. Per il lemma di Zorn, $\mathcal{C}$ ammette un elemento massimale in $\mathcal{P}$ che chiamiamo B, esso è la base di Hamel di V. Se per assurdo $span(B) \neq V$ allora esisterebbe un $0 \neq b \in V \setminus span(B)$ e quindi potremmo considerare l'insieme $B \cup \{b\}$ che sta in $\mathcal{P}$ e otterremo che $B \subset B \cup \{b\}$, il che è assurdo. □

Teorema 2.9. *Sia $\{p_i\}_{i \in I}$ una base di Hamel di $\mathbb{R}$ come spazio vettoriale su $\mathbb{Q}$ e $\bar{i} \in I$. Allora $X = span(\{p_i\}_{i \in I \setminus \{\bar{i}\}})$ è un insieme non misurabile secondo Lebesgue.*

Dimostrazione. Definiamo $N := span(\{p_i\}_{i \in I \setminus \{\bar{i}\}}$ e supponiamo che $N \in \mathcal{L}$ allora la sua misura deve essere strettamente positiva perchè

$$\mathbb{R} := \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} (N + qp_{\bar{i}})$$

e dato che gli $N + qp_{\bar{i}}$ sono i traslati di N lungo $p_{\bar{i}}$ e sono a due a due disgiunti si ha:

$$m(\mathbb{R}) = \sum_{n \in \mathbb{N}} m(N)$$

Se applichiamo il lemma di Bernstein a N, allora esiste un $\delta > 0$ tale che per ogni $x \in \mathbb{R}$ con $|x| < \delta$ si ha $(N + x) \cap N \neq \emptyset$. Però esiste un $q \in \mathbb{Q}$ tale che $|qp_{\bar{i}}| < \delta$ e che

$$(N + qp_{\bar{i}}) \cap N = \emptyset$$

e quindi si ottiene una contraddizione. Ne segue che $N \notin \mathcal{L}$. □

2.4 Costruzione di Thomas

Definizione 2.12. *Un **grafo** $G = (V, S)$ è una coppia dove V è detto l'insieme dei vertici e S è un insieme di sottoinsiemi formati da due elementi di V, detto l'insieme degli spigoli.*

Definizione 2.13. *Un **ciclo** in un grafo $G = (V, S)$ è una successione di vertici $v_0, ..v_n$ di V tutti distinti tranne $v_n = v_0$ e tale che per ogni $j \in \{0, ..., n-1\}$, $\{v_j, v_{j+1}\} \in S$. Un ciclo con un numero pari di vertici è detto ciclo **pari**, un ciclo con un numero dispari di vertici è detto ciclo **dispari**.*

Definizione 2.14. *Un **cammino** di un grafo $G = (V, S)$ da un vertice a ad un vertice b di lunghezza n è una succesione di vertici $x_0, ..., x_n$ di V tutti distinti tale che, per ogni $j \in \mathbb{N}$ con $0 \leq j < n$, $\{x_j, x_{j+1}\} \in S$, e tale che $x_0 = a$ e $x_n = b$.*

Definizione 2.15. *La **distanza** tra due elementi a, b di V è la lunghezza del cammino minimo da a a b, e se non esiste un cammino tra a e b si pone uguale a $+\infty$.*

Definizione 2.16. *Un grafo $G = (V, S)$ si dice **connesso** se la distanza tra ogni coppia di elementi di V è finita.*

Definizione 2.17. *Le **componenti connesse** di un grafo $G = (V, S)$ sono le classi di equivalenza di V rispetto alla relazione di connessione tra vertici (ovvero quella che sussiste tra due vertici se esiste un cammino che va da uno all'altro).*

Le componenti connesse di un grafo ovviamente corrispondono ai suoi sottografi massimali connessi.

