

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA



FACOLTA' DI INGEGNERIA

DIPARTIMENTO DI COSTRUZIONI E TRASPORTI
CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA CIVILE

TESI DI LAUREA

**IMPLEMENTAZIONE DI UN MODELLO
TERMO-ELASTO-PLASTICO
IN UN CODICE AGLI ELEMENTI FINITI
PER MEZZI POROSI MULTIFASE**

RELATORE: DOTT. ING. LORENZO SANAVIA

CORRELATORE: DOTT. ING. LYESSE LALOU

CORRELATORE: PHD STUDENT BERTRAND FRANÇOIS

CONTRORELATORE: DOTT. ING. SIMONETTA COLA

LAUREANDO: LORIS LUISON

ANNO ACCADEMICO 2004-2005

“La teoria è quando si sa tutto e niente funziona.
La pratica è quando tutto funziona e nessuno sa il perché.

Noi abbiamo messo insieme la teoria e la pratica:
non c'è niente che funzioni... e nessuno sa il perché!”

Albert Einstein

“Apprendere e non meditare è vano.
Riflettere senza studio è pericoloso.”

Confucio

“Anche un orologio fermo segna
l'ora giusta due volte al giorno.”

Herma Hesse

INDICE

PREMESSA	1
 CAPITOLO 1	 3
MODELLO MATEMATICO	3
1.1 INTRODUZIONE.....	3
1.2 EQUAZIONI DI EQUILIBRIO MACROSCOPICO	6
1.2.1 EQUAZIONI LINEARI DI EQUILIBRIO DELLA QUANTITÀ DI MOTO.....	8
1.2.2 EQUAZIONI DI EQUILIBRIO DI MASSA	9
1.2.3 EQUAZIONI DI BILANCIO ENERGETICO	10
1.3 EQUAZIONI COSTITUTIVE	10
1.3.1 CONDIZIONI INIZIALI E AL CONTORNO	13
1.4 FORMULAZIONE AGLI ELEMENTI FINITI	14
1.4.1 ALGORITMO PER L'ELASTO-PLASTICITÀ.....	16
1.4.2 ALGORITMO DI RETURN MAPPING PER IL MODELLO DI DRUCKER-PRAGER CON HARDENING ISOTROPO LINEARE E SOLUZIONE D'APICE	17
1.4.3 ALGORITMO DELLA MATRICE DEI MODULO TANGENTE CON LA SOLUZIONE D'APICE PER IL MODELLO DI DRUCKER-PRAGER CON INCRUDIMENTO ISOTROPO LINEARE.....	19
1.5 RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI	21

CAPITOLO 2	25
IL METODO DEGLI ELEMENTI FINITI	25
2.1 INTRODUZIONE E GENERALITÀ	25
2.1.1 FORMULAZIONE DELLE CARATTERISTICHE DELL'ELEMENTO FINITO	26
2.1.2 BREVI CENNI SUI METODI DI CALCOLO DELLA MATRICE DI RIGIDEZZA.	29
IL METODO DIRETTO	29
IL METODO VARIAZIONALE	30
2.1.3 ASSEMBLAGGIO DELLA MATRICE DI RIGIDEZZA	31
2.1.4 CONVERGENZA DEL METODO DEGLI ELEMENTI FINITI	31
2.1.5 CONSIDERAZIONI FINALI SUL METODO AGLI ELEMENTI FINITI	32
CAPITOLO 3	34
IL CODICE COMES-GEO	34
3.1 CARATTERISTICHE GENERALI	34
3.2 RICHIAMI DI MECCANICA DEI MEZZI POROSI SATURI E PARZIALMENTE SATURI	34
3.3 SUDDIVISIONE DEL VOLUME IN ELEMENTI FINITI	38
3.4 IL METODO DI NEWTON-RAPHSON	41
3.4.1 INTEGRAZIONE NUMERICA, METODO DI GAUSS	42
3.4.2 DATI IN INGRESSO	43

CAPITOLO 4	44
LEGGE COSTITUTIVA TERMO-ELASTO-PLASTICA	44
4.1 EFFETTI TERMICI INDOTTI	44
4.1.1 RISPOSTA DEI TERRENI AI CICLI DI RISCALDAMENTO E RAFFREDDAMENTO	45
4.1.2 VARIAZIONE DELLA PRESSIONE DI PRECONSOLIDAZIONE RISPETTO ALLA TEMPERATURA	47
4.1.3 VARIAZIONE DELL'ANGOLO DI ATTRITO RISPETTO ALLA TEMPERATURA	47
4.2 MODELLO COSTITUTIVO PER IL COMPORTAMENTO TERMO-ELASTO-PLASTICO DEI TERRENI	48
4.2.1 TERMO-ELASTICITÀ	48
4.2.2 TERMO-PLASTICITÀ.....	49
4.2.2.1 <i>Meccanismo termo-elasto-plastico isotropo</i>	51
4.2.2.2 <i>Meccanismo termo-plastico deviatorico</i>	53
4.2.2.3 <i>Accoppiamento dei due meccanismi</i>	54
4.3 RISULTATI NUMERICI IN LETTERATURA	55
4.3.1 CONSOLIDAZIONE ISOTROPA DOPO RISCALDAMENTO.....	55
4.3.2 CONSOLIDAZIONE ISOTROPA IN SEGUITO A CICLI DI RISCALDAMENTO E RAFFREDDAMENTO.....	56
4.3.3 TEST SULL'ARGILLA NATURALE (BOOMCLAY) CONDOTTO DA BALDI E AL. (1991)	56
4.4 RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI	58
CAPITOLO 5	61
VALIDAZIONE NUMERICA	61
5.1 PREMESSA	61

5.2	VALIDAZIONE DEL CODICE DI LOSANNA.....	61
5.2.1	TEST ISOTERMI.....	61
5.2.1.1	<i>Compressione isotropa.....</i>	<i>61</i>
5.2.1.2	<i>Compressione triassiale svolta su di un provino normal consolidato</i>	<i>63</i>
5.2.2	TEST NON-ISOTERMI.....	64
5.2.2.1	<i>Meccanismo isotropo</i>	<i>64</i>
5.2.2.2	<i>Meccanismo deviatorico</i>	<i>66</i>
5.2.3	CONCLUSIONI.....	69
5.3	CONVALIDA DELLA SUBROUTINE THERMEC IN COMES-GEO.....	70
5.3.1	PROVE NON-ISOTERME IN REGIME ELASTICO LINEARE E NON LINEARE.....	70
5.3.1.1	<i>Test non-isoterme in regime elastico lineare.....</i>	<i>70</i>
5.3.1.2	<i>Test non-isoterme in regime elastico non-lineare</i>	<i>77</i>
5.3.2	PROVA ISOTERMA IN REGIME PLASTICO.....	86
5.3.3	PROVA NON-ISOTERMA IN REGIME PLASTICO	90
5.4	CONCLUSIONI.....	94
 CAPITOLO 6.....		95
 BOUNDARY VALUE PROBLEM: GALLERIA DI STOCCAGGIO SCORIE RADIOATTIVE.....		95
6.1	INTRODUZIONE.....	95
6.2	COMPORAMENTO TERMICO	96
6.2.1	DEFINIZIONE DELLA MESH	97
6.2.2	DEFINIZIONE DEI VINCOLI	100
6.2.3	DEFINIZIONE DEL TERRENO	101
6.2.4	DEFINIZIONE DELLA SORGENTE DI CALORE	102

6.2.5	PARAMETRI DEL MATERIALE	105
6.3	STATO INIZIALE	108
6.3.1	INTRODUZIONE.....	108
6.3.2	RUN_00	108
6.3.3	RUN_01	110
6.3.4	RUN_02	111
6.3.5	RUN_03	113
6.3.6	RUN_04	114
6.3.7	RUN_05	115
6.3.8	CONDIZIONI FINALI	118
6.4	CASE 1.....	119
6.4.1	CARICO TERMICO	119
6.4.2	TEMPI DI ANALISI	120
6.4.3	RISULTATI.....	121
6.5	CASE 2.....	128
6.5.1	CARICO TERMICO	128
6.5.2	TEMPI DI ANALISI	129
6.5.3	RISULTATI.....	130

PREMESSA

Negli ultimi anni si è riscontrato uno aumento sempre maggiore delle problematiche inerenti il comportamento termo-meccanico dei terreni; tale aumento è principalmente dovuto alla moltitudine di nuovi tipi di applicazioni tecnologiche:

- eliminazione di scorie nucleari ad alta attività, (Laloui & Modaressi, 2002);
- accumulazione termica (Burger e al., 1985);
- strutture geotermiche (Laloui e al., 2003);
- attività di perforazione e iniezione per la produzione di petrolio;
- cavi dell'alta tensione interrati (Mitchell e al., 1982);

poi ancora:

- escursioni termiche stagionali o giornaliere;
- sottofondi stradali;
- opere di fondazione delle fornaci;

per non citare infine l'alterazione dei provini a causa di cambiamenti di temperatura durante il campionamento, lo stoccaggio e i test.

Scopo della tesi è stato di integrare il codice **COMES-GEO** (proprietà dell'Università di Padova), che applica il metodo degli elementi finiti allo studio dei mezzi porosi multifase, con una legge thermo-plastica, adatta principalmente per i terreni a grana fine (i.e. argille), sviluppata e implementata dal Dr Lyesse Laloui, L., docente dell'Università di Losanna, (**EPFL – Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne**), dal Dr Cane Cekerevac e dal Dr Bertrand François. L'integrazione è stata effettuata adeguando una subroutine, denominata THERMEC, in origine sorta per un codice di integrazione numerica basata sulla teoria Cam-Clay.

CAPITOLO 1

MODELLO MATEMATICO

1.1 INTRODUZIONE

Negli ultimi anni, è stato osservato l'aumento d'interesse nell'analisi termo-idromeccaniche di materiali saturi e parzialmente saturi, a causa della relativa ampia gamma di applicazioni in ingegneria. Gli esempi tipici appartengono all'ambito geomeccanico, dove alcuni stimolanti problemi sono di forte interesse per la comunità di ricerca. Un punto nello sviluppo di un modello fisico, matematico e numerico adatto per la simulazione dei problemi geomeccanici di ingegneria è presentato in questo lavoro, in cui sono considerate le applicazioni a situazioni di collasso dovuto alla localizzazione di deformazioni nelle prove di compressibilità in stato piano di deformazione.

In questo articolo ci occupiamo di un modello matematico agli elementi finiti per geomateriali multifase elastoplastici in condizioni non isoterme. A questo scopo, l'elastoplasticità classica è stata introdotta nel codice F.E.M. geometricamente lineare COMES-GEO [1]. Il materiale multifase è modellato come un mezzo poroso e deformabile dove si considerano i flussi di calore, dell'acqua e del gas [1],[2],[3], come ricordato nella sezione 1.2. In particolare, la fase gassosa è modellata come un gas ideale composto di aria secca e di vapore acqueo, considerati specie miscibili. Sono considerati i cambiamenti di fase dell'acqua (evaporazione-condensazione, adsorbimento-desorbimento) e lo scambio di calore attraverso conduzione e convezione, come pure lo scambio di calore latente. Le variabili indipendenti sono gli spostamenti, la pressione capillare e del gas e la temperatura. Le equazioni governanti scritte a livello macroscopico nella sezione 1.2 si basano su procedure di averaging, "mediazione", (teoria ibrida della miscela), seguendo il modello Termo-Idro-Meccanico generale sviluppato in [1]. Il comportamento elastoplastico dello scheletro solido è assunto omogeneo ed isotropo; le tensioni efficaci sono limitate dalla superficie di snervamento di Drucker-Prager, indipendente dalla temperatura per semplicità, con incrudimento isotropo lineare e flusso plastico non associato, come descritto nella sezione 1.3.

Per tale superficie è stata considerata una particolare formulazione per la zona d'apice. Le equazioni di equilibrio macroscopico sono discretizzate nello spazio e nel tempo all'interno del F.E.M. nella sezione 1.4. In particolare, è seguita la procedura di Galerkin per la discretizzazione nello spazio, mentre il Metodo Trapezoidale Generalizzato è usato per l'integrazione nel tempo. Sono supposte piccole deformazioni e condizioni di carico quasistatico. Nella sezione 5 sono presentati i risultati numerici di una prova di compressibilità biassiale in cui la localizzazione di deformazioni si sviluppa in campioni inizialmente saturi di sabbia densa, mediodensa e sciolta e di geomateriale isocoro. La pressione di vapore risulta essere inferiore alla pressione di saturazione dell'acqua (cavitazione)¹ in corrispondenza delle bande di taglio nel caso di sabbie dense (materiale dilatante) in condizioni non drenate, come osservato sperimentalmente in [4] e [5]. Questo invece non si riscontra quando si assumono parametri di sabbia sciolta (materiale contraente) ed materiale granulare con flusso plastico isocoro. Nell'ultimo esempio, è simulata l'evaporazione dell'acqua interstiziale nel dominio e è analizzata la localizzazione di deformazioni indotte da carico termico. Questi esempi sono stati simulati per dare risalto all'importanza di un modello multifase non-isotermico per la simulazione del comportamento idro-termo-meccanico di terreni saturi e parzialmente saturi.

Il modello attuale migliora gli approcci isotermici monofase e i modelli di flusso isotermico bifase sviluppati in [6] e [7] per studiare la cavitazione osservata durante la localizzazione in geomateriali densi, come spiegato alla fine della sezione 5. La presente relazione segue [8], dove i modelli semplificati suddetti sono discussi in modo critico ed analizza la localizzazione di deformazioni all'interno di un approccio trifasico ([9] e [10]) che considera circostanze non isoterme (alcuni risultati numerici preliminari sulla localizzazione di deformazioni in geomateriali non-isotermici trifasici sono stati presentati dentro [11]).

Per quanto riguarda le proprietà di regolarizzazione del modello multifase di localizzazione, dovuto alla presenza di un operatore Laplaciano nell'equazione di equilibrio di massa dei liquidi quando viene utilizzata la legge del Darcy, il lettore interessato può vedere

¹ La cavitazione (rapido cambiamento di fase a temperatura ambiente) può accadere quando il valore assoluto della pressione dell'acqua è minore o uguale alla pressione di saturazione alla temperatura considerata (trascurando la tensione superficiale all'interfaccia delle bolle di vapore che si generano). Per la condizione di equilibrio termodinamico, la pressione di vapore all'interfaccia fra materiale poroso saturo e parzialmente saturo è uguale, a $T = 20^\circ\text{C}$, al valore di saturazione di 2338,8 Pa (cioè 98986,2 Pa con riferimento alla pressione atmosferica).

[6] e [12]. La scala di lunghezza interna, l_w , contenuta nel modello è presentata in [13]. Ulteriori funzioni interessanti dell'efficacia di l_w sono presenti in [14] e [15]. Tuttavia, se si aspira all'indipendenza dalla mesh in tutte le situazioni, una certa specie di regolarizzazione dovrebbe essere introdotta come, per esempio, dipendenza dal gradiente [14]. Qui si sottolinea il fatto che per tutti gli esempi numerici precedentemente descritti un singolo modello THM può essere usato con successo ([15], [16]) ed in modo diretto.

Una revisione dei modelli termo-idro-meccanici non-isotermici va oltre lo scopo di questo articolo; il lettore interessato può trovarlo in [17] e [18].

1.2 EQUAZIONI DI EQUILIBRIO MACROSCOPICO

Il modello matematico completo necessario per simulare il comportamento transitorio termo-idro-meccanico di mezzi porosi completamente e parzialmente saturati è sviluppato in [1] e [3] utilizzando i processi di media (“averaging”, Hassanizadeh e Gray [19]-[21]). Il modello fisico di base è brevemente riassunto in questa sezione per ragione di completezza.

Il mezzo poroso parzialmente saturo è trattato come un sistema multifase composto da $\pi = 1, \dots, k$ costituenti, con i vuoti dello scheletro solido (s) riempiti di acqua (w) e gas (g). Quest’ultimo assunto come miscela ideale di due specie: aria secca (ga , gas non condensabile) e vapore acqueo (gw , gas condensabile). Usando operatori di media nello spazio definiti in un volume elementare rappresentativo R.E.V. (di volume $dv(\mathbf{x}, t)$ nella configurazione deformata, $B_t \subset \mathcal{R}^3$, vedi Fig. 1, dove \mathbf{x} è il vettore delle coordinate spaziali e t è il tempo attuale), le equazioni microscopiche vengono integrate sul R.E.V. e formano le equazioni macroscopiche dell'equilibrio [1], [3].

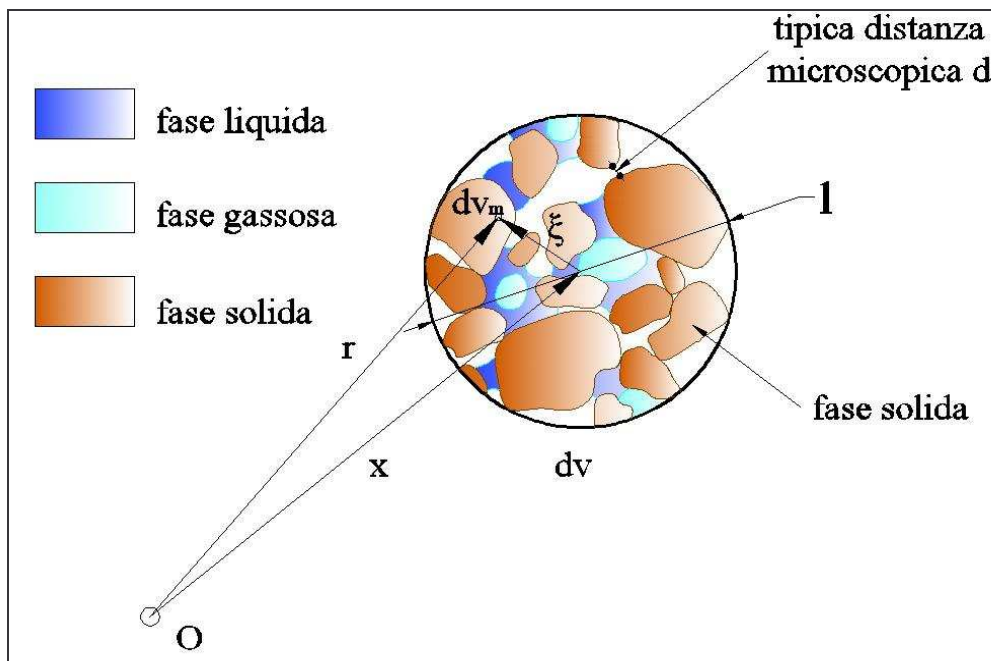


Fig. 1. Elemento rappresentativo di volume (R.E.V.) di un mezzo poroso composto da una fase solida e due fluide.

A livello macroscopico il mezzo poroso è modellato da un volume continuo sostitutivo B_t , con frontiera ∂B_t , che riempie l'intero dominio simultaneamente, mentre i liquidi reali ed il solido riempiono soltanto una parte del volume stesso. In questo continuo sostitutivo ogni costituente π ha una densità ridotta ottenuta attraverso la frazione di volume:

$$\eta^\pi(\mathbf{x}, t) = \frac{dv^\pi(\mathbf{x}, t)}{dv(\mathbf{x}, t)};$$

Nel modello generale [1] sono presi in considerazione:

- la forza inerziale;
- la conduzione di calore;
- la diffusione di vapore;
- la convezione di calore;
- il flusso dell'acqua (dovuto a gradienti di pressione o ad effetti di capillarità);
- i cambiamenti di fase dell'acqua (evaporazione e condensazione) all'interno dei pori..

Il solido è deformabile e non polare; i fluidi, il solido e i campi termici sono accoppiati. Tutti i liquidi sono in contatto con la fase solida. I costituenti sono assunti per essere isotropi, omogenei, immiscibili (tranne aria secca e vapore) e chimicamente non reagenti. Si suppone l'equilibrio termico locale fra la matrice solida, il gas e le fasi liquide, di modo che la temperatura è la stessa per tutti i costituenti. Lo stato del mezzo è descritta da:

p^c pressione capillare

p^g pressione del gas

T la temperatura assoluta

$\mathbf{u} = [u_x, u_y]$ spostamenti della matrice solida

Nelle zone parzialmente sature l'acqua è separata dal relativo vapore da un menisco concavo (acqua capillare). A causa della curvatura di questo menisco, l'equazione di equilibrio di assorbimento (vedi [22]) dà la relazione fra la pressione capillare $p^c(\mathbf{x}, t)$, la pressione del gas $p^g(\mathbf{x}, t)$, il t) ed la pressione dell'acqua $p^w(\mathbf{x}, t)$, [22]:

$$p^c = p^g - p^w$$

La pressione nei pori è definita positiva se di compressione per i fluidi, mentre la tensione è definita positiva se di trazione per la fase solida.

Inoltre, nella teoria multifase dei materiali è comune presupporre come riferimento il moto del solido e descrivere i liquidi in termini di moto relativo al solido. Ciò significa introdurre la velocità dei fluidi come relativa rispetto al solido. La velocità relativa dei fluidi $\mathbf{v}^{\pi s}(\mathbf{x}, t)$ (o velocità di diffusione) è data da:

$$\mathbf{v}^{\pi s}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{v}^{\pi}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{v}^s(\mathbf{x}, t) \quad \text{con } \pi = g, w$$

e sarà descritta dalla legge di Darcy.

Vengono ora ricapitolate le equazioni macroscopiche di equilibrio del modello implementato. Sono ottenute introducendo le seguenti ipotesi nel modello sviluppato in [1]: al livello microscopico, il mezzo poroso è supposto per essere costituito da componenti incompressibili di acqua e solido, mentre il gas è considerato comprimibile; il processo è considerato come quasistatico ed è sviluppato in una struttura geometricamente lineare.

1.2.1 Equazioni lineari di equilibrio della quantità di moto

L'equazione lineare di equilibrio della quantità di moto della miscela in termini di tensione totale di Cauchy $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t)$ assume la forma:

$$\text{div } \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{g} = 0$$

in cui $\rho(\mathbf{x}, t)$ è la densità della miscela:

$$\rho = [1 - n] \rho^s + n S_w \rho^s + n S_g \rho^g$$

dove $n(\mathbf{x}, t)$ è la porosità $S_w(\mathbf{x}, t)$ e $S_g(\mathbf{x}, t)$ sono rispettivamente il grado di saturazione del gas e dell'acqua. La tensione totale di Cauchy può essere scomposta seguendo il principio delle tensioni efficace:

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}' - [p - S_w p^c] \mathbf{1}$$

dove $\boldsymbol{\sigma}'(\mathbf{x}, t)$ è il tensore efficace modificato delle tensioni di Cauchy e $\mathbf{1}$ è il tensore identità di secondo grado. Questa forma che utilizza la saturazione come funzioni peso per le pressioni parziali è stata introdotta per la prima volta in [23] il una media volumetrica (vedi anche [24] e [25]) ed è termodinamicamente consistente ([22], [40] e recentemente anche [9]). La forma di Eq. (5) suppone il grano incompressibile (rispetto allo scheletro), che è ipotesi comune nella

meccanica di terreni. (per rappresentare il grano comprimibile, il coefficiente α di Biot dovrebbe comparire davanti alla pressione del solido; questo risulta importante nelle rocce e nel calcestruzzo).

1.2.2 Equazioni di equilibrio di massa

Le equazione di conservazione di massa per lo scheletro solido, l'acqua ed il vapore è:

$$\begin{aligned} & [\rho^w - \rho^{gw}] n \left[\frac{\partial S_w}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial S_w}{\partial p^c} \frac{\partial p^c}{\partial t} \right] + [\rho^w S_w + \rho^{gw} [I - S_w]] \operatorname{div} \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right) \\ & + [I - S_w] n \left[\frac{\partial \rho^{gw}}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial \rho^{gw}}{\partial p^c} \frac{\partial p^c}{\partial t} \right] \\ & - \operatorname{div} \left(\rho^g \frac{M_a M_w}{M_g^2} \mathbf{D}_g^{gw} \operatorname{grad} \left(\frac{\partial p^{gw}}{\partial p^c} \right) \right) - \operatorname{div} \left(\rho^w \frac{\mathbf{k} k^{rw}}{\mu^w} [\operatorname{grad}(p^g) - \operatorname{grad}(p^c) - \rho^w \mathbf{g}] \right) \\ & - \operatorname{div} \left(\rho^{gw} \frac{\mathbf{k} k^{rg}}{\mu^g} [\operatorname{grad}(p^g) - \rho^g \mathbf{g}] \right) - \beta_{swg} \frac{\partial T}{\partial t} = 0 \end{aligned}$$

dove, in particolare $\mathbf{k}(\mathbf{x}, t)$ è il tensore di permeabilità intrinseca, $k^{rw}(\mathbf{x}, t)$ la permeabilità relativa dell'acqua, $\mu^w(\mathbf{x}, t)$ la viscosità dell'acqua e $\beta_{swg} = \beta_s [I - n] [S_g \rho^g + S_w \rho^w]$. I flussi entranti e uscenti sono stati descritti usando la legge di Fick Eq. (13) per la diffusione del vapore nella fase gassosa e dalla legge di Darcy per il flusso d'acqua e gas.

Analogamente l'equazione di equilibrio di massa per l'aria secca è:

$$\begin{aligned} & - \rho^{ga} \left[\frac{\partial S_w}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial S_w}{\partial p^c} \frac{\partial p^c}{\partial t} \right] - \beta_s \rho^{ga} [I - n] [I - S_w] \frac{\partial T}{\partial t} + [I - S_w] \rho^{ga} \operatorname{div} \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right) \\ & + [I - S_w] n \left[\frac{\partial \rho^{ga}}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial \rho^{ga}}{\partial p^g} \frac{\partial p^g}{\partial t} + \frac{\partial \rho^{ga}}{\partial p^c} \frac{\partial p^c}{\partial t} \right] - \operatorname{div} \left(\rho^g \frac{M_a M_w}{M_g^2} \mathbf{D}_g^{ga} \operatorname{grad} \left(\frac{\partial p^{ga}}{\partial p^g} \right) \right) \\ & - \operatorname{div} \left(\rho^{ga} \frac{\mathbf{k} k^{rg}}{\mu^g} [\operatorname{grad}(p^g) - \rho^g \mathbf{g}] \right) = 0 \end{aligned}$$

le quantità $S_w(\mathbf{x},t)$, $S_g(\mathbf{x},t)$, $k^{rw}(\mathbf{x},t)$, $k^{rg}(\mathbf{x},t)$ sono definite al livello costitutivo, come descritto nella sezione 1.3.

1.2.3 Equazioni di bilancio energetico

L'equazione di bilancio energetico della miscela è:

$$\begin{aligned} & (\rho C_p)_{eff} \frac{\partial T}{\partial t} + \rho_w C_p^w v^w \left[\frac{\mathbf{k} k^{rw}}{\mu^w} [-grad(p^g) + grad(p^c) + \rho^w \mathbf{g}] \right] \cdot gradT \\ & + \rho_g C_p^g v^g \left[\frac{\mathbf{k} k^{rg}}{\mu^g} [-grad(p^g) + \rho^g \mathbf{g}] \right] \cdot gradT - div(\chi_{eff} gradT) = -\dot{m}_{vap} \Delta H_{vap} \end{aligned}$$

dove, in particolare, $\dot{m}_{vap} \Delta H_{vap}$ considera il contributo dell'evaporazione e della condensazione. Questa equazione di equilibrio considera lo scambio di calore per conduzione e convezione come pure lo scambio di calore latente (vedi [1]) e trascura i termini relativi al lavoro meccanico indotto dalle variazioni di densità, dovute ai mutamenti di temperatura delle fasi, e dai cambiamenti di frazione di volume; l'equazione dell'equilibrio più generale di A è sviluppata dentro [18].

1.3 EQUAZIONI COSTITUTIVE

Si valuta la pressione $p^g(\mathbf{x},t)$. Per una miscela gassosa di aria secca e di vapore acqueo, si introduce la legge ideale dei gas perché l'aria umida è supposta essere una miscela perfetta di due gas ideali. L'equazione di stato del gas perfetto (l'equazione di Clapeyron) e di legge del Dalton applicate all'aria secca, g_a , al vapore acqueo, g_w , all'aria umida, g , danno:

$$\begin{aligned} p^{ga} &= \frac{\rho^{ga} RT}{M_a} & p^{g_w} &= \frac{\rho^{g_w} RT}{M_w} \\ p^g &= p^{ga} + p^{g_w} & \rho^g &= \rho^{ga} + \rho^{g_w} \end{aligned}$$

Nelle zone parzialmente sature, l'equilibrio della pressione del vapore acqueo, $p^{gw}(\mathbf{x}, t)$, si può ottenere dall'equazione di Kelvin-Laplace

$$p^{gw} = p^{gws}(T) e^{\frac{\rho^{gw} RT}{M_w}}$$

dove la pressione di saturazione del vapore acqueo, $p^{gws}(\mathbf{x}, t)$, dipendendo soltanto dalla temperatura $T(\mathbf{x}, t)$, può essere calcolata con l'equazione di Clausius-Clapeyron o con correlazione empirica. La saturazione, $S_\pi(\mathbf{x}, t)$, e la permeabilità relativa, $k^{r\pi}(\mathbf{x}, t)$, sono funzioni della pressione capillare, p^c , e della temperatura, T , determinate sperimentalmente:

$$S_\pi = S_\pi(p^c, T) \quad k^{r\pi} = k^{r\pi}(p^c, T) \quad \pi = w, g$$

Per la miscela binaria di gas, aria secca e vapore acqueo, legge del Fick dà alle seguenti velocità relative $v_g^\pi = v^\pi - v^g$ ($\pi = ga, gw$) della specie che si diffondono:

$$\mathbf{v}_g^{ga} = -\frac{M_a M_w}{M_g^2} \mathbf{D}_g^{ga} \text{grad} \left(\frac{\partial p^{ga}}{\partial p^g} \right) = \frac{M_a M_w}{M_g^2} \mathbf{D}_g^{ga} \text{grad} \left(\frac{\partial p^{gw}}{\partial p^g} \right) = -\mathbf{v}_g^{gw}$$

dove \mathbf{D}_g^{ga} è il tensore efficace di diffusione ed M_g è la massa molare della miscela del gas:

$$\frac{1}{M_g} = \frac{\rho^{gw}}{\rho^g} \frac{1}{M_w} + \frac{\rho^{ga}}{\rho^g} \frac{1}{M_a}$$

Si suppone che il comportamento elasto-plastico dello scheletro solido sia descritto dalla teoria classica di elasto-plasticità, indipendente dal rateo, per problemi geometricamente lineari. Per semplicità la funzione del snervamento che limita le tensioni efficaci, $\sigma'(\mathbf{x}, t)$, è quella di Drucker-Prager, che considera il comportamento di dilatante o contraente di sabbie dense o sciolte rispettivamente. Il *return mapping* e il tensore di consistenza tangente sono sviluppati risolvendo i diversi comportamenti della superficie di snervamento di Drucker-Prager nella zona d'apice e usando il concetto di plasticità multi-meccanismo, e seguendo un'idea suggerita in [26] nel caso di flusso plastico associato e di flusso plastico (deviatorico) non associato. Il 'return mapping' e il tensore di consistenza tangente usati per le simulazioni numeriche sono sviluppati in [27] per hardening/softening isotropo lineare e plasticità volumetrico-deviatorica non associata nel caso di grandi deformazioni elasto-plastiche; qui si considera solo il caso geometricamente lineare.

Il comportamento meccanico dello scheletro solido è supposto essere governato dalla funzione di energia libera di Helmholtz, ψ , nella forma:

$$\psi = \psi(\boldsymbol{\varepsilon}^e, \zeta)$$

dipendente dal tensore delle piccole deformazioni elastiche, $\boldsymbol{\varepsilon}^e(\mathbf{x}, t)$, e dalla variabile interna scalare di deformazione di hardening, $\zeta(\mathbf{x}, t)$, cioè la deformazione plastica equivalente. La seconda legge della termodinamica fornisce, attraverso la limitazione dell'isotropia, le relazioni costitutive

$$\boldsymbol{\sigma}' = \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e} \quad q = -\frac{\partial \psi}{\partial \zeta}$$

e la disuguaglianza di dispersione

$$\boldsymbol{\sigma}' : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e - q \dot{\zeta} \geq 0$$

dove $q(\mathbf{x}, t)$ è la variabile interna di stress che valuta l'evoluzione della superficie di snervamento nello spazio delle tensioni. Le equazioni di sviluppo per i termini rateo della disuguaglianza di dispersione (17) possono essere ricavate dal postulato della massima dispersione plastica nel caso di flusso plastico associato [28]:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\gamma} \frac{\partial F}{\partial q} \quad \dot{\zeta} = \dot{\gamma} \frac{\partial F}{\partial q}$$

soggette alle classiche condizioni di carico/scarico di Kuhn-Tucker

$$\dot{\gamma} \geq 0 \quad F(\boldsymbol{\sigma}', q) \leq 0 \quad \dot{\gamma} F = 0$$

in cui $\dot{\gamma}$ è il parametro continuo di consistenza e la funzione di snervamento isotropo.

Per l'implementazione è stato utilizzato il classico modello elasto-plastico della funzione di snervamento di Drucker-Prager [29] con l'incrudimento isotropo lineare seguendo la forma seguente:

$$F(p, \mathbf{s}, \xi) = 3\alpha_F p + \|\mathbf{s}\| - \beta_F \sqrt{\frac{2}{3}} [c_0 + h\xi]$$

dove $p = \frac{1}{3}[\boldsymbol{\sigma}':\mathbf{1}]$ è la pressione efficace media di Cauchy, $\|\mathbf{s}\|$ è la norma, L_2 , del tensore deviatorico efficace di Cauchy, $\boldsymbol{\sigma}'$, c_0 è la coesione iniziale apparente, α_F e β_F sono due parametri materiali legati all'angolo di attrito del terreno:

$$\alpha_F = 2 \frac{\sqrt{\frac{2}{3}} \sin\varphi}{3 - \sin\varphi} \qquad \beta_F = 2 \frac{6 \cos\varphi}{3 - \sin\varphi}$$

h è il modulo di hardening/softening.

Nota: Nel presente articolo non si tiene conto dell'effetto della pressione capillare, p^c , e della temperatura sullo sviluppo della superficie di snervamento. Chi fosse interessato può far riferimento per esempio a [30], [31] e [9] per relazione costitutiva fra tensioni efficaci e pressione capillare, e [32] per l'implementazione numerica della legge costitutiva proposta in [31] e la relativa applicazione alle simulazioni di localizzazione di deformazioni.

1.3.1 Condizioni iniziali e al contorno

Per concludere sono necessarie le condizioni iniziali e al contorno. Le condizioni iniziali specificano completamente lo stato delle variabili primarie di stato al tempo $t = t_0$, in tutto il dominio analizzato, B , e il relativo contorno, ∂B :

$$\left(\partial B = \partial B_\pi \cup \partial B_\pi^q, \pi = g, c, T, u \right) \quad p^g = p_0^g, p^c = p_0^c, T = T_0, \mathbf{u} = \mathbf{u}_0, \text{ su } B \cup \partial B$$

Le condizioni al contorno (BC) possono essere del tipo di Dirichlet su ∂B_π per $t \geq t_0$:

$$p^g = \hat{p}^g, \text{ su } \partial B_g \quad p^c = \hat{p}^c, \text{ su } \partial B_c \quad T = \hat{T}, \text{ su } \partial B_T \quad \mathbf{u} = \hat{\mathbf{u}}, \text{ su } \partial B_u$$

o del tipo di Cauchy (BC miste) su ∂B_π^q per $t \geq t_0$:

$$\begin{aligned} & \left(n S_g \rho^{ga} \mathbf{v}^{gs} + \mathbf{J}_d^{ga} \right) \cdot \mathbf{n} = q^{ga}, \text{ su } \partial B_g^q \\ & \left(n S_w \rho^w \mathbf{v}^{ws} + n S_g \rho^{gw} \mathbf{v}^{gs} + \mathbf{J}_d^{gw} \right) \cdot \mathbf{n} = q^{gw} + q^w + \beta_c \left(\rho^{gw} - \rho_\infty^{gw} \right), \text{ su } \partial B_c^q \\ & \left(n S_w \rho^w \mathbf{v}^{ws} \Delta H_{vap} - \chi_{eff} grad T \right) \cdot \mathbf{n} = q^T + q^w + \alpha_c (T - T_\infty) + e \sigma_0 (T^4 - T_\infty^4), \text{ su } \partial B_T^q \\ & \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \bar{\mathbf{t}}, \text{ su } \partial B_u^q \end{aligned}$$

dove $\mathbf{n}(\mathbf{x}, t)$ è il vettore unitario normale, che punta verso il gas circostante, $q^{ga}(\mathbf{x}, t)$, $q^{gw}(\mathbf{x}, t)$, $q^w(\mathbf{x}, t)$, $q^T(\mathbf{x}, t)$ sono rispettivamente i flussi imposti di aria secca, del vapore acqueo, dell'acqua e il flusso imposto di calore, e $\bar{\mathbf{t}}(\mathbf{x}, t)$ è il vettore di trazione imposta

relativa al tensore totale di Cauchy; $\rho_{\infty}^{gw}(\mathbf{x}, t)$ e $T_{\infty}(\mathbf{x}, t)$ sono la densità del vapore acqueo e la temperatura nel campo lontano della fase gassosa indisturbata, $e(\mathbf{x}, t)$ è l'emissività dell'interfaccia, σ_0 la costante di Stefan-Boltzmann, mentre $\alpha_c(\mathbf{x}, t)$ e $\beta_c(\mathbf{x}, t)$ sono coefficienti di calore convettivo e di scambio di massa. Le condizioni al contorno con solo i flussi imposti sono dette condizioni di Neumann. Le condizioni al contorno relative solamente a scambi di calore e umidità dette condizioni di Robin.

1.4 FORMULAZIONE AGLI ELEMENTI FINITI

Il modello agli elementi finiti è derivato dall'applicazione della procedura di Galerkin per l'integrazione spaziale ed il Metodo dei Trapezi Generalizzato per l'integrazione temporale della forma debole delle equazioni di equilibrio della sezione 2 (vedi per esempio [1]).

In particolare, dopo discretizzazione spaziale all'interno della formulazione isoparametrica, si ottiene il seguente sistema di equazioni, non simmetrico, non lineare e accoppiato:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{C}_{gg} & \mathbf{C}_{gc} & \mathbf{C}_{gt} & \mathbf{C}_{gu} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_{cc} & \mathbf{C}_{ct} & \mathbf{C}_{cu} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_{tc} & \mathbf{C}_{tt} & \mathbf{C}_{tu} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{p}}^g \\ \bar{\mathbf{p}}^c \\ \bar{\mathbf{T}} \\ \bar{\mathbf{u}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{gg} & \mathbf{K}_{gc} & \mathbf{K}_{gt} & \mathbf{0} \\ \mathbf{K}_{cg} & \mathbf{K}_{cc} & \mathbf{K}_{ct} & \mathbf{0} \\ \mathbf{K}_{tg} & \mathbf{K}_{tc} & \mathbf{K}_{tt} & \mathbf{0} \\ \mathbf{K}_{ug} & \mathbf{K}_{uc} & \mathbf{K}_{ut} & \mathbf{K}_{uu} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{p}}^g \\ \bar{\mathbf{p}}^c \\ \bar{\mathbf{T}} \\ \bar{\mathbf{u}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_g \\ \mathbf{f}_c \\ \mathbf{f}_t \\ \mathbf{f}_u \end{bmatrix}$$

dove gli spostamenti del solido, $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$, la pressione capillare, $p^c(\mathbf{x}, t)$, ed del gas, $p^g(\mathbf{x}, t)$, e la temperatura, $T(\mathbf{x}, t)$, sono espressi nell'intero dominio da funzioni di forma matriciali $\mathbf{N}_u(\mathbf{x})$, $\mathbf{N}_c(\mathbf{x})$, $\mathbf{N}_g(\mathbf{x})$, $\mathbf{N}_T(\mathbf{x})$ e dai vettori dei valori nodali $\mathbf{u} = \mathbf{N}_u \bar{\mathbf{u}}$, $p^c = \mathbf{N}_c \bar{\mathbf{p}}^c$, $p^g = \mathbf{N}_g \bar{\mathbf{p}}^g$, $T = \mathbf{N}_T \bar{\mathbf{T}}$.

In una forma più concisa l'Eq. (25) può essere scritta come:

$$\mathbf{C} \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t} + \mathbf{KX} = \mathbf{F}$$

Le differenze finite nel tempo sono usate per la soluzione del problema dei valori iniziali in uno step finito nel tempo $\Delta t = t_{n+1} - t_n$. Seguendo il Metodo dei Trapezi

Generalizzato come indicato in [1], l'Eq. (27) può essere riscritta al tempo t_{n+1} usando le relazioni

$$\left. \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t} \right|_{n+\theta} = \frac{\mathbf{X}_{n+1} - \mathbf{X}_n}{\Delta t}$$

$$\mathbf{X}_{n+\theta} = [1-\theta]\mathbf{X}_n + \theta \mathbf{X}_{n+1}, \text{ con } \theta = [0,1],$$

dove \mathbf{X}_n e \mathbf{X}_{n+1} sono i vettori di stato ai tempi t_n e t_{n+1} , così da ottenere

$$\mathbf{G}(\mathbf{X}_{n+1}) = [\mathbf{C} + \theta \Delta t \mathbf{K}]_{n+\theta} \mathbf{X}_{n+1} - [\mathbf{C} - [1-\theta] \Delta t \mathbf{K}]_{n+\theta} \mathbf{X}_n - \Delta t \mathbf{F}_{n+\theta} = 0$$

L'analisi linearizzata di accuratezza e stabilità suggerisce l'uso di $\theta \geq \frac{1}{2}$. Nella sezione degli esempi, è stata utilizzata l'integrazione implicita nel tempo ($\theta = 1$).

Dopo l'integrazione nel tempo il sistema di equazioni non lineari viene linearizzato, così si ottiene il sistema di equazioni che può essere risolto numericamente (in forma compatta)

$$\left. \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{X}} \right|_{\mathbf{X}_{n+1}^i} \Delta \mathbf{X}_{n+1}^{i+1} \cong -\mathbf{G}(\mathbf{X}_{n+1}^i)$$

con il simbolo $(\bullet)_{n+1}^{i+1}$ che indica l'iterazione corrente ($n+1$) nel time step corrente ($i+1$) e dove lo Jacobiano ha la forma seguente

$$\left. \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{X}} \right|_{\mathbf{X}_{n+1}^i} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{G}^g}{\partial \bar{\mathbf{p}}^g} & \frac{\partial \mathbf{G}^g}{\partial \bar{\mathbf{p}}^c} & \frac{\partial \mathbf{G}^g}{\partial \bar{\mathbf{T}}} & \frac{\partial \mathbf{G}^g}{\partial \bar{\mathbf{u}}} \\ \frac{\partial \mathbf{G}^c}{\partial \bar{\mathbf{p}}^g} & \frac{\partial \mathbf{G}^c}{\partial \bar{\mathbf{p}}^c} & \frac{\partial \mathbf{G}^c}{\partial \bar{\mathbf{T}}} & \frac{\partial \mathbf{G}^c}{\partial \bar{\mathbf{u}}} \\ \frac{\partial \mathbf{G}^T}{\partial \bar{\mathbf{p}}^g} & \frac{\partial \mathbf{G}^T}{\partial \bar{\mathbf{p}}^c} & \frac{\partial \mathbf{G}^T}{\partial \bar{\mathbf{T}}} & \frac{\partial \mathbf{G}^T}{\partial \bar{\mathbf{u}}} \\ \frac{\partial \mathbf{G}^u}{\partial \bar{\mathbf{p}}^g} & \frac{\partial \mathbf{G}^u}{\partial \bar{\mathbf{p}}^c} & \frac{\partial \mathbf{G}^u}{\partial \bar{\mathbf{T}}} & \frac{\partial \mathbf{G}^u}{\partial \bar{\mathbf{u}}} \end{bmatrix}$$

Dettagli riguardanti matrici ed vettori dei residui del sistema di equazioni linearizzate si possono trovare nell'Appendice 2. A causa del forte accoppiamento tra il problema meccanico, quello termico ed il problema dei fluidi nei pori, una soluzione unica (**monolitica**) di (31) è preferibile usando lo schema di Newton.

Per concludere, il vettore soluzione viene aggiornato tramite la relazione incrementale:

$$\mathbf{X}_{n+1}^{i+1} = \mathbf{X}_{n+1}^i + \Delta \mathbf{X}_{n+1}^{i+1}$$

1.4.1 Algoritmo per l'elasto-plasticità

Il problema del calcolo di $\boldsymbol{\varepsilon}^e$, ζ , $\boldsymbol{\sigma}'$ è tipicamente risolto da un operatore composto da un previsore elastico e da un correttore plastico [33]. Il calcolo dello stato elastico di tentativo, $(\bullet)^{tr}$, è basato sul 'congelamento' del flusso plastico al tempo t_{n+1} . Quindi $[\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e]^{tr}$ è ottenuto dal passo di carico per mezzo di $[\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e]^{tr} = \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}$. Il corrispondente stato elastico di tentativo è ottenuto dalla funzione di energia libera iperelastica:

$$\boldsymbol{\sigma}'_{n+1} = \left[\frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e} \right] \boldsymbol{\varepsilon}^e, \text{ con } \boldsymbol{\varepsilon}^e = [\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e]^{tr}$$

$$q_{n+1}^{tr} = - \left[\frac{\partial \psi}{\partial \zeta} \right] \zeta, \text{ con } \zeta = \zeta_{n+1}^{tr}$$

Se questo stato di tentativo è ammissibile, esso non viola la disuguaglianza $F_{n+1}^{tr} = F(\boldsymbol{\sigma}'_{n+1}, q_{n+1}^{tr}) \leq 0$ e lo stato tensionale è quindi già stato computato. Altrimenti si applica il *return mapping* o la procedura di correttore plastico al fine di valutare $\Delta\gamma_{n+1}$ che soddisfi la condizione di consistenza $F_{n+1} = 0$.

