



Università degli Studi di Padova

---

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA “TULLIO LEVI-CIVITA”

Corso di Laurea Triennale in Matematica

# Modelli a valori booleani e risultati di indipendenza in teoria degli insiemi

Relatore:  
Dott. Samuele Maschio

Laureando: Jacopo Pedro Piccione  
Matricola: 1231101

---

Anno Accademico 2022/2023

15 dicembre 2023



# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>2</b>
<b>1 Prerequisiti</b>	<b>3</b>
1.1 La teoria <b>ZFC</b> . . . . .	3
1.2 Algebre di Boole . . . . .	7
1.3 Elementi di topologia . . . . .	10
<b>2 Il modello <math>V^B</math></b>	<b>12</b>
2.1 Introduzione . . . . .	12
2.2 Costruzione e proprietà di $V^B$ . . . . .	12
2.2.1 Una logica per $V^B$ . . . . .	14
2.2.2 $V^B$ è un'estensione di $V$ . . . . .	20
2.3 $V^B$ è modello di <b>ZFC</b> . . . . .	26
2.4 Ordinali e cardinali in $V^B$ . . . . .	38
<b>3 Forcing</b>	<b>46</b>
<b>4 L'indipendenza di CH</b>	<b>52</b>
<b>Riferimenti bibliografici</b>	<b>59</b>

## Introduzione

Obiettivo di questa tesi è l'esposizione di un particolare modello per la teoria degli insiemi, il *modello a valori booleani*, e della sua applicazione alle dimostrazioni di indipendenza. Sarebbe più corretto parlare di *modelli* a valori booleani, in quanto, come si vedrà, nella costruzione è coinvolta (e anzi ha un ruolo centrale) una data algebra di Boole completa e algebre diverse danno luogo a modelli potenzialmente anche molto diversi. Essi, però, condividono molte delle proprietà di base, permettendo quindi una trattazione piuttosto omogenea. L'idea di base è interpretare i simboli relazionali della teoria degli insiemi (uguaglianza e appartenenza) non più in modo binario, come forse viene naturale, ma con più valori, precisamente a valori nell'algebra di Boole scelta. Potremmo considerare tale operazione come una perdita di "certezza", in cui permettiamo che due insiemi siano più o meno uguali o contenuti uno nell'altro, con un certo grado di "probabilità", con più o meno nitidezza; però, se può essere una sfumatura di contorni, di certo non è completo miraggio: ogni teorema della teoria degli insiemi risulta ancora valido sotto questa interpretazione. Nel Capitolo 2, dopo aver realizzato esplicitamente la costruzione, si procederà proprio con la dimostrazione della validità nel modello di ogni assioma di **ZFC**, per poi analizzare alcune proprietà degli oggetti che corrispondono ai numeri ordinali e cardinali. Ciò servirà per dare un esempio dell'utilità del modello, dimostrando nel Capitolo 4 l'indipendenza dell'ipotesi del continuo, verosimilmente la più celebre delle proposizioni indipendenti di **ZFC**. A tal fine, nel Capitolo 3 si esporrà brevemente la relazione di forcing, storicamente rilevante proprio per quanto riguarda l'ipotesi del continuo. In effetti, fu proprio il metodo di Cohen a ispirare nel 1965 Solovay e Scott e, indipendentemente, Vopěnka nell'ideazione della teoria dei modelli a valori booleani; come mostrato da Shoenfield nel 1971 [4], in realtà, la distinzione tra quest'ultima e il forcing è puramente metodologica. La fonte principale della tesi è Bell [7], il cui libro si basa proprio sulle note, non pubblicate, di Scott.

In conclusione, i modelli booleani rappresentano un interessante e utile punto di vista sulla teoria degli insiemi, capace forse di arricchire l'interpretazione tradizionale che le si riserva anche nel resto della matematica. Dopotutto, forse non esiste un modo corretto per visualizzare gli insiemi; esistono però buoni metodi per investigarli: con le parole di Pessoa,

*Se conoscessimo la verità, la vedremmo; tutto il resto è sistema e periferia.*

# 1 Prerequisiti

Per le dimostrazioni dei risultati solo enunciati, si rimanda a [5] e [8] per 1.1, a [7] e [10] per 1.2 e a [2] per 1.3.