Definizione 2.18. *Un grafo $G = (V, S)$ è detto* ***bipartito*** *se esistono due sottoinsiemi di vertici V_1 e V_2 tale che $V = V_1 \cup V_2$, $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ e per ogni spigolo $s \in S$, $\#(s \cap V_1) = \#(s \cap V_2) = 1$.*

Teorema 2.10. *Un grafo è detto bipartito se e solo se ogni suo ciclo è pari.*

Dimostrazione. Sia $G = (V, S)$ un grafo bipartito. Allora ogni suo ciclo è pari perché nel percorre ogni spigolo di S si passa da una componente all'altra. Viceversa, usando **AC**, per ogni componente connessa X, possiamo prendere un vertice v_X e considerare

$$V_1 := \bigcup_{X \in \mathcal{K}} \{v \in X | d(v, v_X) \text{ è pari}\}$$

e

$$V_2 := \bigcup_{X \in \mathcal{K}} \{v \in X | d(v, v_X) \text{ è dispari}\}$$

dove $\mathcal{K}$ è l'insieme delle componenti connesse di G. □

Costruzione di Thomas. Consideriamo il grafo $T = (\mathbb{R}, S)$ tale che per ogni x, $y \in \mathbb{R}$

$$\{x, y\} \in S \iff \exists k \in \mathbb{Z} \text{ tale che } |x - y| = 3^k$$

Se $x_0, ..., x_n$ è un ciclo di T si ha che

$$x_n = x_{n-1} \pm 3^{k_n} = x_{n-2} \pm 3^{k_{n-1}} \pm 3^{k_n} =$$

$$= x_0 \pm 3^{k_1} \pm 3^{k_2} \pm ... \pm 3^{k_n}$$

Dato che $x_0 = x_n$ allora

$$\pm 3^{k_1} \pm 3^{k_2} \pm ... \pm 3^{k_n} = 0$$

dove $\{k_i\}_{i=1}^n$ è un insieme di interi. Se moltiplichiamo ambo i membri per 3^N, con N intero tale che $N + k_i > 0$ per ogni $1 \leq i \leq n$, otteniamo che

$$\pm 3^{N+K_1} + \pm 3^{N+K_2} \pm ... \pm 3^{N+K_n} = 0$$

Questo implica che n è pari dato che abbiamo una somma di n interi dispari il cui risultato è pari. Pertanto T è bipartito.

Sia $V = (V_1, V_2)$ una partizione di $\mathbb{R}$ che soddisfa le condizioni nella definizione di grafo bipartito. Per la definizione stessa di S, per ogni $k \in \mathbb{Z}$ si ha:

$$V_1 + 3^k = V_2$$

Supponiamo che $V_1 \in \mathcal{L}$ e quindi anche $V_2 \in \mathcal{L}$. Essendo m invariante per traslazioni si ha che $m(V_1) = m(V_2)$ e dato che $\mathbb{R} = V_1 \cup V_2$ allora $m(V_1) > 0$. Sfruttando il lemma di Bernstein, esiste $\delta > 0$ tale che per ogni $x < \delta$,

$$(V_1 + x) \cap V_1 \neq \emptyset.$$

Tuttavia esiste un $k \in \mathbb{Z}$ tale che $3^k < \delta$ e per tale k

$$(V_1 + 3^k) \cap V_1 = V_2 \cap V_1 = \emptyset$$

e quindi perveniamo ad un assurdo. Dunque $V_1, V_2 \notin \mathcal{L}$. $\square$

Capitolo 3

Estensioni invarianti della misura di Lebesgue su $\mathbb{R}$

Abbiamo visto che la misura σ-finita di Lebesgue su $\mathbb{R}$ risulta essere invariante per traslazioni; tuttavia assumendo l'assioma di scelta, abbiamo dimostrato che essa non riesce a misurare tutti gli elementi di $\mathcal{P}(\mathbb{R})$. È naturale dunque chiedersi: essa ammette delle estensioni invarianti per traslazioni su σ-algebre che estendano strettamente $\mathcal{L}$?