Noto $\Delta\gamma_{n+1}$ la deformazione plastica equivalente viene computata tramite l'integrazione di Eulero all'indietro dell'Eq. (16)₂

$$\zeta_{n+1} = \zeta_n + \Delta\gamma_{n+1} \left. \frac{\partial F}{\partial q} \right|_{n+1}$$

Le componenti di tensione di Cauchy sono allora calcolate dalla legge costitutiva iperelastica Eq. (16)₁ con l'energia libera $\psi = \hat{\psi}(\boldsymbol{\varepsilon}^e, \zeta)$, scritta in funzione delle componenti elastiche principali di deformazione e delle deformazioni plastiche equivalenti (per l'incrudimento lineare isotropo), è

$$\hat{\psi} = \frac{L}{2} [\varepsilon_1^e + \varepsilon_2^e + \varepsilon_3^e]^2 + G [\varepsilon_1^{e2} + \varepsilon_2^{e2} + \varepsilon_3^{e2}] + \frac{1}{2} h \zeta^2$$

dove L ed G sono le costanti elastiche di Lamé e h il modulo d'incrudimento lineare.

1.4.2 Algoritmo di return mapping per il modello di Drucker-Prager con hardening isotropo lineare e soluzione d'apice

Originariamente la procedura di *return mapping* è stata sviluppata per la plasticità di tipo J_2 . L'estensione di questo metodo al modello di Drucker-Prager può essere fatta considerando una trattazione speciale della regione d'angolo usando il concetto di plasticità della multi-superficiale, come sviluppato in [26] nel caso di plasticità perfetta e di plasticità deviatorica non-associata. In questo articolo il *return mapping* ed la matrice tangente saranno computati con hardening/softening lineare isotropo e plasticità volumetrico/deviatorica non-associata.

Si definisce così una funzione di potenziale plastico:

$$Q(p, \mathbf{s}, \xi) = 3\alpha_Q p + \|\mathbf{s}\| - \beta_S \sqrt{\frac{2}{3}} [c_0 + h\xi]$$

simile a (20) utilizzando però nell'Eq. (21) la dilatanza anziché l'angolo di attrito.

L'idea chiave è basata sul fatto che la procedurale *return mapping* sviluppata senza alcun trattamento speciale della regione dell'apice conduce ai risultati senza significato fisico (cioè $\|\mathbf{s}_{n+1}\| < 0$) per certa gamma di tensioni elastiche di tentativo. Questo accade quando, una volta che il parametro plastico di consistenza, $\Delta\gamma_{n+1}$, è stato computato dal *return mapping*, la seguente relazione, ottenuta dalle componenti del tensore deviatorico di tensione, è violata:

$$\|\mathbf{s}_{n+1}\| = \|\mathbf{s}_{n+1}^{tr}\| - 2G\Delta\gamma_{n+1} \geq 0$$

Senza entrare nei particolari, la violazione di disuguaglianza (37) ed la condizione di consistenza $F_{n+1} = 0$ permettono di ottenere la disuguaglianza con cui il *return mapping* necessita di essere modificato:

$$p_{n+1}^{tr} > \frac{3\alpha_Q K}{2G} \|\mathbf{s}_{n+1}^{tr}\| + \frac{\beta_F \sqrt{\frac{2}{3}}}{3\alpha_F} \left[\frac{\|\mathbf{s}_{n+1}^{tr}\|}{2G} h \sqrt{1 + 3\alpha_Q^2} + c_n \right]$$

dove gli indici F e Q di α e β si riferiscono rispettivamente alla superficie di snervamento ed al potenziale plastico.

In questo caso, la zona delle tensioni caratterizzata da (38) può essere trattata come una zona d'angolo in plasticità multi-superficiale non arrotondata. A questo scopo viene introdotta una seconda superficie di snervamento F_2 oltre alla (20):

$$F_2(p, \xi) = 3\alpha_F p - \beta_F \sqrt{\frac{2}{3}} [c_0 + h\xi]$$

che deriva da (20) con la condizione $\|\mathbf{s}\| = 0$, e le equazioni di sviluppo della plasticità devono essere modificate seguendo la generalizzazione del Koiter che introduce un secondo parametro plastico di consistenza, $\dot{\gamma}_2$, relativo a $Q_2(p, \xi) = 3\alpha_Q p - \beta_Q \sqrt{\frac{2}{3}} [c_0 + h\xi]$. Quindi l'Eq. di sviluppo (18) verrà sostituita dalle leggi generalizzate di sviluppo della plasticità

$$\dot{\epsilon}^p = \sum_i \dot{\gamma}_i \frac{\partial Q_i}{\partial \boldsymbol{\sigma}'} \quad \dot{\xi} = \sum_i \dot{\gamma}_i \frac{\partial Q_i}{\partial q} \quad i=1,2$$

In particolare l'equazione implicita seguente è ottenuta rispettando la condizione di consistenza $F_2(p_{n+1}, \xi_{n+1}) = 0$:

$$p_{n+1}^{ir} - 3\alpha_Q K [\Delta\gamma_1 + \Delta\gamma_2] = \frac{\beta_F \sqrt{\frac{2}{3}}}{3\alpha_F} \left[h \sqrt{\Delta\gamma_{1n+1}^2 + 3\alpha_Q^2 [\Delta\gamma_1 + \Delta\gamma_2]_{n+1}^2} + c_n \right]$$

dove gli indici F e Q di α e β si riferiscono rispettivamente alla superficie di snervamento ed al potenziale plastico.

In questo caso, la zona delle tensioni caratterizzata da (38) può essere trattata come una zona d'angolo in plasticità multi-superficiale non arrotondata. A questo scopo viene introdotta una seconda superficie di snervamento F_2 oltre alla (20):

$$F_2(p, \xi) = 3\alpha_F p - \beta_F \sqrt{\frac{2}{3}} [c_0 + h\xi]$$

che deriva da (20) con la condizione $\|\mathbf{s}\| = 0$, e le equazioni di sviluppo della plasticità devono essere modificate seguendo la generalizzazione del Koiter che introduce un secondo parametro plastico di consistenza, $\dot{\gamma}_2$, relativo a $Q_2(p, \xi) = 3\alpha_Q p - \beta_Q \sqrt{\frac{2}{3}} [c_0 + h\xi]$. Quindi l'Eq. di sviluppo (18) verrà sostituita dalle leggi generalizzate di sviluppo della plasticità

$$\dot{\epsilon}^p = \sum_i \dot{\gamma}_i \frac{\partial Q_i}{\partial \boldsymbol{\sigma}'} \quad \dot{\xi} = \sum_i \dot{\gamma}_i \frac{\partial Q_i}{\partial q} \quad i=1,2$$

In particolare l'equazione implicita seguente è ottenuta rispettando la condizione di consistenza $F_2(p_{n+1}, \xi_{n+1}) = 0$:

$$p_{n+1}^{tr} - 3\alpha_Q K[\Delta\gamma_1 + \Delta\gamma_2] = \frac{\beta_F \sqrt{\frac{2}{3}}}{3\alpha_F} \left[h \sqrt{\Delta\gamma_{1n+1}^2 + 3\alpha_Q^2 [\Delta\gamma_1 + \Delta\gamma_2]_{n+1}^2} + c_n \right]$$

L'Eq. (41) è stata risolta iterativamente con lo schema di Newton per computare $\Delta\gamma_{2n+1}$, mentre $\Delta\gamma_1$ è dato da:

$$\Delta\gamma_{1n+1} = \frac{\|\mathbf{s}_{n+1}^{tr}\|}{2G}$$

dalla condizione $\mathbf{s}_{n+1} = 0$.

Una volta computati i due moltiplicatori plastici, la deformazione plastica equivalente può essere aggiornata:

$$\xi_{n+1} = \xi_n + \sqrt{\Delta\gamma_{1n+1}^2 + 3\alpha_Q^2 [\Delta\gamma_1 + \Delta\gamma_2]_{n+1}^2}$$

così come le componenti del tensore di stress di Cauchy, $\boldsymbol{\sigma}'$, il tensore di deformazione elastica, $\boldsymbol{\varepsilon}^e$, e il tensore di deformazione plastica, $\boldsymbol{\varepsilon}^p$. In particolare per il tensore delle tensioni di Cauchy

$$\boldsymbol{\sigma}'_{n+1} = \mathbf{p}_{n+1}^{tr} - 3\alpha_Q K \Delta\gamma_{n+1} + \left[I - \frac{2G\Delta\gamma_{n+1}}{\|\mathbf{s}_{n+1}^{tr}\|} \right] \mathbf{s}_{n+1}^{tr}$$

per la zona non d'angolo e

$$\boldsymbol{\sigma}'_{n+1} = \mathbf{p}_{n+1}^{tr} - 3\alpha_Q K [\Delta\gamma_1 + \Delta\gamma_2]_{n+1}$$

per la zona d'angolo.

1.4.3 Algoritmo della matrice dei modulo tangente con la soluzione d'apice per il modello di Drucker-Prager con incrudimento isotropo lineare

La matrice del modulo tangente viene calcolata tramite la linearizzazione del tensore di stress di Cauchy computato. Si ottengono due moduli tangenti, il primo valido per condizioni di stress per cui il modello di Drucker-Prager è soddisfatto, cioè per lo stress per il

quale l'Eq. (38) è violata, il secondo per condizioni di stress appartenenti alla regione d'angolo. I moduli computati per i due casi sono rispettivamente:

- per la zona lontano dall'apice:

$$\mathbf{a}_{n+1}^{ep} = c_1 K \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + 2G \left[I - \frac{1}{3} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \right] \left[I - \frac{2G \Delta \gamma_{n+1}}{\|\mathbf{s}_{n+1}^{tr}\|} \right] - \frac{6\alpha_Q KG}{c_2} \mathbf{1} \otimes \mathbf{n}_{n+1}^{tr} - \frac{6\alpha_F KG}{c_2} \mathbf{n}_{n+1}^{tr} \otimes \mathbf{1} - 4G^2 \left[\frac{I}{c_2} - \frac{\Delta \gamma_{n+1}}{\|\mathbf{s}_{n+1}^{tr}\|} \right] \mathbf{n}_{n+1}^{tr} \otimes \mathbf{n}_{n+1}^{tr}$$

dove \mathbf{n}_{n+1}^{tr} e i coefficienti c_1 e c_2 sono:

$$\mathbf{n}_{n+1}^{tr} = \frac{\mathbf{s}_{n+1}^{tr}}{\|\mathbf{s}_{n+1}^{tr}\|} \quad c_1 = \left[I - \frac{9\alpha_F \alpha_Q K}{c_2} \right] \quad c_2 = 9\alpha_F \alpha_Q K + 2G + \beta_F h \frac{2}{3} \sqrt{[I + 3\alpha_Q^2]}$$

- per la zona d'apice:

$$\mathbf{a}_{n+1}^{ep} = c_3 K \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + \frac{c_3 K}{2\alpha_Q G [\Delta \gamma_1 + \Delta \gamma_2]_{n+1}} \mathbf{1} \otimes \mathbf{s}_{n+1}^{tr}$$

dove il coefficiente c_3 è

$$c_3 = \frac{\alpha_Q \beta_F \sqrt{\frac{2}{3}} h [\Delta \gamma_1 + \Delta \gamma_2]_{n+1}}{3\alpha_F K \sqrt{\Delta \gamma_1^2 + 3\alpha_Q^2 [\Delta \gamma_1 + \Delta \gamma_2]_{n+1}^2} + \alpha_Q \beta_F \sqrt{\frac{2}{3}} h [\Delta \gamma_1 + \Delta \gamma_2]_{n+1}}$$

Si può osservare che i moduli (46) non sono simmetrici neanche per la plasticità associata, mentre i moduli (45) non sono simmetrici soltanto per la plasticità non associata. Nel caso di plasticità perfetta ($h=0$) il coefficiente c_3 e quindi i moduli dell'Eq. (46) si annullano e perciò soluzioni stabili sono raggiunte soltanto se un piccolo numero di punti si trova nella regione d'angolo. Inoltre i moduli (45) sono ridotti a quelli del modello di von Mises se si pone $\alpha_F = 0$ e $\beta_F = 1$.

1.5 RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

1. Lewis RW, Schrefler BA (1998) *The finite element method in the static and dynamic deformation and consolidation of porous media*, 2nd edn. Wiley, Chichester
2. Gawin D, Baggio P, Schrefler BA (1995) Coupled heat, water and gas flow in deformable porous media. *Int J Num Meth Fluids* 20(7):967–987
3. Schrefler BA (2002) Mechanics and thermodynamics of saturated-unsaturated porous materials and quantitative solutions. *Appl Mech Review* 55(4):351–388
4. Mokni M, Desrues J (1998) Strain localisation measurements in undrained plane-strain biaxial tests on hostun RF sand. *Mech Cohesive-Frictional Materials* 4:419–441
5. Vardoulakis J, Sulem J (1995) *Bifurcation analysis in geomechanics*. Blakie Academic and Professional, London
6. Schrefler BA, Sanavia L, Majorana CE (1996) A multiphase medium model for localisation and postlocalisation simulation in geomaterials. *Mech Cohesive-Frictional Mater* 1:95–114
7. Gawin D, Sanavia L, Schrefler BA (1998) Cavitation modelling in saturated geomaterials with application to dynamic strain localisation. *Int J Num Meth Fluids* 27:109–125
8. Schrefler BA, Sanavia L, Gawin D (1998) Modelling of strain localisation in fully saturated soils. In: Adachi T, Oka F, Yashima A (eds) *Localization and Bifurcation Theory for Soils and Rocks*, Balkema, Rotterdam
9. Borja RJ (2004) Cam-clay plasticity. Part V: A mathematical framework for three-phase deformation and strain localisation analyses of partially saturated porous media. *Comp Meth Appl Mech Engrg* 193:5301–5338
10. Ehlers W, Graf T, Ammann M (2004) Deformation and localization analysis of partially saturated soil. *Comp Meth Appl Mech Engrg* 193:2885–2910
11. Sanavia L, Gawin D, Pesavento F, Rossetto M, Schrefler BA (2003) Numerical analysis of non-isothermal multiphase geomaterials with application to strain localisation simulation of initially water saturated soils. In: *Proceedings of the Complas VII, VII International Conference on Computational Plasticity*, Barcelona, Spain April 7–10 (on CD)

12. Diebels S, Ehlers W, Ellsiepen P, Volk W (1998) On the regularization of shear band phenomena in liquid-saturated and empty soils. In: Brillard A, Ganghoffer JF (eds) Proceedings of the Euromech Colloquium 378 on Nonlocal Aspects in Solid Mechanics, University of Mulhouse, 58–63
13. Zhang HW, Sanavia L, Schrefler BA (1999) An internal length scale in strain localisation of multiphase porous media. *Mech Cohesive-Frictional Mater* 4:443–460
14. Zhang HW, Schrefler BA (2000) Gradient dependent plasticity model and dynamic strain localisation analysis of saturated and partially saturated porous media: one-dimensional model. *Eur J Mech A/Solids* 19:503–524
15. Schrefler BA, Zhang HW, Sanavia L. Interaction between different internal length scales in fully and partially saturated porous media-the 1-d case. *Int J Numer Anal Meth geomech*, accepted
16. Zhang HW, Schrefler BA (2004) Particular aspects of internal length scales in strain localisation analysis of multiphase porous materials. *Comput Meth Appl Mech Eng* 193:2867–2884
17. Goldstein RJ, Eckert ERG, Ibele WE, et al. (2003) Heat transfer a review of 2001 literature. *Int J Heat and Mass Transfer* 11:1887–1992
18. Khalili N, Loret B (2001) An Elasto-Plastic Model for non-isothermal analysis of flow and deformation in unsaturated porous media: formulation. *Int J Solids and Struct* 38:8305–8330
19. Hassanizadeh M, Gray WG (1979) General conservation equations for multi-phase system: 1. Averaging technique. *Adv Water Resources* 2:131–144
20. Hassanizadeh M, Gray WG (1979) General conservation equations for multi-phase system: 2. Mass, momenta, energy and entropy equations. *Adv Water Resources* 2:191–201
21. Hassanizadeh M, Gray WG (1980) General conservation equations for multi-phase system: 3. Constitutive theory for porous media flow. *Adv Water Resources* 3:25–40
22. Gray WG, Hassanizadeh M (1991) *Unsaturated Flow Theory including Interfacial Phenomena*. *Water Resources Res* 27(8):1855–1863
23. Schrefler BA (1984) *The finite element method in soil consolidation (with applications to surface subsidence)* (Ph.D. Thesis). University College of Swansea, C/Ph/76/84, Swansea (UK)
24. Sanavia L, Schrefler BA, Steinmann P., "A formulation for an unsaturated porous medium undergoing large inelastic strains", *Computational Mechanics*, vol. 28, 2002, p. 137-151.

25. Schrefler BA, Simoni L, Li X, Zienkiewicz OC (1990) Mechanics of partially saturated porous media. In: Desai CS, Gioda G (eds) Numerical Methods and Constitutive Modelling in Geomechanics, CISM Courses and Lectures, No 311, Springer-Verlag
26. Hofstetter G, Taylor RL (1991) Treatment of the corner region for Drucker-Prager type plasticity. ZAMM Z angew Math Mech 71:589–591
27. Alonso E.E., Gens A., Josa A., "A constitutive model for partially saturated soils", Géotechnique, vol. 40, 1990, p. 403-430.
28. Bolzon G., Schrefler B.A., Zienkiewicz O.C., "Elastoplastic soil constitutive laws generalized to partially saturated states", Géotechnique, vol. 46, 1996, p. 279-289.
29. Zhang HW, Sanavia L, Schrefler BA., "Numerical analysis of dynamic strain localisation in initially water saturated dense sand with a modified generalised plasticity model", Computers and Structures, vol. 79, 2001, p. 441-459.
30. Alonso EE, Gens A, Josa A (1990) A constitutive model for partially saturated soils. Géotechnique 40:403–430
31. Bolzon G, Schrefler BA, Zienkiewicz OC (1996) Elastoplastic soil constitutive laws generalized to partially saturated states. Géotechnique 46:279–289
32. Zhang HW, Sanavia L, Schrefler BA (2000) Numerical analysis of dynamic strain localisation in initially water saturated dense sand with a modified generalised plasticity model. Comput Struct 79:441–459
33. Simo JC, Hughes TJR (1998) Computational inelasticity. Springer
34. Bear J, Bachmat Y (1990) Introduction to modeling of transport phenomena in porous media. Kluwer, Dordrecht
35. Nochetto RH, Paolini M, Verdi C (1991) An adaptive finite element method for two-phase Stefan problems in two space variables. Math Comput 78–108
36. Gawin D, Pesavento F, Schrefler BA (2002) Modelling of hygro-thermal behaviour and damage of concrete at temperature above the critical point of water. Int J Numer Anal Meth Geomech 26:537–562
37. Gawin D, Baggio P, Schrefler BA (1996) Modelling heat and moisture transfer in deformable porous building materials. Arch of Civil Engng 42:325–349
38. Gawin D, Pesavento F, Schrefler BA (2002) Simulation of damage-permeability coupling in hygro-thermo-mechanical analysis of concrete at high temperature. Commun Numer Meth Eng 18:113–119

39. Schrefler BA, Gawin D (1996) The effective stress principle: incremental or finite form? *Int J Numer Anal Meth Geomech* 20:785–815
40. Gray WG, Schrefler BA (2001) Thermodynamic approach to effective stress in partially saturated porous media. *Eur J Mech A/Solids* 20:521–538
41. Gawin D, Schrefler BA (1996) Thermo-hydro-mechanical analysis of partially saturated porous materials. *Eng Comput* 13(7):113–143

CAPITOLO 2

IL METODO DEGLI ELEMENTI FINITI

2.1 INTRODUZIONE E GENERALITÀ

Il metodo degli elementi finiti è applicabile qualora non sia più possibile una soluzione analitica per un determinato problema, si ottiene quindi una soluzione con valore approssimato delle quantità incognite soltanto in un numero discreto di punti del corpo. In tale modo si provvede ad una discretizzazione in più parti (elementi finiti) del corpo stesso.

Invece di risolvere il problema dell'intero corpo in un'unica operazione viene formulata una soluzione per ogni parte per poi combinarle ed ottenere così la soluzione originaria.

Il corpo (assunto continuo cioè ad infiniti gradi di libertà) è suddiviso in serie di elementi che sono:

- di volume finito e forma semplice;
- non compenetranti tra loro;
- connessi tra loro in un numero finito di elementi chiamati nodi;
- tali per cui gli spostamenti di un punto interno di un elemento siano funzione degli spostamenti nodali tramite opportune funzioni dette "funzioni di spostamento".

Ogni nodo è caratterizzato da un certo numero di "qualità" generalizzate dette *gradi di libertà*. Questi variano a seconda del tipo di problema studiato ed il loro numero per ogni elemento dipende dal grado di approssimazione che si è scelto per poter rappresentare la variazione degli spostamenti nei punti interni dell'elemento (lineare, quadratica ecc..). I gradi di libertà hanno un significato fisico potendo rappresentare spostamenti, rotazioni, sforzi, temperature, pressioni ecc.. Il loro numero per ciascun nodo e il numero dei nodi stessi caratterizza il comportamento del singolo elemento.

2.1.1 Formulazione delle caratteristiche dell'elemento finito

Gli spostamenti nodali sono le incognite del problema. Si sceglie quindi una serie di funzioni per definire univocamente lo stato deformativo dentro ogni elemento finito in funzione degli spostamenti nodali. Partendo dalle deformazioni iniziali e utilizzando le proprietà costitutive del materiale si può definire lo stato di tensione dell'elemento e quindi anche il suo confine:

$$\{F\}^e = [K]^e \{\Delta\}^e$$

$\{F\}^e$: vettore di forze concentrate nei nodi, in equilibrio con le tensioni sull'elemento

$[K]^e$: matrice di rigidezza dell'elemento

$\{\Delta\}^e$: vettore degli spostamenti

Dall'assemblaggio delle equazioni relative ad ogni elemento si ottengono le equazioni globali di equilibrio dell'intera struttura.

Supponendo per esempio di avere un elemento triangolare inserito all'interno di un sistema di riferimento Figura 2e fissati per ogni nodo due gradi di libertà (rappresentati per comodità dagli spostamenti orizzontali e verticali), per legare tra loro gli spostamenti del generico punto con quelli relativi ai nodi si introducono delle funzioni di forma come di seguito riportato:

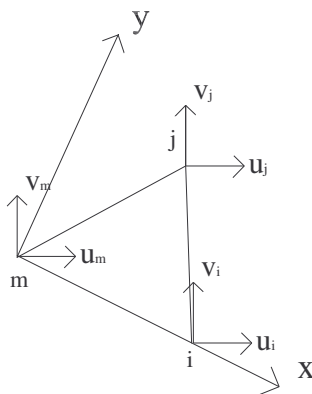


Figura 2. Elemento triangolare con due gradi di libertà per ogni nodo.

$$\begin{bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{bmatrix} = \{f(x, y)\}^e = [N]^e \{\Delta\}^e \quad e \text{ si riferisce ad un determinato nodo.}$$

$[N]^e$ = matrice delle funzioni di forma con le seguenti proprietà:

$$N_i(x_i, y_i) = 1 \quad \text{se calcolata nel nodo cui si riferisce.}$$

$$N_i(x_j, y_j) = N_i(x_m, y_m) = 0 \quad \text{se calcolata rispetto ad un qualsiasi altro nodo.}$$

Esistono tante funzioni $N(x, y)$ quanti sono i nodi. La generica matrice delle funzioni di forma ha un aspetto di questo tipo:

$$[N]^e = \begin{bmatrix} N_i & 0 & N_j & 0 & N_m & 0 \\ 0 & N_i & 0 & N_j & 0 & N_m \end{bmatrix}$$

mentre la generica matrice dello spostamento dei nodi ha una forma di questo tipo:

$$\{\Delta\}^e = \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_m \\ v_m \end{bmatrix}$$

Una volta calcolato il vettore di spostamento del generico punto dell'elemento, esso deve essere legato alle deformazioni dell'elemento, in modo che le deformazioni stesse siano legate alle deformazioni dei nodi.

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ z \end{Bmatrix}$$

Quest'ultima unita alla precedente porta a:

$$\{\varepsilon\}^e = [B]^e \{\Delta\}^e$$

Considerando inoltre i vettori delle deformazioni e delle tensioni iniziali si ottiene, in forma matriciale:

$$\{\sigma\}^e = [D]^e (\{\varepsilon\}^e - \{\varepsilon_0\}^e) + \{\sigma_0\}^e$$

$[D]^e$ è la matrice che tiene conto della legge costitutiva del materiale

In questo modo si riesce a considerare nella giusta misura anche la legge costitutiva del materiale e quindi il legame $\sigma - \varepsilon$.

Considerando l'equazione iniziale e la sua inversa:

$$\{F\}^e = [K]^e \{\Delta\}^e \quad \{\Delta\}^e = [C]^e \{F\}^e \quad \text{in cui } [K]^e = [C]^e{}^{-1}$$

si vede che si possono utilizzare due metodi:

il "metodo degli spostamenti" che prevede il calcolo della matrice di rigidezza $[K]^e$ con la prima equazione;

il "metodo delle forze" che prevede il calcolo della matrice di flessibilità $[C]^e$ con la seconda equazione.

Il metodo di più largo utilizzo è il metodo degli spostamenti, che a sua volta si specifica in ulteriori due metodi: il metodo diretto con il quale si ottiene un vettore di carichi concentrati (lumped) ed il metodo variazionale o energetico con il quale si ottiene un vettore di carichi distribuiti (consistent).

2.1.2 *Brevi cenni sui metodi di calcolo della matrice di rigidezza.*

Di seguito vengono riportati dei brevi cenni sui metodi per il calcolo della matrice di rigidezza citati nel paragrafo precedente.

Il metodo diretto

Con questo metodo si può procedere in due modi:

Trattando ogni elemento K_{ij} della matrice di rigidezza come un coefficiente calcolabile a partire dalle relazioni di equilibrio. Si considera che ogni elemento della matrice rappresenti la forza su un nodo in grado di mantenere uno spostamento unitario nella sua direzione di applicazione qualora tutti gli altri spostamenti nodali siano nulli. In generale le relazioni nodali calcolate nella direzione degli spostamenti nodali e conseguenti ad uno spostamento unitario imposto, rappresentano gli elementi della colonna della matrice di rigidezza relativa a quello spostamento. Inoltre la somma degli elementi di una colonna deve essere nulla, poiché tali elementi rappresentano le forze agenti su un nodo in equilibrio (*metodo dei coefficienti di influenza*).

Usando le equazioni di elasticità: si esprime il campo degli spostamenti interni all'elemento in funzione degli spostamenti nodali mediante le funzioni di forma N per passare poi al campo delle tensioni e delle deformazioni, per mezzo delle equazioni viste in precedenza e delle leggi costitutive (*metodo delle equazioni dell'elasticità*).

Il metodo variazionale

Anche con questo metodo si può procedere in due modi:

Sfruttando *il principio dei lavori virtuali* $\delta U = \delta W$ in cui U rappresenta l'energia di deformazione immagazzinata a causa dello spostamento e W il lavoro fatto dai carichi. Tale principio viene quindi applicato al singolo elemento finito in modo da ottenere:

$$[K]^e \{\Delta\}^e = \{F\}^e + \{F_{\varepsilon 0}\}^e + \{F_b\}^e \{F_{\sigma 0}\}^e + \{F_p\}^e$$

$\{F\}^e$: forze nodali

$\{F_{\varepsilon 0}\}^e$: vettore equivalente delle deformazioni iniziali

$\{F_b\}^e$: forze di massa

$\{F_{\sigma 0}\}^e$: vettore equivalente delle tensioni iniziali

$\{F_p\}^e$: vettore equivalente dei carichi superficiali distribuiti

Sfruttando *il principio di minimo dell'energia potenziale* $\Pi = U + W$ in cui U è l'energia di deformazione e W il potenziale dei carichi applicati. Tra tutti i sistemi di spostamenti ammissibili quello che soddisfa le condizioni di equilibrio fa assumere all'energia potenziale totale un valore stazionario.

$$\delta \Pi = \delta U + \delta W = 0$$

Essa porta ad ottenere delle equazioni differenziali o algebriche che sono equazioni di equilibrio, affinché tale equilibrio sia stabile deve essere: $\delta \Pi^2 = \delta U^2 + \delta W^2 > 0$, cioè Π deve assumere valore minimo.

Calcolata la matrice di rigidezza per ogni elemento finito, con uno dei metodi precedenti, è necessario assemblare il tutto ma per fare ciò bisogna passare dal sistema di riferimento locale del singolo nodo ad un sistema globale attraverso l'uso di una matrice di trasformazione

$$\{\Delta l\} = [T]\{\Delta g\} \quad [T] \text{ la matrice di passaggio dal sistema locale a quello globale.}$$

$$\{F l\} = [T]\{F g\} \quad \text{per permettere il passaggio dalle forze locali a quelle globali.}$$

2.1.3 Assemblaggio della matrice di rigidezza

Riferendosi al sistema di riferimento globale si ha:

$$\{R\} = [K] \{\Delta\}$$

Chiamata $\{R\}$ la matrice che raccoglie i contributi di tutte le forze agenti sul sistema e assemblando gli elementi che convergono al generico nodo q si può scrivere:

$$R_i = \sum_{j=1}^m F_i^{(j)}$$

m : numero di elementi che convergono al generico nodo q

R_i : generico elemento della matrice $\{R\}$ rappresentante il carico esterno agente su q

$F_i^{(j)}$: forze equivalenti nodali dell'elemento j nella direzione di R_i agenti su q

Inoltre denominando con n il numero dei gradi di libertà e riferendosi alla matrice di rigidezza assemblata si ha:

$$R^i = \sum_{l,k=1}^n K_{ln} \Delta_k$$

Δ_k : generico grado di libertà nel riferimento globale

K_{ln} : generico elemento della matrice assemblata, ottenuto con il contributo dei termini di rigidezza dei singoli elementi

La soluzione del sistema iniziale $\{R\} = [K] \{\Delta\}$ consiste in un insieme di n equazioni lineari in n incognite, essendo n il numero dei gradi di libertà. In alcuni problemi specifici, ad esempio progetti o verifiche strutturali, il sistema può essere composto di decine di migliaia di equazioni e quindi portare a metodi molto complessi nella risoluzione di tali sistemi.

2.1.4 Convergenza del metodo degli elementi finiti

Il metodo degli elementi finiti permette di ottenere una soluzione approssimata di un problema tramite la soluzione di un sistema di equazioni differenziali, la soluzione deve comunque sempre convergere al valore esatto del problema. Per verificare ciò si usano dei criteri di convergenza che permettono di formulare la matrice di rigidezza degli elementi sapendo a priori il tipo e l'entità dell'errore che si può commettere. *In altre parole l'elemento usato deve essere tale che all'aumentare del numero di elementi nei quali si suddivide il continuo, la soluzione ottenuta numericamente deve tendere asintoticamente verso la soluzione esatta analitica.* Gli aspetti principali che possono influenzare la convergenza sono:

- la precisione dei risultati
- il tempo di calcolo impiegato

Esistono vari criteri per verificare la convergenza di una certa suddivisione, per completezza si cita il *Patch-Test*. Consiste nell'imporre un campo di spostamenti per un certo gruppo di elementi tale da produrre uno stato di deformazione costante e nel verificare che gli spostamenti dei nodi corrispondano con il campo originale e che, ciascun elemento abbia un appropriato valore di deformazione e tensione costante in tutti i punti.

2.1.5 Considerazioni finali sul metodo agli elementi finiti

Spesso gli elementi complessi con nodi anche sui lati hanno una velocità di convergenza maggiore rispetto agli elementi semplici e quindi, a parità di risultati, occorrono pochi elementi complessi per ottenere lo stesso effetto di molti elementi semplici.

In generale l'elemento, descritto dalla sua funzione di forma N_i si dice isoparametrico qualora gli stessi parametri N_i vengano utilizzati per descrivere sia le coordinate del punto generico in funzione delle coordinate nodali sia gli spostamenti del punto generico in funzione degli spostamenti nodali. Di conseguenza la conoscenza delle funzioni di forma fa capo alla determinazione della matrice di rigidezza.

Spesso nella fase di integrazione numerica si devono utilizzare opportuni metodi. Si citano per completezza il metodo di *Newton – Cotes* e quello di *Gauss*.

Per concludere, si può dire che il metodo degli elementi finiti può essere considerato una sottoclasse del metodo generale di *Ritz* in cui le funzioni N_i sono continue e definite non all'interno del dominio V (totale) ma in sottodomini (elementi finiti) ottenuti discretizzando il dominio V . Tali funzioni dovranno perciò soddisfare solo a certe condizioni di continuità e non ad ogni condizione al contorno. Con questa suddivisione nascono di conseguenza delle semplificazioni, per esempio ogni funzione N_i può essere posta uguale ad un polinomio di grado poco elevato o comunque ad una funzione di semplice rappresentazione. Nei tratti di frontiera comuni a due elementi devono essere soddisfatte le condizioni di continuità delle N_i affinché la funzione integranda assuma valori finiti.

CAPITOLO 3

II CODICE COMES-GEO

3.1 CARATTERISTICHE GENERALI

Il codice Comes–Geo implementa l’analisi meccanica dei materiali porosi con pori tra loro connessi nei quali possa avvenire il flusso di una o più fasi liquide. E’ inoltre possibile considerare anche le interazioni tra la fase fluida e solida, ciò permette lo studio di tutti i casi che coinvolgano situazioni di parziale saturazione.

I geomateriali (terreni, rocce e conglomerati cementizi) sono gli esempi più comuni di materiali porosi. Questo codice consente così uno studio realistico su base numerica della struttura dei materiali porosi in condizioni di parziale o totale saturazione: le possibilità di impiego sono di conseguenza molto vaste, basti pensare alle analisi delle dighe in condizioni di sismicità, alla stabilità dei pendii o alla subsidenza, fenomeni in cui lo stato di saturazione dei pori riveste un ruolo molto importante.

Le variabili associate al problema (e quindi i gradi di libertà) sono cinque: temperatura, pressione capillare, pressione del gas e spostamenti orizzontali e verticali.

Come è ovvio la soluzione del problema è possibile solo grazie all’impostazione di opportune equazioni di conservazione ed equilibrio, come verrà di seguito illustrato.

Questo codice è stato sviluppato dall’*Università di Padova* e in questo capitolo ne verranno esposti gli elementi teorici e le soluzioni numeriche più importanti.

3.2 RICHIAMI DI MECCANICA DEI MEZZI POROSI SATURI E PARZIALMENTE SATURI

Il comportamento meccanico dei mezzi porosi saturi o parzialmente saturi dipende da vari fattori tra cui: le forze d’inerzia, i flussi fluidi in forma accoppiata con la deformazione

dello scheletro solido e i cambiamenti di fase dovuti a scambi termici o a variazioni di pressione. Le varie fasi (solida, liquida e gassosa) possono essere accoppiate solo se si considera l'effetto che la variazione delle variabili di stato produce sulle altre fasi presenti, istante per istante.

C'è quindi la necessità di rappresentare il mezzo multifase come un continuo, in modo che le varie fasi presenti interagiscano tra loro.

Su queste basi il comportamento meccanico del modello adottato può essere descritto dalle seguenti teorie:

- *La teoria delle miscele.*
- *La teoria ibrida delle miscele.*
- *La teoria classica di Biot* (teoria fenomenologica che generalizza la teoria monodimensionale della consolidazione di Terzaghi) estesa al campo dinamico e a quello parzialmente saturo.

La teoria delle miscele ha come ipotesi fondamentale il fatto che tutti i componenti del sistema multifase siano contemporaneamente presenti in ogni punto di tutto lo spazio occupato dal mezzo poroso, supposto continuo e a domini sovrapposti. Perciò il comportamento di ogni fase e le relative interazioni sono rappresentabili da un campo di variabili continue. Tale teoria è di tipo macroscopico, poiché adotta una scala di tipo macroscopico essendo interessata solo alla distribuzione continua dei costituenti nello spazio. In tale ambito sono quindi utilizzabili le leggi della meccanica classica del continuo.

La teoria ibrida delle miscele, al contrario, è definita su scala microscopica: considerato un punto e preso nel suo intorno un volume infinitesimo dv , rappresentativo del mezzo multifase, le varie fasi componenti, pur a contatto tra loro, sono distinte e occupano solo una parte di questo dominio. Di conseguenza anche le variabili che le caratterizzano (temperatura, pressioni, spostamenti...) pur essendo continue all'interno di ogni fase sono discontinue all'interno del volume rappresentativo e, a maggior ragione, nel mezzo multifase in cui sono diffuse. Tuttavia, poiché a causa della complessità geometrica del mezzo poroso è molto difficile risolvere le equazioni di bilancio a livello microscopico, è necessario l'utilizzo dei teoremi della media, per permettere il passaggio dalla scala microscopica a quella macroscopica. Si ottiene così un sostituto continuo del mezzo multifase (discreto in

precedenza) in cui le varie fasi e le loro caratteristiche sono mediate e perciò distribuite con continuità su tutto il dominio in cui risultano sovrapposte.

La teoria ibrida delle miscele costituisce quindi il tramite tra l'analisi microscopica e quella macroscopica permettendo così l'utilizzo delle leggi di bilancio della meccanica classica (equazioni di equilibrio, continuità e conservazione) che risultano integrate ovvero mediate sull'elemento locale rappresentativo del dominio microscopico, su tutto quello macroscopico, per essere poi localizzate. Si possono così ricostruire le equazioni della teoria delle miscele e quelle della teoria di Biot per tener conto della consolidazione dei terreni.

I costituenti del mezzo multifase sono i seguenti:

- lo scheletro solido
- la fase acquosa
- la fase gassosa, costituita dalla miscela di gas perfetti di aria secca e di vapore acqueo

Fatte queste considerazioni preliminari, si può procedere con la scrittura delle equazioni di bilancio che a livello macroscopico per il mezzo poroso non isoterma in condizione di parziale saturazione, si basano sulle seguenti ipotesi:

- lo scheletro solido del mezzo sia deformabile
- tutte le fasi siano in contatto con lo scheletro solido
- i costituenti sono supposti immiscibili ad eccezione dell'aria secca e del vapore acqueo e chimicamente non reagenti
- esista equilibrio termodinamico fra le fasi presenti in un punto, ovvero le fasi nell'intorno infinitesimo di un punto abbiano la stessa temperatura
- siano possibili scambi di calore fra le fasi occupanti punti a temperatura diversa e flussi di acqua, vapore acqueo ed aria secca. In tal modo è possibile tenere conto della conduzione e convezione del calore, della diffusione del vapore, dei flussi fluidi dovuti ai gradienti di pressione ed agli effetti capillari e dei cambiamenti di fase dell'acqua (evaporazione e condensazione) contenuta nei pori
- i costituenti siano comprimibili
- i costituenti siano non polari

Le equazioni di equilibrio scritte a livello microscopico sono poi estese a livello macroscopico, attraverso un processo di integrazione prima sul volume rappresentativo dv e poi sul volume totale V del mezzo poroso. Tutte le quantità macroscopiche possono quindi essere ottenute da quelle microscopiche utilizzando i già citati teoremi della media, attraverso i quali è possibile definire opportuni operatori. Su tali basi, rispetto a quanto già detto in precedenza si definiscono così:

- equazioni di conservazione della massa per la fase solida, liquida e gassosa
- equazioni di conservazione della quantità di moto per ogni costituente
- equazioni di conservazione del momento della quantità di moto
- equazioni di bilancio dell'energia
- disuguaglianza di Clausius–Duhem relativa alla produzione di entropia

Il modello viene chiuso così dalla definizione dalle leggi costitutive dei materiali. Inoltre le equazioni differenziali ottenute in precedenza necessitano di condizioni iniziali e al contorno. Le prime si impongono sulla pressione della fase gassosa, sulla pressione capillare, sugli spostamenti, sulle velocità di deformazione dello scheletro solido e sulla temperatura (ovvero sulle variabili del problema). Le condizioni al contorno sono invece rappresentate dai valori che le variabili di stato e i loro flussi devono assumere sul contorno del dominio multifase.

3.3 SUDDIVISIONE DEL VOLUME IN ELEMENTI FINITI

La soluzione delle equazioni differenziali precedentemente citate non può essere ottenuta attraverso procedimenti analitici semplici. Infatti si tratta di un sistema di equazioni alle derivate parziali nello spazio e nel tempo, accoppiato e non lineare a causa dei legami costitutivi delle fasi fluide e del materiale e la complessa geometria del problema. Soluzioni analitiche sono possibili solo in casi monodimensionali molto semplici: si fa quindi ricorso ad una soluzione approssimata per via numerica. Questo modello è quindi risolto con l'uso del metodo degli elementi finiti per discretizzare il sistema di equazioni nello spazio e nel tempo, utilizzando in particolare la teoria di Galerkin per il metodo dei residui pesati.

La regione di interesse viene quindi suddivisa in un certo numero di elementi di forma semplice, gli elementi finiti per l'appunto, come mostrato nella Figura 3:

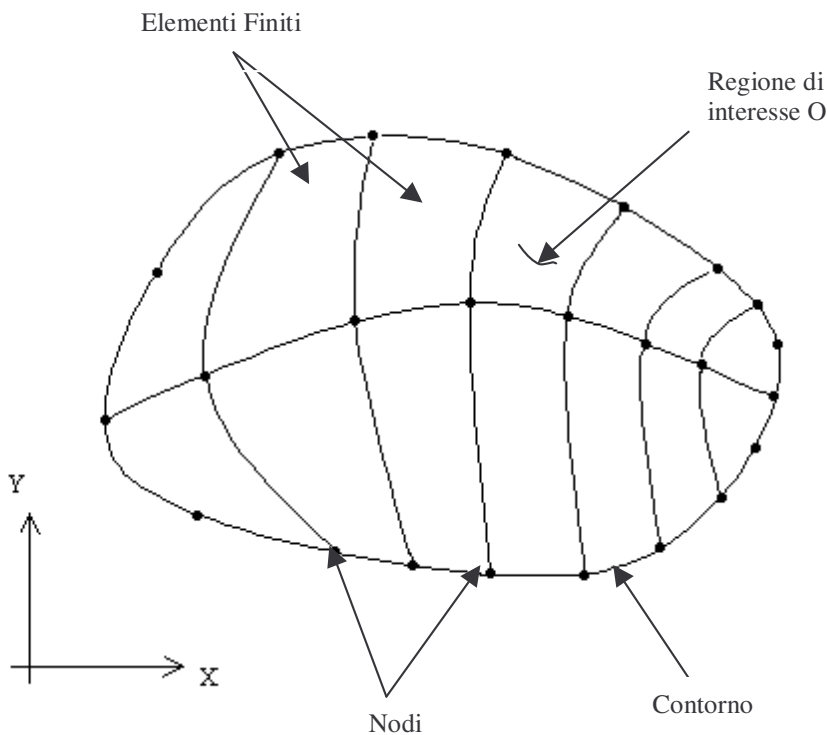
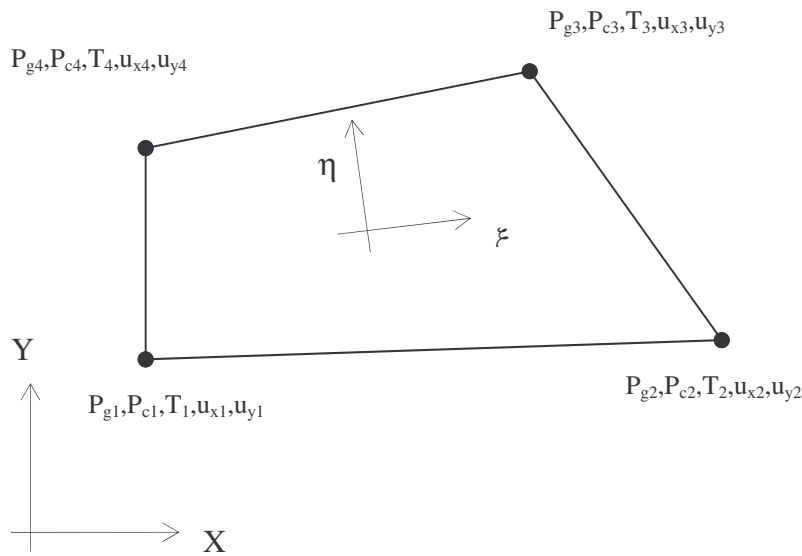


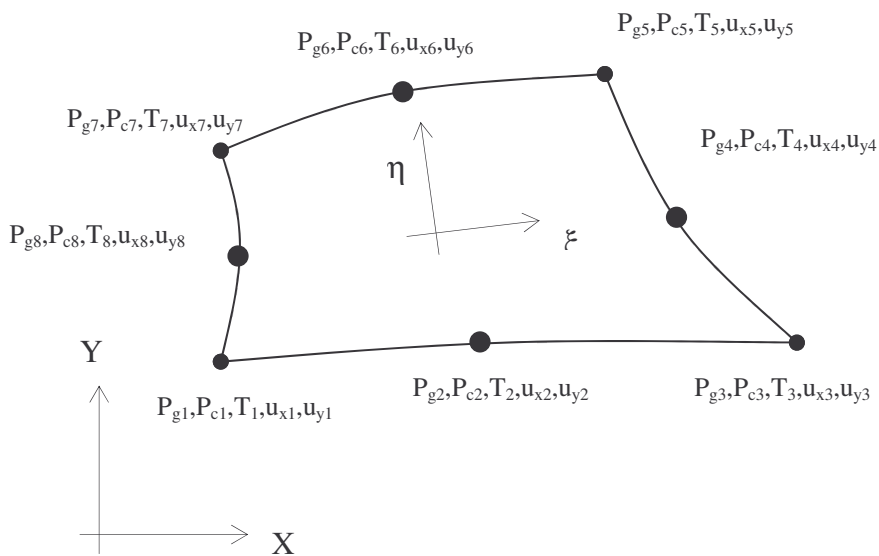
Figura 3. Suddivisione del dominio e definizione degli elementi caratteristici

Gli elementi finiti base della suddivisione attuata sul continuo possono essere di vario tipo, considerando che ogni nodo possiede cinque gradi di libertà (pressione del gas e capillare, temperatura, spostamenti orizzontali e verticali) si possono individuare:

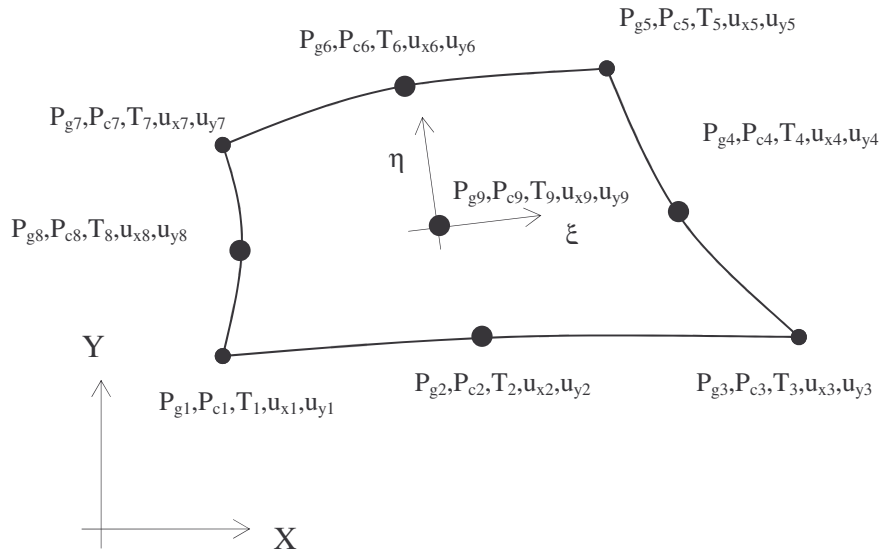
- elementi triangolari a tre nodi e quindici gradi di libertà
- elementi quadrangolari a quattro nodi e venti gradi di libertà



- elementi quadrangolari ad otto nodi e quaranta gradi di libertà



- elementi quadrangolari a nove nodi e quarantacinque gradi di libertà



Per ogni elemento viene definita una serie di nodi e si va a valutare il valore delle variabili. Esse, per ogni singolo elemento, possono essere espresse in termini approssimati attraverso particolari funzioni di forma per cui:

$$\begin{aligned}
 p_g &= p_g(t) = \mathbf{N}_p \bar{\mathbf{p}}_g(t), & p_c &= p_c(t) = \mathbf{N}_p \bar{\mathbf{p}}_c(t), \\
 T &= T(t) = \mathbf{N}_t \bar{\mathbf{T}}(t), & \mathbf{u} &= \mathbf{u}(t) = \mathbf{N}_u \bar{\mathbf{u}}(t).
 \end{aligned}$$

in cui le lettere soprascritte indicano un'approssimazione. Le precedenti possono essere sostituite nelle relative equazioni differenziali, dando origine, con il contributo delle condizioni al contorno, ad una serie di equazioni residuali che sono definibili tali a causa della natura approssimata delle euguaglianze precedenti.