## 1.1 La teoria ZFC

La *teoria degli insiemi di Zermelo-Fraenkel* **ZF** è la teoria classica predicativa con uguaglianza il cui linguaggio contiene il simbolo di relazione  $\in$  e dotata dei seguenti assiomi extralogici:

- **Estensionalità:**  $\forall x \forall y [\forall z (z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow x = y]$
- **Separazione:**  $\forall u \exists v \forall x [x \in v \leftrightarrow x \in u \wedge \phi(x)]$  dove  $v$  non compare libera nella formula  $\phi(x)$
- **Rimpiazzamento:**  $\forall u [\forall x \in u \exists y \phi(x, y) \rightarrow \exists v \forall x \in u \exists y \in v \phi(x, y)]$  dove  $v$  non compare libera nella formula  $\phi(x, y)$
- **Unione:**  $\forall u \exists v \forall x [x \in v \leftrightarrow \exists y \in u (x \in y)]$
- **Potenza:**  $\forall u \exists v \forall x [x \in v \leftrightarrow \forall y \in x (y \in u)]$
- **Infinito:**  $\exists u [\emptyset \in u \wedge \forall x \in u \exists y \in u (x \in y)]$
- **Fondazione:**  $\forall x [\forall y \in x \phi(y) \rightarrow \phi(x)] \rightarrow \forall x \phi(x)$  dove  $y$  non compare libera nella formula  $\phi(x)$

Notiamo che dagli assiomi logici soltanto si può derivare  $\exists x (x = x)$ , pertanto esiste almeno un insieme. Allora, dato  $y$  insieme, per **Separazione** esiste l'insieme  $\{x \in y \mid x \neq x\}$ . Per **Estensionalità** tale insieme è unico ed è detto *insieme vuoto* e lo indichiamo con il simbolo  $\emptyset$ , che compare anche in **Infinito**.

Dagli assiomi dati fino ad ora segue anche il seguente enunciato, incluso spesso tra gli assiomi per comodità o per tradizione, nonostante non ne sia indipendente:

- **Coppia:**  $\forall x \forall y \exists z (x \in z \wedge y \in z)$

Infatti, per **Potenza** e **Separazione** è possibile definire l'insieme  $2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ . Sia ora  $\phi(u, v): (u = \emptyset \wedge v = x) \vee (u = \{\emptyset\} \wedge v = y)$  dove  $x$  e  $y$  sono parametri. Dunque per **Rimpiazzamento** si può definire l'insieme  $\{x, y\}$  come  $\{v \mid \exists u \in 2 \phi(u, v)\}$  ed esso verifica **Coppia**.

È quindi possibile definire, tramite **Coppia**, la *coppia ordinata*  $(x, y)$  come l'insieme  $\{x, \{x, y\}\}$ . È detta *relazione* un qualunque insieme  $R$  i cui elementi sono coppie ordinate. Definiamo allora

$$\begin{aligned}\text{dom}(R) &= \{x \mid \exists y ((x, y) \in R)\} \\ \text{im}(R) &= \{y \mid \exists x ((x, y) \in R)\}\end{aligned}$$

Una relazione  $f$  è detta *funzione* se  $\forall x \in \text{dom}(f) \exists! y \in \text{im}(f) (x, y) \in f$ . Dato  $x \in \text{dom}(f)$ , indichiamo con  $f(x)$  l'unico  $y \in \text{im}(f)$  tale che  $(x, y) \in f$ .

Possiamo ora dare l'assioma seguente:

- **Scelta:**  $\forall u \exists f$  funzione [ $\text{dom}(f) = u \wedge \forall x \in u (x \neq \emptyset \rightarrow f(x) \in x)$ ]

Chiamiamo **ZFC** la teoria che consta della teoria **ZF** con l'aggiunta dell'assioma **Scelta**. Lavoreremo d'ora in avanti in **ZFC**, usando le notazioni insiemistiche con l'usuale significato, essendo giustificato dagli assiomi.

**Precisazione 1.** La formulazione scelta per alcuni degli assiomi dati non è quella usuale ma quella più utile per i nostri scopi; in particolare:

- l'assioma chiamato **Rimpiazzamento** è noto altrove come assioma di **Collezione**, mentre con **Rimpiazzamento** si indica solitamente

$$\forall u [\forall x \in u \exists! y \phi(x, y) \rightarrow \exists v \forall y (y \in v \leftrightarrow \exists x \in u \phi(x, y))]$$

Quest'ultimo è più debole di **Collezione**, ma in presenza degli altri assiomi i due risultano equivalenti.