Ovvero, ci chiediamo se esista una σ-algebra $\mathcal{E}$ di sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ e una misura $\bar{m}$ su $\mathcal{E}$ tale che:

1. $\mathcal{L} \subset \mathcal{E}$;

2. $\bar{m}|_{\mathcal{L}} = m$;

3. Se $X \in \mathcal{E}$ e $x \in \mathbb{R}$ allora $(X + x) \in \mathbb{E}$;

4. Se $X \in \mathcal{E}$ e $x \in \mathbb{R}$ allora $\bar{m}(X + x) = \bar{m}(X)$.

E se esistono simili estensioni, esiste una tale estensione invariante massimale ovvero un'estensione invariante che non ammette ulteriori estensioni invarianti? Nel 1977 il matematico georgiano Alexander B. Kharazishvili diede la risposta nel caso della misura di Lebesgue su $\mathbb{R}$ e nel 1982 i matematici polacchi Krzysztof Ciesielski e Andrzej Pelc diedero una generalizzazione al caso degli spazi euclidei n-dimensionali.

La risposta è che la misura di Lebesgue ammette estensioni invarianti, ma non ammette un'estensione invariante massimale. Tale risulta è la conseguenza di un teorema che dimostra l'esistenza di una famiglia numerabile $\{X_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ di sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ tali che

1. $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} X_k = \mathbb{R}$
2. $X_n \cap X_m = \emptyset$, per ogni $n, m \in \mathbb{N}$ tali che $n \neq m$.
3. Per ogni $n \in \mathbb{N}$, se m' è un'estensione invariante per traslazioni della misura di Lebesgue sulla σ-algebra $\mathcal{E}'$ e $X_n \notin \mathcal{E}'$ allora esiste un'estensione invariante m'' della misura m' su una σ-algebra $\mathcal{E}'' \supset \mathcal{E}'$ tale che $X_k \in \mathcal{E}''$.
4. Per ogni $k \in \mathbb{N}$, se X_k appartiene ad una σ-algebra su cui è definita un'estensione invariante $\bar{m}$ della misura di Lebesgue, allora $\bar{m}(X_k) = 0$.

Diamo dei richiami teorici della teoria dei gruppi per utilizzare un formalismo più generale sui risultati, per ritornare infine al caso dello spazio di misura $(\mathbb{R}, \mathcal{L}, m)$ e del gruppo delle traslazioni T, sottogruppo di tutte le trasformazioni isometriche di $\mathbb{R}$. Inoltre per rendere più immediata la dimostrazione del teorema principale assumeremo che valga l'ipotesi del continuo, ovvero che la cardinalità dell'insieme dei numeri reali sia $\aleph_1$.

Definizione 3.1. *Sia G un gruppo e X un insieme. Si dice una **G-azione** su X una funzione:*

$$G \times X \to X$$

$$(g, a) \mapsto g \cdot a$$

tale che valgono le seguenti condizioni:

1. $1_G \cdot x = x$, *per ogni* $x \in X$

2. $g \cdot (g' \cdot x) = (gg') \cdot x$, *per ogni* $g, g' \in G$ *e per ogni* $x \in X$.

Esempio. Sia $T = \{t_v | v \in \mathbb{R}\}$ il gruppo delle traslazioni e $X = \mathbb{R}$, allora la T-azione su $\mathbb{R}$ è la funzione $T \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita come

$$(t_v, x) \mapsto t_v \cdot x = t_v(x) = x + v$$

con $v \in \mathbb{R}$; infatti valgono le seguenti proprietà:

1. $t_0(x) = x + 0 = x$, per ogni $x \in \mathbb{R}$.

2. $t_{v'}(t_v(x)) = (x + v) + v' = x + (v' + v) = t_{v'+v}(x) = (t_{v'}t_v)(x)$.