Il metodo dei residui pesati prevede l'introduzione dei seguenti integrali:

$$\int_{\Omega} \mathbf{N}_x \mathbf{R}_x d\Omega + \int_{\Gamma} \mathbf{N}_x \mathbf{R}_x (b.c.) d\Gamma = \mathbf{0}$$

in cui \mathbf{N}_x sono i pesi o funzioni test, \mathbf{R}_x i residui per le equazioni e $\mathbf{R}_x(b.c.)$ i residui per le condizioni al contorno.

La forma integrale o debole delle equazioni di trasferimento di massa e calore (e delle altre equazioni richieste per completare il modello), ottenute per mezzo della procedura di Galerkin, può essere espressa attraverso una forma “matriciale” del tipo:

$$\mathbf{C}_{gg} \bar{\mathbf{p}}_g + \mathbf{C}_{gc} \bar{\mathbf{p}}_c + \mathbf{C}_{gt} \bar{\mathbf{T}} + \mathbf{C}_{gu} \bar{\mathbf{u}} + \mathbf{K}_{gg} \bar{\mathbf{p}}_g + \mathbf{K}_{gc} \bar{\mathbf{p}}_c + \mathbf{K}_{gt} \bar{\mathbf{T}} + \mathbf{f}_g = \mathbf{0},$$

$$\mathbf{C}_{cg} \bar{\mathbf{p}}_g + \mathbf{C}_{cc} \bar{\mathbf{p}}_c + \mathbf{C}_{ct} \bar{\mathbf{T}} + \mathbf{C}_{cu} \bar{\mathbf{u}} + \mathbf{K}_{cg} \bar{\mathbf{p}}_g + \mathbf{K}_{cc} \bar{\mathbf{p}}_c + \mathbf{K}_{ct} \bar{\mathbf{T}} + \mathbf{f}_c = \mathbf{0},$$

$$\mathbf{C}_{tg} \bar{\mathbf{p}}_g + \mathbf{C}_{tc} \bar{\mathbf{p}}_c + \mathbf{C}_{tt} \bar{\mathbf{T}} + \mathbf{C}_{tu} \bar{\mathbf{u}} + \mathbf{K}_{tg} \bar{\mathbf{p}}_g + \mathbf{K}_{tc} \bar{\mathbf{p}}_c + \mathbf{K}_{tt} \bar{\mathbf{T}} + \mathbf{f}_t = \mathbf{0},$$

$$\mathbf{C}_{uu} \bar{\mathbf{u}} + \mathbf{C}_{ug} \bar{\mathbf{p}}_g + \mathbf{C}_{uc} \bar{\mathbf{p}}_c + \mathbf{C}_{ut} \bar{\mathbf{T}} + \mathbf{f}_u = \mathbf{0},$$

che può essere espressa nella forma compatta $\mathbf{C}(\mathbf{x})\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}(\mathbf{x})\mathbf{x} + \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ in cui $\mathbf{x}^T = \{\bar{\mathbf{p}}_g, \bar{\mathbf{p}}_c, \bar{\mathbf{T}}, \bar{\mathbf{u}}\}$ è il vettore delle variabili, $\mathbf{C}(\mathbf{x})$, $\mathbf{K}(\mathbf{x})$ e $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ sono opportuni coefficienti ottenuti dall’assemblaggio delle equazioni precedenti.

3.4 IL METODO DI NEWTON–RAPHSON

Questo metodo serve per la discretizzazione del problema nel tempo, attraverso uno schema alle differenze finite. Con riferimento alla precedente equazione compatta si può scrivere:

$$\mathbf{C}(\mathbf{x}_{n+1}) \frac{\mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}_n}{\Delta t} + \mathbf{K}(\mathbf{x}_{n+1}) \mathbf{x}_{n+1} + \mathbf{f}(\mathbf{x}_{n+1}) = \mathbf{0}$$

in cui n è il numero di time step e Δt è la lunghezza del time step stesso.

Questo sistema di equazioni non è lineare e la relativa soluzione può essere ottenuta attraverso una procedura alla Newton–Raphson del tipo:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta t} \left[\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{C}(\mathbf{x}_{n+1}^l) (\mathbf{x}_{n+1}^l - \mathbf{x}_n) + \mathbf{C}(\mathbf{x}_{n+1}^l) \right] \Delta \mathbf{x}_{n+1}^l + \\ & + \left[\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{K}(\mathbf{x}_{n+1}^l) \mathbf{x}_{n+1}^l + \mathbf{K}(\mathbf{x}_{n+1}^l) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}_{n+1}^l) \right] \Delta \mathbf{x}_{n+1}^l = \\ & = - \left[\mathbf{C}(\mathbf{x}_{n+1}^l) \frac{\mathbf{x}_{n+1}^l - \mathbf{x}_n}{\Delta t} + \mathbf{K}(\mathbf{x}_{n+1}^l) \mathbf{x}_{n+1}^l + \mathbf{f}(\mathbf{x}_{n+1}^l) \right], \end{aligned}$$

in cui l è l'indice di iterazione e alla fine di ogni iterazione le variabili sono aggiornate secondo la relazione $\mathbf{x}_{n+1}^{l+1} = \mathbf{x}_{n+1}^l + \Delta \mathbf{x}_{n+1}^l$.

3.4.1 Integrazione numerica, metodo di Gauss

Per l'integrazione numerica viene implementato nel codice il metodo di Gauss che produce:

$$\int \mathbf{F}(r, s) dr ds = \sum_{i,j} \alpha_{i,j} \mathbf{F}(r_i, s_j)$$

in cui \mathbf{F} è la generica funzione integranda e $\alpha_{i,j}$ sono i pesi da attribuire a seconda del numero di punti ovvero di intervalli in cui si è suddiviso il dominio della funzione stessa. In questo caso l'integrale è doppio poiché la funzione è a due variabili (i cui limiti sono -1 e $+1$) per cui la precedente diventa:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} F(r, s) dr ds &= \sum_i \alpha_i \int_{-1}^{+1} F(r_i, s) ds \quad \text{ovvero} \\ \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} F(r, s) dr ds &= \sum_{i,j} \alpha_i \alpha_j F(r_i, s_j) \end{aligned}$$

Nel codice COMES-GEO esiste la possibilità di scegliere un diverso ordine di integrazione e quindi un diverso numero di punti di Gauss. La scelta dipende soprattutto dal tipo di elemento che si sceglie.

Il codice procede quindi all'assemblaggio delle equazioni determinate per i singoli elementi e alla determinazione della soluzione approssimata.

Il risultato generale del processo si può riassumere, per semplicità in un sistema matriciale del tipo:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

in cui la matrice \mathbf{A} è estesa, sparsa, bandata e generalmente non simmetrica. La procedura risolutiva usata nel codice COMES–GEO si basa sul metodo di Gauss, sviluppato da Irons, chiamato *metodo della soluzione frontale*, il cui vantaggio consiste nel fatto che esso assembla le equazioni ed elimina le variabili allo stesso tempo.

L'analisi sequenziale di ogni elemento procede seguendo i seguenti passi:

- assemblaggio delle equazioni con la matrice \mathbf{A}
- controllo delle equazioni assemblate nel sistema
- condensazione delle equazioni dal sistema (attraverso l'eliminazione Gaussiana) per tutti i gradi di libertà
- si ritorna al passo iniziale per l'elemento successivo

La matrice \mathbf{A} viene così ridotta in una forma triangolare superiore, per poter così determinare a ritroso il processo di soluzione per il vettore \mathbf{x} .

3.4.2 *Dati in ingresso*

I files di input possono essere suddivisi in quattro sezioni contenenti:

- dati generali relativi al problema in esame (nome del file, titolo del problema)
- dati generali di identificazione del problema (numero e durata dei time – steps, tipo di elementi scelti, numero di iterazioni ecc.)
- dati relativi al numero e tipo di nodi ed alla mesh generata

Dati relativi alle condizioni iniziali ed alle condizioni al contorno (per definire i valori delle variabili che caratterizzano il problema, rispetto ai nodi da esse condizionati).

CAPITOLO 4

LEGGE COSTITUTIVA TERMO-ELASTO-PLASTICA

La legge costitutiva basa la sua teoria sul modello di stato critico Cam-Clay.

4.1 EFFETTI TERMICI INDOTTI

Nello studio del comportamento termo-meccanico dei terreni, si considerano in genere due analisi distinte: un ciclo termico di riscaldamento e successivo raffreddamento (plane 1, Figura 4) durante il quale le tensioni efficaci rimangono costanti; un ciclo di carico e scarico meccanico a temperatura costante (plane 2, Figura 4).

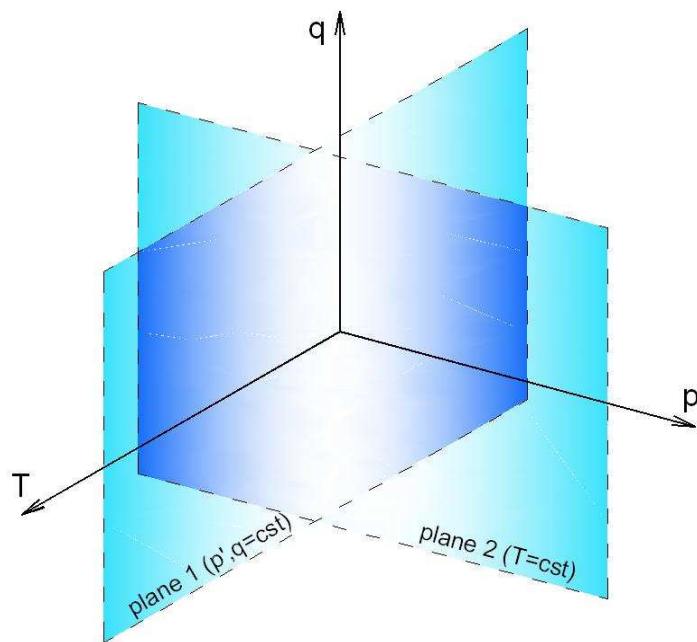


Figura 4. Percorsi di carico per l'analisi del comportamento termo-meccanico dei terreni; p' rappresenta la tensione media efficace, q il deviatore, T la temperatura.

4.1.1 Risposta dei terreni ai cicli di riscaldamento e raffreddamento

I terreni saturi possono essere schematizzati come un materiale bifasico costituito da una parte solida (uno scheletro di grani o particelle circondate da acqua adsorbita) e una parte fluida, l'acqua libera nei vuoti. Durante la fase di riscaldamento di un materiale terroso tutti i suoi costituenti dilatano; nel caso di terreni argillosi tale dilatazione causa una diminuzione di resistenza a livello degli strati contenenti acqua adsorbita e modifica la distanza tra le particelle d'argilla (Fleureau, 1979). Questo varia l'equilibrio tra le forze di attrazione di Van der Waals e le forze repulsive elettrostatiche, che sono le principali responsabili del comportamento termico delle argille. In condizioni normalconsolidate (NC), dove l'effetto dello stato pensionale è meno importante che in condizioni sovraconsolidate (OC), l'argilla in seguito ad un riscaldamento contrae e una parte significativa della deformazione è irreversibile dopo successivo raffreddamento; tale contrazione termica risulta essere inusuale per ogni materiale.

La Figura 5 illustra la risposta ad un ciclo di carico termico a compressione isotropa costante di un provino d'argilla in condizioni drenate (Cekerevac, 2003): dopo il riscaldamento il provino NC presenta una variazione volumetrica non lineare, il raffreddamento poi ha come conseguenza un aumento di volume. Il comportamento durante l'intero ciclo mostra l'irreversibilità delle deformazioni relative al carico termico e ciò è rappresentativo di hardening termico. Sebbene non ci siano stati variazioni fisiche nelle tensioni effettive, questo può essere interpretato come una progressiva densificazione del materiale, come ad esempio un comportamento sovraconsolidato. Situazioni fortemente OC presentano dilatazioni per la maggior parte reversibili. Tra questi due stati, un caso intermedio (cioè con modesti valori del grado di sovraconsolidazione, OCR) prima presenta dilatazioni, poi una tendenza prossima alla contrazione. Deformazioni termiche permanenti possono essere esibite anche da argille sovraconsolidate (Demarks & Charles, 1982).

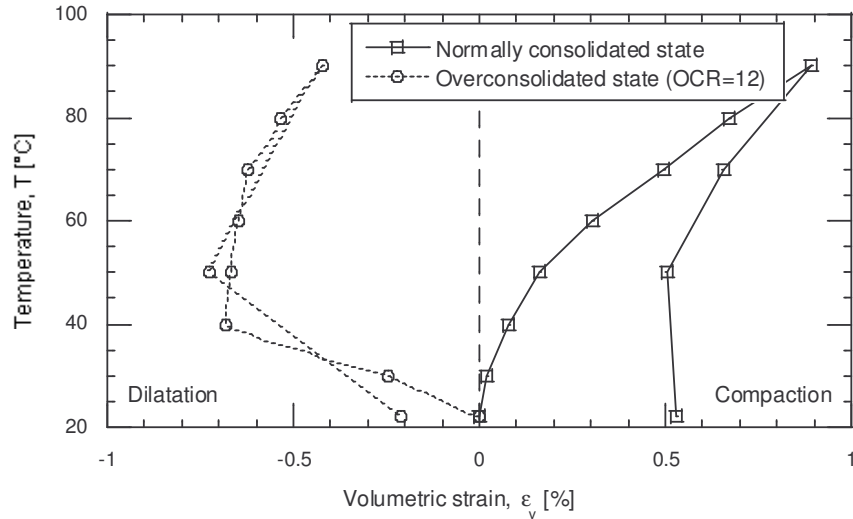


Figura 5. Comportamento termico tipico di terreni a grana fine in relazione a cicli di riscaldamento e raffreddamento. Kaolin clay (Cekerevac, 2003).

Il rapporto tra deformazioni reversibili e deformazioni irreversibili dovute ad un ciclo termico dipende dal tipo di suolo e dalla plasticità, oltre allo stato pensionale misurato in termini di OCR. Questo è illustrato nella Figura 6 dove si evidenzia l'influenza di OCR sul comportamento termico di vari tipi di materiale. Si può notare che, per un determinato incremento termico, per alti OCR il costipamento è minore e quindi la tendenza è a dilatare.

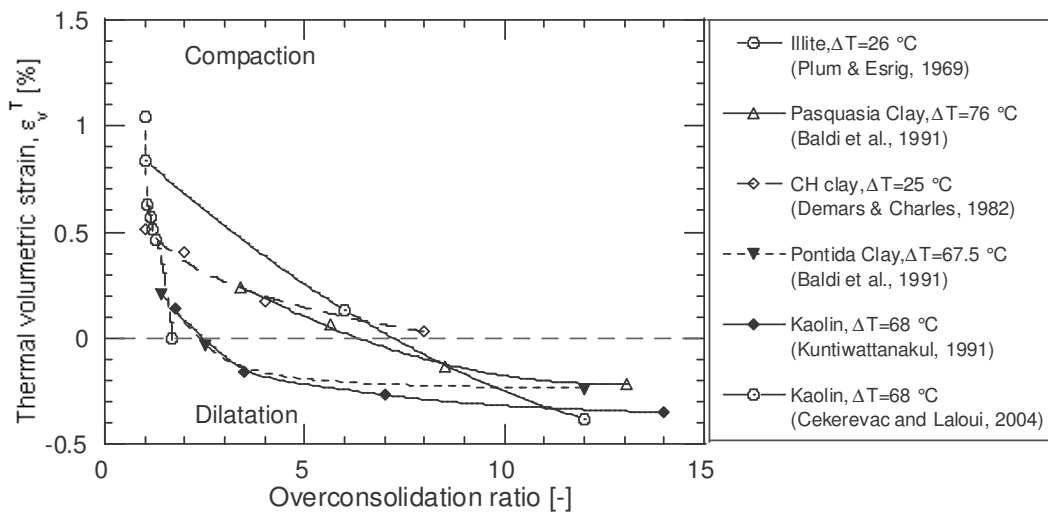


Figura 6. Influenza del grado di sovraconsolidazione, OCR, sulle deformazioni termiche di terreni a grana fine.

4.1.2 Variazione della pressione di preconsolidazione rispetto alla temperatura

La pressione di preconsolidazione, σ'_c , viene considerata come il limite di snervamento che separa il comportamento elastico dal comportamento plastico in condizioni isotrope o edometriche. Essa corrisponde alla tensione relativa all'intersezione delle due rette che contraddistinguono la curva di compressione (tensione media efficace/tensione efficace verticale VS indice dei vuoti). Diversi risultati in letteratura dimostrano la diminuzione della pressione di consolidazione all'aumentare della temperatura. La Figura 7 illustra l'esito dei test svolti su tre argille svedesi (Moritz 1995, Eriksson 1989, Tidfors and Sällfors 1989) e su di un'argilla naturale canadese (Bordali e al. 1994).

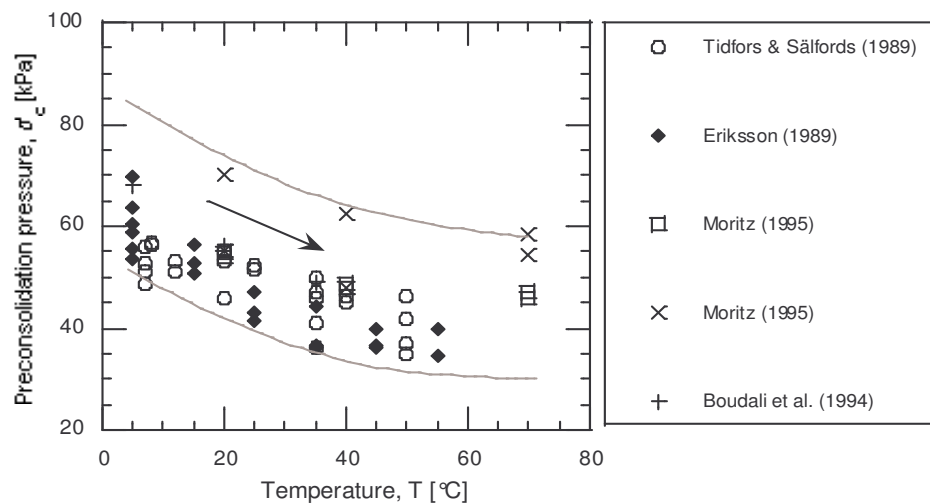


Figura 7. Influenza della temperatura sulla pressione di consolidazione.

4.1.3 Variazione dell'angolo di attrito rispetto alla temperatura

Oggigiorno gli effetti della temperatura sull'angolo di attrito attendono ancora conferma; alcuni ricercatori hanno dedotto che il riscaldamento diminuisce la resistenza meccanica, mentre altri affermano che essa aumenta lievemente. Alcuni risultati sperimentali sono stati ottenuti da Cekerevac e Laloui (2004), essi sembrano confermare che l'angolo d'attiro allo stato critico può sia aumentare lievemente che diminuire con la temperatura.

4.2 MODELLO COSTITUTIVO PER IL COMPORTAMENTO TERMO-ELASTO-PLASTICO DEI TERRENI

Si considera la decomposizione additiva del rateo di deformazione $\dot{\epsilon}_{ij}$:

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \dot{\epsilon}_{ij}^{Te} + \dot{\epsilon}_{ij}^{Tp} \quad [1]$$

dove con $\dot{\epsilon}_{ij}^{Te}$ si indica la componente elastica di deformazione, con $\dot{\epsilon}_{ij}^{Tp}$ la componente plastica.

4.2.1 Termo-elasticità

Il rateo di deformazione $\dot{\epsilon}_{ij}^{Te}$ non modifica lo stato di incrudimento del materiale. Così, la parte elastica, $\{\sigma'_{ij}\dot{\epsilon}_{ij}^{Te}\}$, dell'energia totale immagazzinata dal materiale durante una fase di carico termo-elastico, $\{\sigma'_{ij}\dot{\epsilon}_{ij}\}$, è completamente recuperabile dopo lo scarico, essendo σ'_{ij} il tensore delle tensioni effettive. A causa di tale reversibilità, la legge costitutiva elastica è indipendente dalla storia di carico e può essere espressa con la seguente relazione:

$$\dot{\epsilon}_{ij}^{Te} = L^{-1}(\sigma', T)\sigma'_{ij} \quad [2]$$

la dipendenza del tensore elastico, L , dalla tensione effettiva, σ' , e dalla temperatura, T , implica un comportamento non-lineare della componente elastica:

$$\dot{\sigma}'_{ij} = L(\sigma', T)(\dot{\epsilon}_{ij} - \dot{\epsilon}_{ij}^{Tp}) = B(\sigma', T, \alpha, \dot{\epsilon}) \quad [3]$$

dove si può vedere che l'incremento delle tensioni effettive dipende dallo stress, σ' , dalla temperatura, T , dal parametro di hardening, α , e dal rateo delle deformazioni totali, $\dot{\epsilon}$.

La deformazione elastica risulta essere data dalla sovrapposizione di due effetti distinti:

1. una deformazione meccanica ipoelastica in condizioni adiabatiche;
2. una deformazione termica reversibile.

Le due componenti, volumetrica e deviatorica, sono espresse da:

$$\dot{\varepsilon}_v^{Te} = \frac{\dot{p}'}{K} + \beta'_s \dot{T} \quad \dot{\varepsilon}_{ij}^{ed} = \frac{\dot{\sigma}'_{ij}}{G} \quad [4]$$

dove \dot{p}' e $\dot{\sigma}'_{ij}$ sono rispettivamente il rateo della tensione effettiva volumetrica e deviatorica espressi da:

$$\dot{p}' = \frac{tr(\dot{\sigma}'_{ij})}{3} \quad \dot{\sigma}'_{ij}{}^d = \dot{\sigma}'_{ij} - \dot{p}'\delta_{ij} \quad [5]$$

invece β'_s , coefficiente di espansione termica isotropa dello scheletro solido, varia principalmente con la temperatura e in misura minore con la pressione secondo la legge:

$$\beta'_s = (\beta'_{s0} + \zeta T)\zeta \quad [6]$$

dove β'_{s0} è il coefficiente di espansione termica isotropa alla temperatura di riferimento, T_0 (generalmente temperatura ambiente), ζ è il rapporto tra la pressione critica iniziale, p'_{c0} , e la pressione efficace, p' , alla temperatura ambiente:

$$\zeta = \frac{p'_{c0}}{p'} \quad [7]$$

ζ corrisponde alla variazione di β'_s rispetto alla temperatura (in genere $\zeta = -\beta'_{s0}/100$), T , quando $\zeta = 1$.

I moduli ipoplastici si calcolano tramite le relazioni:

$$K = K_{ref} \left(\frac{p'}{p_{ref}} \right)^n \quad G = G_{ref} \left(\frac{p'}{p_{ref}} \right)^n \quad [8]$$

dove K_{ref} e G_{ref} sono rispettivamente il modulo volumetrico e il modulo tangente misurati in corrispondenza della pressione di riferimento p_{ref} ; n è una costante del materiale.

4.2.2 Termo-plasticità

Dalla equazione [1] il rateo termo-elasto-plastico può essere espresso come la parte irreversibile della deformazione totale:

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{Tp} = \dot{\varepsilon}_{ij} - \dot{\varepsilon}_{ij}^{Te} \quad [9]$$

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{Tp} = \dot{\varepsilon}_{ij} - L^{-1}(\sigma', T) B(\sigma', T, \alpha, \dot{\varepsilon}) = \tilde{B}(\sigma', T, \alpha) \dot{\varepsilon}_{ij} \quad [10]$$

\tilde{B} è un operatore che valuta la porzione di deformazione totale indotta dalla plasticità (hardening del materiale). La particolarità del presente modello è che l'operatore \tilde{B} è una combinazione lineare di due processi irreversibili: un meccanismo termo-meccanico isotropo e un meccanismo termo-meccanico deviatorico. Perciò la deformazione plastica totale, $\dot{\varepsilon}_{ij}^{Tp}$, è la somma di due parziali ratei di deformazione plastica, $\dot{\varepsilon}_{ij,k}^{Tp}$, indotti da ogni meccanismo k :

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{Tp} = \sum_{k=1}^2 \dot{\varepsilon}_{ij,k}^{Tp} = \dot{\varepsilon}_{ij,1}^{Tp} + \dot{\varepsilon}_{ij,2}^{Tp} \quad [11]$$

Queste considerazioni sono il risultato della teoria della plasticità multi-meccanismo (Koiter, 1960; Mandel, 1965; Hujieux, 1979). Ogni meccanismo viene attivato se lo stato tensionale raggiunge il limite di snervamento ad esso corrispondente, quando cioè le funzioni di snervamento, f_{Ti} e f_{Td} , risultano positive. Tale attivazione induce la formazione di deformazioni irreversibili; il rateo di deformazione plastica totale può essere espresso come segue:

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{Tp} = \sum_{k=1}^2 \lambda_k \frac{\partial g_k}{\partial \sigma'_{ij}} \quad [12]$$

dove g_k sono i potenziali plastici corrispondenti ad ogni meccanismo e λ_k sono i moltiplicatori plastici, positivi se il meccanismo corrispondente è attivato ($f_k = 0$ e $\dot{f}_k = 0$).

Riassumendo il concetto di multi-plasticità, le due funzioni di snervamento definiscono un dominio chiuso nello spazio delle tensioni efficaci dentro il quale il comportamento del materiale è reversibile. Se lo stato tensionale raggiunge uno dei limiti di snervamento, il meccanismo corrispondente viene attivato e contemporaneamente si sviluppano deformazioni irreversibili.

4.2.2.1 Meccanismo termo-elasto-plastico isotropo

Il limite, f_{Ti} , del meccanismo termo-elasto-plastico isotropo è rappresentato nel piano della tensione efficace media, p' , e della temperatura, T , Figura 8 e Figura 9, ed è espresso come:

$$f_{Ti} = p' - \sigma'_c \cdot r \quad [13]$$

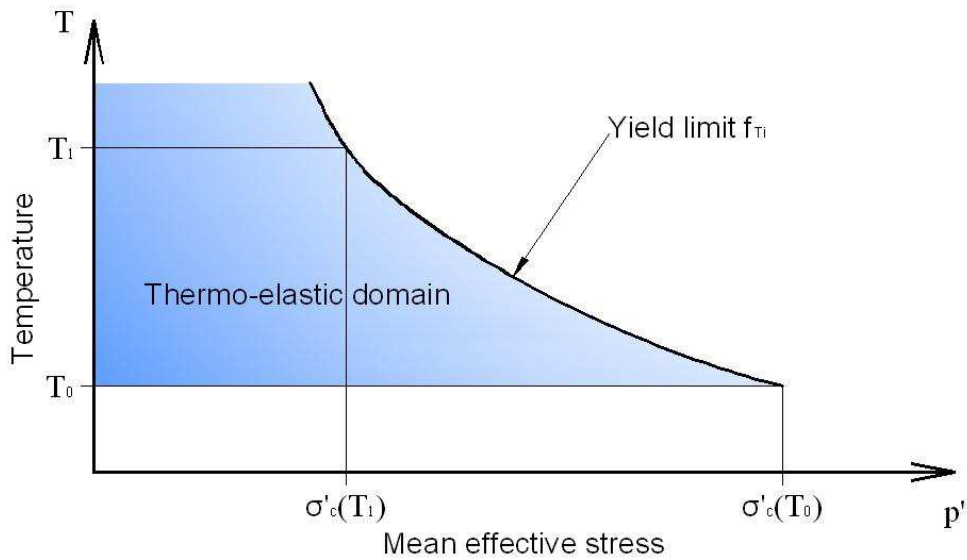


Figura 8. Funzione di snervamento del meccanismo isotropo.

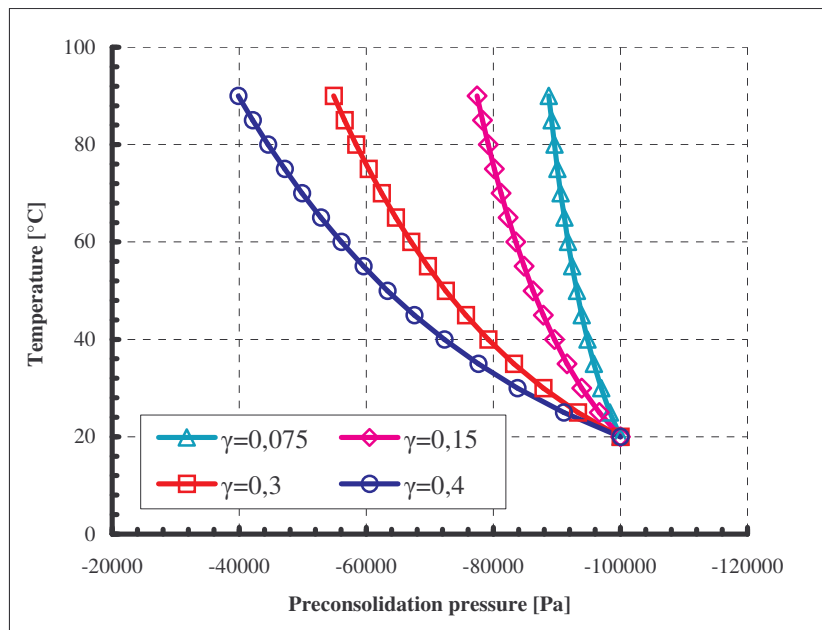


Figura 9. Variazione della funzione di snervamento isotropo in relazione al parametro γ .

In questa relazione il parametro r corrisponde al grado di plasticizzazione (hardening mobilitato) del limite di snervamento isotropo. E' una funzione iperbolica della deformazione plastica volumetrica, ε_v^p . Esso varia da r^e , che definisce il dominio elastico ($0 < r^e < r$), a 1, cioè stato completamente plastico.

Ciò comporta una progressiva evoluzione del limite plastico isotropo durante la fase di carico e una parziale regressione nella fase di scarico. σ'_c è la pressione di preconsolidazione espressa come funzione della deformazione plastica volumetrica, ε_v^p , e della temperatura:

$$\sigma'_c = \sigma'_{c_0}(T) e^{\beta \varepsilon_v^p} \quad [14]$$

$\sigma'_{c_0}(T)$ è il valore della pressione di preconsolidazione alla temperatura T , β è il modulo plastico di compressibilità (cioè la pendenza della retta $\varepsilon_v^p - \ln(\sigma'_{c_0})$). Per tener conto dell'effetto termico sul limite elastico, si introduce la legge di dipendenza dalla temperatura della pressione di preconsolidazione, $\sigma'_{c_0}(T)$:

$$\sigma'_{c_0}(T) = \sigma'_{c_0}(T_0) \cdot \{1 - \gamma \ln[T/T_0]\} \quad [15]$$

dove $\sigma'_{c_0}(T_0)$ è il valore della pressione di preconsolidazione alla temperatura di riferimento e γ un parametro del materiale. Così la funzione di snervamento volumetrico termo-plastico è espressa da:

$$f_{Ti} = p' - \sigma'_{c_0}(T_0) \cdot e^{\varepsilon_v^p} \cdot \{1 - \gamma \ln[T/T_0]\} \cdot r \quad [16]$$

L'equazione [16] contiene tre parametri del materiale: β e r che esprimono l'evoluzione dell'incrudimento meccanico, e γ che controlla l'evoluzione dell'incrudimento termico. Quest'ultimo definisce la forma del limite elastico come mostrato in Figura 9.

La legge di flusso è associata ($f_{Ti}(p', T, e^{\varepsilon_v^p}) = g_{Ti}(p', T, e^{\varepsilon_v^p})$):

$$\dot{\varepsilon}_{ii}^p = \lambda_i \frac{\partial g_{Ti}}{\partial \sigma'_{ii}} = \frac{\lambda_i}{3} \quad [17]$$

Il moltiplicatore plastico, λ_i , è determinato utilizzando l'equazione di consistenza come mostrato successivamente.

4.2.2.2 Meccanismo termo-plasticità deviatorico

Per semplicità si basa il limite elastico deviatorico sul noto modello Cam-Clay:

$$f_d = \frac{q}{Mp'} + \ln \frac{d \cdot p'}{\sigma'_c} - 1 = 0 \quad [18]$$

con d distanza (nel piano logaritmico) tra la pressione di preconsolidazione, σ'_c , e la pressione critica secondo il Cam-Clay, p'_c . Dato che l'angolo d'attrito può dipendere dalla temperatura, si introduce la seguente relazione:

$$M(T) = M_0 - g(T - T_0) \quad [19]$$

dove M_0 è la pendenza della linea di stato critico alla temperatura ambiente (T_0) e g è la pendenza media di variazione dell'angolo di attrito con la temperatura. Considerando la legge di dipendenza dalla temperatura della pressione di preconsolidazione, [15], la superficie di snervamento diventa, in condizioni non isoterme, Figura 10:

$$f_{Td} = \frac{q}{(M_0 - g(T - T_0))p'} + \ln \frac{d \cdot p'}{\sigma'_{c0}(T_0) e^{\varepsilon_v^p} \left[1 - \gamma \ln \frac{T}{T_0} \right]} - 1 = 0 \quad [20]$$

Il modello utilizza pure nel meccanismo deviatorico un flusso plastico associato. Così le leggi di incrudimento sono le seguenti:

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \lambda_d \frac{\partial g_{Td}}{\partial \sigma'_{ij}} = \lambda_d \frac{1}{Mp'} \left[\frac{\partial q}{\partial \sigma'_{ij}} + \frac{1}{3} \left(M - \frac{q}{p'} \right) \right]$$

con

$$\frac{\partial q}{\partial \sigma'_{ij}} = \begin{cases} \frac{3}{2q} (\sigma_{ij} - p') & \text{se } i = j \\ \frac{3\sigma_{ij}}{q} & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

$$\dot{\varepsilon}_v^p = \lambda_d \frac{\partial g_{Td}}{\partial p'} = \lambda_d \frac{1}{Mp'} \left[M - \frac{q}{p'} \right]$$

$$\dot{\varepsilon}_d^p = \lambda_d \frac{\partial g_{Td}}{\partial q} = \lambda_d \frac{1}{Mp'}$$

λ_d deve essere determinato, come per il meccanismo isotropo, tramite la condizione di consistenza.

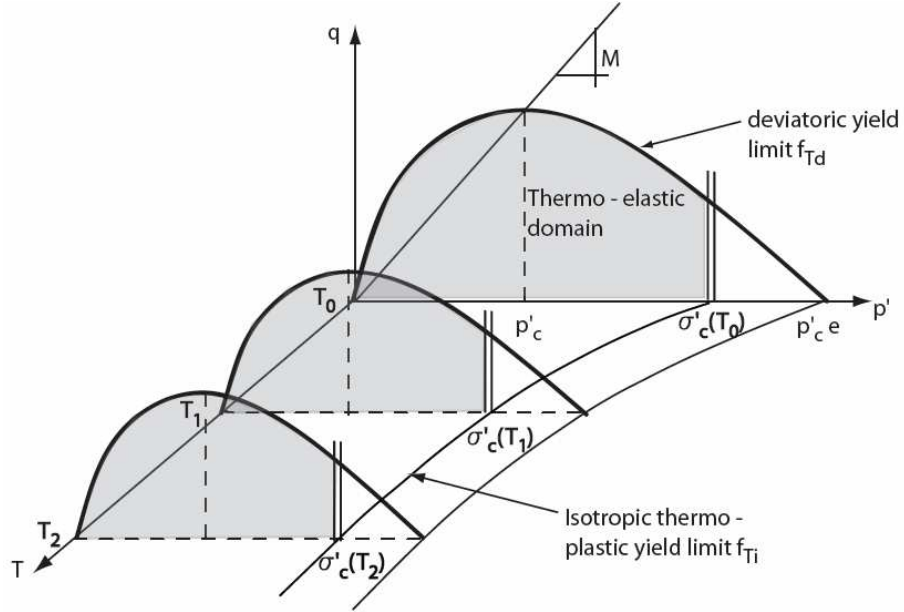


Figura 10. Accoppiamento dei meccanismi termoplastici isotropo e deviatorico.

4.2.2.3 Accoppiamento dei due meccanismi

I limiti elastici isotropo e deviatorico sono accoppiati attraverso la variabile di snervamento ε_v^p . Infatti la pressione di preconsolidazione $\sigma'_c = \sigma'_{c0}(T)e^{\beta\varepsilon_v^p}$, che dipende da ε_v^p , appare in entrambe le espressioni dei due limiti elastici. Perciò, se ε_v^p cresce a causa dell'attivazione di uno dei due meccanismi, il limite elastico dell'altro meccanismo varierà a sua volta. Di conseguenza, i due moltiplicatori plastici, λ_i e λ_d , sono correlati.

Quando i due meccanismi vengono attivati simultaneamente, il rateo di deformazione plastica totale, $\dot{\varepsilon}_v^p$, è la somma del rateo di deformazione plastica volumetrica indotto da entrambi i meccanismi:

$$\dot{\varepsilon}_v^p = \lambda_d \frac{\partial g_{Td}}{\partial p'} + \lambda_i \frac{\partial g_{Ti}}{\partial p'} = \lambda_d \frac{1}{Mp'} \left[M - \frac{q}{p'} \right] + \lambda_i \quad [25]$$

così le condizioni di consistenza divengono:

$$\dot{f}_{Ti} = \partial_{p'} f_{Ti} \dot{p}' + \partial_T f_{Ti} \dot{T} + \partial_r f_{Ti} \dot{r} + \partial_{\varepsilon_p^p} f_{Ti} \left(\lambda_d \frac{I}{Mp'} \left[M - \frac{q}{p'} \right] + \lambda_i \right) = 0 \quad [26]$$

$$\dot{f}_{Td} = \partial_{\sigma'} f_{Td} \dot{\sigma}' + \partial_T f_{Td} \dot{T} + \partial_{\varepsilon_p^p} f_{Td} \left(\lambda_d \frac{I}{Mp'} \left[M - \frac{q}{p'} \right] + \lambda_i \right) = 0 \quad [27]$$

Risolvere queste due equazioni significa determinare i due moltiplicatori plastici.

4.3 RISULTATI NUMERICI IN LETTERATURA

4.3.1 Consolidazione isotropa dopo riscaldamento

Si riportano i risultati di una simulazione numerica i cui cicli termo-meccanici sono illustrati in Figura 11; tali cicli rappresentano due consolidazioni avvenute una volta riscaldato il provino a due temperature diverse. Si può notare che seguendo il percorso EF il dominio elastico è minore (pressione di preconsolidazione inferiore, punto A2) rispetto al dominio del percorso CD, questi risultati sono stati riscontrati da diversi autori.

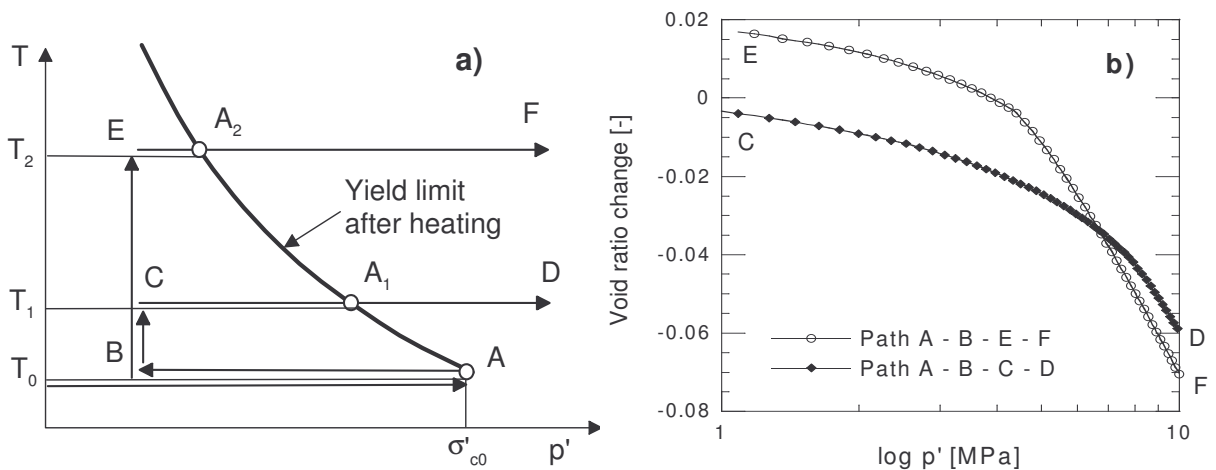


Figura 11. Consolidazione isotropa in seguito a riscaldamento del provino; (a) percorsi seguiti, (b) risultati numerici.

4.3.2 Consolidazione isotropa in seguito a cicli di riscaldamento e raffreddamento

Si analizza l'effetto di un ciclo di riscaldamento e raffreddamento ($A \rightarrow A_1 \rightarrow A_2$, Figura 12) su di un materiale inizialmente normalconsolidato. L'assettamento indotto dal riscaldamento ($A \rightarrow A_1$) causa l'incremento della funzione di snervamento isotropa ($\sigma'_{c0} \rightarrow \sigma'_{c1}$). Dopo il raffreddamento ($A_1 \rightarrow A_2$), il carico meccanico dal punto A_2 mostra che lo stato tensionale rimane in campo elastico ($A_2 \rightarrow A'$) per poi raggiungere il limite di snervamento (σ'_{c1}), punto da cui il materiale presenta nuovamente comportamento plastico. Questo fenomeno corrisponde a quello osservato sperimentalmente (Kuntiwattanakul, 1991; Baldi e al., 1985; Cui e al., 2000).

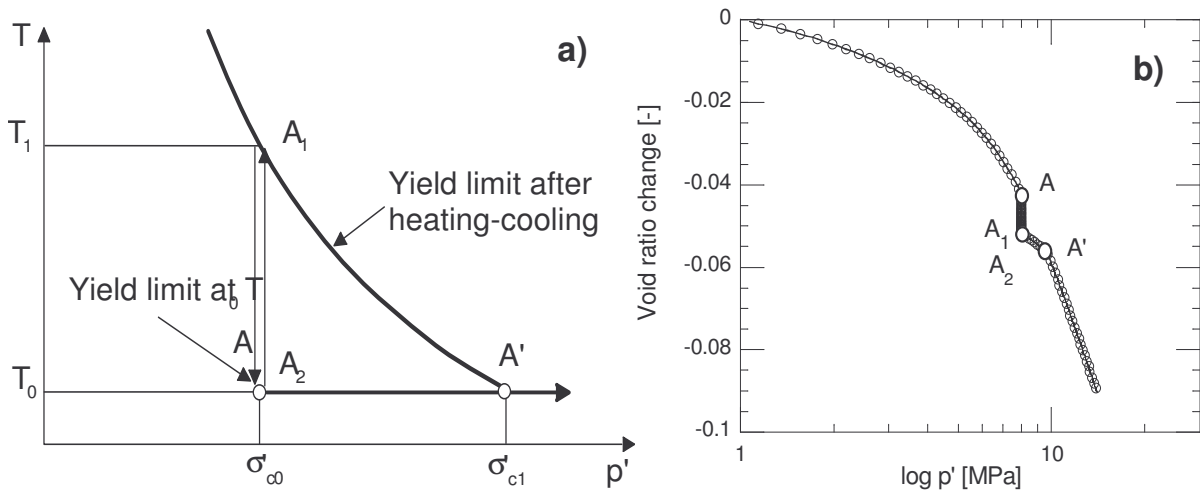


Figura 12. Consolidazione isotropa in seguito a cicli di riscaldamento; (a) percorsi termo-meccanici seguiti, (b) risultati numerici.