- l'assioma chiamato **Fondazione** è in realtà il principio di **Induzione** per  $\in$ , mentre con **Fondazione** si indica solitamente

$$\forall u [u \neq \emptyset \rightarrow \exists x \in u (x \cap u = \emptyset)]$$

I due enunciati risultano comunque essere equivalenti.

Inoltre, è utile dare alcuni risultati equivalenti, in presenza degli altri assiomi, a **Scelta**. Una relazione  $R$  su un insieme  $u$  è detta *ordine parziale largo* se è:

- *riflessiva*: per ogni  $x \in u$ ,  $xRx$
- *antisimmetrica*: per ogni  $x, y \in u$ , se  $xRy$  e  $yRx$  allora  $x = y$
- *transitiva*: per ogni  $x, y, z \in u$ , se  $xRy$  e  $yRz$  allora  $xRz$

Invece, una relazione  $R$  su un insieme  $u$  è detta *ordine parziale stretto* se è:

- *asimmetrica*: per ogni  $x, y \in u$ , se  $xRy$  allora  $\neg(yRx)$
- *transitiva*: per ogni  $x, y, z \in u$ , se  $xRy$  e  $yRz$  allora  $xRz$

Un ordine parziale stretto  $R$  su un insieme  $u$  è detto *buon ordine* se ogni sottoinsieme non vuoto di  $u$  ammette *minimo* per  $R$ , cioè

$$\forall x \subseteq u [x \neq \emptyset \rightarrow \exists y \in x \forall z \in x (z \neq y \rightarrow yRz)]$$

Il seguente risultato è equivalente a **Scelta**:

**Teorema 1.1** (Teorema del buon ordinamento). *Ogni insieme può essere ben ordinato.*

Un ordine parziale largo  $R$  su un insieme  $u$  è detto *ordine totale* se per ogni  $x, y \in u$  si ha  $xRy$  oppure  $yRx$ . Se  $R$  è un ordine parziale largo su  $u$ , un sottoinsieme totalmente ordinato di  $u$  è detto *catena*. Inoltre,  $u$  è detto *induttivo* se ogni sua catena ammette *maggiorante*, cioè se, data  $v$  una sua catena,

$$\exists x \in u \forall y \in v (yRx)$$

Un elemento  $x \in u$  è detto *massimale* in  $u$  se

$$\forall y \in u (xRy \rightarrow x = y)$$

Anche il seguente risultato è equivalente a **Scelta**.

**Teorema 1.2** (Lemma di Zorn). *Ogni insieme parzialmente ordinato induttivo non vuoto ammette un elemento massimale.*

**Precisazione 2.** Dato un insieme  $u$  e una formula  $\phi(x)$ , per **Separazione** è possibile definire l'insieme  $v = \{x \in u \mid \phi(x)\}$ . Invece, la scrittura  $\mathbf{v} = \{x \mid \phi(x)\}$  non individua, in generale, alcun insieme. A tale scrittura si dà il nome di *classe* e la permettiamo, pertanto, solo come abbreviazione: nell'esempio precedente, invece che  $\phi(x)$  si scriverà spesso  $x \in \mathbf{v}$ . Per chiarezza, indichiamo le classi che non sono insiemi in **grassetto**. La scrittura  $x \subseteq \mathbf{v}$  indica che  $x$  è un *sottoinsieme* della classe  $\mathbf{v}$ .

Notiamo che non esiste l'insieme di tutti gli insiemi, poiché in tal caso esso dovrebbe appartenere a sé stesso, violando **Fondazione**. Indichiamo la classe di tutti gli insiemi con  $\mathbf{V}$ .

Una relazione  $R$  su un insieme  $u$  si dice *ben fondata* se ogni sottoinsieme di  $u$  ammette un *elemento  $R$ -minimale*, cioè se

$$\forall x \subseteq u [x \neq \emptyset \rightarrow \exists y \in x (\nexists z \in x \ zRy)]$$

Notiamo ora che è possibile parlare anche di relazioni “tra classi”: una relazione  $\mathbf{R}$  tra le classi  $\mathbf{u} = \{x \mid \phi(x)\}$  e  $\mathbf{v} = \{y \mid \psi(y)\}$  è una qualunque sottoclasse di  $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ , ovvero, data una formula  $\rho(x, y)$ ,  $\mathbf{R} = \{(x, y) \mid \phi(x) \wedge \psi(y) \wedge \rho(x, y)\}$  e indichiamo  $x\mathbf{R}y$  per  $(x, y) \in \mathbf{R}$ . Risultano così definite anche le funzioni tra classi.