Definizione 3.2. *Sia* X *un insieme e sia* $x \in X$, *si dice* ***orbita*** *di* x *(rispetto alla G-azione) e si indica con* $O_G(x)$, *l'insieme*

$$O_G(x) = \{g \cdot x | \ g \in G\}.$$

Esempio. Se T è il gruppo delle traslazioni su $\mathbb{R}$ e $x \in \mathbb{R}$,

$$O_T(x) = \{x + v | v \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$$

Definizione 3.3. *Sia* $x \in X$ *e sia* G *un gruppo. Si dice* ***stabilizzatore*** *di* x *e viene indicato con* G_x, *il sottogruppo di* G *tale che*

$$G_x = \{g \in G | \ g \cdot x = x\}.$$

Esempio. Se T è il gruppo delle traslazioni su $\mathbb{R}$ e $x \in \mathbb{R}$, $T_x = \{t_0\}$.

Definizione 3.4. *Una G-azione su un insieme X si dice* ***libera*** *se gli stabilizzatori sono tutti banali ovvero per ogni $g \in G$ tale che $g \neq 1_G$ e per ogni $x \in X$ si ha $g \cdot x \neq x$ oppure, equivalentemente, se per ogni g e h elementi distinti di G e per ogni $x \in X$ si ha $g \cdot x \neq h \cdot x$.*

Esempio. La T-azione su $\mathbb{R}$ è libera. Per ogni $t_v, t_{v'} \in T$ con $v \neq v'$ si ha per ogni $x \in \mathbb{R}$ che

$$t_{v'}(x) = x + v' \neq x + v = t_v(x).$$

Definizione 3.5. *Una G-azione su un insieme X si dice* ***transitiva*** *se esiste un'unica orbita ovvero per ogni $x, y \in X$, esiste un $g \in G$ tale che $y = g \cdot x$.*

Esempio. La T-azione su $\mathbb{R}$ è transitiva.
Per ogni $x, y \in \mathbb{R}$, esiste un $t_{y-x} \in T$ è tale che $y = (y - x) + x = t_{y-x}(x)$.

Sia X un insieme e indichiamo con $Sym(X)$ l'insieme di tutte le biezioni di X in se stesso. Allora $(Sym(X), \circ)$ è un gruppo rispetto all'operazione di composizione chiamato **gruppo simmetrico**. Se X è un insieme finito e contiene almeno 3 elementi distinti, si ha

$$|Sym(X)| = |X|! > |X|.$$

Se X è infinito allora

$$|Sym(X)| = 2^{|X|} > |X|.$$

Ogni sottogruppo G di $Sym(X)$ è detto un gruppo di trasformazioni su X. Diremo che la coppia (X, G) è uno spazio con un gruppo di trasformazioni se G è un sottogruppo di $Sym(X)$.

Definizione 3.6. *Sia G un gruppo di trasformazioni su X e sia $\mathcal{A}$ una σ-algebra di sottoinsiemi di X. Diremo che $\mathcal{A}$ è* ***G-invariante*** *se per ogni $g \in G$ e per ogni $A \in \mathcal{A}$ si ha*

$$g(A) := \{g \cdot a |\, a \in A\} \in \mathcal{A}.$$

Definizione 3.7. *Diremo che una misura μ su X è **G-invariante** se $dom(\mu) = \mathcal{A}$ è una σ-algebra G-invariante e per ogni $g \in G$ e per ogni $A \in \mathcal{A}$ si ha*

$$\mu(g(A)) = \mu(A).$$

Definizione 3.8. *Sia (X, G) la coppia formata da un insieme X e il gruppo delle trasformazioni G. Sia μ una misura G-invariante su una σ-algebra $\mathcal{A}$. Si definisce una **estensione G-invariante** $\bar{\mu}$ su una σ-algebra $\mathcal{A}'$ una misura che soddisfa le seguenti condizioni:*

1. $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}'$
2. $\bar{\mu}'|_{\mathcal{A}'} = \mu$
3. *Se* $A \in \mathcal{A}'$ *e* $g \in G$ *allora* $g(A) \in \mathcal{A}'$.
4. *Se* $A \in \mathcal{A}'$ *e* $g \in G$ *allora* $\bar{\mu}'(g(A)) = \bar{\mu}'(A)$.