4.3.3 Test sull'argilla naturale (Boomclay) condotto da Baldi e al. (1991)

Baldi e al. (1991) hanno riportato lo studio sul comportamento termo-meccanico di un'argilla naturale (Boom clay). Il programma sperimentale consisteva in numerosi test relativi a cicli di carico termo-meccanico. In particolare nel test TBoom9, il provino è stato riscaldato a 95 °C e quindi raffreddato a 21.5 °C a tre differenti stati tensionali iniziali (6 MPa, 3 MPa e 1 MPa) che corrispondono a tre diversi gradi di sovraconsolidazione, 1,2 e 6 rispettivamente. Il

confronto fra i risultati sperimentali e i risultati numerici, Figura 13, mostra l'efficacia della simulazione del comportamento del terreno sia in fase di riscaldamento che in fase di raffreddamento per differenti OCR (Laloui e Cekerevac, 2003).

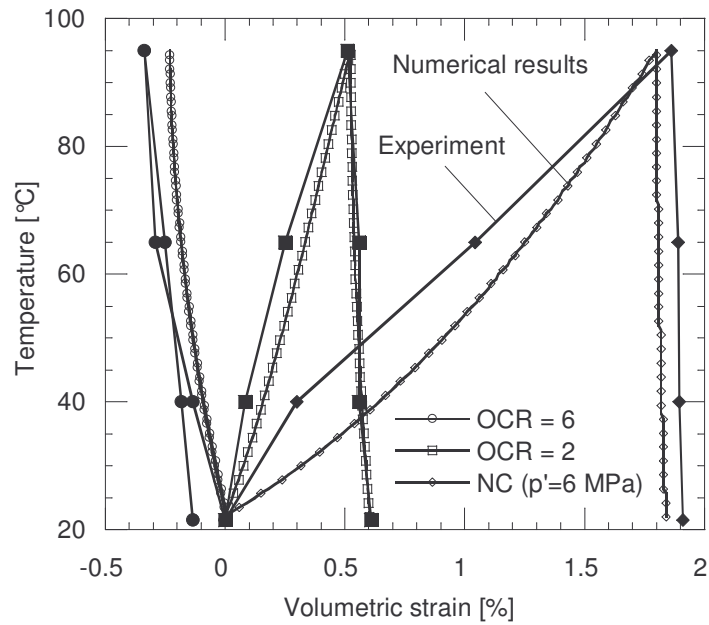


Figura 13. Confronto fra risultati sperimentali (Baldi e al., 1991) e risultati numerici col modello proposto.

4.4 RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

1. Baldi G, Borsetto M, Hueckel T, Tassoni E. Thermally induced strains and pore pressure in clays. International Symposium on Environmental Geotechnology, Allentown, Pennsylvania; p. 391-402, 1985.
2. Baldi G, Hueckel T, Peano A, Pellegrini R. Developments in modelling of thermo-hydro-geomechanical behaviour of Boom clay and clay-based buffer materials. Report: 13365/2 EN, Commission of the European Communities 1991.
3. Boudali M, Leroueil S, Sinivasa Murthy B R. Viscous behaviour of natural clays. 13th International Conference on Soil Mechanics and foundation Engineering, New Delhi; p. 411-416, 1994.
4. Burger A, Recordon E, Bovet D, Cotton L, Saugy B. Thermique des nappes souterraines. Presses polytechniques universitaires romandes, 1985.
5. Cekerevac C. Thermal effects on the mechanical behaviour of saturated clays: an experimental and numerical study. Doctoral thesis No 2828, Swiss Federal Institute of Technology, Lausanne; 2003.
6. Cekerevac C., Laloui, L. Experimental study of the thermal effects on the mechanical behaviour of a clay. International Journal of Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, Vol 28, pp 209-228, 2004.
7. Cui Y J, Sultan N, Delage P. Propriétés thermomécaniques des milieux granulaires. In: J. Lanier, editor. Mécanique des milieux granulaires, Lavoisier, pp. 323-363, 2000
8. Demarks K R, Charles R D. Soil volume changes induced by temperature cycling. Canadian Geotechnical Journal. vol. 19, pp. 188-194, 1982.
9. Delage, P. Coupled multiphysics problems in geomechanics - Physical mechanisms and experimental determination. Revue Européenne de Génie Civil, 2005.
10. Eriksson L.G. Temperature effects on consolidation properties of sulphide clays. 12th International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering, Rio de Janeiro; pp. 2087-2090 1989.
11. Fleureau, J M. Influence d'un champ thermique ou électrique sur les phénomènes d'interaction solide-liquide dans les milieux poreux, Doctoral thesis, Ecole Centrale de Paris, 1979.
12. Hujeux J C. Calcul numérique de problèmes de consolidation elastoplastique, Doctor of Engineering Thesis, Ecole Centrale de Paris, 1979.
13. Koiter, W T, General theorems for elastic-plastic solids. In Progress in Solid Mechanics, eds I.N.Sneddon and R.Hill, North-Holland, Amsterdam, 167-221, 1960.

14. Kuntiwattanakul P. Effect of High Temperature on Mechanical Behaviour of Clays. Doctoral thesis, University of Tokyo; 1991.
15. Laloui L., Cekerevac, C. Thermo-plasticity of clays: an isotropic yield mechanism. *Computers and Geotechnics*, Vol 30/8 pp 649-660, 2003.
16. Laloui L, Modaressi H. Modelling of the thermo-hydro-plastic behaviour of clays. In: Hoteit et al, editors. *Hydromechanical and thermohydromechanical behaviour of deep argillaceous rock*. Balkema, pp. 161-170, 2002.
17. Laloui L, Moreni M, Vulliet L. Comportement d'un pieu bi-fonction, fondation et échangeur de chaleur. *Canadian Geotechnical Journal*, 40(2), pp. 388-402, 2003.
18. Mandel, J. Une généralisation de la théorie de Koiter, *I. J. Solid Struct.*, 1: 273-295, 1965.
19. Mitchell J.K, McMillan J.C, Green S.L, Sisson R.C. Field testing of cable backfill systems. In S.A.B. et al., editors. *Underground Cable Thermal Backfill*. Pergamon Press, New York, pp. 19-33, 1982.
20. Moritz L. Geotechnical Properties of Clay at Elevated Temperatures. Report: 47, Swedish Geotechnical Institute, Linköping; 1995.
21. Plum L. Esrig MI. Some temperature effects on soil compressibility and pore water pressure. Report: 103, Highway Research Board, Washington 1969.
22. Tidfors M, Sällfors S. Temperature effect on preconsolidation pressure. *Geotechnical testing Journal*. 12(1), pp. 93-97, 1989.

CAPITOLO 5

VALIDAZIONE NUMERICA

5.1 PREMESSA

Per prima cosa si presentano alcune validazioni sperimentali, denominate benchmark, nelle quali vengono convalidati i risultati numerici del codice sviluppato a Losanna tramite il confronto con prove sperimentali tipiche in letteratura.

Vista l'impossibilità di simulare fedelmente le medesime prove, in quanto il codice COMES-GEO prevede l'analisi in stato piano di deformazione, mentre i benchmark considerati sono il risultato di prove triassiali o in stato tensionale isotropo, si passa alla convalida della subroutine THERMEC confrontando i risultati ottenuti con analoghe simulazioni svolte dal codice svizzero. D'apprima si convalideranno prove in regime elastico lineare e non, in condizioni isoterme e non-isoterme; poi si andranno anche a valutare simulazioni in regime plastico non-lineare, in condizioni isoterme e non isoterme.

Per ultimo si riportano delle prove sperimentali a verifica del comportamento previsto dalla teoria termo-plastica.

5.2 VALIDAZIONE DEL CODICE DI LOSANNA

5.2.1 *Test isotermi*

5.2.1.1 *Compressione isotropa*

La prima prova riguarda uno stato tensionale particolare, detto isotropo, in quanto le tensioni efficaci sono le stesse per ogni direzione, $\sigma'_x = \sigma'_y = \sigma'_z = p'$ mentre $\tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$ e $q=0$; in questa particolare configurazione delle tensioni il deviatore

risulta nullo e quindi non entra in gioco la plasticità indotta dal meccanismo deviatorico, l'utilità è quindi quella di poter testare il comportamento plastico isotropo. Si riportano i parametri di materiale influenti per la prova ed i risultati ottenuti, Tabella 1 e Figura 14.

Elastic [K_{ref} , n] [MPa], [-]	460, 1
Plastic [β , d , σ'_{co}] [-], [-], [kPa]	22, 2, 28
Hardening [c] [-]	0.001
Domain [$r_{\acute{e}la}$] [-]	0.001

Tabella 1. Parametri meccanici isotropi dedotti per la prova effettuata da Jamin, 2003.

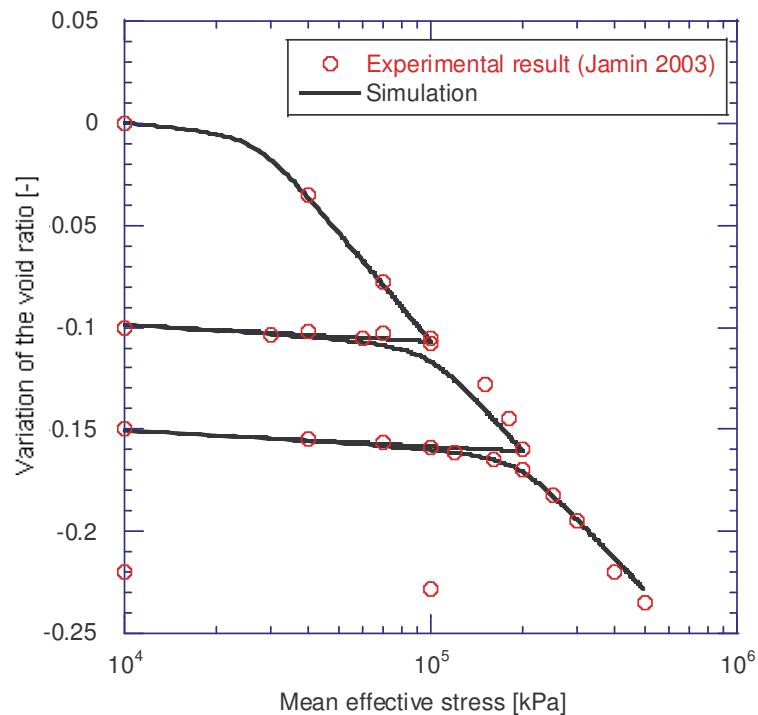


Figura 14. Confronto della simulazione numerica con la prova sperimentale di consolidazione isotropa svolta da Jamin, 2003.

5.2.1.2 Compressione triassiale svolta su di un provino normal consolidato

Si passa ora alla convalida del meccanismo deviatorico simulando una prova triassiale svolta su di un provino con $OCR=1$. In Tabella 2 e si riportano i parametri materiali necessari ed i risultati numerici.

σ'_{c0} [kPa]	800
K_{ref} [MPa]	131.3
G_{ref} [MPa]	78.66
β	43.7
ϕ [°]	25
r	1
b	1
d	2
n	1

Tabella 2. Parametri materiali necessari per la prova triassiale.

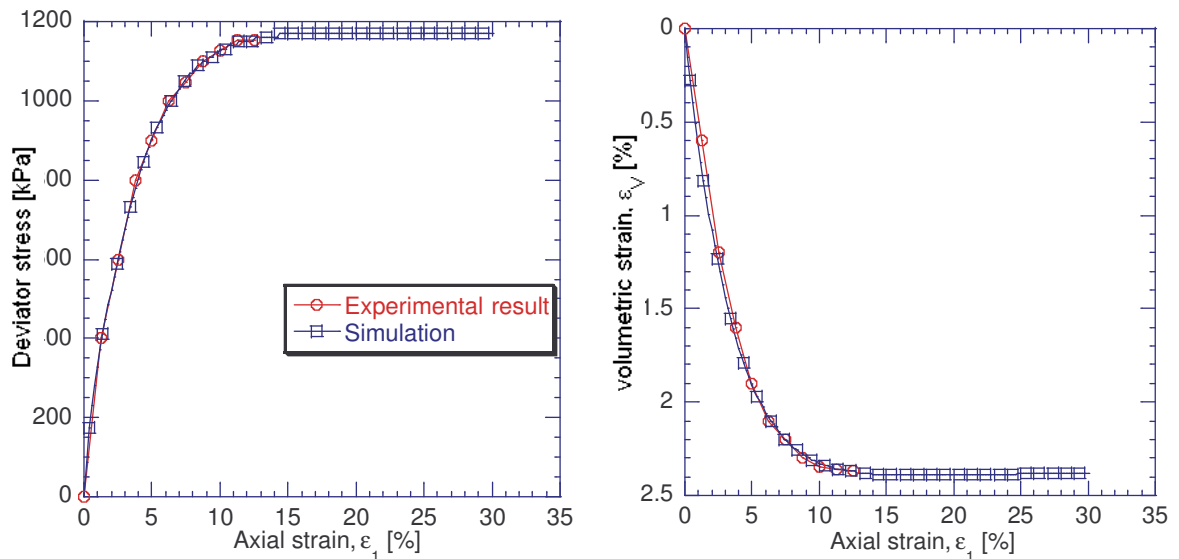


Figura 15. Confronto tra simulazione numerica e risultati sperimentali della prova triassiale isoterma.

5.2.2 Test non-isoterme

5.2.2.1 Meccanismo isotropo

Si riporta la simulazione di una prova sperimentale con cicli di carico termo-meccanico, Figura 16, svolta da Baldi e al., 1991, su tre provini con OCR diverso, precisamente pari a 1 MPa, 2 MPa e 6 MPa, il che equivale a modificare lo stato tensionale iniziale rispettivamente a $p' = 6$ MPa, $p' = 3$ MPa e $p' = 1$ MPa.

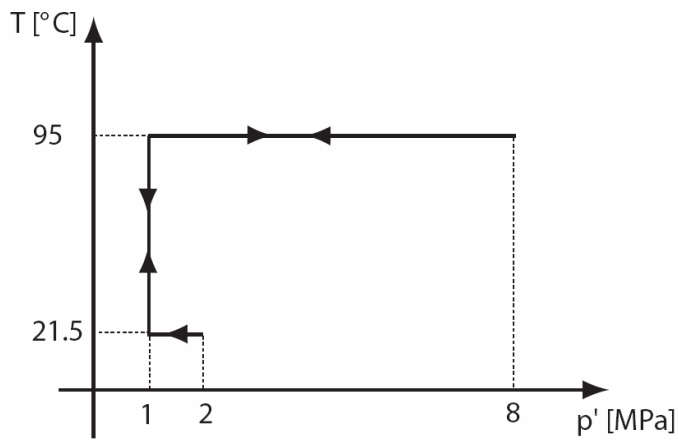


Figura 16. Percorso di carico termo-meccanico seguito.

Elastic [Kref, Gref, n] [MPa], [MPa], [-]	150, 130, 0.4
Plastic [β , d, σ'_{co}] [-], [-], [MPa]	47, 1.3, 6
Hardening [c] [-]	0.0004
Domain [$r_{\acute{e}la}$] [-]	0.01
Thermal [β'_{s0} , γ] [°C ⁻¹], [-]	$3 \cdot 10^{-5}$, 0.18

Tabella 3. Parametri materiali adottati, Baldi e al., (1991)

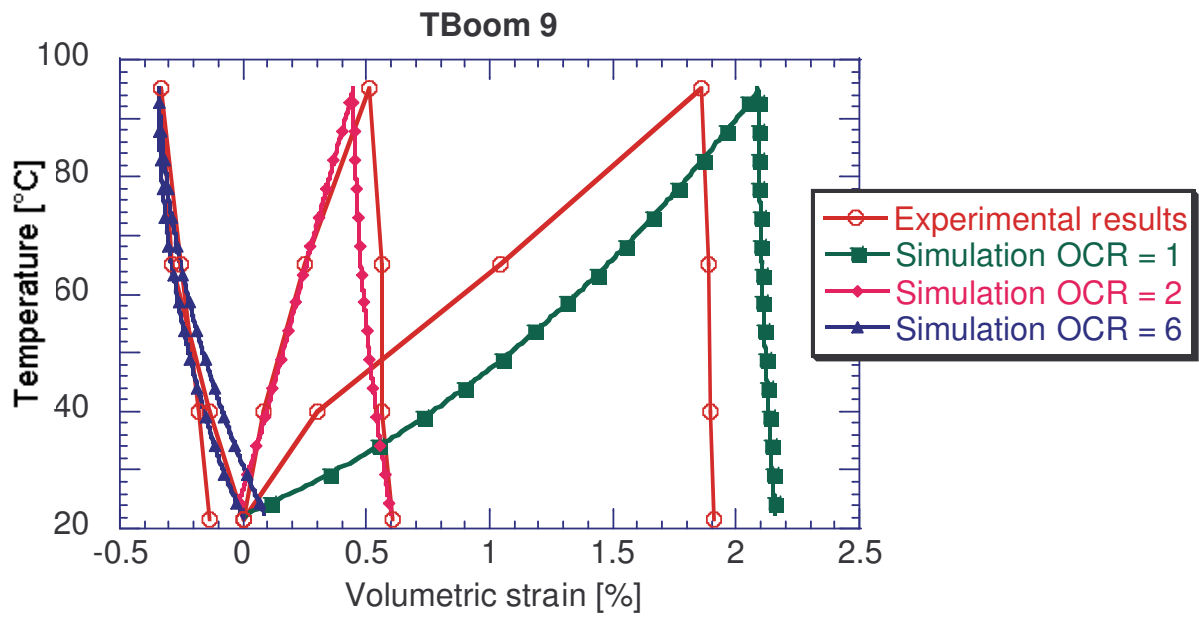


Figura 17. Confronto fra la simulazione numerica del carico termico e le prove sperimentali, relative a provini con OCR pari a 1 MPa, 2 MPa e 6 MPa; Baldi e al., (1991).

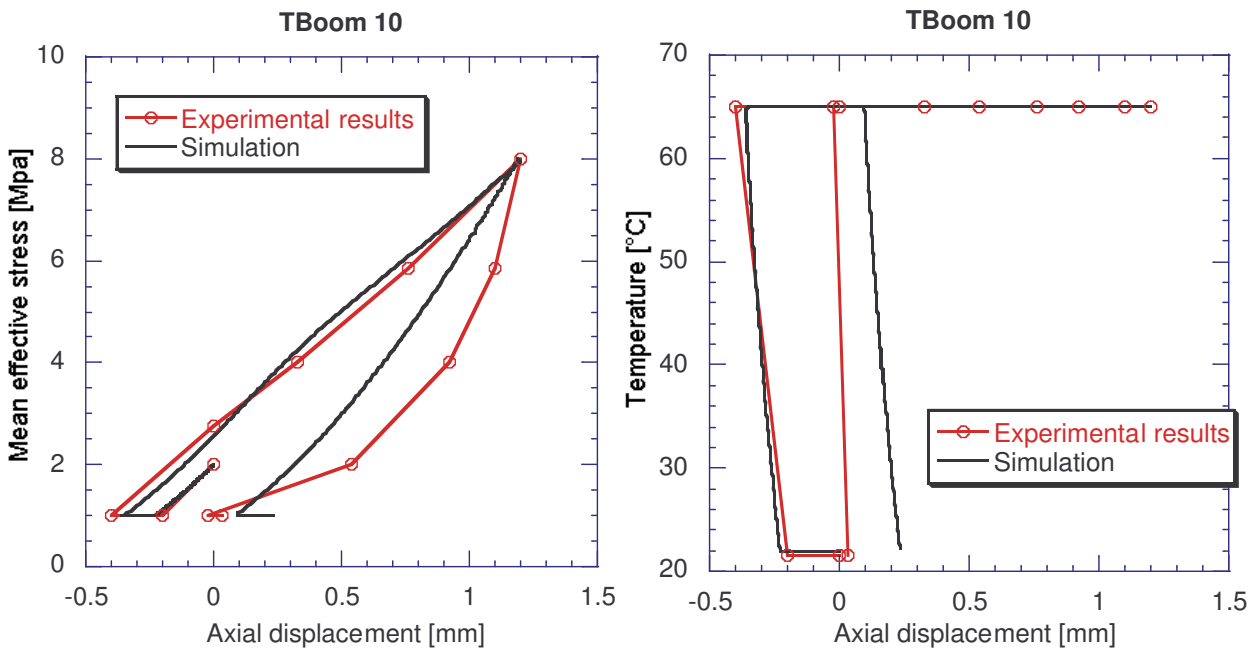


Figura 18. Confronto tra la simulazione numerica e la prova sperimentale del carico meccanico svolta da Baldi e al., (1991).

5.2.2.2 Meccanismo deviatorico

Per finire la validazione del meccanismo plastico deviatorico in regime non-isotermo, avviene tramite le simulazioni delle prove triassiali svolte da Cekerevac, 2003, su un'argilla denominata Kaolin Clay, per vari gradi di consolidazione (OCR pari a 1, 1.2, 1.5, 2, 3, 12), a due diverse temperature (22°C e 90°C).

Elastic [Kref, Gref, n] [MPa], [MPa], [-]	70, 30, 0.68
Plastic [ϕ_0 , α , β , d, b, σ'_{co}] [°], [-], [-], [-], [-], [MPa]	22, 2, 21, 2.75, 0.5, 0.6
Hardening [a, c] [-], [-]	0.0035, 0.055
Domain [r_i^{ela} , r_d^{ela}] [-], [-]	0.01, 0.1
Thermal [β'_{s0} , γ , g] [°C ⁻¹], [-], [-]	$3 \cdot 10^{-5}$, 0.075, $2.9 \cdot 10^{-5}$

Tabella 4. Parametri materiali per Kaolin Clay, Cekerevac, 2003.

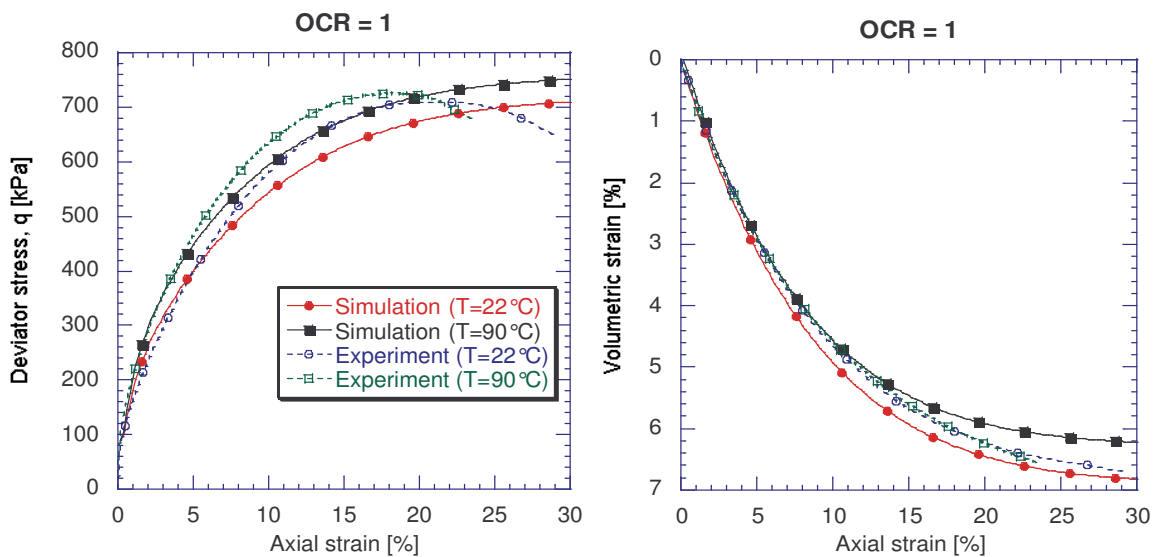


Figura 19. Confronto fra simulazione e prova sperimentale del provino Kaolin Clay con OCR = 1 a temperatura di 20°C e 90°C; Cekerevac, 2003.

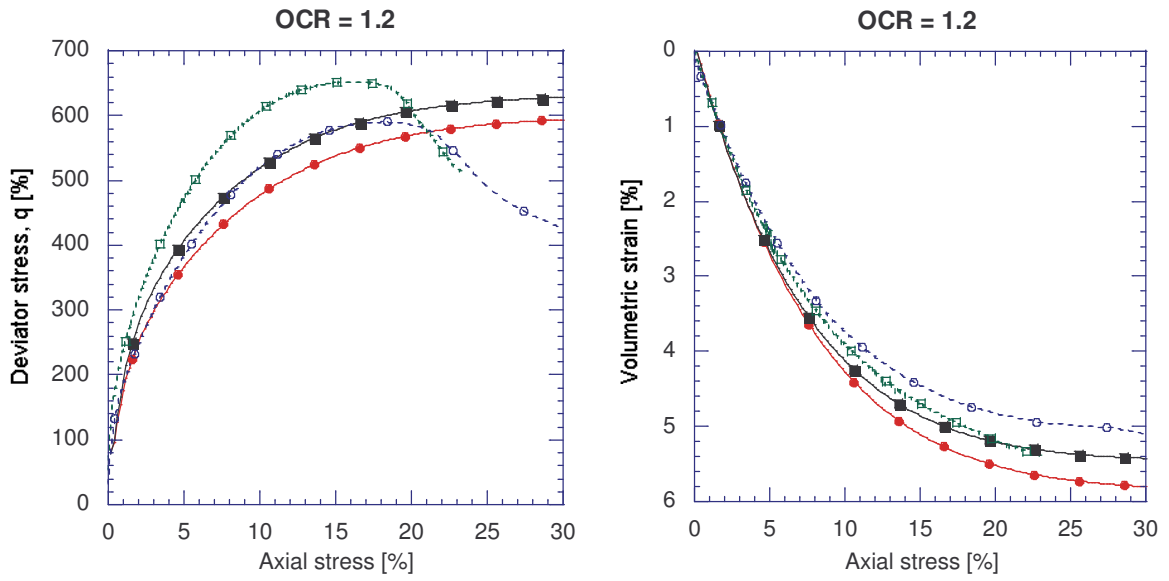


Figura 20. Confronto fra simulazione e prova sperimentale del provino Kaolin Clay con $OCR = 1.2$ a temperatura di $20^{\circ}C$ e $90^{\circ}C$; Cekerevac, 2003.

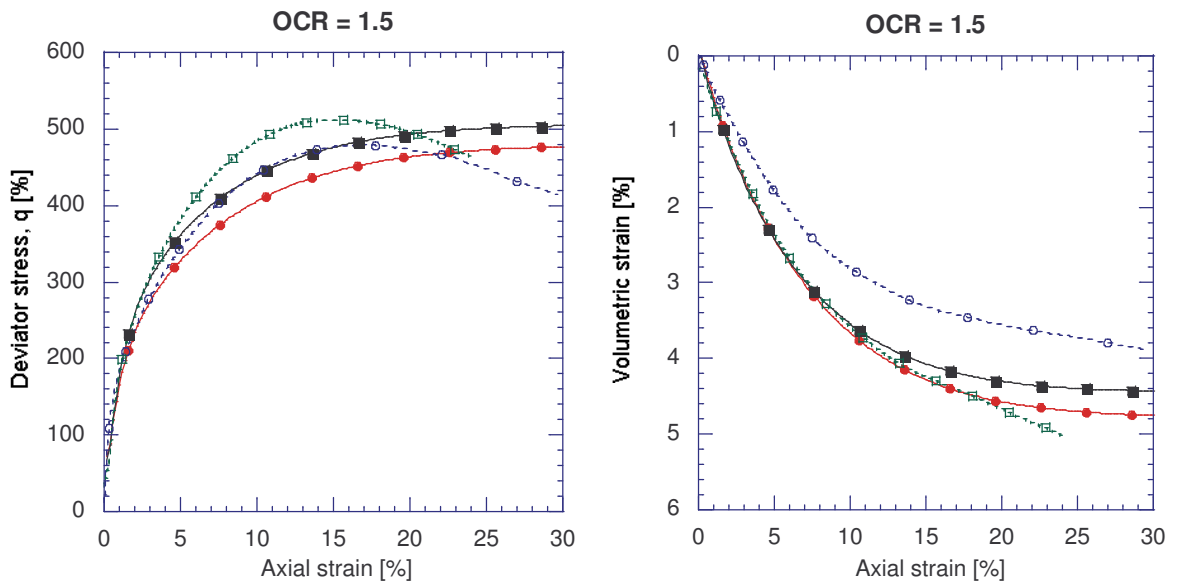


Figura 21. Confronto fra simulazione e prova sperimentale del provino Kaolin Clay con $OCR = 1.5$ a temperatura di $20^{\circ}C$ e $90^{\circ}C$; Cekerevac, 2003.

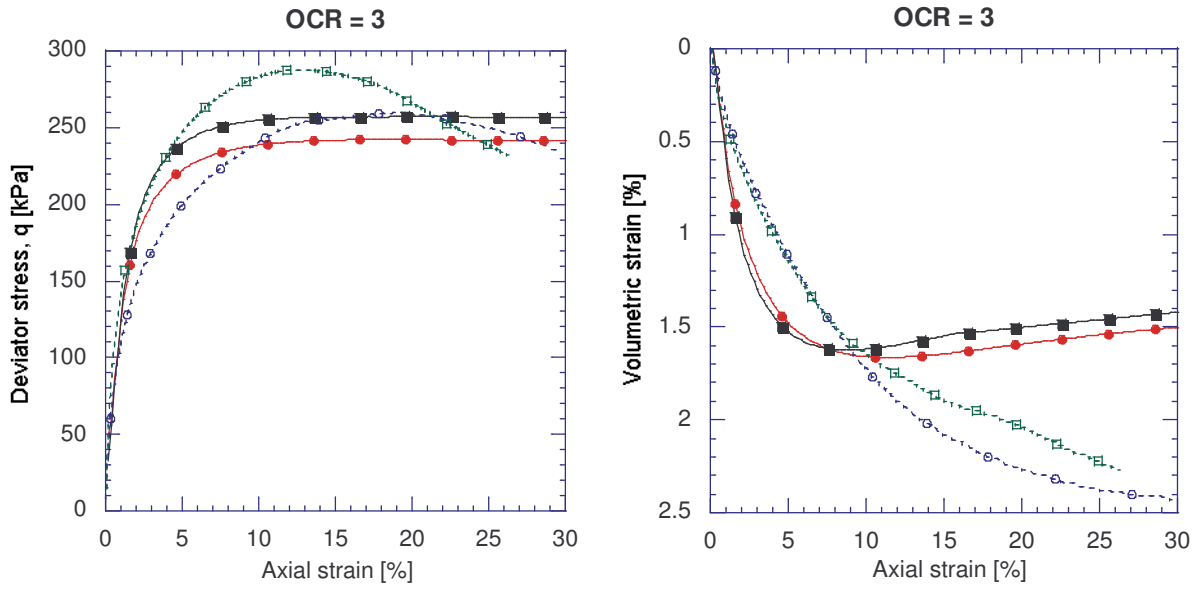


Figura 22. Confronto fra simulazione e prova sperimentale del provino Kaolin Clay con OCR = 3 a temperatura di 20°C e 90°C; Cekerevac, 2003.

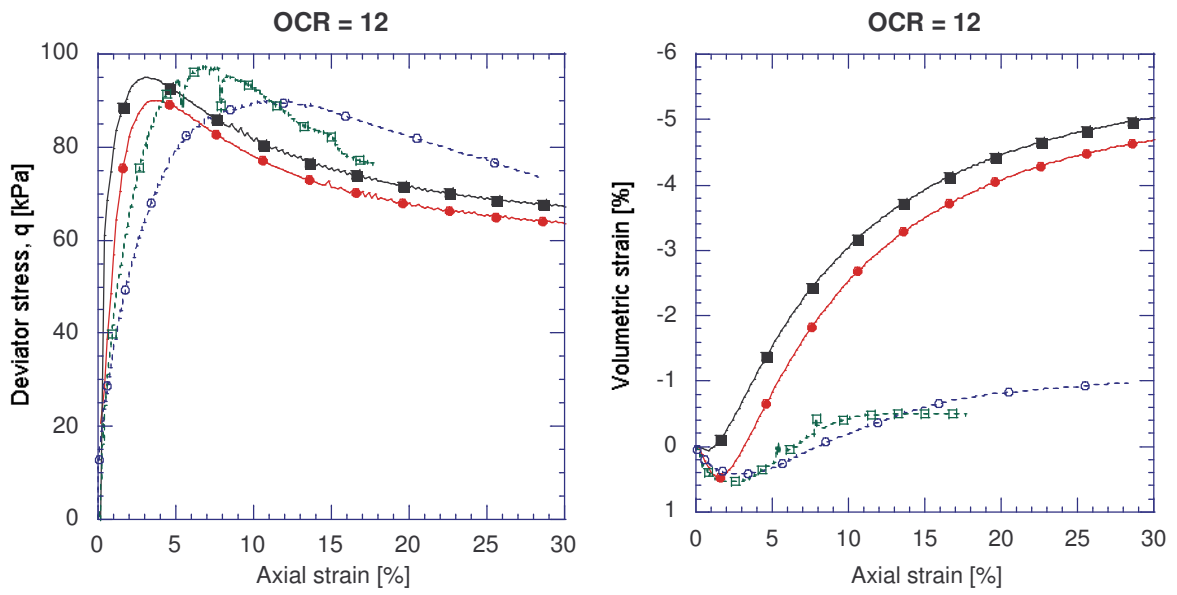


Figura 23. Confronto fra simulazione e prova sperimentale del provino Kaolin Clay con OCR = 12 a temperatura di 20°C e 90°C; Cekerevac, 2003.

5.2.3 Conclusioni

Dalle prove riportate si può ben capire l'affidabilità del codice svizzero nel riprodurre le prove sperimentali sia per quanto riguarda il regime sperimentale, sia per quel che concerne il meccanismo plastico isotropo e il meccanismo plastico deviatorico.

5.3 CONVALIDA DELLA SUBROUTINE THERMEC IN COMES-GEO

Tutte le prove di convalidazione sono state effettuate, per la semplicità di verifica e puntualità di controllo, su di una mesh costituita da un unico elemento finito, plate a quattro nodi, per la quale sono state scelte diverse condizioni al contorno e diversi cicli di carico scarico termo-meccanici.

5.3.1 Prove non-isoterme in regime elastico lineare e non lineare

La prima serie di test comprende quattro prove in cui i parametri materiali e lo stato tensionale sono tali da impedire il raggiungimento delle superfici di snervamento, e quindi evitare l'attivazione sia del meccanismo termo-elasto-plastico isotropo che di quello deviatorico.

5.3.1.1 Test non-isotermo in regime elastico lineare

Il primo test effettuato consiste nell'analisi termo-elastica di un elemento finito, plate, le cui condizioni al contorno e il ciclo di carico sono riportati nella Figura 24; il comportamento lineare è garantito dalla scelta specifica dei parametri materiali riportati nella Tabella 5, e dall'implementazione del coefficiente termico indipendente dalla temperatura.

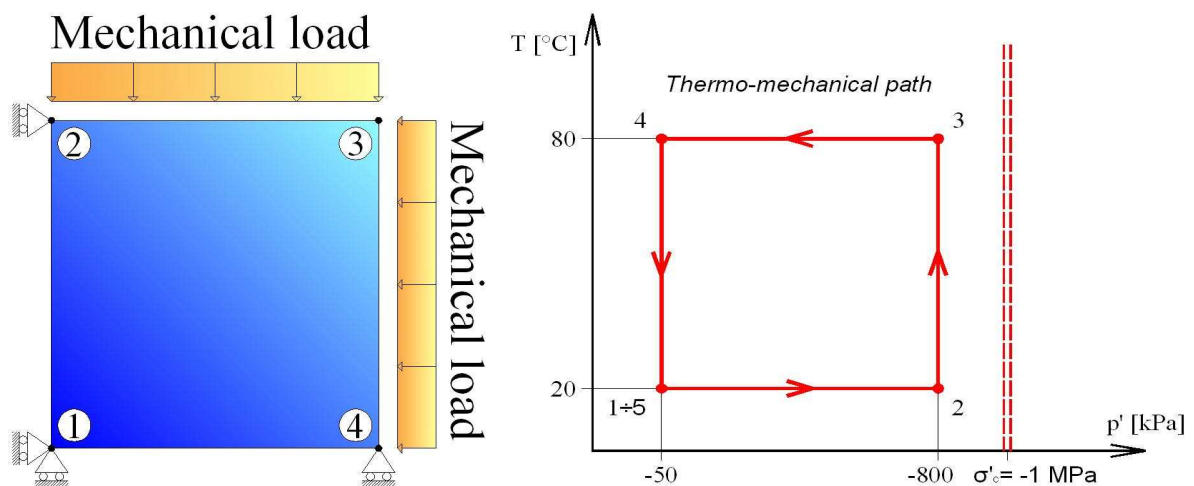


Figura 24. Elemento finito, plate a 4 nodi, condizioni al contorno e ciclo di carico termo-meccanico utilizzati per la prova elastica lineare.

$K_{ref} =$	100	Mpa	$c =$	0,01	-
$G_{ref} =$	40	Mpa	$D =$	2,0	-
$P_{ref} =$	-1.0	Mpa	$r_d^e =$	1,0	-
$\sigma'_{c0} =$	-1.0	Mpa	$r_i^e =$	1,0	-
$n =$	0,0	-	$n_T =$	0,00	-
$\varphi_0 =$	40°	-	$\beta'_{s0} =$	3,00e-05	1/K
$\beta =$	-22	-	$g =$	0,00E+00	-
$\alpha =$	1,0	-	$\gamma =$	0,00	-
$a =$	0,01	-	$T_0 =$	293,15	K
$B =$	1,0	-			

Tabella 5. Parametri materiali scelti. In grassetto i parametri rilevanti per la prova.

Essendo particolarmente semplice da valutare, si riporta la soluzione analitica del test:

- per il carico meccanico:

$$\sigma_x = \sigma_y = \frac{3p}{2(1+\nu)} = \frac{3 * -800000}{2 * (1+0.3235)} = -906686.82 \text{ Pa}$$

$$\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y) = -586626.37 \text{ Pa}$$

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_y + \sigma_z) = \frac{p}{2 * K_{ref}} = \frac{-800000}{2 * 100000000} = -0.004$$

$$\varepsilon_z = \gamma_{xy} = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0$$

- per il carico termico:

$$\sigma_z = -\beta'_{s0} \Delta T \cdot E = -10^{-5} * 60 * 105880000 = -63528 \text{ Pa}$$

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = -\frac{\nu}{E} \sigma_z + \beta'_{s0} \Delta T = -\frac{0.3235}{105880000} * -63528 + 10^{-5} * 60 = 0.0007941$$

$$\sigma_x = \sigma_y = \varepsilon_z = \gamma_{xy} = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0$$

sovrapponendo quindi i due risultati:

$$\sigma_x = \sigma_y = -906686.82 \text{ Pa}$$

$$\sigma_z = -586626.37 - 63528.00 = -650154.37 \text{ Pa}$$

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = -0.004 + 0.0007941 = -0.0032059$$

$$\varepsilon_z = \gamma_{xy} = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0$$

$$p = 821176.0$$

$$\varepsilon_v = -0.0064118$$

Per verifica ulteriore si sono confrontati i risultati con quelli ottenuti da un codice commerciale in dotazione del dipartimento, quale STRAUS7.

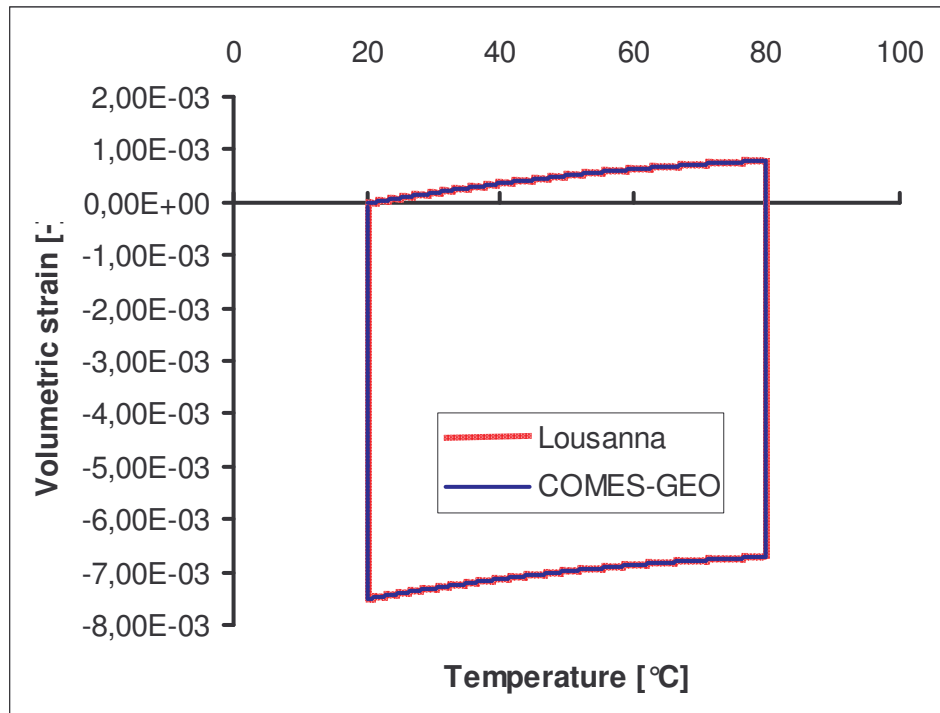


Figura 25. Confronto fra i risultati nel piano $\varepsilon_v - T$.

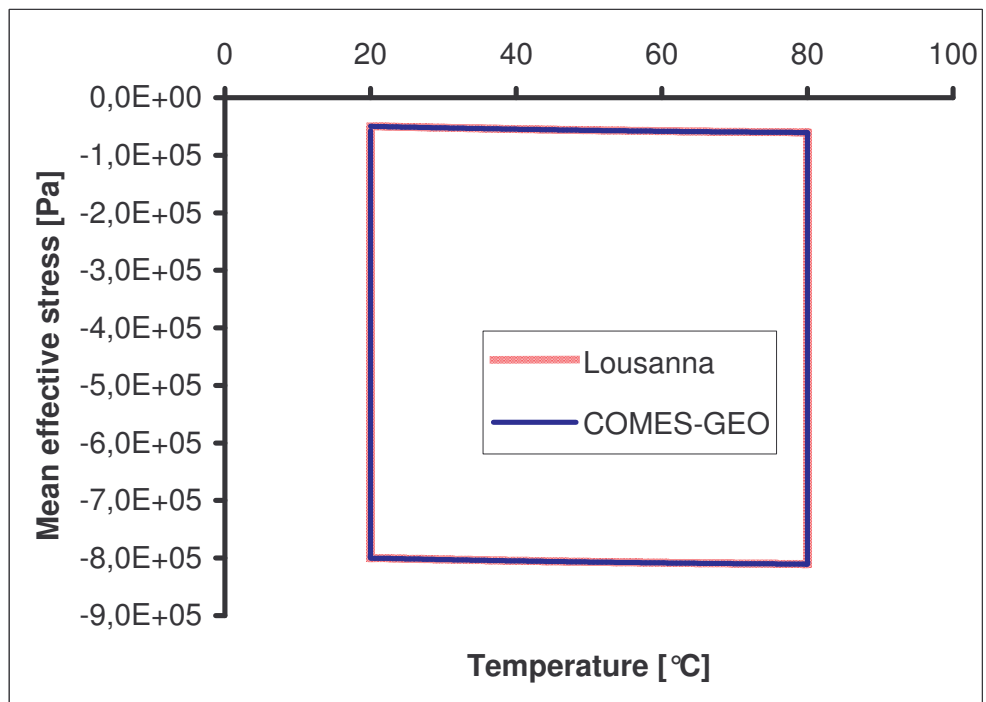


Figura 26. Confronto fra i risultati nel piano $p' - T$.

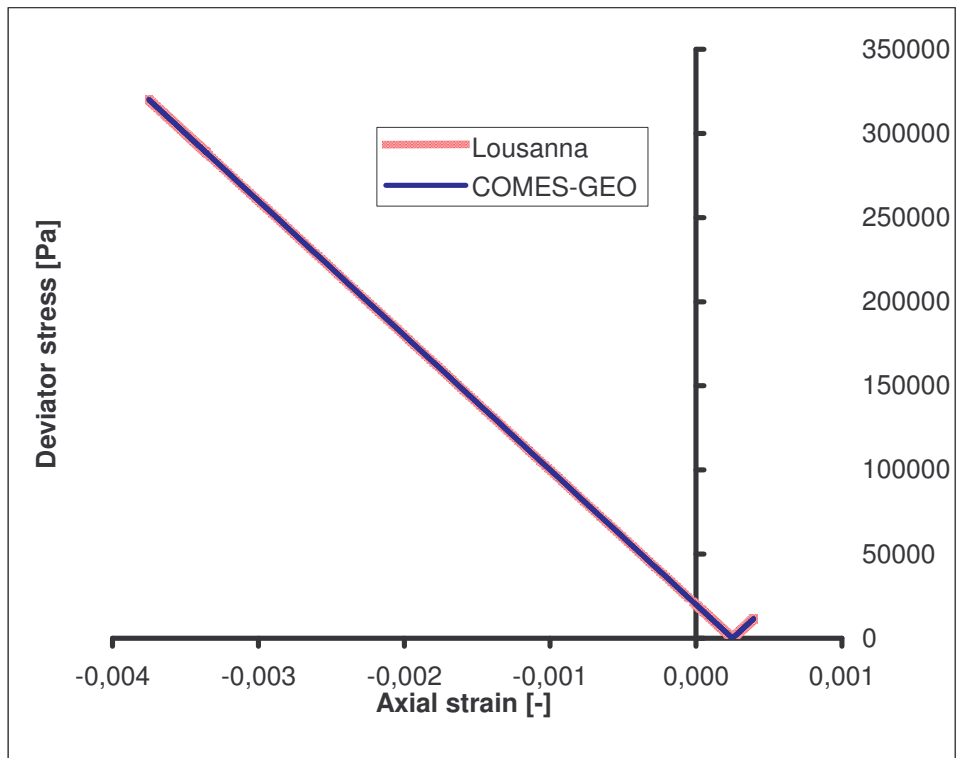


Figura 27. Confronto fra i risultati nel piano $q - \varepsilon_x$.