Similmente a quanto definito precedentemente, una relazione  $\mathbf{R}$  su una classe  $\mathbf{u}$  è detta *ben fondata* se ogni sottoinsieme di  $\mathbf{u}$  ammette un *elemento  $\mathbf{R}$ -minimale*, cioè se

$$\forall x \subseteq \mathbf{u} [x \neq \emptyset \rightarrow \exists y \in x (\nexists z \in x \ z\mathbf{R}y)]$$

Inoltre,  $\mathbf{R}$  si dice *set-like* se tutti i suoi *segmenti iniziali* sono insiemi:

$$\forall x \in \mathbf{u} (\text{pred}(\mathbf{u}, x, \mathbf{R}) = \{y \in \mathbf{u} \mid y\mathbf{R}x\} \in \mathbf{V})$$

Per le relazioni ben fondate e set-like, valgono l'induzione transfinita e la ricorsione transfinita, spesso utilizzate per definizioni e dimostrazioni.

**Teorema 1.3.** *Se  $\mathbf{R}$  è ben fondata e set-like su una classe  $\mathbf{u}$ , allora ogni sottoclasse non vuota di  $\mathbf{u}$  ha un elemento  $\mathbf{R}$ -minimale.*

**Teorema 1.4.** *Se  $\mathbf{R}$  è ben fondata e set-like su una classe  $\mathbf{u}$ , allora, data  $\mathbf{F}: \mathbf{u} \times \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ , esiste un'unica  $\mathbf{G}: \mathbf{u} \rightarrow \mathbf{V}$  tale che*

$$\forall x \in \mathbf{u} [\mathbf{G}(x) = \mathbf{F}(x, \mathbf{G}|_{\text{pred}(\mathbf{u}, x, \mathbf{R})})]$$

Un insieme  $x$  è detto *numero ordinale* o più brevemente *ordinale* se è ben ordinato da  $\in$  e *transitivo*, cioè se  $\forall y \in x (y \subseteq x)$ . La classe dei numeri ordinali verrà indicata con  $\mathbf{ON}$ . Si può dimostrare che ogni insieme ben ordinato è *isomorfo* a un ordinale, cioè che, dato  $(u, R)$  buon ordine, esiste  $\alpha \in \mathbf{ON}$  e una biiezione  $f: u \rightarrow \alpha$  tale che, per ogni  $x, y \in u$ ,  $xRy$  se e solo se  $f(x) \in f(y)$ .

Per ogni  $\alpha \in \mathbf{ON}$ , indichiamo  $\alpha + 1 = \alpha \cup \{\alpha\}$  e osserviamo che esso è ancora un ordinale. Ogni ordinale  $\alpha$  per cui esiste  $\gamma$  ordinale tale che  $\alpha = \gamma + 1$  è detto ordinale *successore*. Ogni ordinale diverso dal vuoto che non è successore è detto ordinale *limite*.

Osserviamo inoltre che  $\in$  su  $\mathbf{ON}$  è ben fondata e set-like, pertanto a questi si applicano i Teoremi 1.3 e 1.4. Possiamo pertanto introdurre l'*universo di Von Neumann*. Siano, per ricorsione su  $\alpha \in \mathbf{ON}$ :

$$V_\alpha = \begin{cases} \emptyset & \text{se } \alpha = 0 \\ \mathcal{P}(V_\gamma) & \text{se } \alpha = \gamma + 1 \\ \bigcup_{\gamma < \alpha} V_\gamma & \text{se } \alpha \text{ limite} \end{cases}$$

Indichiamo inoltre  $\mathbf{WF} = \bigcup_{\alpha \in \mathbf{ON}} V_\alpha$  la classe degli insiemi *ben fondati* (*well founded*). Per Fondazione vale  $\mathbf{V} = \mathbf{WF}$ .

Poiché  $\mathbf{ON}$  è ben ordinato, dato  $x \in \mathbf{V}$ , è ben definito il *rango* di  $x$ :

$$\text{rk}(x) = \min\{\alpha \in \mathbf{ON} \mid x \in V_{\alpha+1}\}$$

Diamo infine alcune proprietà sul rango e sui  $V_\alpha$ .