Definizione 3.9. *Sia E un sottoinsieme di X e sia G un gruppo di trasformazioni. E si dice **G-assolutamente trascurabile** se per ogni misura μ G-invariante σ-finita su X esiste una sua estensione $\bar{\mu}$ G-invariante tale che*

1. $E \in dom(\bar{\mu})$
2. $\bar{\mu}(E) = 0$.

Definizione 3.10. *Sia X un insieme, si dice un **σ-ideale** su X una collezione $\mathcal{I}$ di sottoinsiemi di X tale che*

1. *Se* $A \subset B$ *e* $B \in \mathcal{I}$ *allora* $A \in \mathcal{I}$.
2. *Se* $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *è una famiglia di insiemi* $A_n \in \mathcal{I}$ *per ogni* $n \in \mathbb{N}$, *allora* $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{I}$

Si noti che dalla 1. *segue che* $\emptyset \in \mathcal{I}$

Definizione 3.11 (Misura interna)**.** *Sia X un insieme, una misura **interna** è una funzione*

$$\mu_* : \mathcal{P}(X) \longrightarrow [0, +\infty]$$

definita su tutti i sottoinsiemi di un insieme X, che soddisfa le seguenti condizioni:

1. $\mu_*(\emptyset) = 0$.

2. *Superadditività: Per ogni $A, B \subseteq X$ tali che $A \cap B = \emptyset$ si ha*

$$\mu_*(A \cup B) \geq \mu_*(A) + \mu_*(B).$$

3. *Per ogni successione $\{A_i\}_{i\geq 1}$ tale che $A_i \supseteq A_{i+1}$ per ogni $i \geq 1$ e $\mu_*(A_1) < +\infty$ si ha*

$$\mu_*\Big(\bigcap_{i=1}^{+\infty} A_i\Big) = \lim_{i\to\infty} \mu_*(A_i).$$

Proposizione 3.1 (Misura interna indotta da una misura)**.** *Sia X un insieme, $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ una σ-algebra e μ una misura. Allora se per ogni sottoinsieme A di X poniamo*

$$\mu_*(A) = \sup\{\mu(B)|\ B \in \mathcal{A} \text{ e } B \subseteq A\},$$

μ_* è una misura interna su X.

Il metodo di Marczewski di estensione delle misure σ-finite.

Sia X un insieme e μ sia una misura σ-finita non nulla su una σ-algebra $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ e sia $\mathcal{I}$ un σ-ideale di sottoinsiemi di X tale che

$$\text{per ogni } I \in \mathcal{I},\ \mu_*(I) = 0$$

dove μ_* è la misura interna associata a μ. Consideriamo la σ-algebra $\mathcal{A}'$ di sottoinsiemi di X, generata da $\mathcal{A} \cup \mathcal{I}$, ovvero $\mathcal{A}' = \sigma(\mathcal{A} \cup \mathcal{I})$. Allora un insieme

$E \in \mathcal{A}'$ può essere scritto come

$$E = (A \cup I_1) \setminus I_2$$

dove $A \in \mathcal{A}$ e $I_1, I_2 \in \mathcal{I}$[1]

Poniamo

$$\mu'(E) = \mu'((A \cup I_1) \setminus I_2) = \mu(A)$$

Si può facilmente vedere che μ' è ben definita su $\mathcal{A}'$ dato che la sua definizione non dipende dalla rappresentazione di E e pertanto μ' è un'estensione di μ (dato che ogni $A \in \mathcal{A}$ è scrivibile nella forma $(A \cup \emptyset) \setminus \emptyset$). Inoltre dalla definizione di μ' segue che

$$\text{per ogni } I \in \mathcal{I},\ \mu'(I) = 0.$$

Chiaramente μ' è un estensione propria di μ se e solo se esiste un insieme non misurabile rispetto a μ che appartiene al σ-ideale $\mathcal{I}$. Se abbiamo un particolare insieme $I \subset X$ non appartenente a $\mathcal{A}$ tale che $\mu_*(I) = 0$ possiamo estendere la misura μ a una misura μ' tale che $\mu'(I) = 0$. Infatti basta considerare il σ-ideale $\mathcal{I}$ generato dalla famiglia di un solo elemento I ovvero

$$\mathcal{I} = \{J |\ J \subset I\}$$

e applicare il metodo di Marczewski.