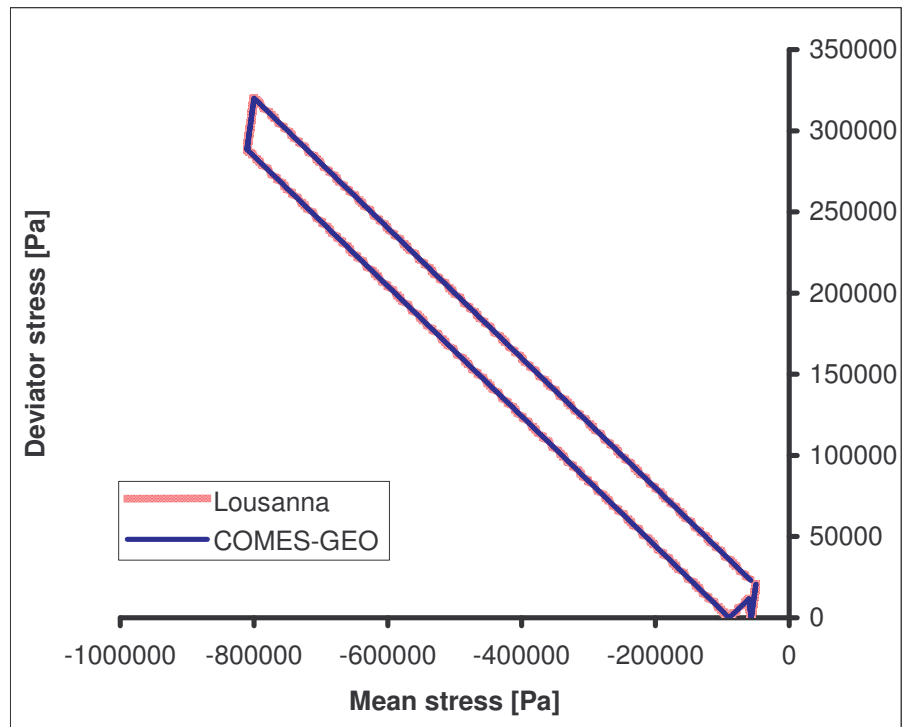


Figura 28. Confronto fra i risultati nel piano $q - p'$.

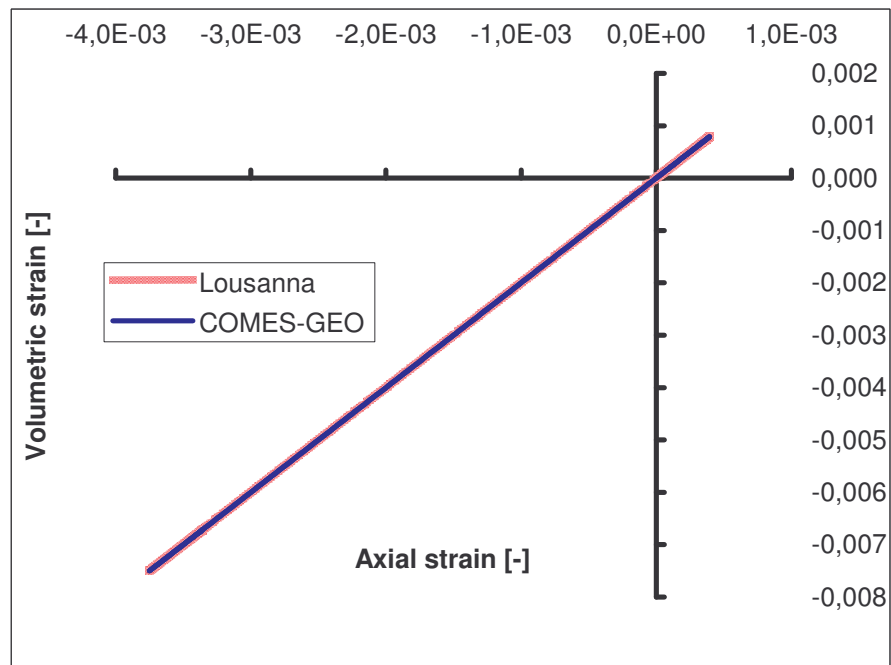


Figura 29. Confronto fra i risultati nel piano $\varepsilon_v - \varepsilon_x$.

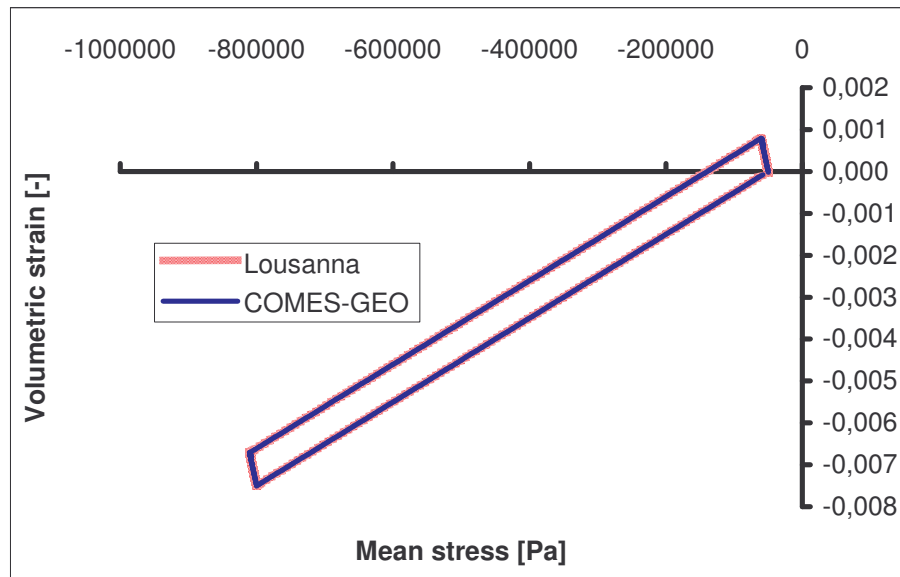


Figura 30. Confronto fra i risultati nel piano $\varepsilon_v - p'$.

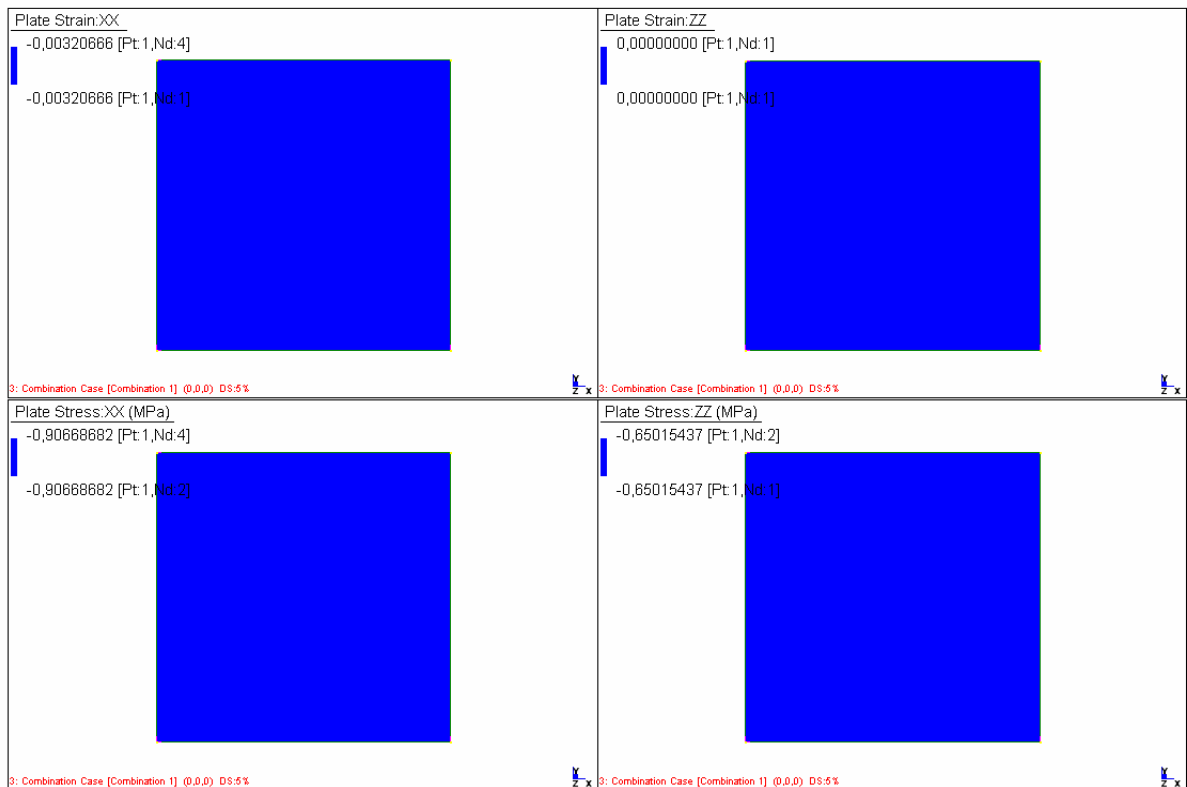


Figura 31. Risultati col codice commerciale, STRAUS7, ottenuti dalla sovrapposizione del carico meccanico $p' = -800$ MPa e del carico termico $\Delta T = 60$ °C.

5.3.1.2 Test non-isotermini in regime elastico non-lineare

Si passa ora ad elencare i risultati ottenuti dal codice in regime elastico non-lineare, andando cioè a modificare i parametri materiali n e n_T , e ripristinando la non-linearità del coefficiente termico con la temperatura, β'_{s0} . Sono state effettuate tre prove con i parametri materiali riportati in Tabella 6, e .

1)

$K_{ref} =$	100	Mpa
$G_{ref} =$	40	Mpa
$P_{ref} =$	-1.0	Mpa
$\sigma'_{c0} =$	-1.0	Mpa
$n =$	1,0	-
$\varphi_0 =$	40°	-
$\beta =$	-22	-
$\alpha =$	1,0	-
$a =$	0,01	-
$B =$	1,0	-

$c =$	0,01	-
$D =$	2,0	-
$r_d^e =$	1,0	-
$r_i^e =$	1,0	-
$n_T =$	0,2	-
$\beta'_{s0} =$	3,00e-05	1/K
$g =$	0,00E+00	-
$\gamma =$	0,00	-
$T_0 =$	293,15	K

Tabella 6. Parametri materiali scelti. In grassetto i parametri indice di non-linearità.

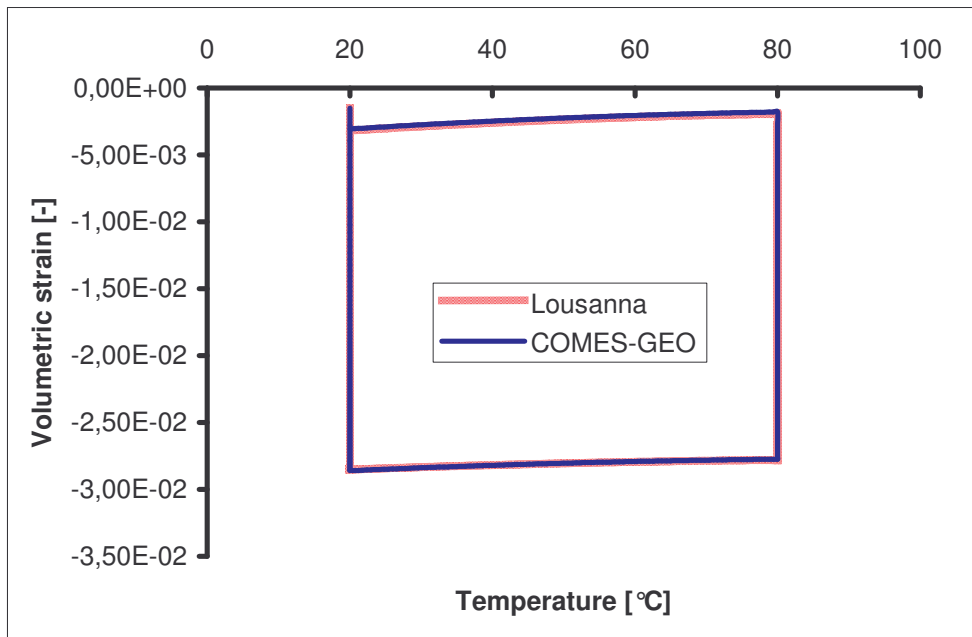


Figura 32. Confronto fra i risultati nel piano $\varepsilon_v - T$.

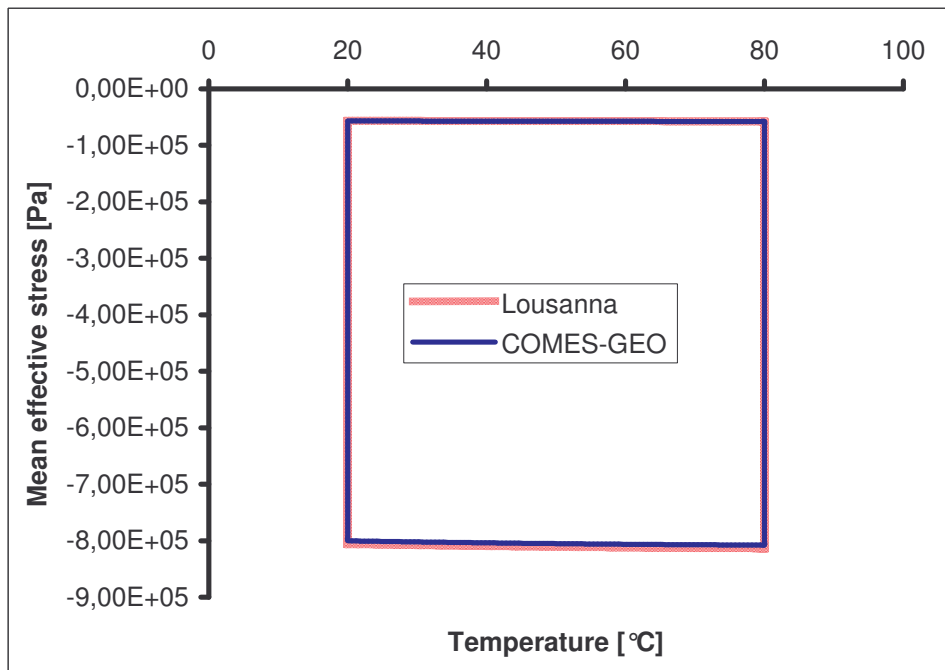


Figura 33. Confronto fra i risultati nel piano $p' - T$.

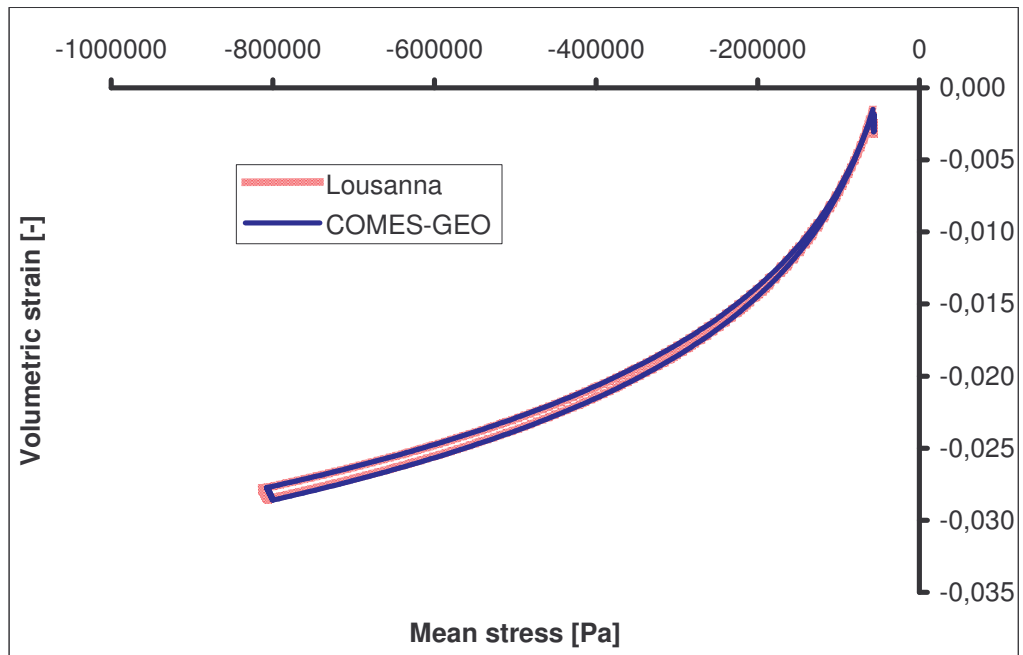


Figura 34. Confronto fra i risultati nel piano $\varepsilon_v - p'$.

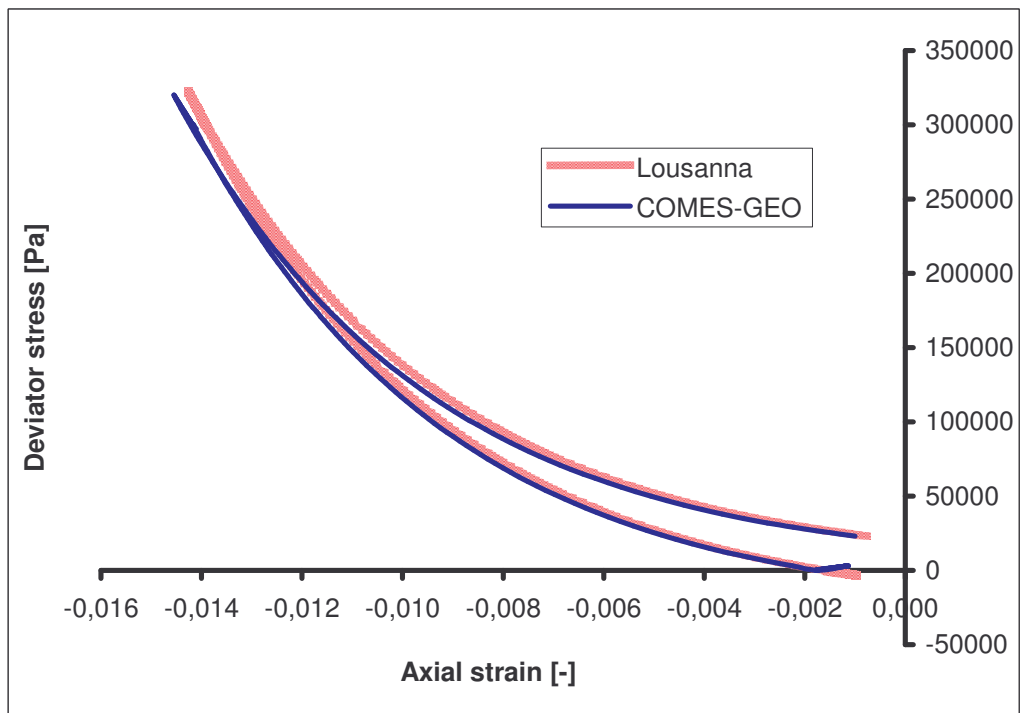


Figura 35. Confronto fra i risultati nel piano $q - \varepsilon_x$.

2)

$K_{ref} =$	100	Mpa
$G_{ref} =$	40	Mpa
$P_{ref} =$	-1.0	Mpa
$\sigma'_{c0} =$	-1.0	Mpa
$n =$	0,7	-
$\varphi_0 =$	40°	-
$\beta =$	-22	-
$\alpha =$	1,0	-
$a =$	0,01	-
$B =$	1,0	-

$c =$	0,01	-
$D =$	2,0	-
$r_d^e =$	1,0	-
$r_i^e =$	1,0	-
$n_T =$	0,4	-
$\beta'_{s0} =$	3,00e-05	1/K
$g =$	0,00E+00	-
$\gamma =$	0,00	-
$T_0 =$	293,15	K

Tabella 7. Parametri materiali scelti. In grassetto i parametri indice di non-linearità.

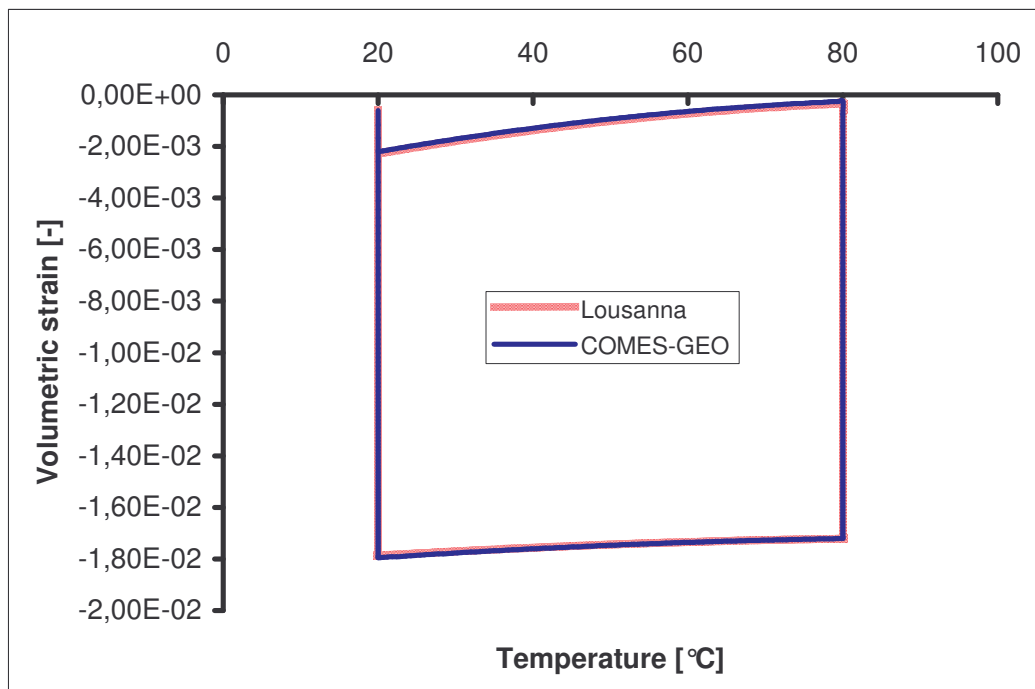


Figura 36. Confronto fra i risultati nel piano $\varepsilon_v - T$.

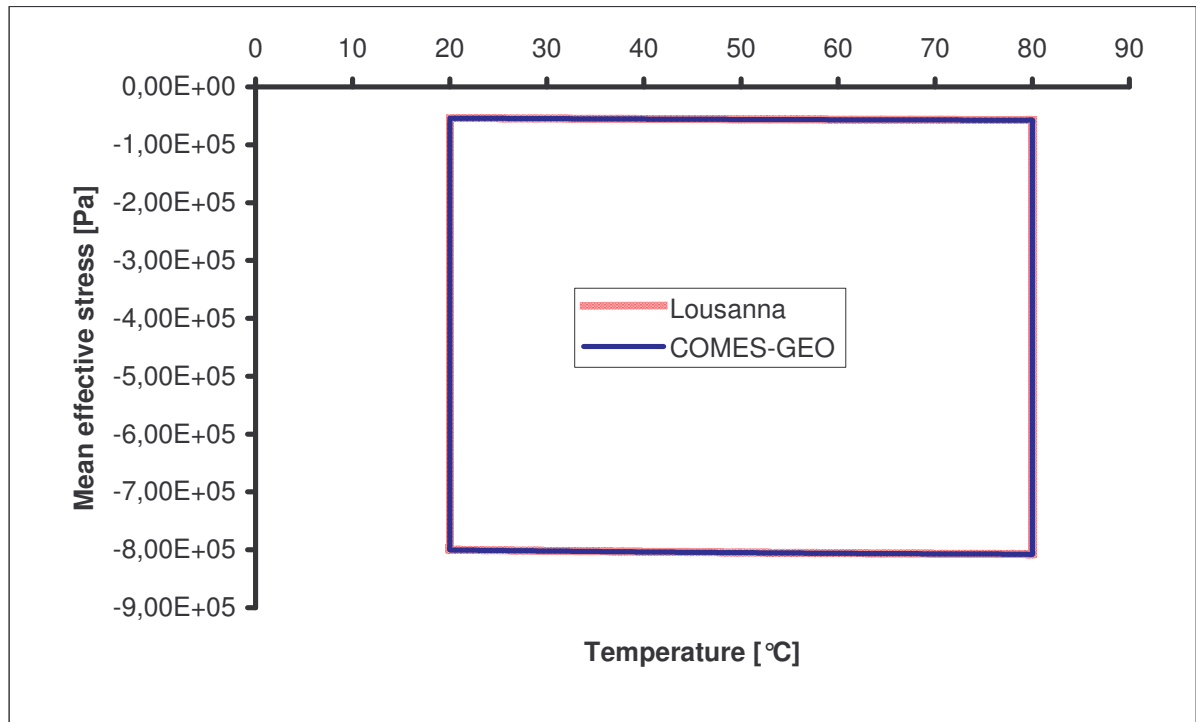


Figura 37. Confronto fra i risultati nel piano $p' - T$.

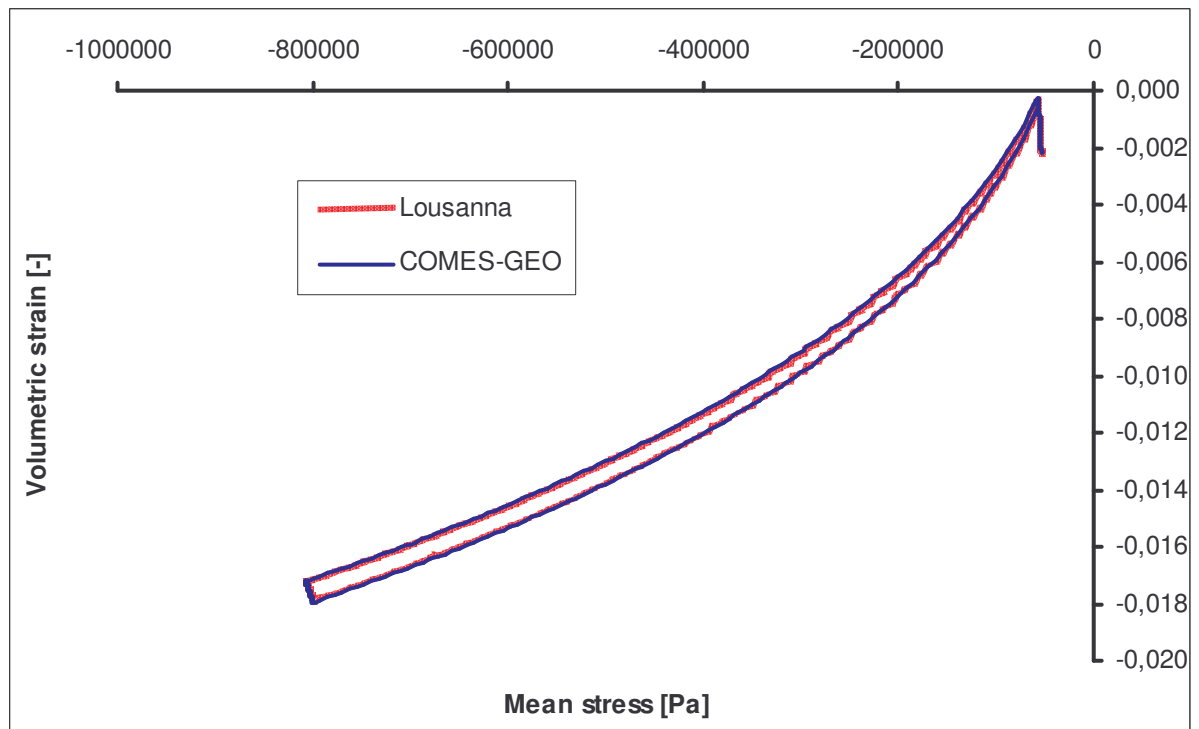


Figura 38. Confronto fra i risultati nel piano $\varepsilon_v - p'$.

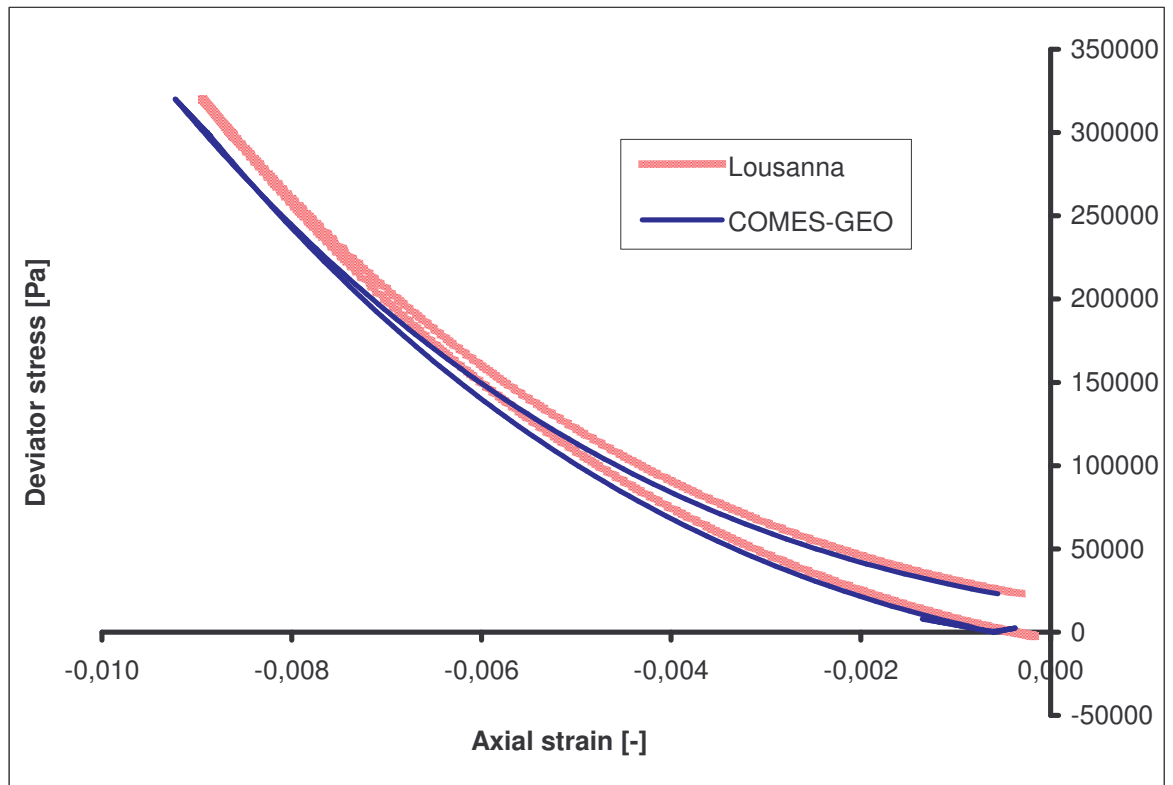


Figura 39. Confronto fra i risultati nel piano $q - \varepsilon_x$.

3)

$K_{ref} =$	100	Mpa
$G_{ref} =$	40	Mpa
$P_{ref} =$	-1.0	Mpa
$\sigma'_{c0} =$	-1.0	Mpa
$n =$	1,0	-
$\varphi_0 =$	40°	-
$\beta =$	-22	-
$\alpha =$	1,0	-
$a =$	0,01	-
$B =$	1,0	-

$c =$	0,01	-
$D =$	2,0	-
$r_d^e =$	1,0	-
$r_i^e =$	1,0	-
$n_T =$	0,0	-
$\beta'_{s0} =$	3,00e-05	1/K
$g =$	0,00E+00	-
$\gamma =$	0,00	-
$T_0 =$	293,15	K

Tabella 8. Parametri materiali scelti. In grassetto i parametri indice di non-linearità.

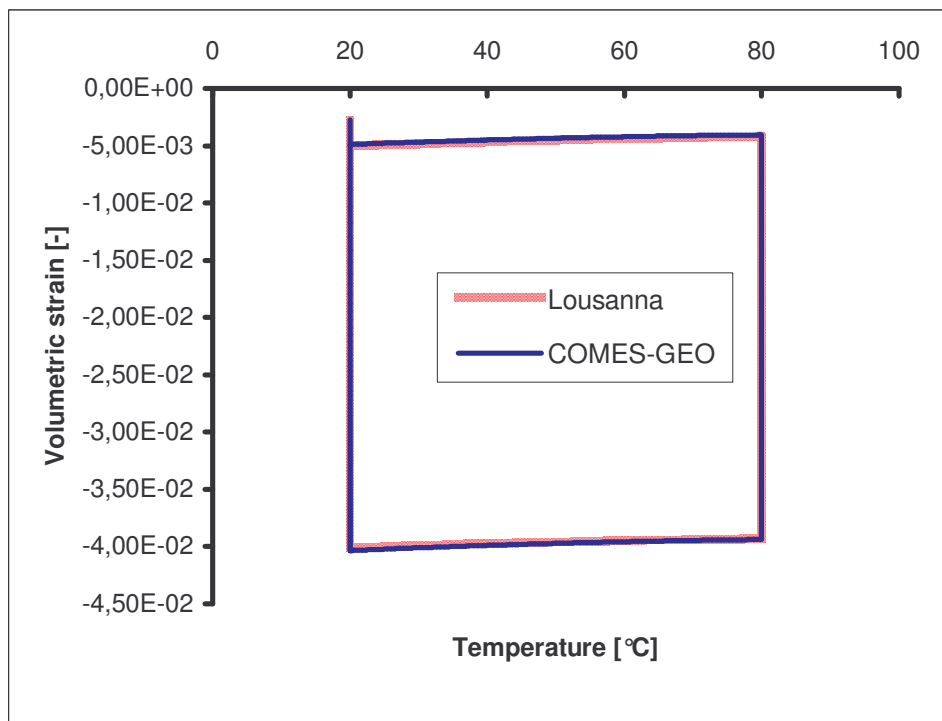


Figura 40. Confronto fra i risultati nel piano $\varepsilon_v - T$.

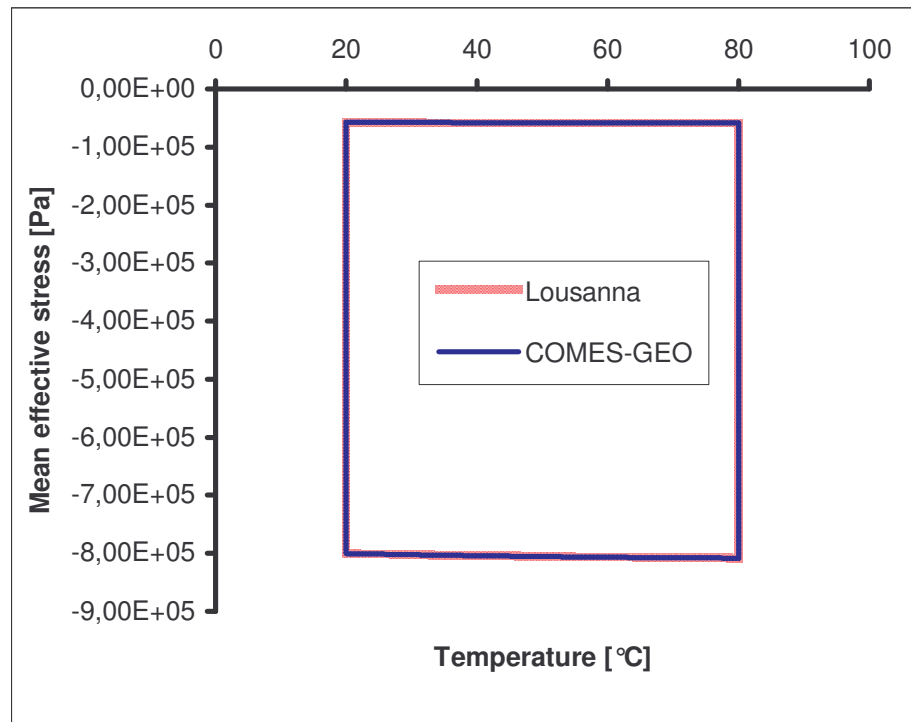


Figura 41. Confronto fra i risultati nel piano $p' - T$.

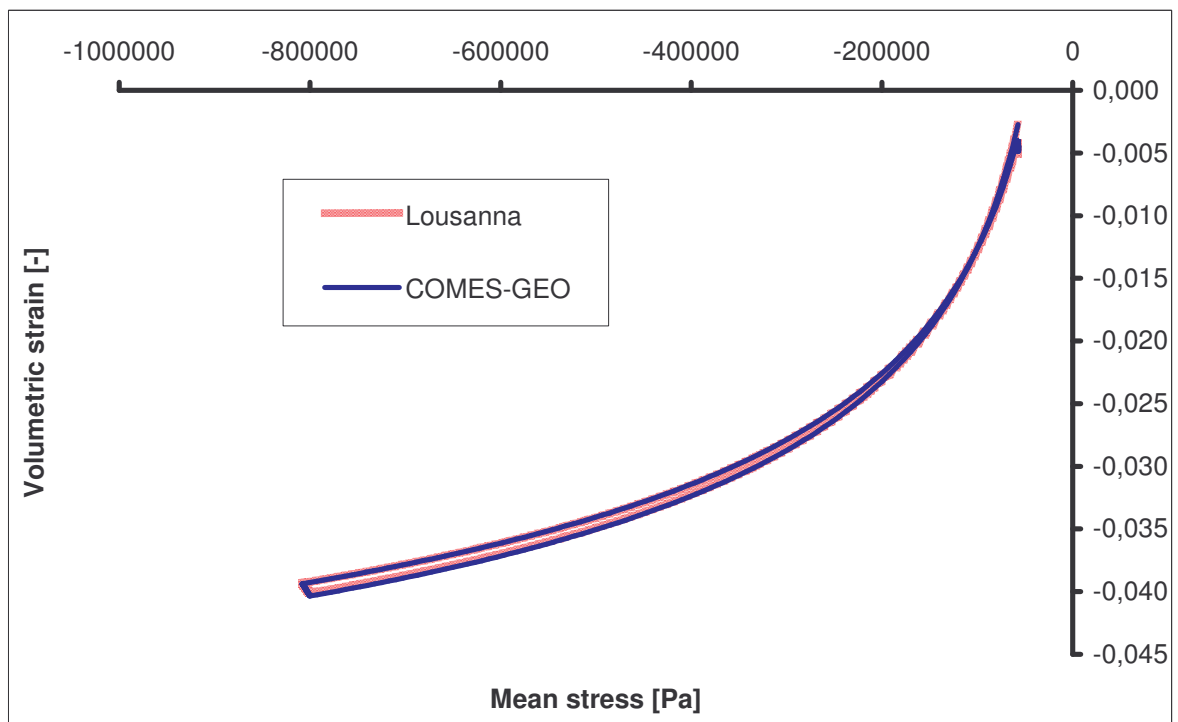


Figura 42. Confronto fra i risultati nel piano $\varepsilon_v - p'$.

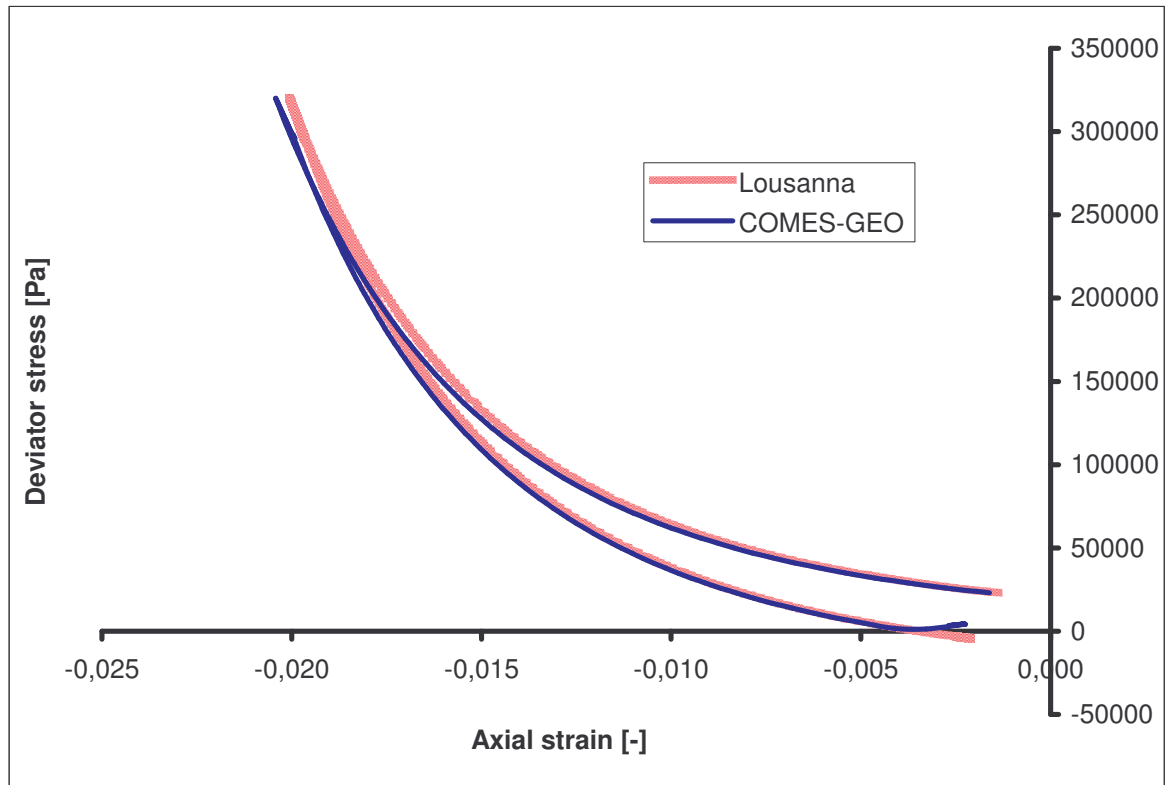


Figura 43. Confronto fra i risultati nel piano $q - \varepsilon_x$.

5.3.2 Prova isoterma in regime plastico

Si esegue la simulazione di una prova di consolidazione isoterma con due cicli di carico e scarico riportati in .

La mesh considerata è costituita da un unico elemento plate a 4 nodi, in cui le condizioni edometriche sono assicurate dalla scelta dei vincoli, .

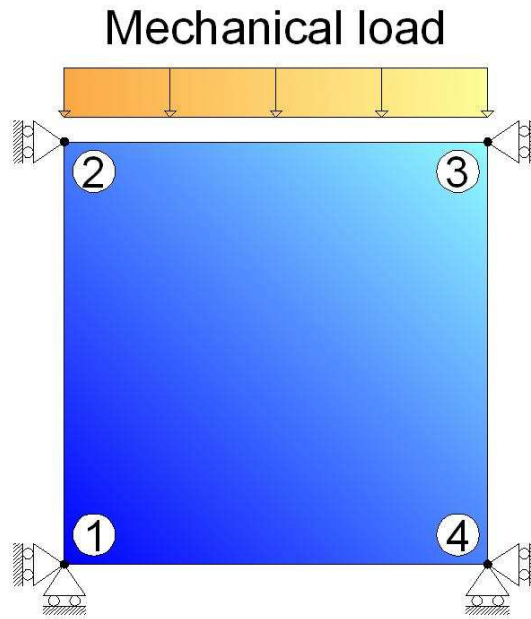


Figura 44. Vincoli che riproducono le condizioni edometriche.

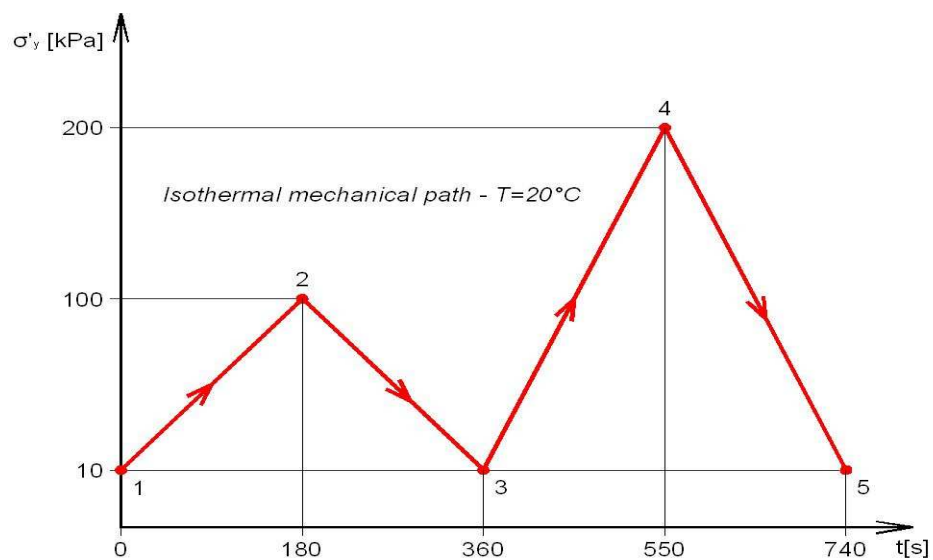


Figura 45. Cicli di carico/scarico a temperatura costante.

$K_{ref} =$	1150	Mpa	$c =$	0,001	-
$G_{ref} =$	530.77	Mpa	$D =$	2.0	-
$P_{ref} =$	-1.0	Mpa	$r_d^e =$	1,0	-
$\sigma'_{c0} =$	-28	kPa	$r_i^e =$	0.001	-
$n =$	0.4	-	$n_T =$	0,0	-
$\varphi_0 =$	30°	-	$\beta'_{s0} =$	3,00e-05	1/K
$\beta =$	-22	-	$g =$	0.0	-
$\alpha =$	1,0	-	$\gamma =$	0,0	-
$a =$	0,001	-	$T_0 =$	293,15	K
$B =$	1,0	-			

Tabella 9. Parametri materiali scelti.