Osservazione 3.1. *I singoletti $\{x\}$ di $\mathbb{R}$ sono T-assolutamente trascurabili. Prendiamo infatti una misura σ-finita μ invariante per traslazione definita su una σ-algebra $\mathcal{A}$ di sottoinsiemi di $\mathbb{R}$. Se esiste un'estensione μ' di μ invariante per traslazioni che contiene i singoletti, allora i singoletti devono avere misura μ' nulla. Infatti, per la σ-additività di μ, esiste una famiglia $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ di*

[1] È immediato verificare che la famiglia degli insiemi siffatti è una sigma-algebra contenuta in $\sigma(\mathcal{A} \cup \mathcal{I})$, e pertanto coincide con essa.

insiemi in $\mathcal{A}$ tale che $\mu(X_n)$ è finita per ogni $n \in \mathbb{N}$ e che $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n = \mathbb{R}$. Ma ogni $X_n = \bigcup_{x\in X_n}\{x\}$ è l'unione dei suoi singoletti $\{x\}$. Almeno un $X_{\overline{n}}$ deve essere infinito, pertanto $\mu'(\{x\})$ deve essere 0 per ogni $x \in X_{\overline{n}}$.

Per concludere, basta notare che possiamo sempre estendere μ a una misura μ' che misuri tutti i singoletti: basta applicare la costruzione di Marczewski a $\mathcal{A}$ e al σ-ideale dei sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ numerabili.

Riportiamo ora un lemma senza dimostrazione, per la cui dimostrazione rimandiamo al libro "Transformation group and invariant measure-Set theoretical aspects" di A. B. Kharazisvili.

Lemma 3.1. *Sia (X, G) l'insieme X con un gruppo di trasformazioni G e sia $E \subset X$. Se per ogni famiglia numerabile $\{t_n | n < \omega\}$ di elementi di G esiste una famiglia al più numerabile $\{h_m | m < \omega\}$ sempre di G tale che:*

$$\bigcap_{m<\omega} h_m\Big(\bigcup_{n<\omega} t_n(E)\Big) = \emptyset,$$

allora E è G-assolutamente trascurabile.

Passiamo ora a considerare il caso in cui $X = \mathbb{R}$ e in cui $G = T$, dove T è il gruppo delle traslazioni di $\mathbb{R}$.

Lemma 3.2. *Sia $(\mathbb{R}, T)$ la coppia dove $\mathbb{R}$ è l'insieme dei reali e T è il gruppo delle traslazioni (le quali agiscono transitivamente e liberamente su $\mathbb{R}$) e supponiamo che valga l'ipotesi del continuo. Allora esiste una successione $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ di sottoinsiemi assolutamente trascurabili di $\mathbb{R}$ tale che $\mathbb{R} \setminus \{0\} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} X_k$.*

Dimostrazione. Sappiamo che esiste un isomorfismo tra il gruppo additivo su $\mathbb{R}$ e T (quello che manda la traslazione $(-)+x$ in x). Identifichiamo dunque T con il primo tramite questo isomorfismo. Enumeriamo gli elementi di T in una ω_1-successione $(t_\xi)_{\xi<\omega_1}$ e sia T_ξ il sottogruppo generato dalla famiglia parziale $(t_\zeta)_{\zeta<\xi}$. Ovviamente abbiamo che

1. $\xi < \eta \Rightarrow T_\xi \subseteq T_\eta$

2. $\bigcup_{\xi<\omega_1} T_\xi = \mathbb{R}$.

Costruiamo una famiglia di $(Y_\xi)_{\xi<\omega_1}$ di sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ ponendo

$$Y_\xi = T_{\xi+1} \setminus T_\xi$$

Valgono le seguenti:

1. per ogni $\xi, \zeta < \omega_1$ tali che $\xi \neq \zeta$ si ha $Y_\xi \cap Y_\zeta = \emptyset$.

   Infatti, assumendo senza ledere la generalità che $\xi < \zeta$, se $x \in Y_\xi$, e $x' \in Y_\zeta$, si ha che $x \in T_{\xi+1} \subseteq T_\zeta$, mentre $x' \notin T_\zeta$.

2. $\bigcup_{\xi<\omega_1} Y_\xi = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

   Se considero un $y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ allora esiste $\bar{\xi}$ tale che $y \in T_{\bar{\xi}+1}$ e $y \notin T_{\bar{\xi}}$, pertanto $y \in Y_{\bar{\xi}}$. Osserviamo inoltre che per ogni $\xi < \omega_1$ si ha $0 \in T_\xi$, da cui segue che $0 \notin Y_{\bar{\xi}}$.

3. per ogni $\xi < \omega_1$, $Y_\xi = \emptyset$ oppure $|Y_\xi| = \aleph_0$. Questo perché $|T_\xi| = \aleph_0$ per ogni $\xi < \omega_1$ e pertanto abbiamo due casi:

   (a) Se $T_{\xi+1} = T_\xi \Rightarrow Y_\xi = \emptyset$

   (b) Se $T_{\xi+1} \neq T_\xi \Rightarrow Y_\xi = \aleph_0$, dato che in tal caso $< t_\xi > \setminus\{0\} \subseteq T_{\xi+1} \setminus T_\xi$.

4. L'insieme $\mathcal{Y} := \{\xi \leq \omega_1 | \, Y_\xi \neq \emptyset\}$ ha cardinalità $\aleph_1$; se così non fosse un'unione numerabile di numerabili avrebbe la cardinalità del continuo, assurdo.

5. Per ogni $\xi < \omega_1$, Y_ξ è un sottoinsieme T_ξ-invariante di X, cioè $T_\xi(Y_\xi) = Y_\xi$

(a) ($\subseteq$) Sia $a \in T_\xi$, $y \in Y_\xi = T_{\xi+1} \setminus T_\xi$. Dato che $a \in T_{\xi+1}$ allora $y + a \in T_{\xi+1}$. Per assurdo supponiamo che $y + a \in T_\xi$ allora $(y + a) - a \in T_\xi$ e pertanto avremmo che $y \in T_\xi$, contro l'ipotesi.

(b) ($\supseteq$) Prendiamo un $y \in Y_\xi$; dato che $0 \in T_\xi$, allora $y = y + 0 \in T_\xi(Y_\xi)$

Dalla 3., per ogni $\xi \in \mathcal{Y}$, Y_ξ si può scrivere come $\{x_k^\xi | \, k \in \mathbb{N}\}$ con $x_k^\xi \neq x_h^\xi$ per ogni $h \neq k$. Poniamo $X_k := \{x_k^\xi | \xi \in \mathcal{Y}\}$ ed è ovvio che $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} X_k = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Verifichiamo che per ogni $k \in \mathbb{N}$, X_k è T-assolutamente trascurabile. Sia Γ un sottogruppo di T che sia al più numerabile. Allora esiste un numero ordinale $\xi < \omega_1$ tale che $\Gamma < T_\xi$ e $\Gamma \neq T_\xi$.

Grazie al punto 5. e grazie al fatto che T_ξ agisce liberamente e transitivamente su se stesso visto come $\bigcup_{\eta < \xi} Y_\eta$, abbiamo che

$$\bigcap_{t \in T_\xi} t(\Gamma(X_k)) = \emptyset.$$

Per il lemma precedente per ogni $k \in \mathbb{N}$, X_k è dunque T-assolutamente trascurabile. □

Come corollario del lemma 3.2 otteniamo il risultato che cercavamo ovvero il seguente teorema.