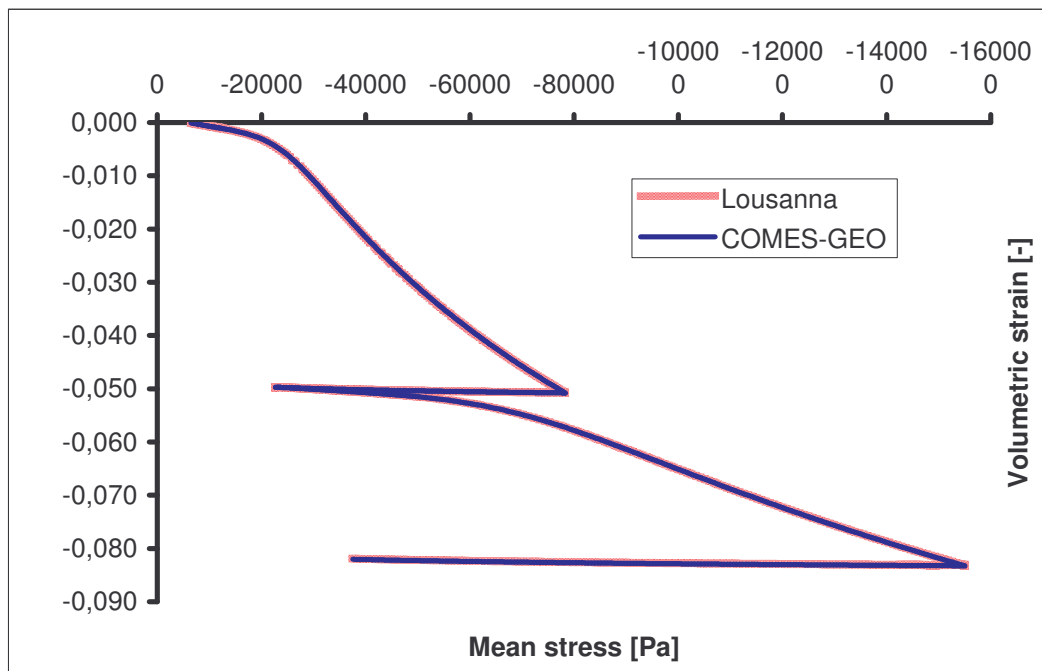


Figura 46. Confronto fra i risultati nel piano $\varepsilon_v - p'$.

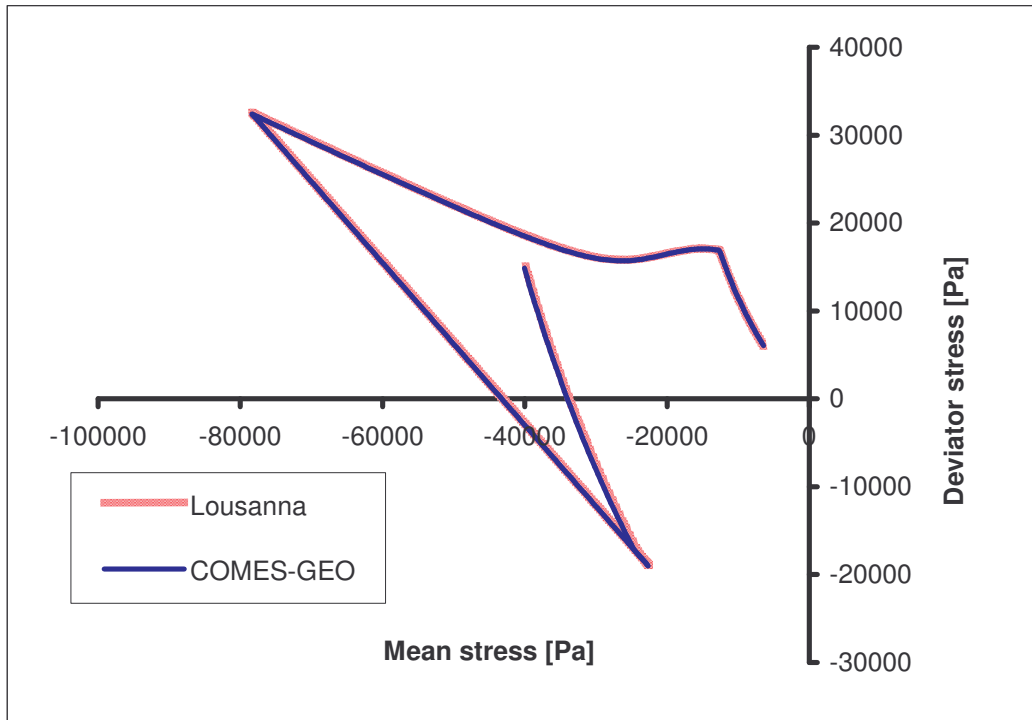
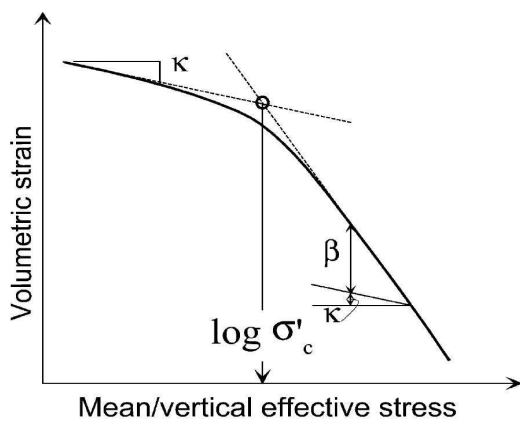


Figura 47. Confronto fra i risultati nel piano $q - p'$.

In particolare analizzando i risultati nel piano semilogaritmico, si può verificare la correttezza degli stessi; ad esempio valutando la pendenza della curva delle pressioni si può riscontrare il parametro materiale β , utilizzando la seguente relazione:



$$\frac{1}{\beta} + \frac{1}{\kappa} = -4.4139 \cdot 10^{-2}$$

$$\frac{1}{\beta} = -4.4139 \cdot 10^{-2} - \frac{1}{\kappa} = -4.4139 \cdot 10^{-2} + 1.3548 \cdot 10^{-3}$$

$$\frac{1}{\beta} = -0.045493 \rightarrow \beta = -21.89$$

Figura 48. Determinazione della pressione di consolidazione σ'_c .

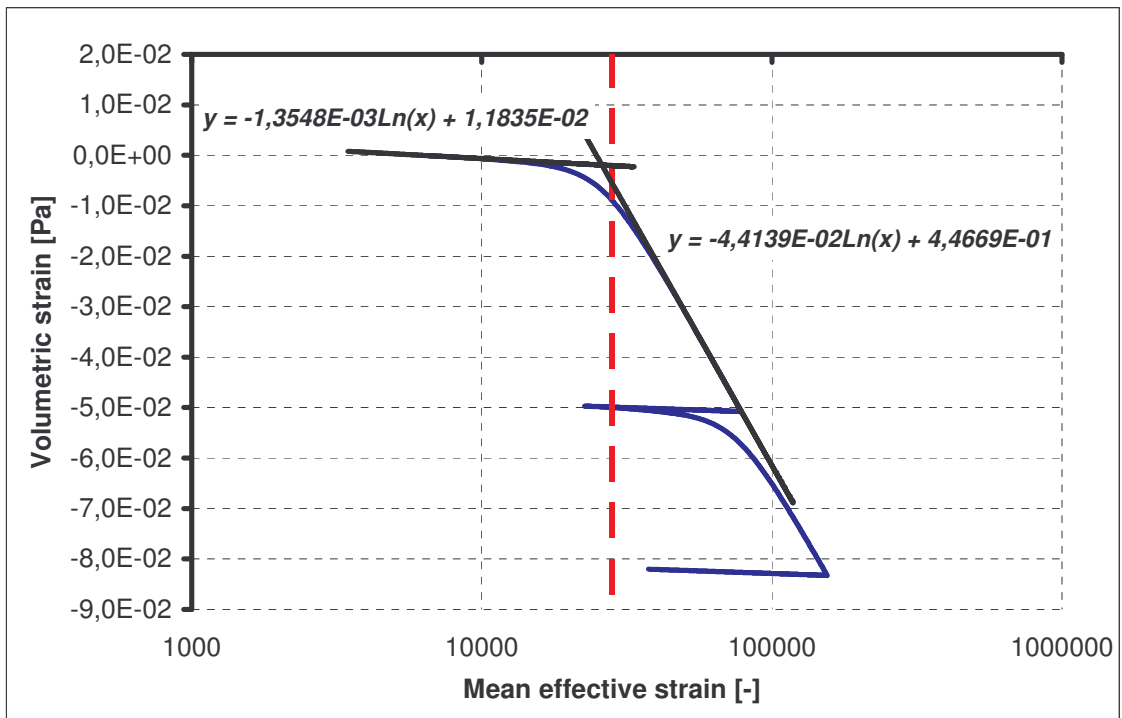


Figura 49. Grafico semilogaritmico $\varepsilon_v - p'$, in tratteggio rosso è indicata la pressione di consolidazione iniziale, σ'_c , pari a $p'_{c0} \cdot d = -14000 \cdot 2 = -28000$ MPa.

5.3.3 Prova non-isoterma in regime plastico

Sempre con la stessa mesh si esegue un'analisi completa, termo-meccanica, di un materiale sottoposto a cicli di riscaldamento e raffreddamento rispetto a diversi gradi di OCR. Il ciclo termico prevede un aumento di temperatura da 21,5 °C a 95 °C, e successivo raffreddamento a 21,5 °C; i gradi di sovraconsolidazione del materiale sono rispettivamente per i tre casi: 1, 2, 6; questo equivale a dire che lo stato tensionale iniziale è diverso: essendo $\sigma'_c(T_0)$ pari a -6 MPa, quindi avremo p'_o pari a 6 MPa, 3 MPa e 1 MPa.

Si riportano i parametri materiali e il ciclo di carico termico in Tabella 1 e Figura 50.

$K_{ref} =$	150	Mpa
$G_{ref} =$	130	Mpa
$P_{ref} =$	-1.0	Mpa
$\sigma'_{c0} =$	-6.0	Mpa
$n =$	0.4	-
$\varphi_0 =$	80°	-
$\beta =$	-47	-
$\alpha =$	1,0	-
$a =$	0,0004	-
$B =$	1,0	-

$c =$	0,0004	-
$D =$	1.3	-
$r_d^e =$	1,0	-
$r_i^e =$	0.01	-
$n_T =$	1,0	-
$\beta'_{s0} =$	3,00e-05	1/K
$g =$	0.0	-
$\gamma =$	0,2	-
$T_0 =$	294,65	K

Tabella 10. Parametri materiali scelti.

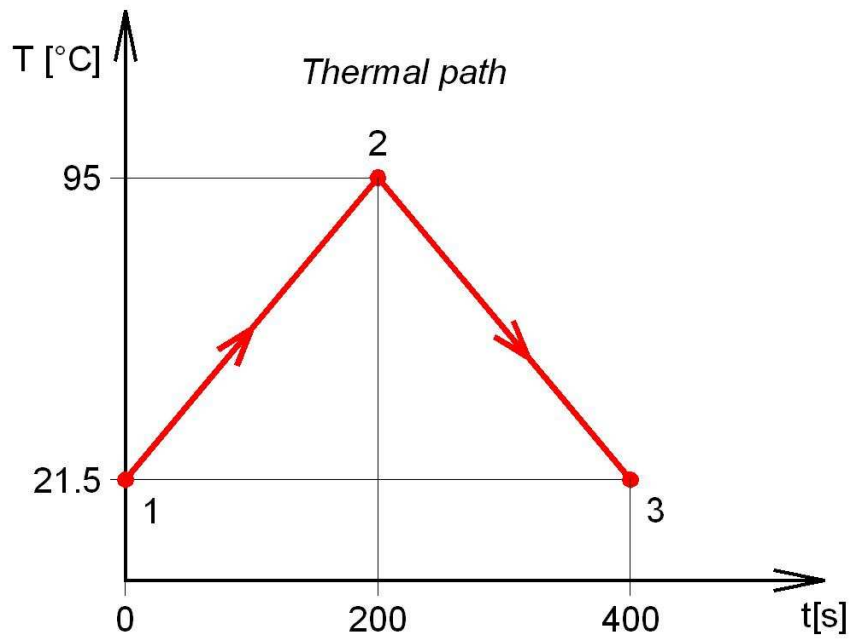


Figura 50. Ciclo termico di riscaldamento e raffreddamento ($21.5^{\circ}\text{C} \rightarrow 95^{\circ}\text{C} \rightarrow 21.5^{\circ}\text{C}$).

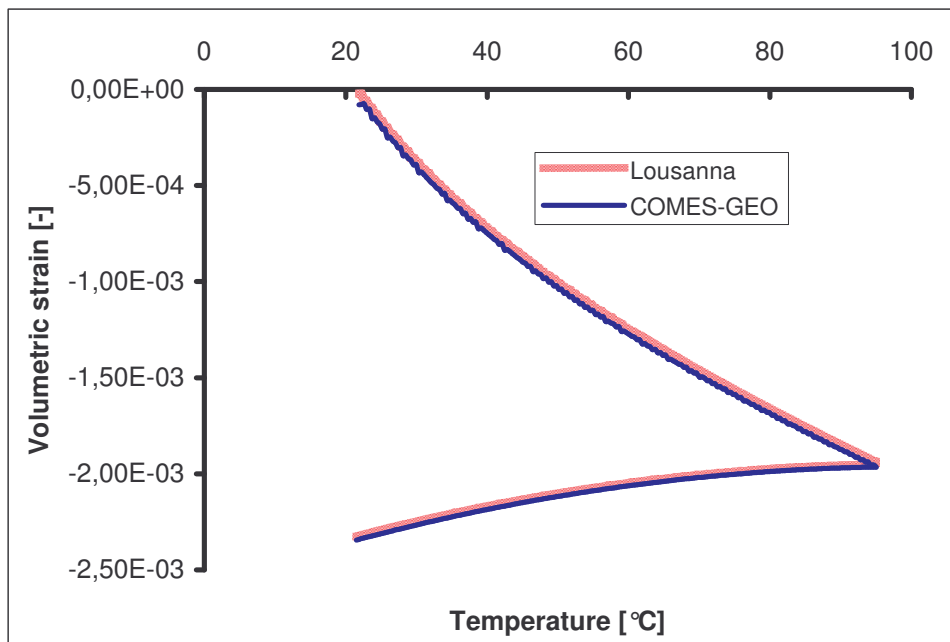


Figura 51. Confronto fra i risultati nel piano $\varepsilon_v - T$.

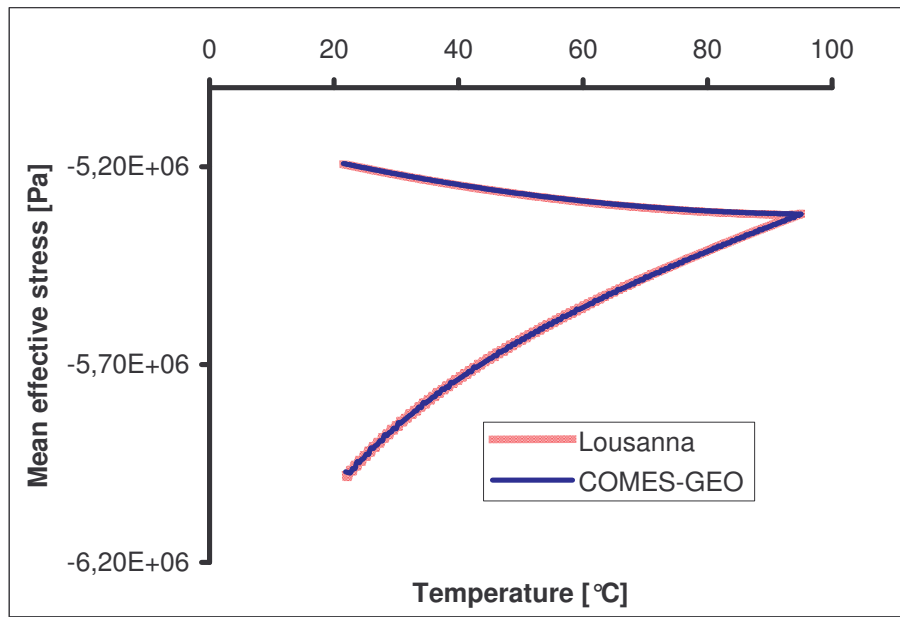


Figura 52. Confronto fra i risultati nel piano $p' - T$.

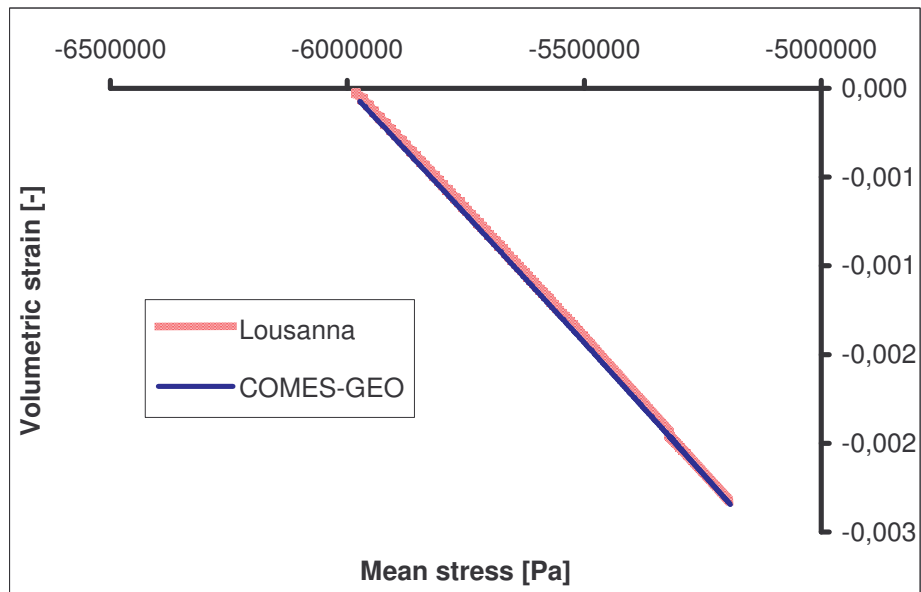


Figura 53. Confronto fra i risultati nel piano $\varepsilon_v - p'$.

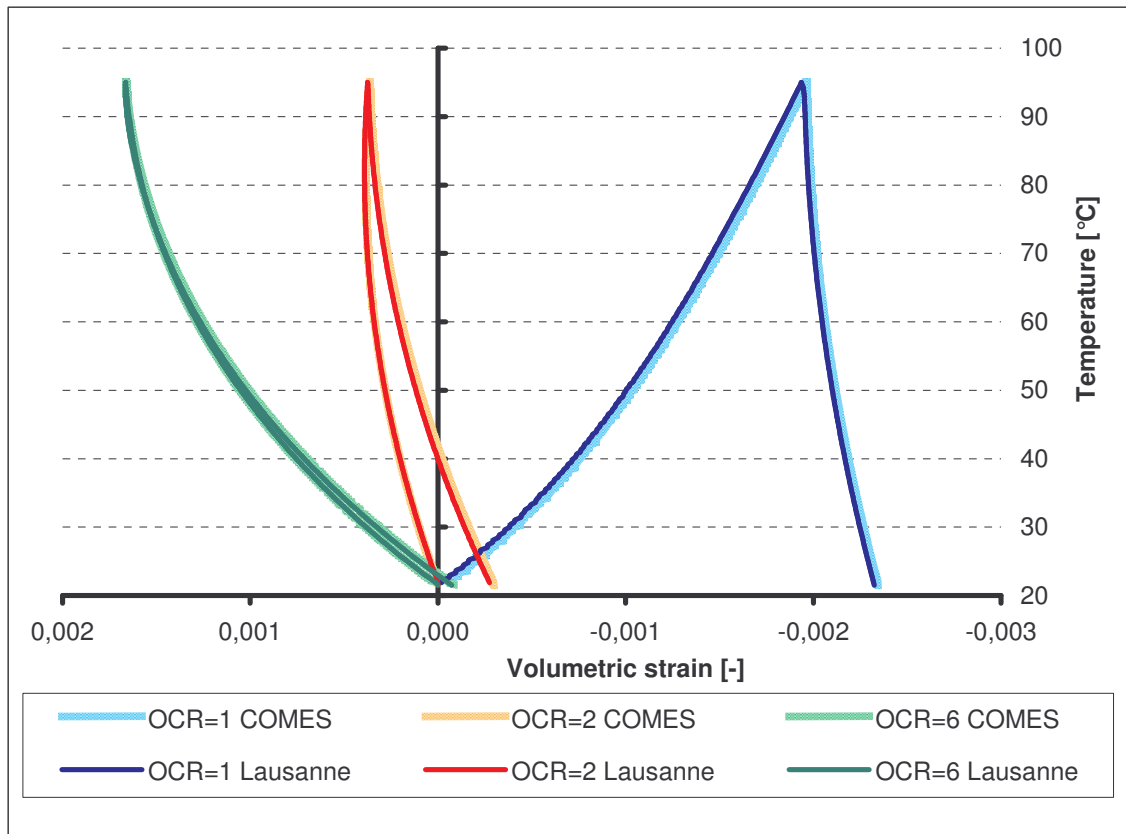


Figura 54. Risultati ottenuti con il ciclo termico di riscaldamento e raffreddamento per vari gradi di sovraconsolidazione: OCR pari a 1, 2, 6.

Da quest'ultimo grafico si può notare la correttezza dei risultati, che se confrontati, almeno qualitativamente, con la Figura 13 dimostrano il differente comportamento in base all'OCR delle argille ai cicli termici di riscaldamento e raffreddamento.

5.4 CONCLUSIONI

In base alla completa gamma di simulazioni numeriche, in campo elastico/plastico e isoterma/non-isoterma, e in base al loro confronto con le simulazioni svolte col codice svizzero, si può affermare che la legge costitutiva termo-elasto-plastica si risulta essere implementata correttamente, in quanto i risultati sono praticamente coincidenti.

Sebbene non si sia potuto compiere una validazione tramite simulazione diretta di prove sperimentali, in quanto il codice COMES-GEO contempla solo lo stato piano di deformazione, poco adatto per la simulazione di prove triassiali (fondamentali nel campo della geotecnica), la legge costitutiva può essere considerata corretta perché convalidata da un codice che invece può simulare correttamente le prove suddette.

CAPITOLO 6

BOUNDARY VALUE PROBLEM: GALLERIA DI STOCCAGGIO SCORIE RADIOATTIVE

6.1 INTRODUZIONE

La stabilità meccanica di cavità sotterranee durante il loro utilizzo costituisce un elemento essenziale nello studio di fattibilità per un deposito di raffreddamento in argilla.

Dentro questo contesto, al fine di valicare un approccio geo-meccanico globale per mezzo di un modello che simuli il comportamento termo-idro-meccanico di opere in sottoterraneo in terreni argillosi profondi, è stato effettuato il calcolo agli elementi finiti attraverso il codice COMES-GEO sviluppato per la modellazione di terreni sottoposti a cicli termici di carico. In questo caso ha permesso di simulare il caso di un tunnel per il raffreddamento di scorie nucleari, consistente di una fase veloce in cui le scorie aumentano la loro temperatura, ed una fase più lenta in cui queste raffreddano. La modellazione del comportamento viscoplastico e termo-viscoplastico permette di valutare una precisa risposta delle argille.

Molti obiettivi sono stati ricercati attraverso questo esercizio di calcolo. Si è tentato di dimostrare la fattibilità dell'applicazione d'una metodologia generale, il che porta a procedere per passi:

- valutazione del metodo teorico
- verifica dell'implementazione numerica
- validazione del modello di comportamento
- analisi dell'efficacia del modello
- veridicità dei risultati

Un grande numero di questi fattori sono già stati studiati nel passato e non hanno mai provocato grossi problemi. La sola difficoltà alla quale ci si è trovati davanti è stata quella dei

lunghi tempi di sviluppo del fenomeno che, anche a causa della considerevole mesh studiata, ha portato ad un lungo tempo d'analisi numerica.

Il test previsto, si situa nella fascia carbonatata dell'argilla di Moncornet e corrisponde ad una profondità di 381.00÷427.00 m.

I parametri di modellazione del comportamento viscoplastico e termo-viscoplastico sono stati determinati direttamente da prove meccaniche di laboratorio sull'argilla di Moncornet. Alcune caratteristiche meccaniche, l'angolo d'attrito per esempio, presentano proprietà scarse e, hanno certamente avuto una ripercussione sulla successiva modellazione numerica. Questi problemi sono da attribuire alla difficoltà d'attuazione delle prove che, non fanno parte delle usuali prove della geo-meccanica classica.

Una delle difficoltà incontrate in occasione di tale modellazione, oltre alle incertezze riguardo le eterogeneità esistenti, è stata la definizione dello stato iniziale della struttura, infatti, la risposta di un suolo dipende fortemente dalla storia di carico precedente. Ciò si riconduce alla difficoltà di valutare la pressione capillare data la scarsa permeabilità dell'argilla. Purtroppo, non esiste una risposta semplice a tale problema che si risolve unicamente attraverso prove di misurazione in sito. Alla luce di queste difficoltà, sono state fatte delle ipotesi semplificative ma coerenti che consistono nel forzare ai nodi della mesh una pressione capillare pari alla pressione idrostatica.

6.2 COMPORTAMENTO TERMICO

Lo studio effettuato per rifiuti radioattivi tipo C “de Très Haute Activité” (ad Attività Molto Alta), è stato fatto su un periodo lungo di 210 anni, che parte dal deposito dei contenitori radioattivi dentro i fori di stoccaggio e termina quando questi arrivano ad una temperatura di circa 60 °C. L'andamento della sorgente di temperatura è stato ottenuto partendo dalla curva di potenza di un contenitore trasformandola in una curva di temperatura da applicare a cinque punti specifici della mesh.

Un periodo d'analisi tanto lungo ha costretto poi alla scelta di un passo temporale abbastanza alto (siamo nell'ordine delle settimane) che non ha però avuto influenze di rilievo dato che il fenomeno è tuttavia molto lento.

6.2.1 Definizione della mesh

Il lavoro di stoccaggio dei rifiuti radioattivi tipo C “de Très Haute Activité” consiste in una rete di gallerie orizzontali parallele, di sezione costante a forma di ferro di cavallo, della larghezza di 5 metri e d'altezza pari a 6 metri. Le gallerie sono distanti fra loro di 80 metri. Da queste gallerie partono ad intervalli regolari i depositi di stoccaggio verticali con diametro di 0.5 metri e, che, arrivano ad un'altezza di 55 metri dei quali gli ultimi 5 metri formano un tappo in argilla. Come già detto l'interasse col quale sono disposti i fori di stoccaggio è di 10 metri.

Risulta abbastanza intuitivo di come lo studio, che ricordiamo essere bidimensionale, debba essere fatto nelle due direzioni, quella verticale e quella orizzontale. Lo studio in senso verticale serve per vedere l'effetto termico provocato dal riscaldamento dato dai pozzi di stoccaggio riempiti con le scorie sul terreno attraversato dalla galleria orizzontale. Lo studio in senso orizzontale invece, serve per valutare l'influenza che ogni foro di stoccaggio ha sui fori ad esso adiacenti.

Nel presente lavoro viene effettuata unicamente l'analisi in senso verticale.

In entrambe le direzioni esiste comunque una periodicità della struttura e ciò ci permette di sfruttare queste condizioni di ripetitività e simmetria per limitare la dimensione della mesh. Alla fine è stata sviluppata una maglia le cui caratteristiche sono riportate nella tabella e nelle figure seguenti.

Numero di nodi	2836
Numero di elementi	896
Tipologia degli elementi	Elementi quadratici ad 8 nodi

Tabella 11: Descrizione mesh

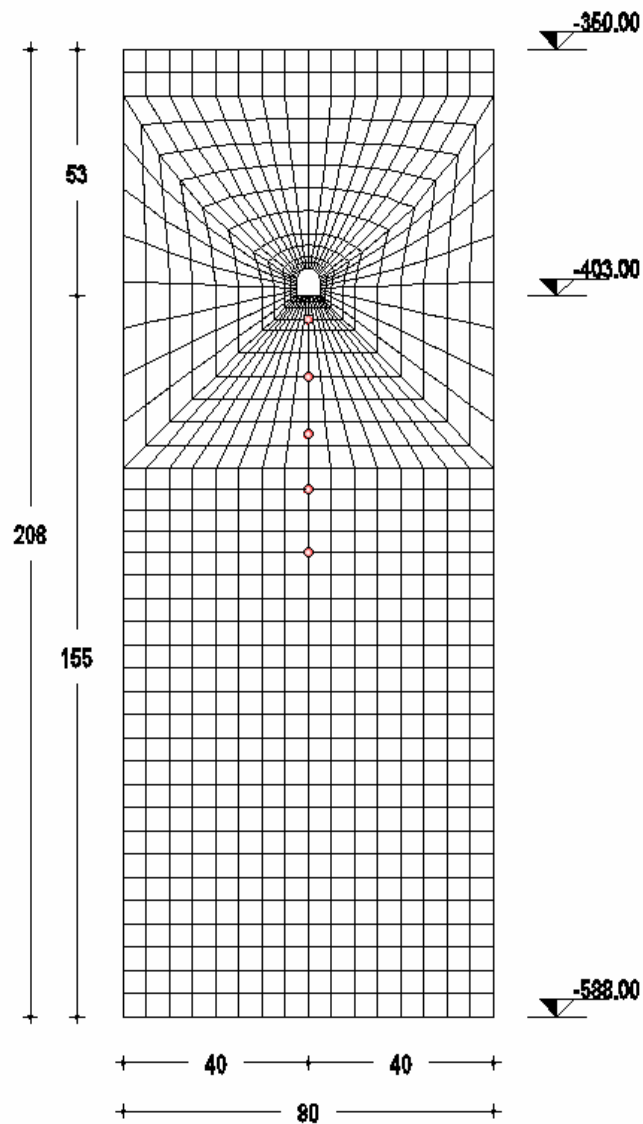


Figura 55: Mesh

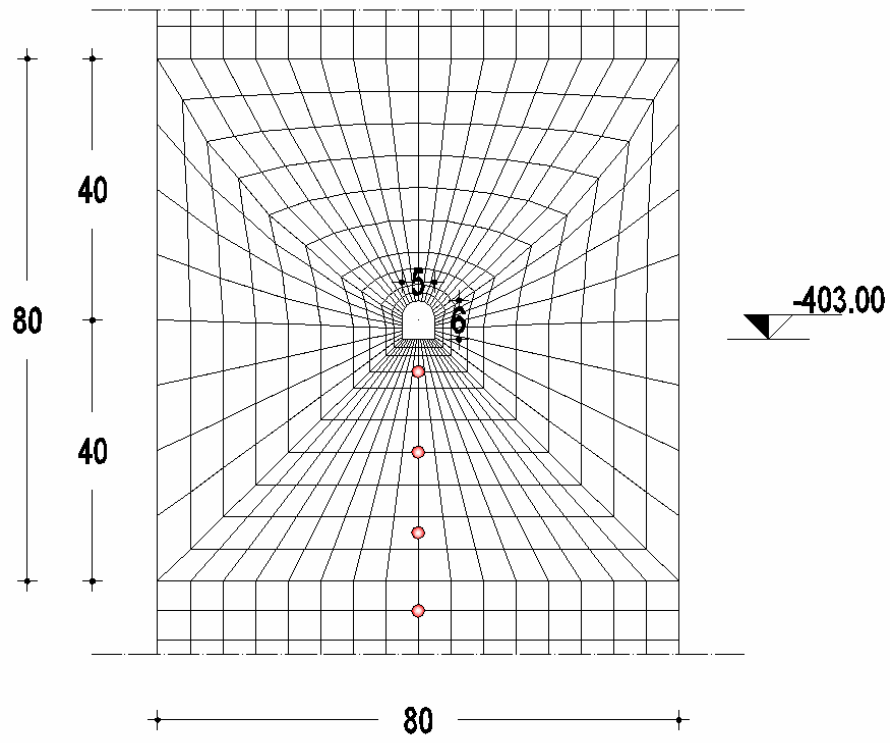


Figura 56: Mesh galleria

6.2.2 Definizione dei vincoli

La mesh è stata vincolata in senso verticale con dei vincoli allo spostamento lungo y applicati ai nodi inferiori e, in senso orizzontale, con vincoli allo spostamento lungo x applicati lungo i due lati verticali.

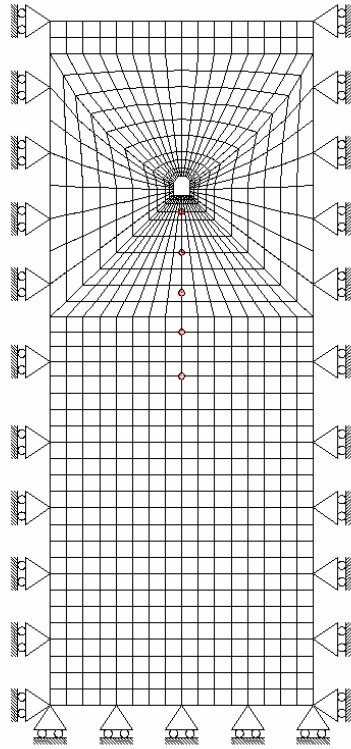


Figura 57: Vincoli della mesh

6.2.3 Definizione del terreno

In assenza di risultati di prove termiche sull'argilla profonda di Montcornet, si sono assunti come parametri quelli già conosciuti dell'argilla di Boom e sono:

$$k = 1.70 \frac{W}{m \cdot K} \quad c = 1250 \frac{J}{kg \cdot K} \quad \rho = 2110 \frac{kg}{m^3}$$

Per quanto riguarda le condizioni iniziali della temperatura, si considera che al livello del piano campagna essa sia di 288.15 K (15.00 °C) e che, aumenti con legge lineare di $0.03 \frac{k}{m}$. Si ha quindi che, per la mesh costruita, che le temperature sono le seguenti:

$z_0 = 0.00 \text{ m}$	$T_0 = 288.15 \text{ K} = 15.0 \text{ }^\circ\text{C}$
$z_0 = -350.00 \text{ m}$	$T_0 = 298.65 \text{ K} = 25.5 \text{ }^\circ\text{C}$
$z_0 = -400.00 \text{ m}$	$T_0 = 304.85 \text{ K} = 31.7 \text{ }^\circ\text{C}$
$z_0 = -558.00 \text{ m}$	$T_0 = 312.15 \text{ K} = 39.0 \text{ }^\circ\text{C}$

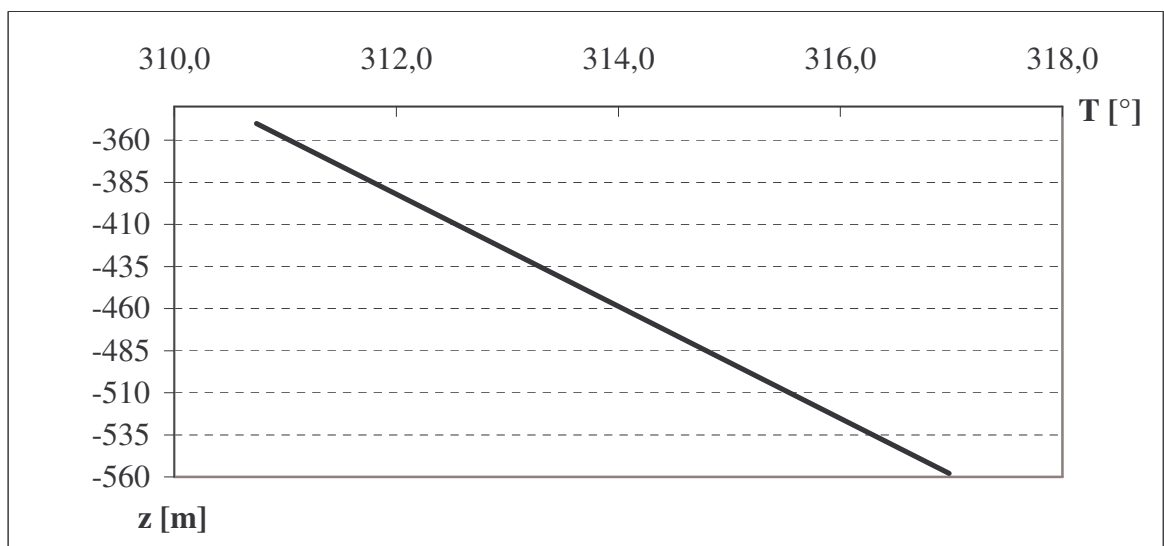


Figura 58.: Aumento lineare della temperatura con la profondità

6.2.4 Definizione della sorgente di calore

La legge di abbassamento di potenza $P(t)$ di un contenitore di scorie radioattive tipo C “de Très Haute Activité” (ad Attività Molto Alta) è riportata in figura.

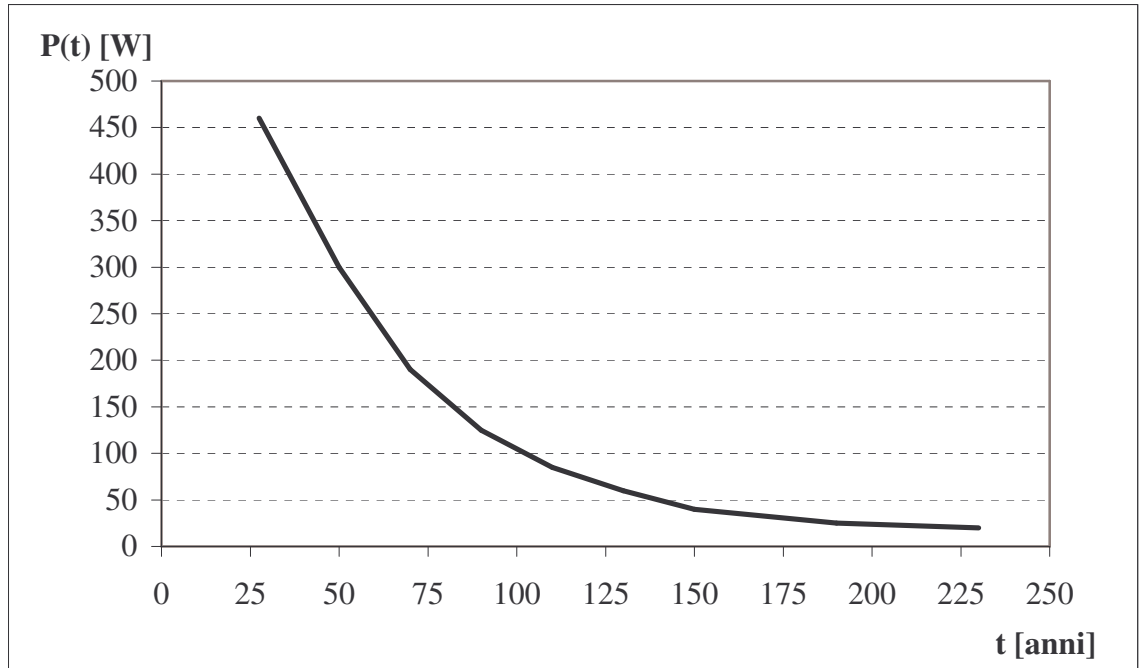


Figura 59. Abbassamento di potenza di un contenitore di scorie

Tenendo conto che ogni pozzo di stoccaggio, che si ricorda essere della profondità di 55 metri (50 metri liberi e gli ultimi 5 metri di tappo in argilla) e con diametro di 0.5 metri, può accettare N contenitori tutti con legge di decremento di potenza uguale a quella riportata sopra e che, sono disposti ad un interasse costante pari ad e , si può ricavare l'andamento della temperatura al loro interno.

Il flusso di calore è rappresentato dall'equazione:

$$\varphi = \frac{N \cdot P(t)}{e}$$

$$N = 40$$

$$e = 10.00 \text{ m}$$

Per simulare il ciclo termico nel modello FEM abbiamo però bisogno di dare come input la temperatura e non la potenza. Partendo quindi dai dati sopra riportati, si è costruita

una curva con l'andamento della temperatura da dare a cinque punti specifici in rappresentanza dei pozzi. Alla fine si ricava un andamento che risulta essere crescente all'inizio per poi decrescere dopo aver raggiunto il massimo nell'intorno dei 30 anni. La curva è rappresentata nel grafico successivo e si vede che la temperatura massima raggiunta è di 368.1 K (95.0 °C).

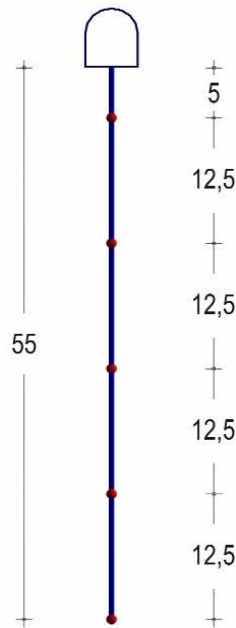


Figura 60: Sorgenti di temperatura

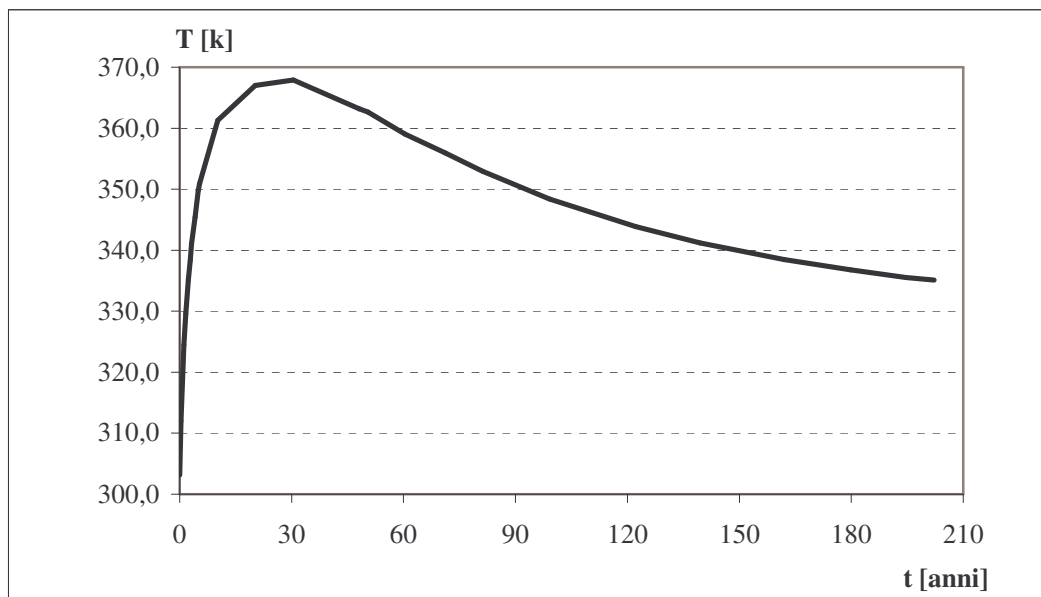


Figura 61. Andamento nel tempo della temperatura all'interno del pozzo

Dati i lunghi tempi di analisi a cui viene sottoposta la mesh, si è deciso di limitare la durata temporale del fenomeno prendendo in considerazione un andamento della temperatura nel tempo in cui la fase di raffreddamento è esattamente l'inverso di quella di riscaldamento.

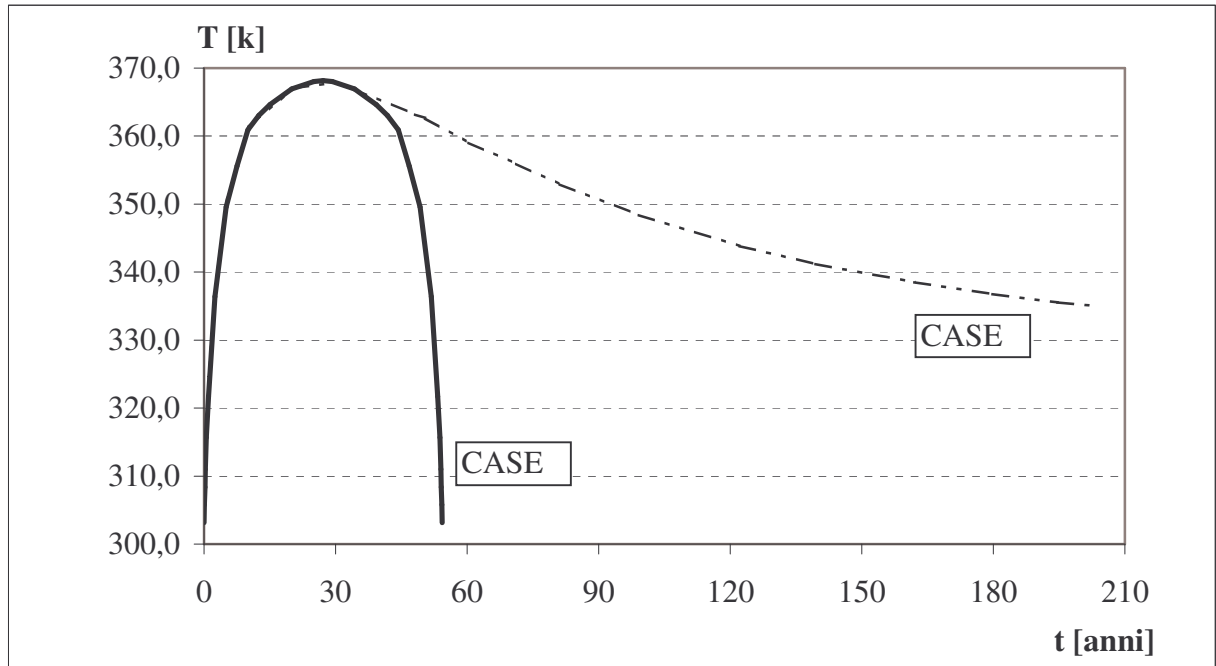


Figura 62. Andamento della temperatura ridotta ad una durata più breve

6.2.5 Parametri del materiale

I parametri del materiale sono stati ottenuti tramite prove triassiali realizzate nel laboratorio di geotecnica del B.R.G.M. (Laboratoire de Geotechnique du B.R.G.M.) su dei campioni provenienti dai carotaggi effettuati a Montcornet in condizioni variabili:

- prove drenate e non
- ciclici o monotoni
- differenti pressioni di confinamento (5.3 MPa e 10.6 MPa)
- velocità di carico differenti (da $0.008 \frac{mm}{min}$ a $0.04 \frac{mm}{min}$)

Queste condizioni, molto varie, permettono di determinare i parametri elastoplastici per mezzo delle prove a bassa velocità e i parametri visco-elastoplastici per mezzo delle prove ad alta velocità.