Teorema 3.1. *Sia m la misura di Lebesgue sulla σ-algebra $\mathcal{L}$ dei sottoinsiemi Lebesgue-misurabili di $\mathbb{R}$. Allora m ammette estensioni invarianti per traslazioni, ma non ammette estensioni massimali.*

Dimostrazione. Grazie al lemma precedente esiste una successione numerabile $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$ di sottoinsiemi T-assolutamente trascurabili di $\mathbb{R}$ a due a due disgiunti tali che $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} X_k = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Si noti innanzitutto che almeno un X_k non appartiene ad $\mathcal{L}$, altrimenti si avrebbe che

$$m(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} X_k) = 0 = +\infty = m(\mathbb{R} \setminus \{0\})$$

1) Esistenza estensioni invarianti per traslazioni di m.

Per quanto detto, almeno un X_k non è in $\mathcal{L}$. Per un tale X_k esiste un estensione invariante per traslazioni $\bar{m}_k : \mathcal{A}_k \longrightarrow [0, +\infty]$, con $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{A}_k$, tale che

1. $X_k \in \mathcal{A}_k$
2. $\bar{m}_k(X_k) = 0$

2) m non ammette estensioni massimali.

Se per assurdo esistesse un'estensione massimale $\bar{m} : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$, allora, per il fatto che gli X_k sono T-assolutamente trascurabili, essa necessariamente dovrebbe essere tale che

1. $X_k \in \mathcal{A}$, per ogni $k \in \mathbb{N}$
2. $\bar{m}(X_k) = 0$, per ogni $k \in \mathbb{N}$

Dato che $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} X_k = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, allora

$$\bar{m}(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} X_k) = 0 = +\infty = \bar{m}(\mathbb{R})$$

pervenendo ad un assurdo. $\square$

Bibliografia

[1] K. Ciesielski, How good is Lebesgue measure? The mathematical intelliger vol. 11, no. 2, pp 54-58, 1989.

[2] V. Yegnanarayanan, Graph Theory to Pure Mathematics: Some Illustrative Examples. Resonance, pp 50-59. January 2005.

[3] A. B. Kharazisvili, Nonmeasurable set and function, Elservier, Amsterdam, 2004.

[4] A. B. Kharazisvili, Transformation groups and invariant measure. Set theoretical aspect, World Scientific, Singapore, New Jersey, London, Hong Kong, 1998.

[5] A. B. Kharazisvili, Topics in measure theory and real analysis. Atlantic Press, World Scientific, Amsterdam-Paris, 2009.

[6] A. B. Karazisvili, On Sierpiński's problem concerning strict extendibility of an invariant measure. Soviet Math. Dokl, Vol. 18, pp. 71-74, 1977, No 1. American Mahtematical Society, 1977.

[7] T. Jech, Set Theory. The Third Millennium Edition, revised and expanded, Springer, 2002.

[8] S. Maschio, Note di teoria della misura. `http://www-dimat.unipv.it/pier/teaching/disp-maschio`

[9] S. Maschio, Teoria della misura e teoria degli insiemi.
`http://selp.apnetwork.it/sito/userfiles/alessio/file/seminari/20110325/siena-maschio.pdf`

[10] L. Fontanella, L'indipendenza dell'assioma di scelta dalla teoria degli insiemi di Zermelo Fraenkel. Roma, 2006.
`https://lacl.fr/ lfontanella/papers/tesilaurea.pdf`

[11] M. Di Nasso. Dispense di elementi di teoria degli insiemi.
`http://people.dm.unipi.it/dinasso/ETI/dispensa-05ss.pdf`

[12] G. Folland, Real analysis: modern techniques and their applications, John Wiley Sons, 1984.

[13] A. Marson. Appunti del corso di Analisi Reale. Padova, 2019.

[14] T. Vargiolu. Teoria della misura. 2003.
https://www.math.unipd.it/ vargiolu/CalPro/TeoriaDellaMisura.pdf