I risultati ottenuti con tramite le prove sono quelli riportati in tabella.

CARATTERISTICHE DELLE PROVE TRIASSIALI

Profondità	$z = 437.69 \text{ m}$
Pressione di confinamento	$p_{\text{conf}} = 5.30 \text{ MPa}$

PARAMETRI

Parametri elastoplastici

Parametri elastici

Pressione di riferimento	$p_{\text{ref}} = 1.0 \text{ MPa}$
Modulo elastico di volume per $p = p_{\text{ref}}$	$K_{\text{ref}} = 200.0 \text{ MPa}$
Modulo elastico a taglio per $p = p_{\text{ref}}$	$G_{\text{ref}} = 120.0 \text{ MPa}$
Esponente elastico	$n = 0.7$
Modulo di Young (ricavato da K_{ref} e G_{ref})	$E = 300.0 \text{ MPa}$
Coefficiente di Poisson (ricavato da K_{ref} e G_{ref})	$\nu = 0.25$

Parametri plastici

Angolo di attrito	$\varnothing = 15^\circ$
Modulo di compressibilità plastica, pendenza della curva di consolidamento	$\beta = 12^\circ$
Pressione critica iniziale	$p'_{c0} = 15.0 \text{ MPa}$

Hardening

Parametro che definisce l'evoluzione del grado di mobilità del meccanismo deviatorico	$a = 0.001$
Parametro che definisce la forma del limite di snervamento deviatorico	$b = 1.0$
Parametro che definisce l'evoluzione del grado di mobilità del meccanismo isotropico	$c = 0.002$
Distanza fra la curva dello stato critico e quella di consolidazione in scala logaritmica ($\sigma'_{c0}(T) = p'_{c0} \cdot d$)	$d = 1.5$

Dominio del comportamento

Rateo fra il limite deviatorico di snervamento e l'inizio del dominio elastico deviatorico	$r^e_d = 0.005$
Rateo fra il limite isotropico di snervamento e l'inizio del dominio elastico isotropico	$r^e_i = 1.0$
Parametro che definisce l'andamento logaritmico della variazione della pressione di preconsolidamento ($\sigma'_{c0}(T)$) con la temperatura	$\gamma = 0.4$

Parametri fisici

Peso di volume dell'argilla	$\gamma_s = 20.70 \frac{kN}{m^3}$
Porosità	$n = 0.37$
Accelerazione di gravità	$g = 9.81 \frac{m}{s^2}$

Parametri idraulici

Permeabilità $k = 1.0 \cdot 10^{-12} \frac{m}{s^{-1}}$

Densità dell'acqua $\rho_w = 1000 \frac{kg}{m^3}$

Parametri termici

Coefficiente cubico di dilatazione termica $\beta'_{s0} = 3.0 \cdot 10^{-5} \frac{1}{K}$

Modulo elastico di volume per $p = p_{ref}$ $K_{ref} = 200.0 \text{ MPa}$

Modulo elastico a taglio per $p = p_{ref}$ $G_{ref} = 120.0 \text{ MPa}$

Esponente elastico $n = 0.7$

Modulo di Young (ricavato da K_{ref} e G_{ref}) $E = 300.0 \text{ MPa}$

Coefficiente di Poisson (ricavato da K_{ref} e G_{ref}) $\nu = 0.25$

6.3 STATO INIZIALE

6.3.1 Introduzione

Essendo 5 le variabili libere che COMES-GEO gestisce, sono state date le condizioni di partenza per tutte queste grandezze passando però per RUN successivi con la seguente successione:

- Run_00: tutte le condizioni fissate
- Run_01: temperatura e pressione capillare fissate con la profondità
- Run_02: si libera la pressione capillare e si fissa solo in sommità
- Run_03: si libera la pressione del gas e si fissa solo in sommità
- Run_04: si libera la temperatura e si fissa solo in sommità
- Run_05: si applica in sommità un carico verticale pari al peso di 350.00 m di terreno che vi insistono sopra

6.3.2 Run_00

Il Run_00 ha la sola funzionalità di assegnare al modello uno stato tensionale, termico, idrometrico e deformativo di partenza. L'ideale sarebbe quello di arrivare alla fine alle stesse condizioni a cui si trova nel caso reale la struttura. In questo caso ciò non è stato possibile a causa della difficoltà di dare ad ogni nodo (sono ben 2836) le condizioni reali perché queste sono, come già detto, variabili con la profondità. Inoltre, proprio a causa delle grandi dimensioni globali della mesh, ciò avrebbe comportato ad una difficile e laboriosa ricerca della convergenza.

Si è per cui scelto di assegnare come condizioni al contorno per il Run_00 dei valori medi in modo che, nei Run successivi, la convergenza fosse più facile da ottenere applicando le condizioni imposte tramite leggi di variazione con la profondità dei nodi.

L'implementazione di tali leggi risulta molto semplice ed immediata intervenendo direttamente sul codice di calcolo.

Si è inoltre scelto di non introdurre l'accelerazione di gravità in quanto, per i motivi sopra esposti, il Run_00 non ha più la funzione di portare il modello alle condizioni reali ma solo di dare al complesso un valore di partenza.

Vengono eseguiti 10 steps della durata di un secondo ma, data la linearità del problema, un solo step di qualsiasi durata temporale sarebbe bastato. A proposito si ricorda come, nelle analisi numeriche complesse come questa, sia sempre bene eseguire una serie di passi temporali anche dopo che si ha raggiunto una configurazione di equilibrio.

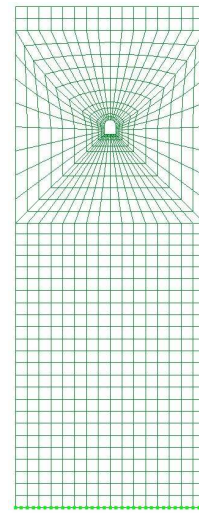
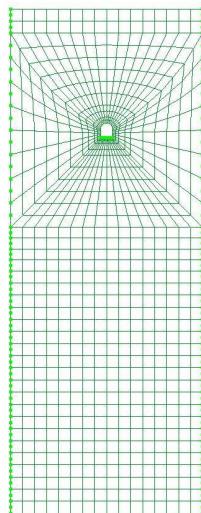
Passo temporale	$\Delta t = 1.0 \text{ s}$ $n^{\circ} \text{step} = 10$
Gravità g	$g = 0.00 \text{ m/s}$
Pressione dei gas p^g	$p^g = 101325 \text{ Pa}$ su tutti i nodi (pressione atmosferica)
Pressione capillare p^c	$p^c = -4453740 \text{ Pa}$ su tutti i nodi ⁽¹⁾
Temperatura T	$T = 301.72 \text{ K}$ su tutti i nodi ⁽²⁾
Spostamenti/Carichi x	$dx = 0.0 \text{ m}$ sui nodi delle pareti verticali e della catena della galleria ⁽³⁾
Spostamenti/Carichi y	$dy = 0.0 \text{ m}$ sui nodi inferiori della galleria ⁽⁴⁾

⁽¹⁾ valore medio della pressione idrostatica fra le profondità di -350.00 m e -558.00 m

⁽²⁾ valore medio della temperatura fra le profondità di -350.00 m e -558.00 m

⁽³⁾

⁽⁴⁾



6.3.3 Run_01

Nel Run_01 si impongono in tutti i nodi variabili con la profondità le condizioni di temperatura e pressione capillare. Le altre rimangono le stesse di prima. Un'ulteriore differenza rispetto a prima è l'applicazione della forza di gravità e, di conseguenza, del peso proprio. Anche in questo caso il problema rimane lineare e risulta perciò sufficiente un solo step temporale, si sceglie comunque di farne 10 da un secondo.

Passo temporale	$\Delta t = 1.0 \text{ s}$ $n^{\circ} \text{step} = 10$
Gravità g	$g = -9.81 \text{ m/s}$
Pressione dei gas p^g	$p^g = 101325 \text{ Pa}$ su tutti i nodi (pressione atmosferica)
Pressione capillare p^c	$p^c = -\rho \cdot \gamma \cdot z \text{ Pa}$ (pressione idrostatica) su tutti i nodi ⁽¹⁾
Temperatura T	$T = 0.03 \cdot z + 288.15 \text{ K}$ su tutti i nodi ⁽²⁾
Spostamenti/Carichi x	$dx = 0.0 \text{ m}$ sui nodi delle pareti verticali e della catena della galleria (vedi Run_00)
Spostamenti/Carichi y	$dy = 0.0 \text{ m}$ sui nodi inferiori della galleria (vedi Run_00)

(1)

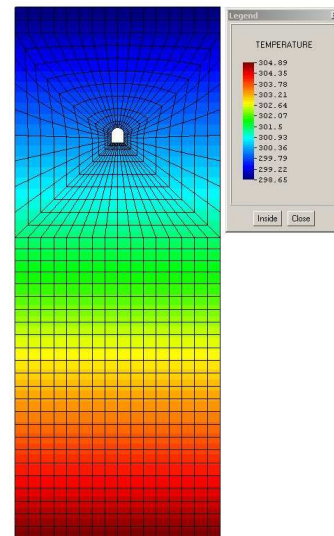
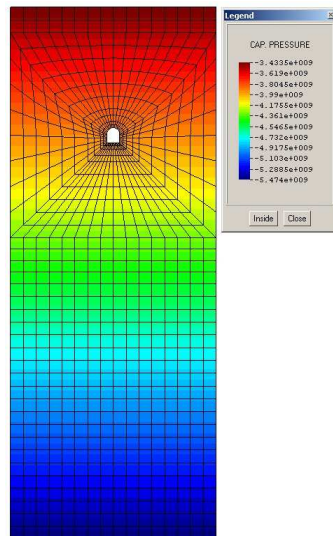
(2)

$$p^c_{(-350.00)} = -3433500 \text{ Pa}$$

$$t_{(-350.00)} = 298.65 \text{ K}$$

$$p^c_{(-558.00)} = -5473980 \text{ Pa}$$

$$t_{(-558.00)} = 312.15 \text{ K}$$



6.3.4 Run_02

Nel Run_02 si lascia consolidare il terreno per effetto della gravità a partire da una condizione imposta della pressione capillare in sommità. Il fatto di aver imposto la pressione capillare variabile con la profondità nel Run precedente è servito unicamente ad aiutare la convergenza in questa analisi. Fissare la pressione capillare solo in sommità e lasciarla libera nel resto della maglia, ha lo scopo di ricercare, quando verrà svolta l'analisi vera e propria, un modello più simile alla realtà. Si potrà così osservare se le pressioni si discosteranno da quella idrostatica per effetto dell'innalzamento della temperature sotto l'azione del carico verticale.

In questo caso si è reso necessario imporre un passo temporale appropriato alla dimensione della mesh ed alla permeabilità del terreno per poter lasciare al modello il tempo necessario per consolidare.

Passo temporale	$\Delta t = 2.0 \cdot 10^5$ s n°step = 14 $t_{\text{totale}} = 14 \cdot 2.0 \cdot 10^5 = 2.8 \cdot 10^6$ s = 32.407 giorni
Gravità g	$g = -9.81$ m/s
Pressione dei gas p^g	$p^g = 101325$ Pa su tutti i nodi (pressione atmosferica)
Pressione capillare p^c	$p^c_{(z = -350.00 \text{ m})} = -\rho \cdot \gamma \cdot z = -3433500$ Pa sui nodi di sommità
Temperatura T	$T = 0.03 \cdot z + 288.15$ K su tutti i nodi (vedi Run_01)
Spostamenti/Carichi x	$dx = 0.0$ m sui nodi delle pareti verticali e della catena della galleria (vedi Run_00)
Spostamenti/Carichi y	$dy = 0.0$ m sui nodi inferiori della galleria (vedi Run_00)

Nel grafico successivo si vede l'andamento della pressione capillare nei nodi inferiori della mesh. Si nota come questa sia molto alta all'inizio della consolidazione e, come, riesca abbastanza velocemente a portarsi a valori vicini a quello di equilibrio ($p^c_{(z = -558.00 \text{ m})} = -5473980$ Pa). In pratica è lo stesso comportamento che si avrebbe se si applicasse un carico esterno.

Alla fine del processo di consolidazione si osserva uno spostamento di quasi un metro e corrisponde allo stesso abbassamento che si avrebbe imprimendo a tutti i nodi della mesh

pressione capillare nulla. Anche in questo caso si sono operati dei run successivi a quello di equilibrio come del resto si può vedere dal grafico nella zona in cui la curva risulta praticamente orizzontale.

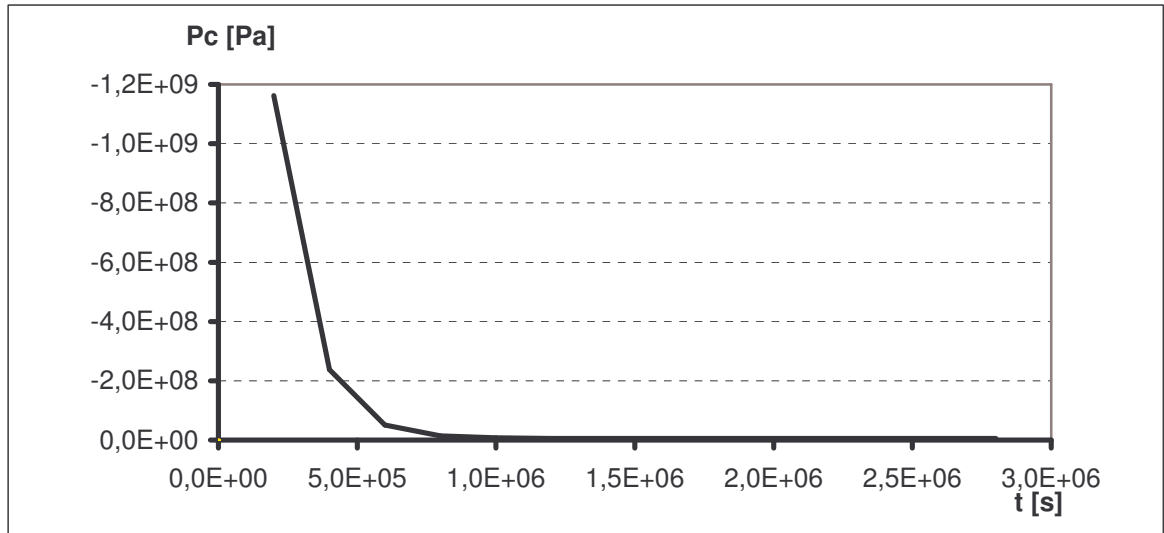


Figura 63. Andamento delle pressioni capillari durante la consolidazione

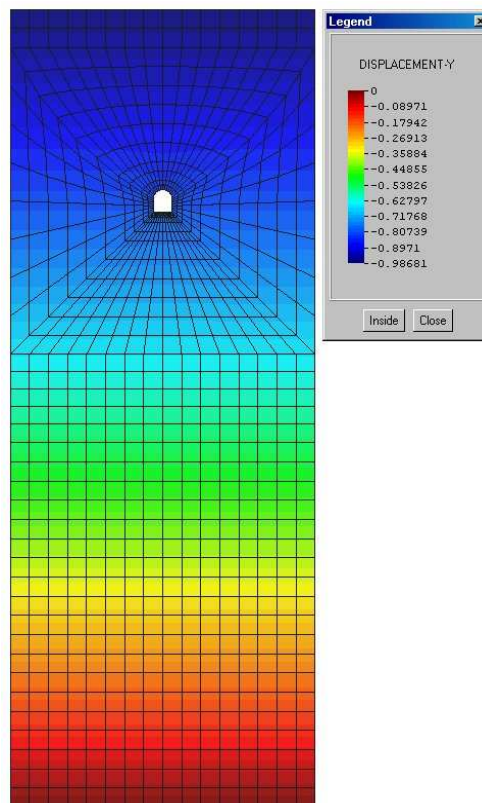


Figura 64: Spostamenti d_y [m] a fine consolidazione

6.3.5 Run_03

Al pari del Run_02 ora si libera la pressione del gas in luogo della pressione capillare. Come prima viene mantenuta fissa al valore voluto nei nodi di sommità. Tale valore risulta pari alla pressione atmosferica. Differentemente da prima però, ora, il tempo d'analisi non è vincolato ad alcun processo fisico e, quindi, può essere assunto "a piacere"; si sceglie come per i Run precedenti di imputare 10 step da un secondo.

Passo temporale	$\Delta t = 2.0 \cdot 10^5$ s n°step = 14 $t_{\text{totale}} = 14 \cdot 2.0 \cdot 10^5 = 2.8 \cdot 10^6$ s = 32.407 giorni
Gravità g	$g = -9.81$ m/s
Pressione dei gas p^g	$p^g = 101325$ Pa sui nodi di sommità
Pressione capillare p^c	$p^c_{(z = -350.00 \text{ m})} = -\rho \cdot \gamma \cdot z = -3433500$ Pa sui nodi di sommità
Temperatura T	$T = 0.03 \cdot z + 288.15$ K su tutti i nodi (vedi Run_01)
Spostamenti/Carichi x	$dx = 0.0$ m sui nodi delle pareti verticali e della catena della galleria (vedi Run_00)
Spostamenti/Carichi y	$dy = 0.0$ m sui nodi inferiori della galleria (vedi Run_00)

6.3.6 Run_04

Al pari dei Run_02/03 ora si libera la temperatura in luogo della pressione capillare/pressione del gas. Come prima viene mantenuta fissa al valore voluto nei nodi di sommità. Tale valore risulta pari a $T_{(z = -350.00 \text{ m})} = 25.5 \text{ °C} = 298.7 \text{ K}$. Come nel Run_03 il tempo di processamento viene assunto pari ad un secondo per un totale di 10 passi.

Passo temporale	$\Delta t = 1.0$ $n^{\circ} \text{step} = 10$
Gravità g	$g = -9.81 \text{ m/s}$
Pressione dei gas p^g	$p^g = 101325 \text{ Pa}$ sui nodi di sommità
Pressione capillare p^c	$p^c_{(z = -350.00 \text{ m})} = -\rho \cdot \gamma \cdot z = -3433500 \text{ Pa}$ sui nodi di sommità
Temperatura T	$T_{(z = -350.00 \text{ m})} = 0.03 \cdot z + 288.15 = 298.7 \text{ K}$ sui nodi di sommità
Spostamenti/Carichi x	$dx = 0.0 \text{ m}$ sui nodi delle pareti verticali e della catena della galleria (vedi Run_00)
Spostamenti/Carichi y	$dy = 0.0 \text{ m}$ sui nodi inferiori della galleria (vedi Run_00)

6.3.7 Run_05

Allo stato attuale dell'analisi il modello si trova in equilibrio sotto l'azione del peso proprio.

Bisogna però considerare che la profondità a cui si trova la superficie superiore della mesh (ovvero quella i cui nodi presentano pressione del gas, pressione capillare e temperatura fissate) è di 350.00 m al di sotto del piano campagna. Ovviamente sarebbe bastato modellare anche la parte mancante, ma il modello sarebbe risultato troppo pesante ed, inoltre, tale parte è inutile dal punto di vista dei risultati ottenuti. E' stata quindi sostituita da un carico verticale applicato in sommità.

L'intensità di tale carico è calcolata come il peso del terreno riferito al volume solido totale addizionato al peso dell'acqua riferito al volume dei vuoti e vale quindi:

$$q_y = [\rho_s(1 - n) + \rho_w \cdot n] \cdot z \cdot g = 5834547 \text{ Pa}$$

$$\rho_s = 2070 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \quad \text{densità di volume del terreno}$$

$$\rho_w = 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \quad \text{densità di volume dell'acqua}$$

$$n = 0.37 \quad \text{porosità del terreno}$$

$$g = 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \quad \text{accelerazione di gravità}$$

Come nel Run_02, il modello ha bisogno di consolidare, per cui bisogna impostare un tempo di processamento tale per cui possa riuscire a farlo. Ovviamente in questo caso il tempo sarà minore che nel Run_02 (consolidazione sotto un carico maggiore) ma, sempre per il motivo sopraccitato dei passi successivi da farsi dopo il raggiungimento dell'equilibrio, si tiene lo stesso intervallo e lo stesso numero di step della consolidazione precedente.

Alla fine vediamo dal grafico "Pressione capillare – Tempo" che il raggiungimento della p^c di equilibrio è più breve rispetto a prima e, dal contour degli spostamenti verticali della mesh che, com'è logico che sia, questi risultano maggiori.

Passo temporale	$\Delta t = 2.0 \cdot 10^5 \text{ s}$ $n^{\circ} \text{step} = 14$ $t_{\text{totale}} = 14 \cdot 2.0 \cdot 10^5 = 2.8 \cdot 10^6 \text{ s} = 32.407 \text{ giorni}$
Gravità g	$g = -9.81 \text{ m/s}$
Pressione dei gas p^g	$p^g = 101325 \text{ Pa}$ sui nodi di sommità
Pressione capillare p^c	$p^c_{(z = -350.00 \text{ m})} = -\rho \cdot \gamma \cdot z = -3433500 \text{ Pa}$ sui nodi di sommità
Temperatura T	$T_{(z = -350.00 \text{ m})} = 0.03 \cdot z + 288.15 = 298.7 \text{ K}$ sui nodi di sommità
Spostamenti/Carichi x	$dx = 0.0 \text{ m}$ sui nodi delle pareti verticali e della catena della galleria (vedi Run_00)
Spostamenti/Carichi y	$dy = 0.0 \text{ m}$ sui nodi inferiori della galleria (vedi Run_00) $qy = 5834547 \text{ Pa}$ sui nodi di sommità

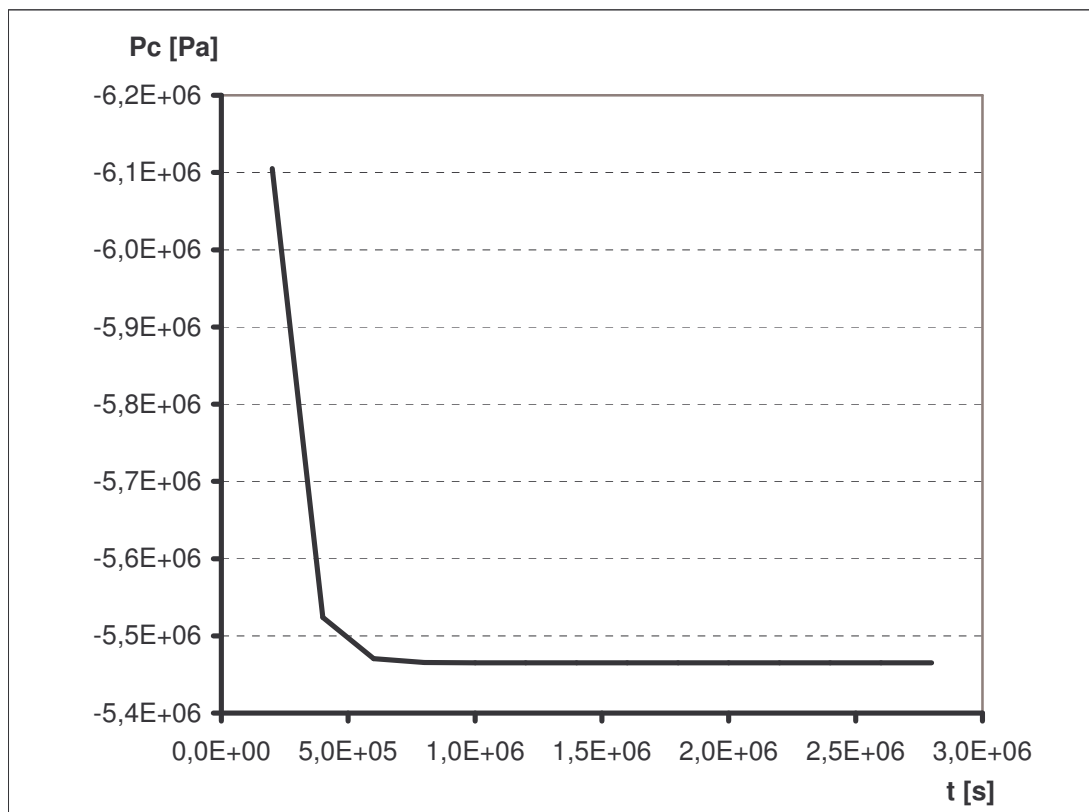


Figura 65. Andamento delle pressioni capillari durante la consolidazione

Data la maggiore entità del carico applicato, coi tempi considerati, si perdono i primi istanti del processo dove le sovrappressioni sono maggiori e simili a quelle riscontrate nella consolidazione sotto l'effetto della gravità.

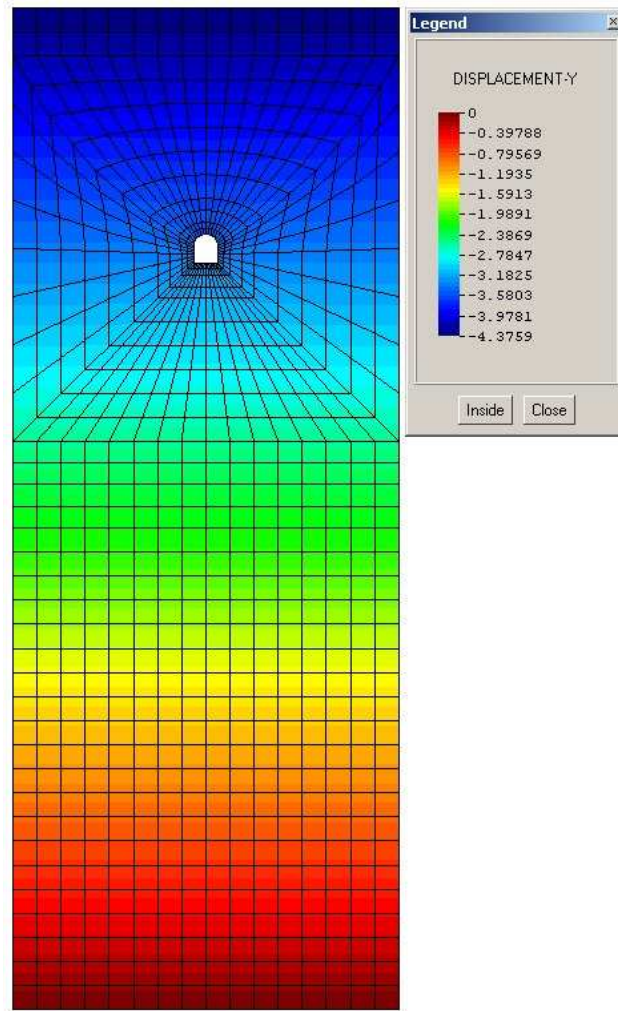


Figura 66: Spostamenti d_y [m] a fine consolidazione

6.3.8 *Condizioni finali*

Dopo i cinque run si arriva ad una condizione d'equilibrio che è la seguente:

- $p_g = 101325 \text{ Pa}$ in tutti i nodi
- $p_c = p_{idrostatica}$ in tutti i nodi (vedi Run_01)
- $T = \text{variabile con la profondità}$ in tutti i nodi (vedi Run_01)
- $dx \approx 0.00 \text{ m}$
- $d_{y\max} = -4.38 \text{ m}$

6.4 CASE 1

6.4.1 Carico termico

Per seguire analiticamente la curva che riporta il “CASE 1” in “Grafico 4” è stato necessario scomporla in sette funzioni, tre in fase di carico, tre in fase di scarico ed una di flesso.

Nel grafico sotto riportato si vede la curva implementata con le funzioni usate per ottenerla (curva in rosso) e la curva che segue i dati di origine (curva in nero).

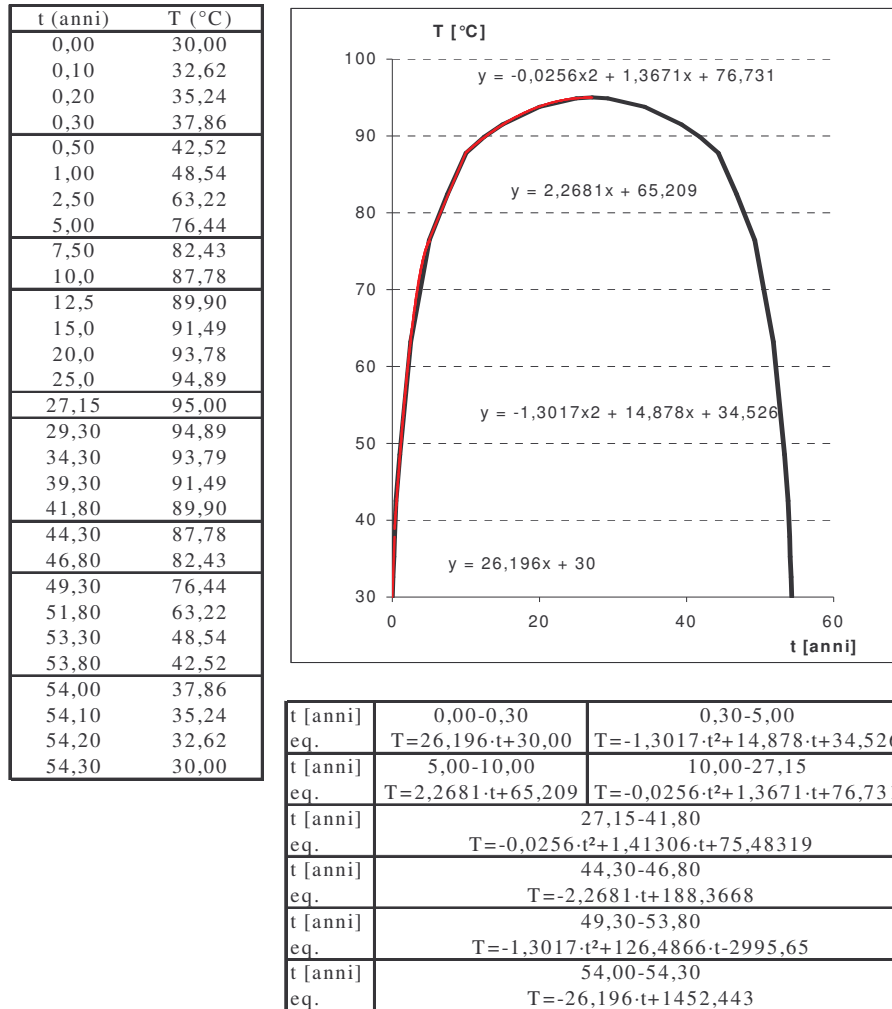


Tabella 12: CASE 1, andamento della temperatura

6.4.2 Tempi di analisi

Per l'analisi sono stati eseguiti due run con passi temporali diversi in quanto il processo si sviluppava in due fasi distinte, la prima rappresentata dal ciclo termico raffigurato nel grafico precedente ed una seconda in cui si interrompe l'erogazione di temperatura dalle sorgenti e si lascia che la mesh dissipi il calore accumulato.

Run_06	passo temporale	Dt = 4.0 settimane = 2419200 giorni
	n° step	n° = 708
	tempo iniziale	t _i = 0.0 anni
	tempo finale	t _f = 54.28 anni
	tempo Run_06	t _{R_06} = 54.28 anni
Run_07	passo temporale	Dt = 12.0 settimane = 7257600 giorni
	n° step	n° = 678
	tempo iniziale	t _i = 54.28 anni
	tempo finale	t _f = 210.21 anni
	tempo Run_07	t _{R_07} = 155.93 anni

Tabella 13: CASE 1, tempi d'analisi

6.4.3 Risultati

L'analisi svolta ha permesso di vedere l'andamento della temperatura nel tempo. Questa naturalmente, data la fasicità delle condizioni d'entrata, segue una curva simile a quella delle sorgenti nella prima fase, dove ricordiamo la temperatura viene imposta. Nella seconda fase, quella in cui si lascia "raffreddare" la mesh, si nota come la temperatura tende a calare nella parte superiore della mesh e a formare una zona calda nel basso. Questo è dovuto al fatto che in sommità la temperatura viene mantenuta costante (b.c.) causando un "immagazzinamento" del calore nel fondo. Gran parte del flusso termico viene però dissipata attraverso le superfici laterali.

Nei contour seguenti si vede proprio questo effetto. E' stato scelto di mostrare la temperatura della mesh in momenti particolarmente significativi:

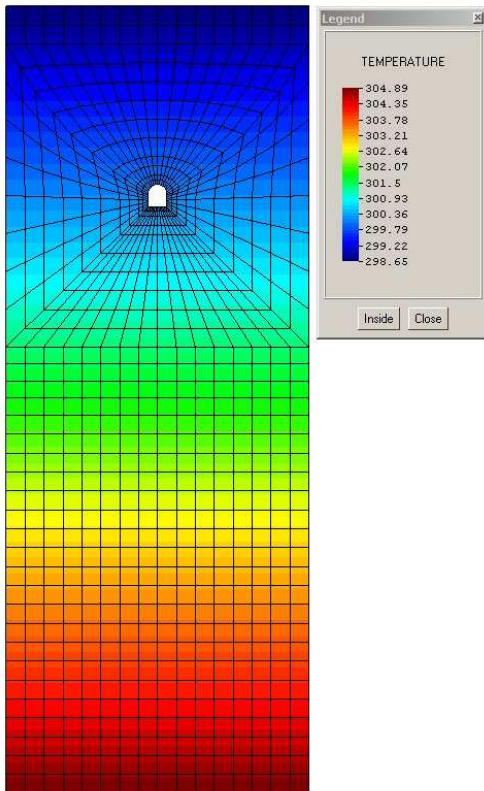
PRIMA FASE

- $t_0=0.0$ anni $T_0^s=30.00$ °C = 303.15 K stato iniziale
- $t_1=0.2$ anni $T_1^s=36.02$ °C = 309.17 K
- $t_2=5.0$ anni $T_2^s=76.44$ °C = 349.59 K
- $t_3=15.0$ anni $T_3^s=87.78$ °C = 360.93 K
- $t_4=27.1$ anni $T_4^s=95.00$ °C = 368.15 K temperatura massima
- $t_5=44.3$ anni $T_5^s=87.78$ °C = 360.93 K
- $t_6=49.3$ anni $T_6^s=76.44$ °C = 349.59 K
- $t_7=54.3$ anni $T_7^s=30.00$ °C = 303.15 K stato finale

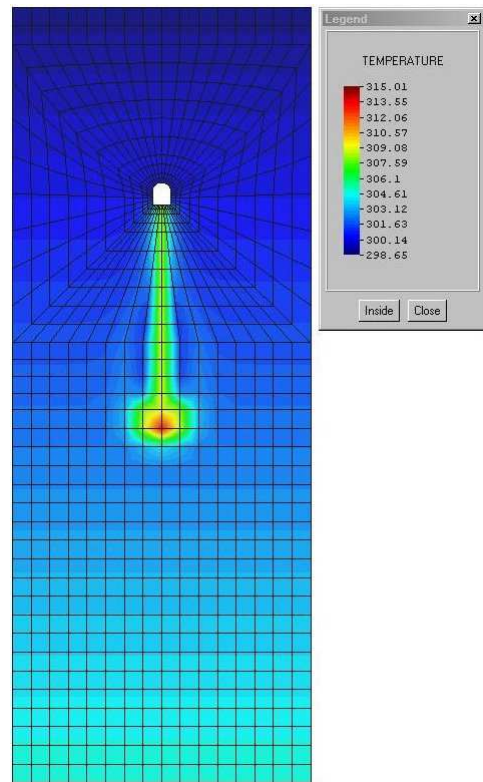
SECONDA FASE

- $t_8=55.0$ anni
- $t_9=57.5$ anni
- $t_{10}=60.0$ anni
- $t_{11}=65.0$ anni
-
- $t_{12}=75.0$ anni
- $t_{13}=100.0$ anni
- $t_{14}=150.0$ anni
- $t_{15}=210.0$ anni

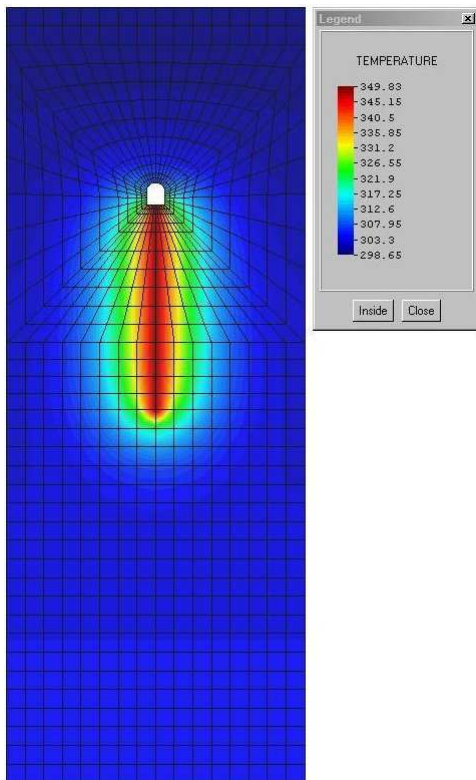
$t_0=0.0$ anni



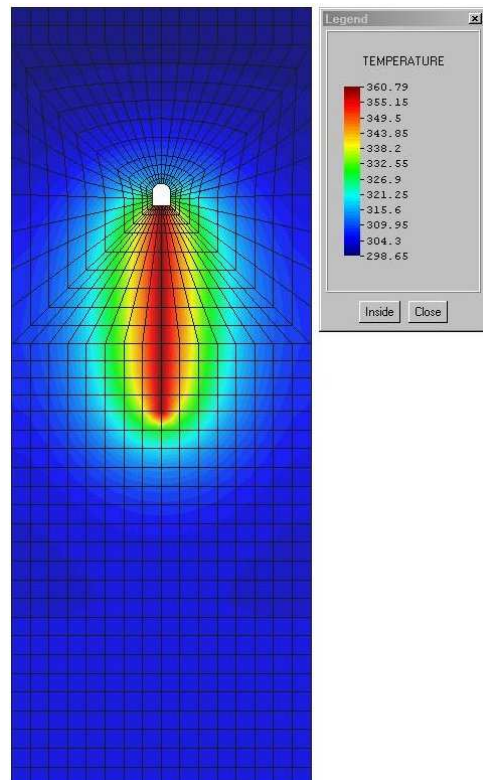
$t_1=0.2$ anni



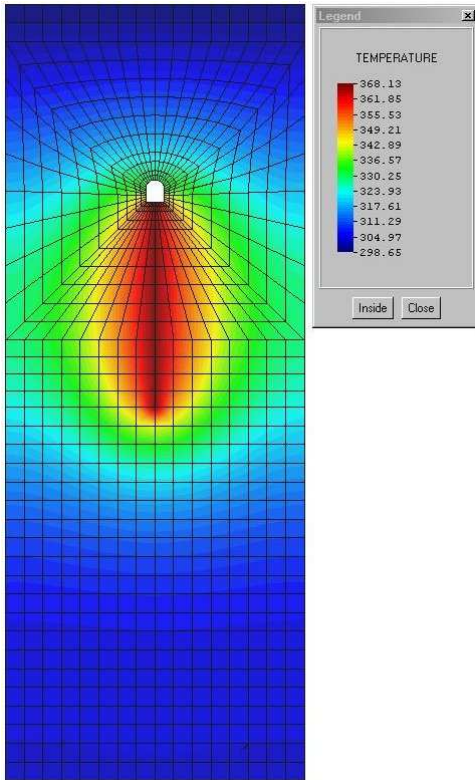
$t_2=5.0$ anni



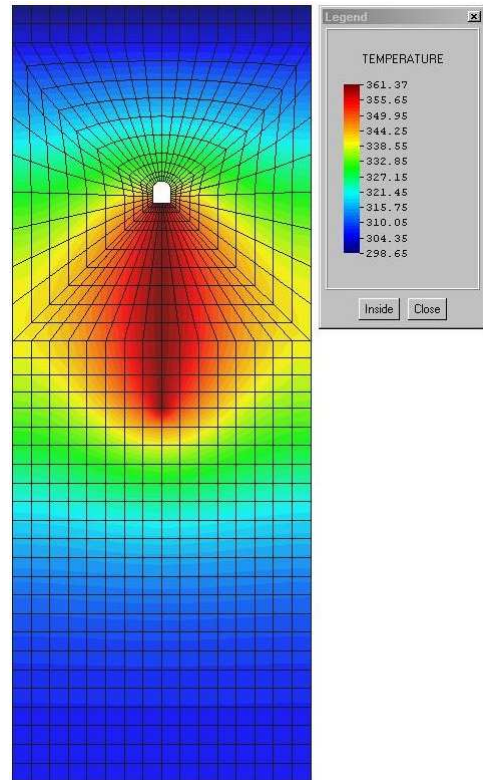
$t_3=15.0$ anni



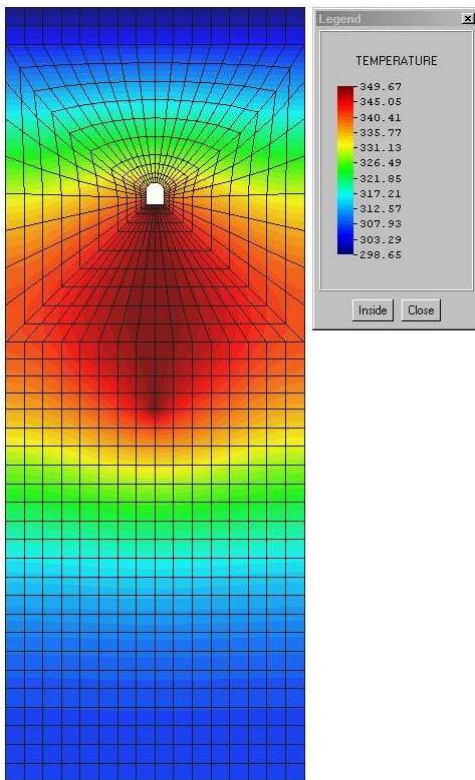
$t_4=27.1$ anni



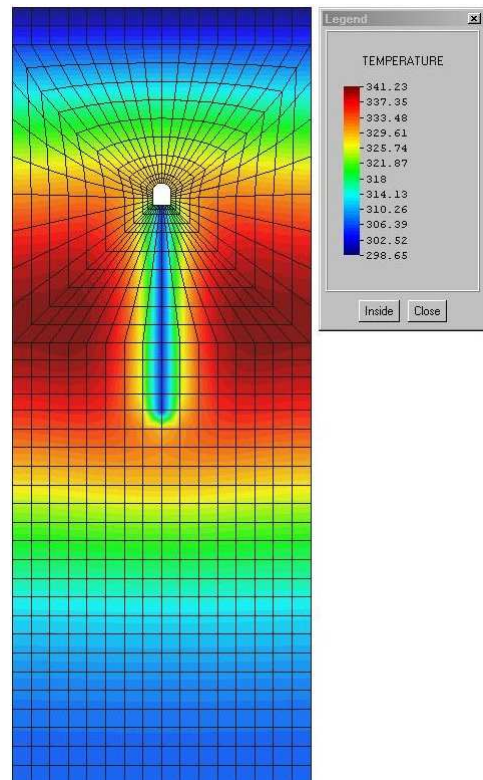
$t_5=44.3$ anni



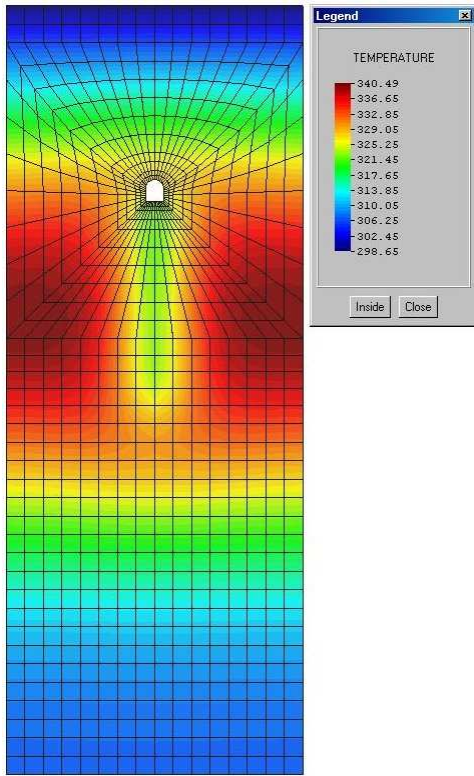
$t_6=49.3$ anni



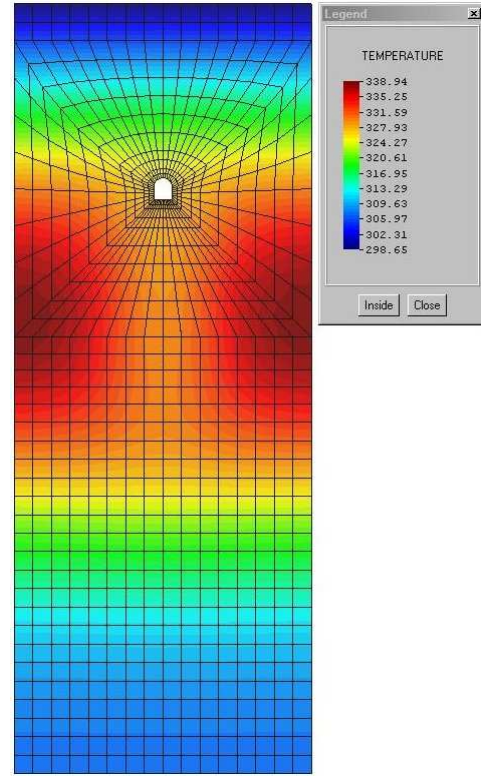
$t_7=54.3$ anni



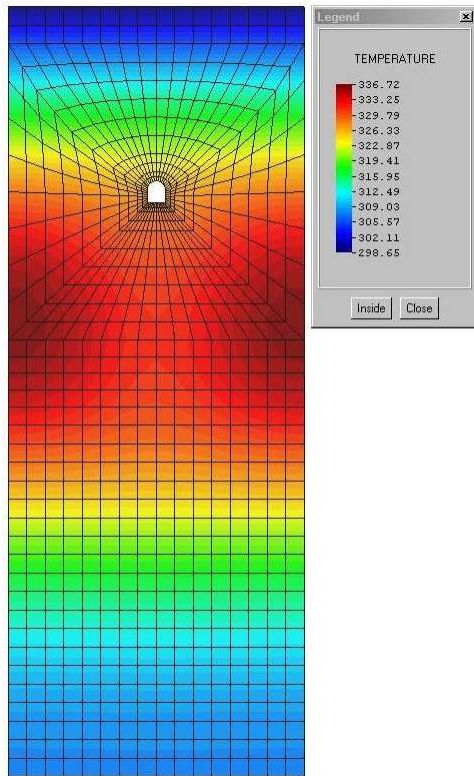
$t_8=55.0$ anni



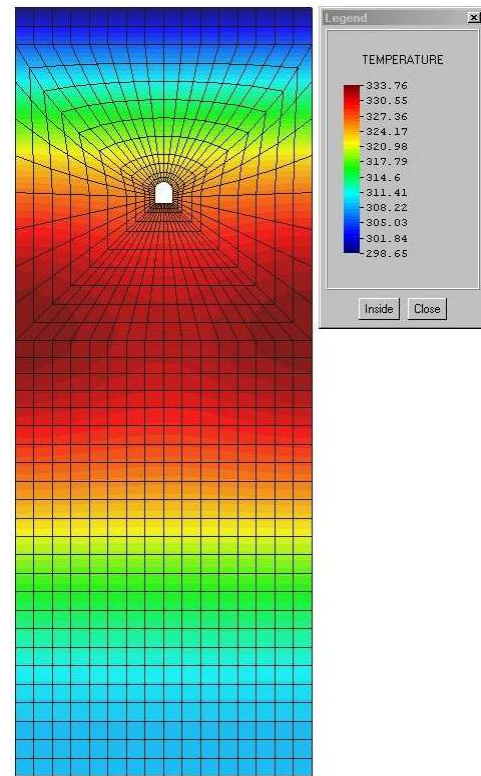
$t_9=57.5$ anni



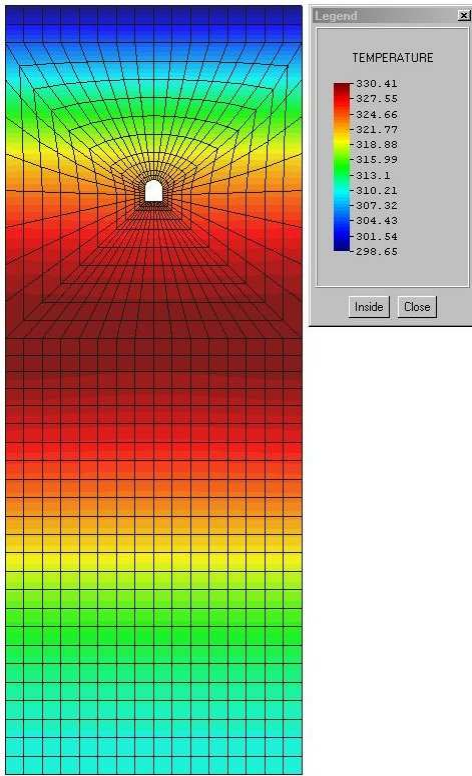
$t_{10}=60.0$ anni



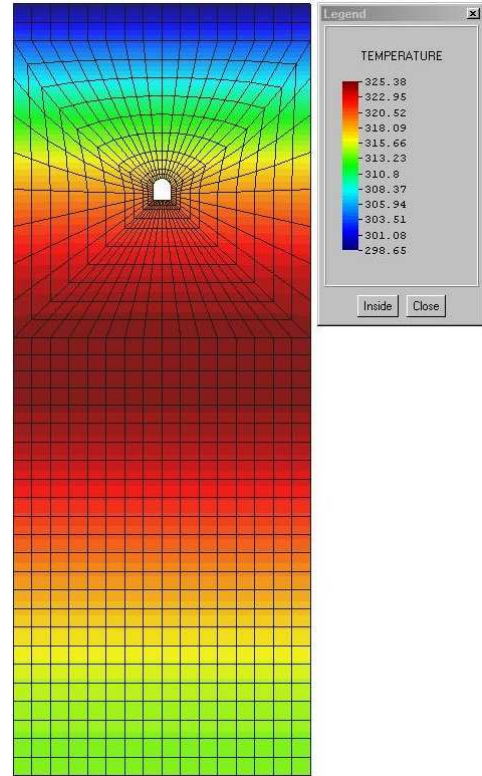
$t_{11}=65.0$ anni



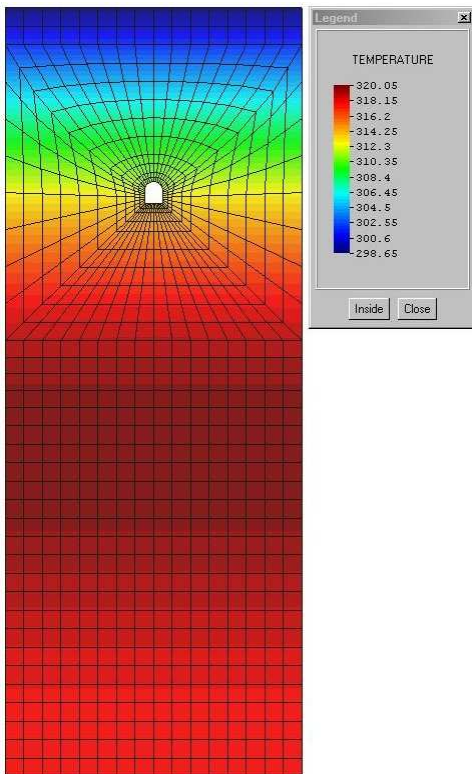
$t_{12}=75.0$ anni



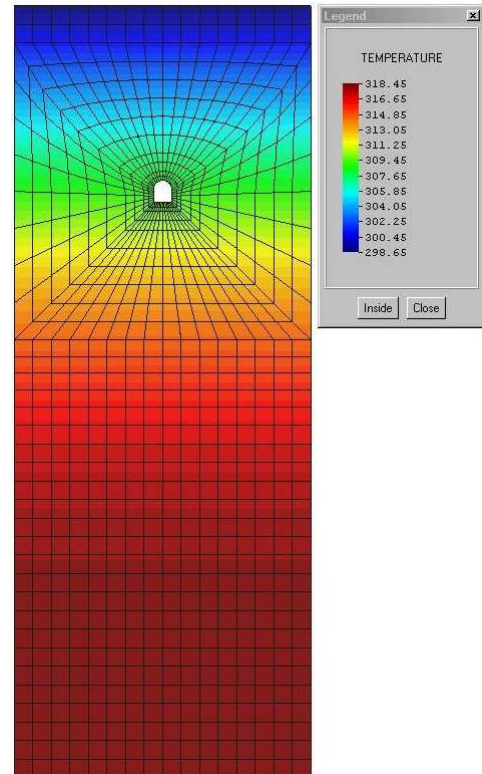
$t_{13}=100.0$ anni



$t_{14}=150.0$ anni



$t_{15}=210.0$ anni



Guardando i contour delle temperature diventa interessante graficare l'andamento della temperatura nel tempo a diverse distanze dal pozzo di stoccaggio.

- Punto 1: $d = 5.0$ m
- Punto 2: $d = 20.0$ m
- Punto 3: $d = 40.0$ m

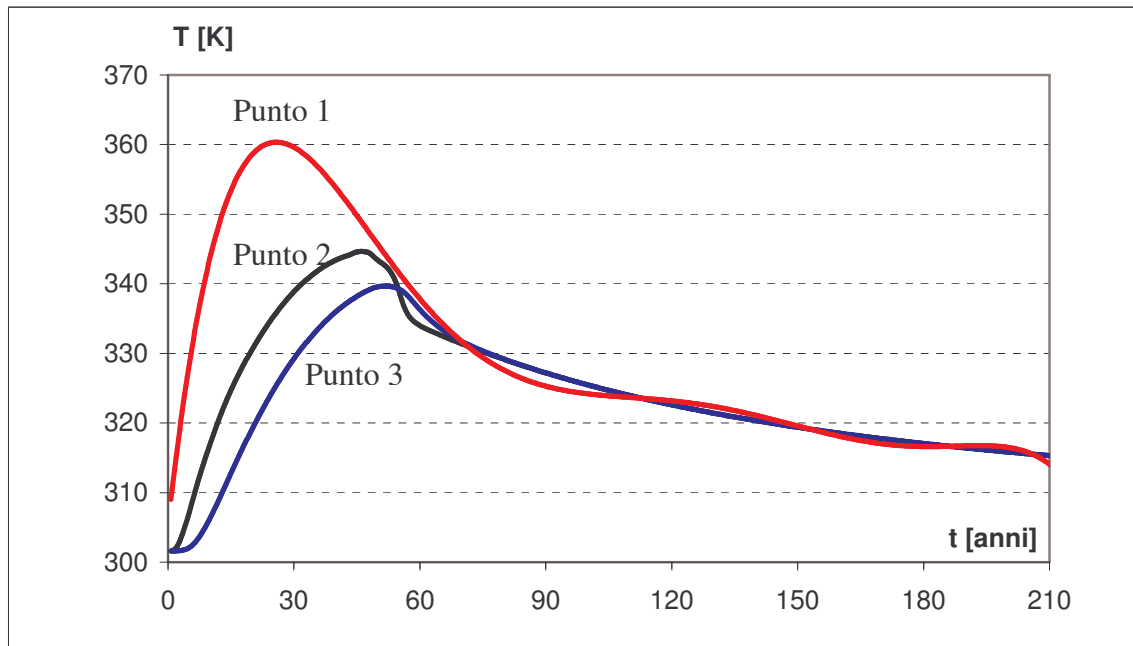


Figura 67. Andamento della temperatura a distanze diverse dal pozzo di stoccaggio

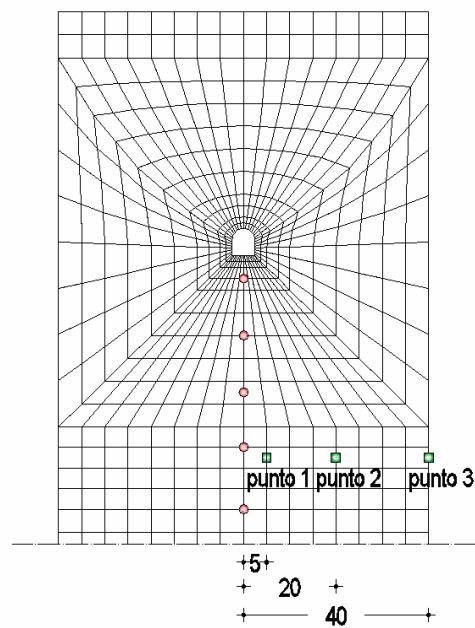


Figura 68: localizzazione dei punti

Lo stesso vale in direzione verticale per i punti che si allontanano man mano dal fondo del pozzo.

- Punto 1: $d = 7.5$ m
- Punto 2: $d = 50.0$ m
- Punto 3: $d = 100.0$ m

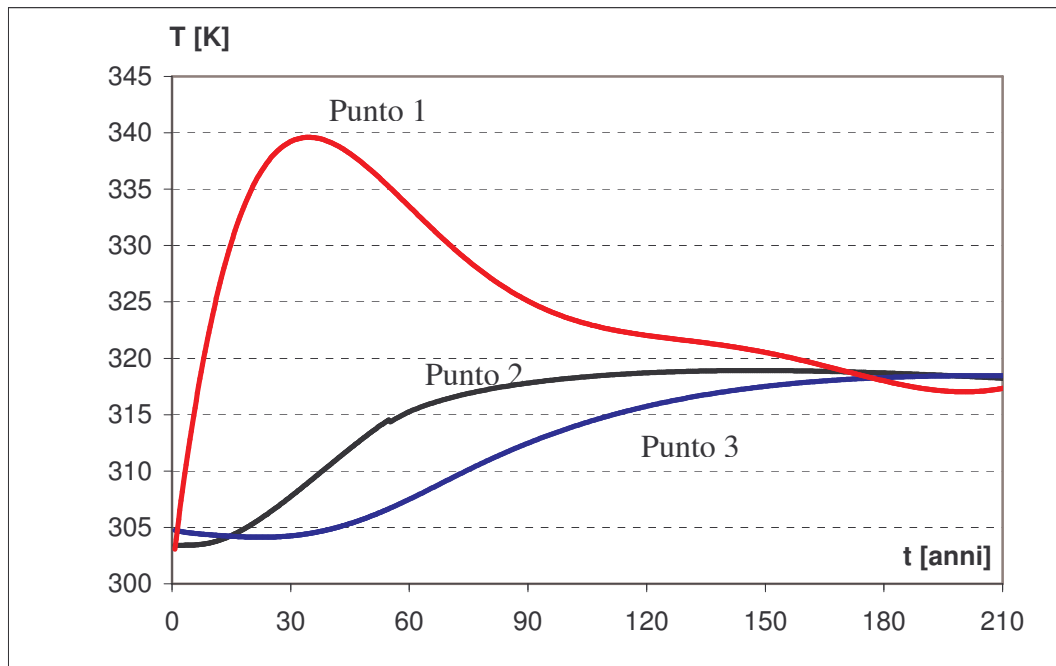


Figura 69. Andamento della temperatura a distanze diverse dal fondo del pozzo

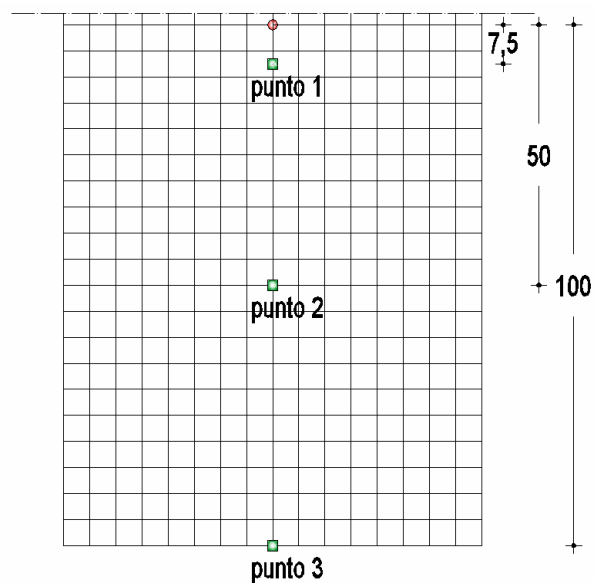
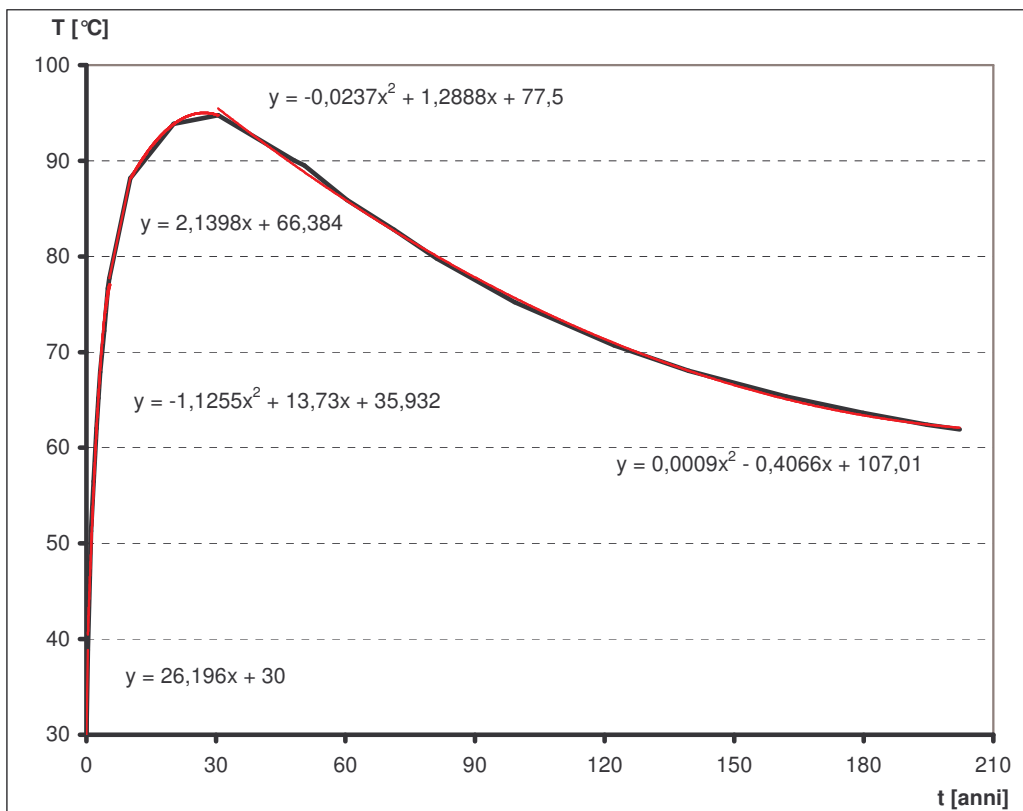


Figura 70: localizzazione dei punti

6.5 CASE 2

6.5.1 Carico termico

Anche in questo caso valgono le considerazioni fatte per quello precedente.



t [anni]	0,00-0,30	0,30-5,00	5,00-10,00
eq.	$T=26,196 \cdot t+30$	$T=-1,1255 \cdot t^2+13,73 \cdot t+35,932$	$T=2,1398 \cdot t+66,384$
t [anni]	10,00-30,00		30,00-210,00
eq.	$T=-0,0237 \cdot t^2+1,2888 \cdot t+77,5$		$T=0,0009 \cdot t^2-0,4066 \cdot t+107,01$

t (anni)	0	0,1	0,2	0,3	0,5	1	2,5	5	
T (°C)	30	32,6196	35,2392	37,8588	42,5666	48,5875	63,2736	76,4955	
t (anni)	7,5	10	12,5	15	20	25	30	35	
T (°C)	82,4333	87,783	89,9069	91,4995	93,796	94,9075	94,834	93,8815	
t (anni)	40	50	60	70	80	90	100	110	120
T (°C)	92,186	88,93	85,854	82,958	80,242	77,706	75,35	73,174	71,18
t (anni)	130	140	150	160	170	180	190	200	210
T (°C)	69,362	67,726	66,27	64,994	63,898	62,982	62,246	61,69	61,31

Tabella 14: CASE 1, andamento della temperatura

6.5.2 Tempi di analisi

In questo caso si è potuto procedere con un run unico che andasse dal tempo zero a quello finale. Data la velocità molto bassa con cui il fenomeno si sviluppa è stato adottato come passo temporale un valore abbastanza alto ma, tuttavia, congruo alle durate che entrano in gioco nel caso specifico.

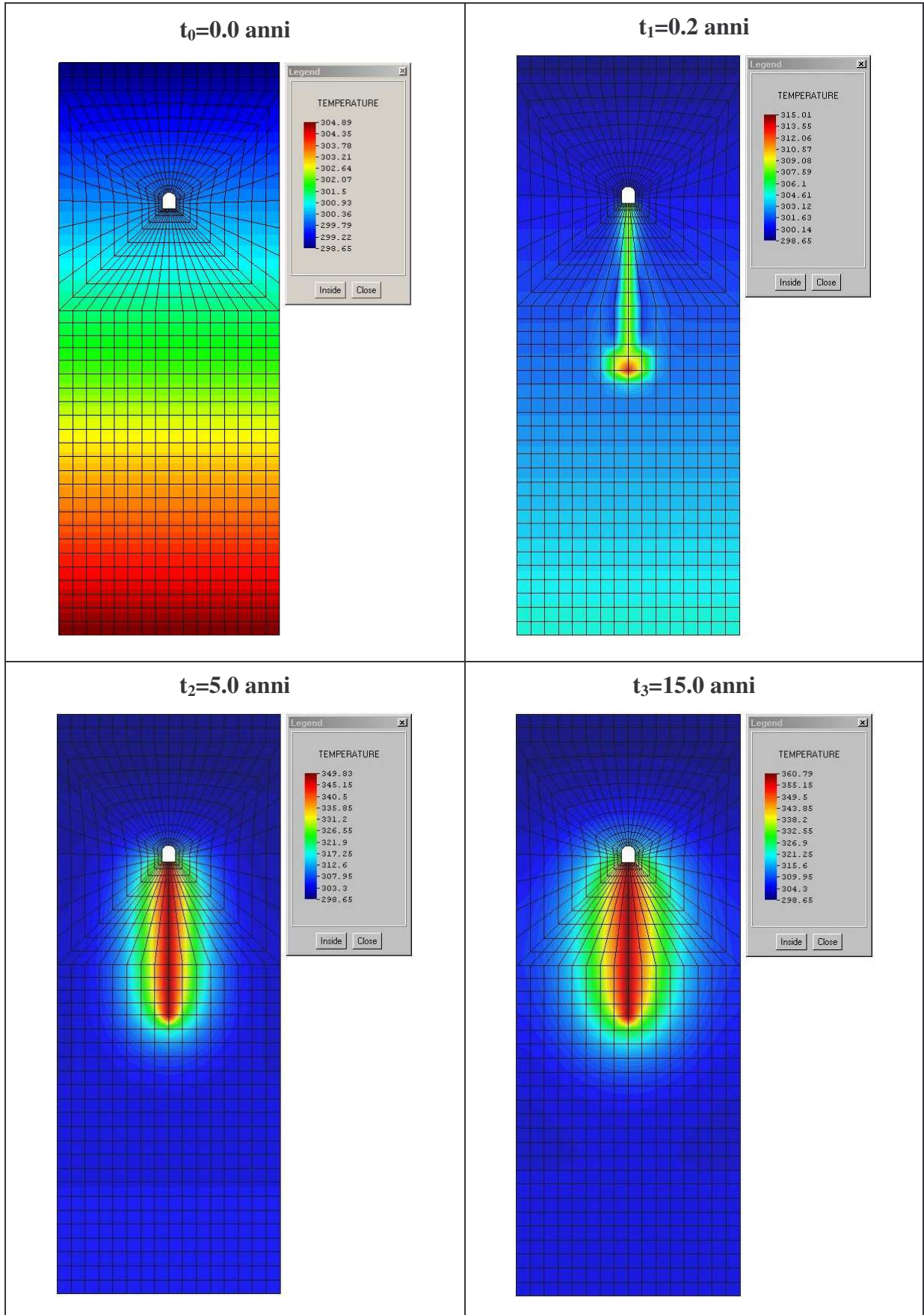
Run_06	passo temporale	$\Delta t = 12.0$ settimane $= 7257600$ giorni
	n° step	$n^\circ = 913$
	tempo iniziale	$t_i = 0.0$ anni
	tempo finale	$t_f = 209.97$ anni
	tempo Run_06	$t_{R_06} = 209.97$ anni

Tabella 15: CASE 2, tempi d'analisi

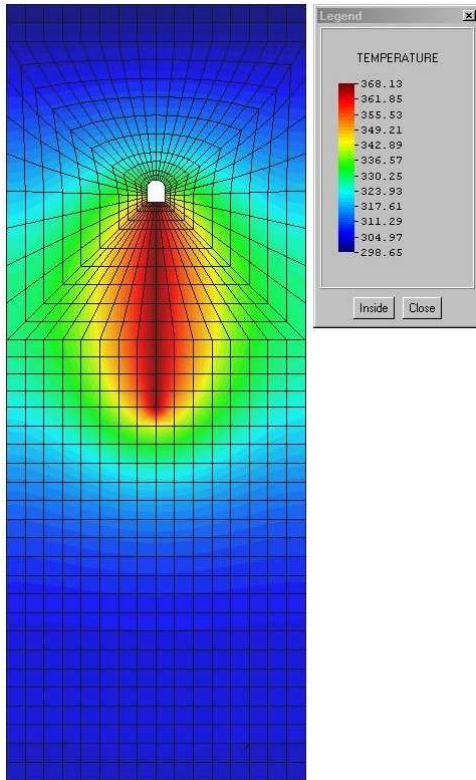
6.5.3 Risultati

Come nel caso precedente si riportano i contour relativi ad alcuni tempi significativi:

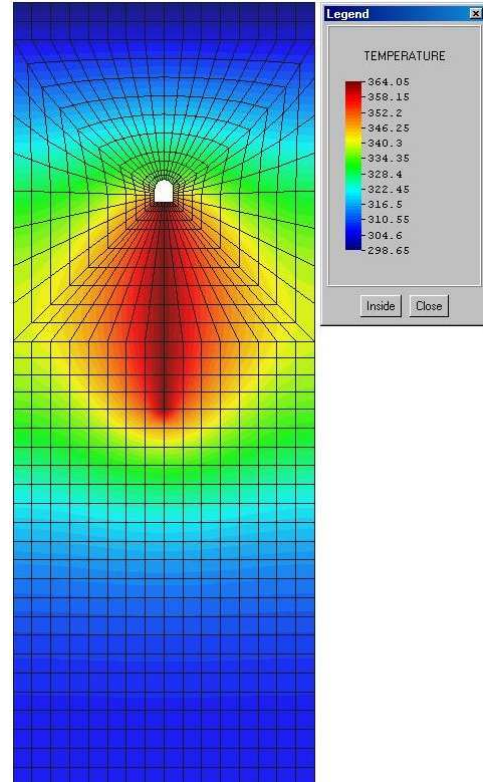
- $t_0=0.0$ anni $T_0^s=30.00$ °C = 303.15 K stato iniziale
- $t_1=0.2$ anni $T_1^s=36.02$ °C = 309.17 K
- $t_2=5.0$ anni $T_2^s=76.44$ °C = 349.59 K
- $t_3=15.0$ anni $T_3^s=87.78$ °C = 360.93 K
- $t_4=27.1$ anni $T_4^s=95.00$ °C = 368.15 K temperatura massima
- $t_5=44.3$ anni $T_5^s=90.90$ °C = 364.05 K
- $t_6=49.3$ anni $T_6^s=89.12$ °C = 362.27 K
- $t_7=54.3$ anni $T_7^s=87.68$ °C = 360.83 K
- $t_8=60.0$ anni $T_8^s=86.00$ °C = 359.15 K
- $t_9=65.0$ anni $T_9^s=84.38$ °C = 357.53 K
- $t_{10}=75.0$ anni $T_{10}^s=81.55$ °C = 354.70 K
- $t_{11}=100.0$ anni $T_{11}^s=75.38$ °C = 348.53 K
- $t_{12}=150.0$ anni $T_{12}^s=66.37$ °C = 339.52 K
- $t_{13}=210.0$ anni $T_{13}^s=61.41$ °C = 334.56 K stato finale



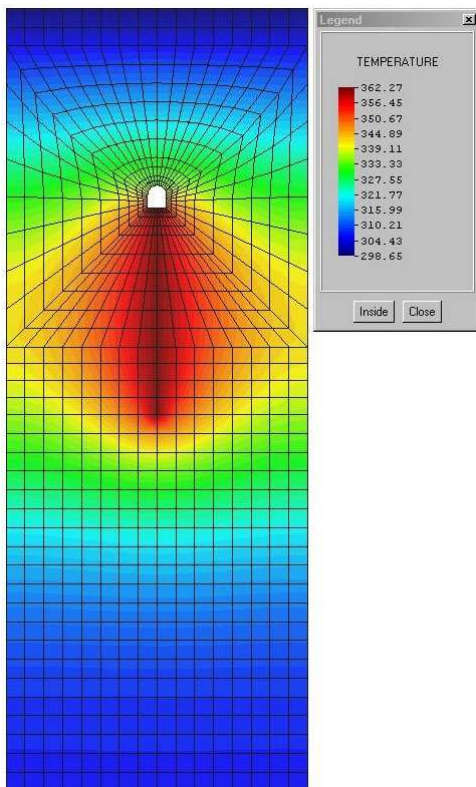
$t_4=27.1$ anni



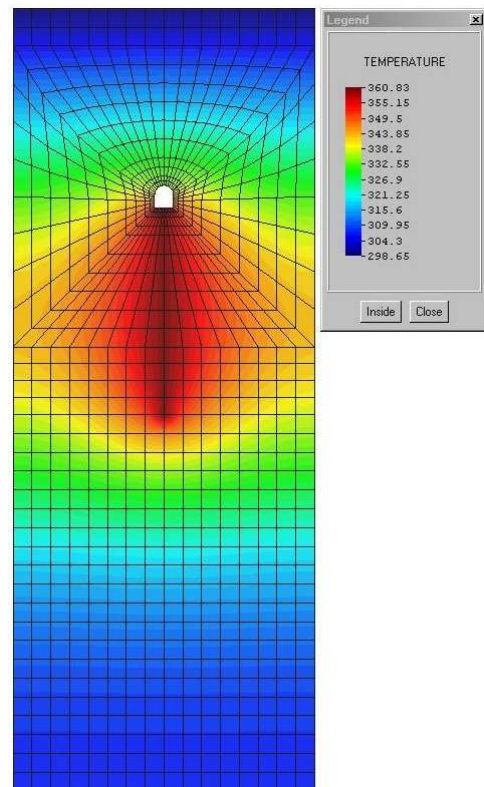
$t_5=44.3$ anni



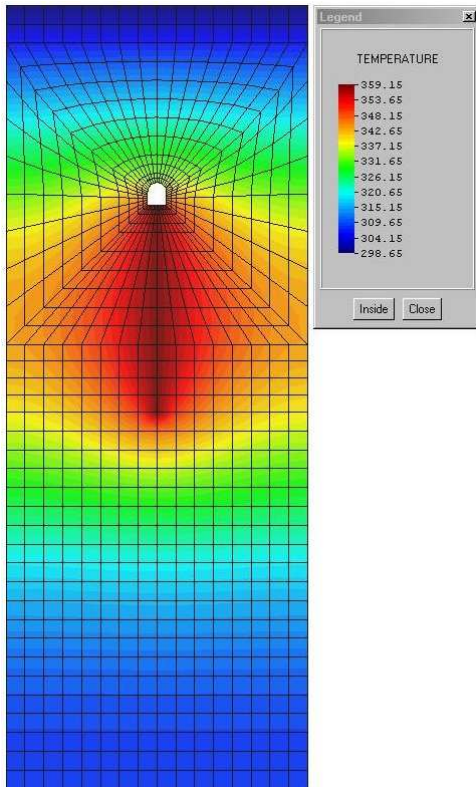
$t_6=49.3$ anni



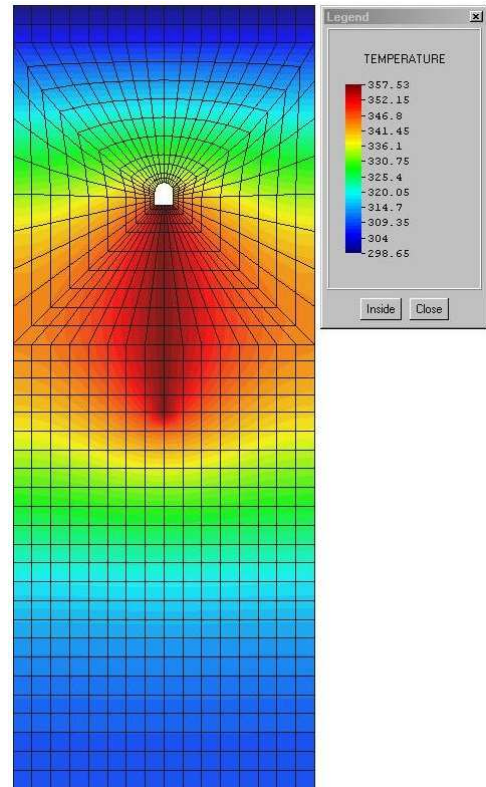
$t_7=54.3$ anni



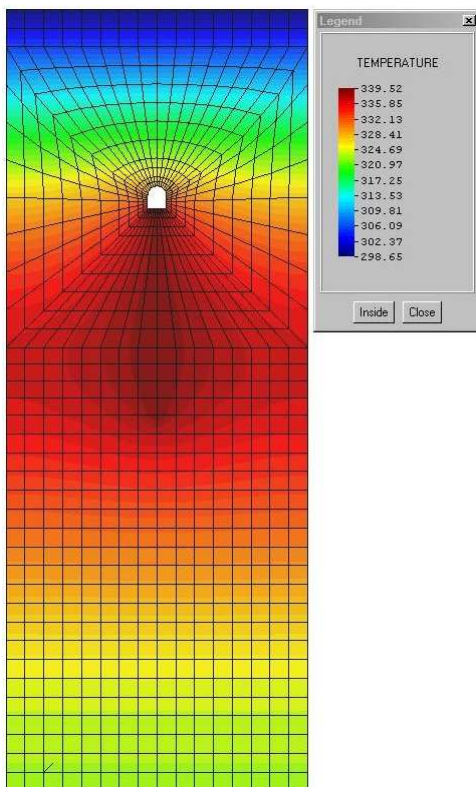
$t_8=60.0$ anni



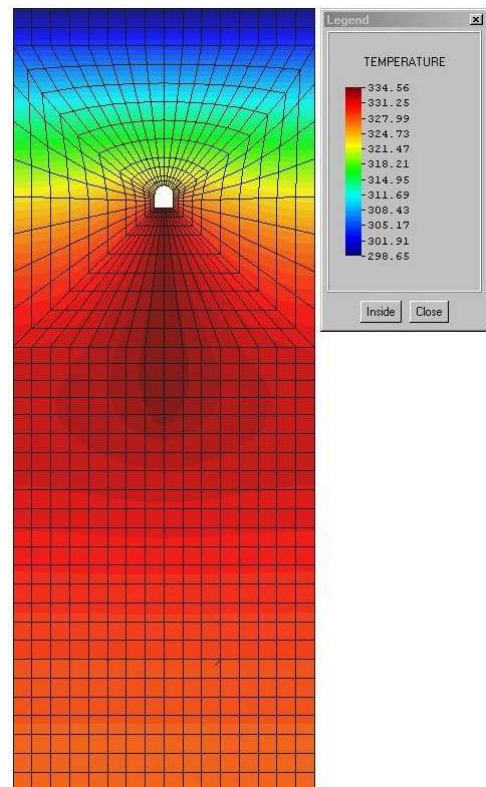
$t_9=65.0$ anni



$t_{12}=150.0$ anni



$t_{13}=210.0$ anni



Si diagrammano ora le temperature rispetto al tempo degli stessi punti di prima.

- Punto 1: $d = 5.0$ m
- Punto 2: $d = 20.0$ m
- Punto 3: $d = 40.0$ m

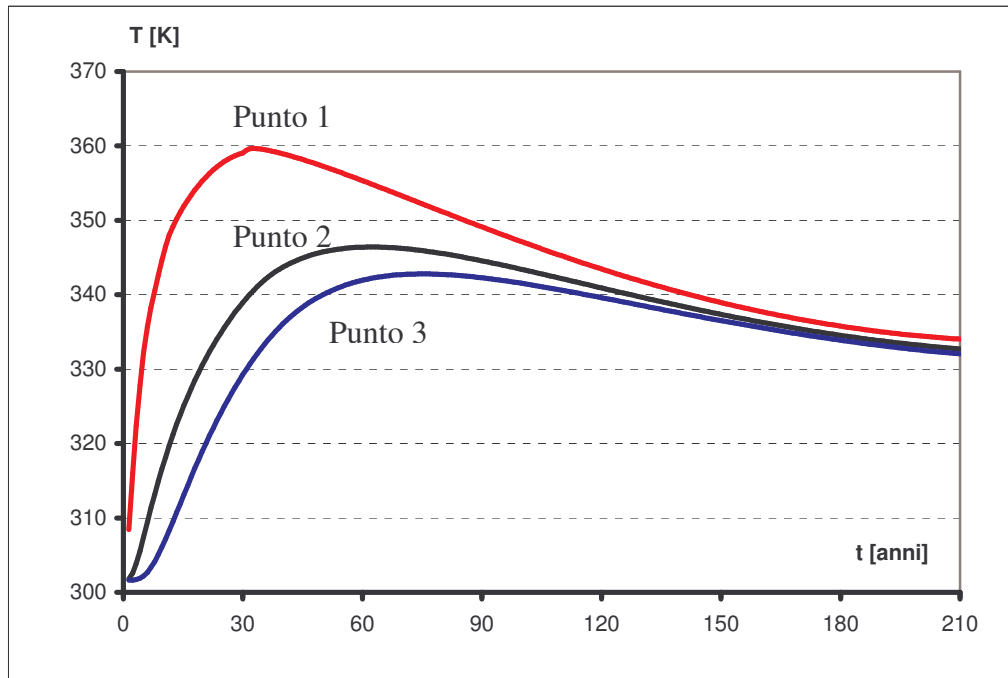


Figura 71. Andamento della temperatura a distanze diverse dal pozzo di stoccaggio

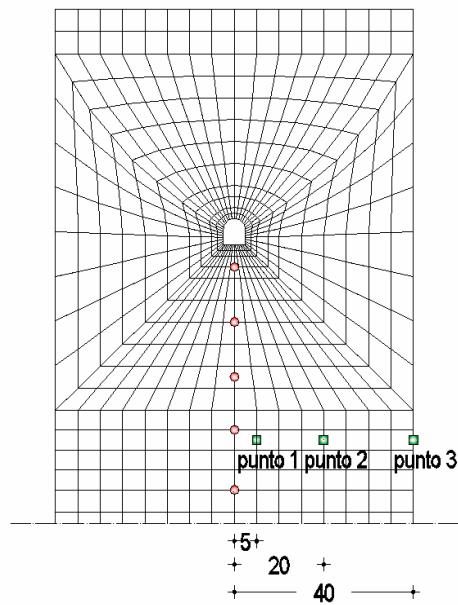


Figura 72: localizzazione dei punti

Lo stesso vale in direzione verticale per i punti che si allontanano man mano dal fondo del pozzo.

- Punto 1: $d = 7.5$ m
- Punto 2: $d = 50.0$ m
- Punto 3: $d = 100.0$ m

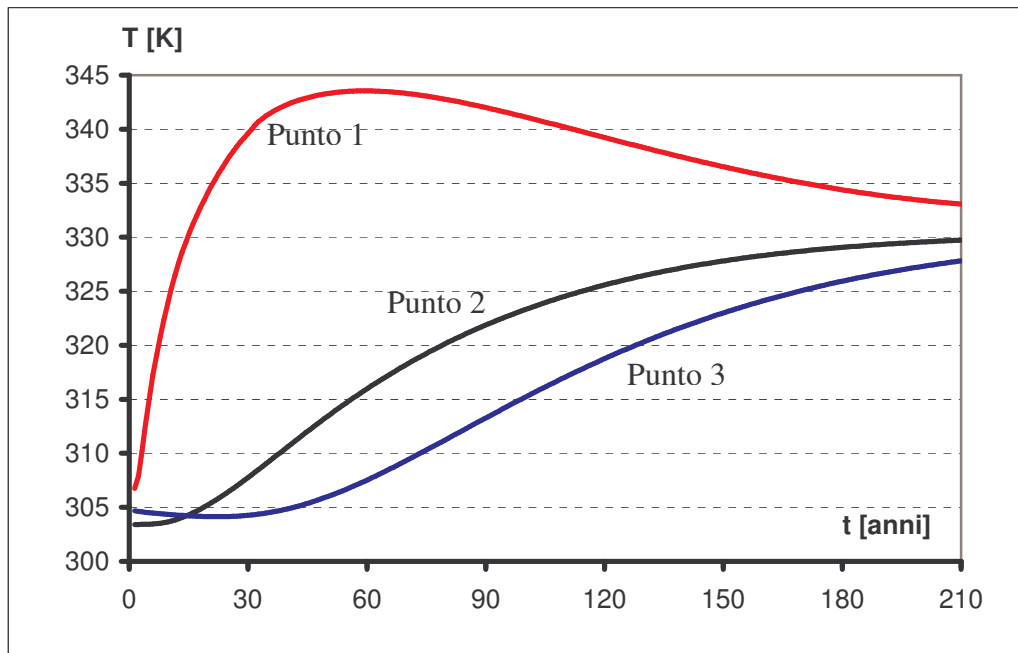


Figura 73. Andamento della temperatura a distanze diverse dal fondo del pozzo

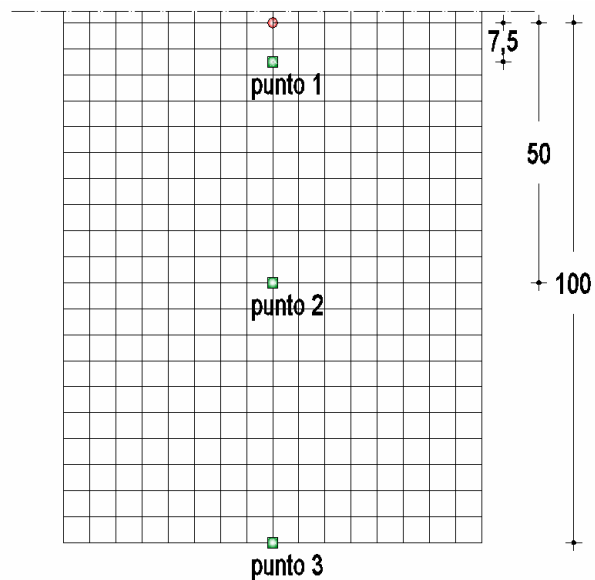


Figura 74: localizzazione dei punti

RINGRAZIAMENTI

Convinto che questa sarà sicuramente la parte più letta della mia tesi, non mi perdo in inutili convenevoli e passo subito, sotto forma di elenco numerato (proprio da buon ingegnere), a fare i nomi:

- la mia famiglia: come da tradizione i primi ad essere ringraziati sono i genitori, per me Albino e Carmen. Tale posto in classifica è ampiamente meritato in quanto hanno finanziato questa mia avventura patavina sotto il profilo del pagamento tasse e del mantenimento. Dovrebbe esserci anche una sorella, Lisa, della quale, me ne sono accorto più che altro dall'insistente presenza di una Saab grigia parcheggiata sottocasa e dalla chioma bionda, anticipata da un profumo che impregna le stanze per circa un mese, di un certo Stefano proveniente da quel di Onara che si reputa suo moroso
- mia nonna Irene: oltre ad essere la fornitrice ufficiale di mance in occasione di ogni ricorrenza, colei che riempie il mio bagaglio personale di barzellette, è anche la più anziana del gruppo riunito a Padova in occasione della discussione di questo lavoro. Le ricordo perciò di mantenere un comportamento irreprensibile atto a servire d'esempio per tutti gli altri
- nonni Giuseppe, Tarcisio ed Alvina
- vecchi amici: sto parlando di quelli che fin da prima della mia iscrizione all'università possono vantare di esser usciti con me. Primo su tutti c'è quel Stefano che nessuno individua con questo nome ma con una serie d'altri appellativi quali U.C.S., Highlander, Skawejo ecc. ecc. al quale devo, oltre ai tagliandi dell'auto, numerose allietanti serate e l'apprendimento di frasi oramai storiche come "Troppo acciaio" (divenuto poi "So much steel") o l'attualissima "Ciccifuffy". Si aggiungono poi a questa ristrettissima e privilegiata cerchia Matteo e Nicola per i quali vale quanto visto sopra per le serate trascorse insieme. In particolare, un grazie alla Panda di Nicola, prima auto della compagnia
- nuovi amici: costoro, che non sono secondi ai precedenti per importanza, sono di più corto termine. Diego, fidato parrucchiere, col quale per primo ho cominciato ad andar per locali in cerca di Guinness. Francesco e Valentino con i quali avevo condiviso l'epoca dei motorini. Giorgio, un amicizia ritrovata

- amici di I.T.I.S. memoria: come potrei mai dimenticare quei tre anni che, posso proprio dirlo, poco hanno assomigliato all'andar a scuola (forse proprio perché molte volte non c'andavamo). Alberto (Joao), il compagno di banco che per quasi 5 anni si è seduto alla mia destra; Compo, col quale insieme a Joao si è condiviso il tragitto casa-scuola e non solo; Cec, Mariotto, Roberto Tieppo, GLuca ecc.ecc. con i quali si studiava o...
- la famigerata Banda Luison: come non ringraziare questa organizzazione segreta senza scopo alcuno con la quale ho praticamente vissuto questi 6 anni universitari, dalla mattina di buon'ora fino alla sera, dal lunedì al venerdì. Primo su tutti quel Bortolotto (Bobo) che ora sta bestemmiando, a ragione, contro il word, col quale ho sostenuto quasi tutti gli esami del IV e V anno nonché il presente duro lavoro. Di lui lodo la loquacità delle sette di mattina, mentre devo riprenderlo un po' per la scarsa precisione nel fare le cose. Poi gli altri, in rigoroso ordine alfabetico, Andrea (Ajeje), Omar (Moma), Paolo (Berga) e Renato (Renato), con i quali ho affrontato tutti o quasi gli altri esami
- universitari: proprio un bel gruppo sti universitari... Non si ricordano nemmeno più quante siano state le cene con loro! I nomi qui non li faccio per non correre il rischio di saltarne qualcuno, ma mi permetto di citarne uno, la Paoletta con la quale ho personalmente promosso molte serate d'incontro con gli altri accademici e trascorso numerose serate
- il professor Lorenzo Sanavia: è la persona che ha seguito me e Bobo in questo impervio lavoro del quale si sapeva dove e quando partiva ma non dove ed in che tempi si sarebbe arrivati. A lui il merito, oltre a quello indiscusso di relatore, di far sì che non ci lasciassimo scoraggiare di fronte alle difficoltà (posso garantire che non sono state affatto poche
- al resto: la bicicletta ed il ciclismo, la musica anni 60 ed in particolare i Nomadi, la musica non anni 60, il mio cane jack e le mie tartarughe, il pc per la parte ludica, la Renault 19 e la Focus, la birra rossa ma soprattutto il buon vino, il bar da Pino e tutti i locali in cui sono stato
- gli altri: tutti coloro che non ho citato in queste pagine, dai colleghi di lavoro a quelli che incontro al bar, Pino, agli amici vecchi ed a quelli nuovi e soprattutto a quelli venuti alla mia laurea e a quelli che ho dimenticato

- Martina: come al solito gli ultimi saranno i primi... un grazie particolare per il lavoro che so aver svolto per organizzarmi/farmi la festa dopo la proclamazione. Un grazie per gli anni passati come mia morosa ufficiale e a quelli presenti vissuti come morosa non ufficiale. Un grazie alla vicinanza nei momenti duri e alla festa nei momenti più liberi. Un grazie per non aver mai demorso
- a me stesso