**Proposizione 1.5.**

- i.*  $\alpha < \gamma \Rightarrow V_\alpha \subset V_\gamma$
- ii.*  $\forall x, y \in \mathbf{V}, x \in y \Rightarrow \text{rk}(x) < \text{rk}(y)$
- iii.*  $V_\alpha = \{x \in \mathbf{V} \mid \text{rk}(x) < \alpha\}$
- iv.*  $\text{rk}(y) = \sup\{\text{rk}(x) + 1 \mid x \in y\}$

Introduciamo ora i *numeri cardinali*.

**Definizione.** Dati  $x, y$  insiemi, indichiamo:

- $\text{card}(x) \leq \text{card}(y)$  se esiste una funzione iniettiva da  $x$  in  $y$
- $\text{card}(x) = \text{card}(y)$  se esiste una funzione biiettiva da  $x$  a  $y$

**Teorema 1.6** (Schröder–Bernstein).

Se  $\text{card}(x) \leq \text{card}(y)$  e  $\text{card}(y) \leq \text{card}(x)$ , allora  $\text{card}(x) = \text{card}(y)$ .

Dato  $x$  insieme, se esso può essere ben ordinato (e ciò è sempre possibile in **ZFC**), allora  $x$  è isomorfo ad un ordinale  $\alpha$  e in particolare  $\text{card}(x) = \text{card}(\alpha)$ . Il minimo tra tali ordinali si indica con  $|x|$  ed è chiamato *cardinalità* di  $x$ . Un ordinale  $\alpha$  è detto *cardinale* se  $\alpha = |\alpha|$ .



**Teorema 1.7** (Cantor). *Per ogni  $x \in \mathbf{V}$ ,  $|x| < |\mathcal{P}(x)|$ .*

Per **Infinito** esiste almeno un insieme infinito e per **Scelta** esso può essere ben ordinato. Esiste dunque un ordinale ad esso isomorfo e tale ordinale deve essere infinito: è ben definito allora il minimo ordinale infinito,  $\omega$ . Esso coincide con la propria cardinalità. Il Teorema di Cantor stabilisce che per ogni cardinale ne esiste uno maggiore; inoltre:

**Lemma 1.8.** *Se  $X$  è un insieme di cardinali,  $\bigcup X$  è un cardinale.*

Il lemma permette di dare la seguente

**Definizione.**

$$\aleph_\alpha = \begin{cases} \omega & \text{se } \alpha = 0 \\ \min\{\beta \text{ cardinale} \mid \aleph_\gamma < \beta\} & \text{se } \alpha = \gamma + 1 \\ \bigcup\{\aleph_\gamma \mid \gamma < \alpha\} & \text{se } \alpha \text{ limite} \end{cases}$$

Nonostante ogni cardinale sia ordinale, nei contesti in cui sarà utile sottolineare la natura di ordinale piuttosto di quella di cardinale si indicherà  $\omega_\alpha$  in luogo di  $\aleph_\alpha$ .

Definiamo inoltre l'*elevamento a potenza* tra cardinali, dati  $\kappa, \lambda$  cardinali, come

$$\kappa^\lambda = |A^B|$$

dove  $|A| = \kappa$ ,  $|B| = \lambda$  e  $A^B$  indica l'insieme delle funzioni da  $B$  in  $A$ . Naturalmente, si tratta di una buona definizione. L'utilità di tale operazione è evidente in luce di quanto segue.

**Proposizione 1.9.** *Se  $|X| = \kappa$ , allora  $|\mathcal{P}(X)| = 2^\kappa$ .*

Conseguenza di ciò e del Teorema di Cantor è che  $\aleph_1 \leq 2^{\aleph_0}$ . L'ipotesi del Continuo è la proposizione

**Ipotesi del Continuo (CH).**  $\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$

**CH** può essere generalizzata, estendendo l'ipotesi ad ogni ordinale:

**Ipotesi Generalizzata del Continuo (GCH).** *Per ogni  $\alpha \in \mathbf{ON}$ ,  $\aleph_{\alpha+1} = 2^{\aleph_\alpha}$ .*

## 1.2 Algebre di Boole

Un *reticolo* è un insieme non vuoto parzialmente ordinato largamente da  $\leq$  per cui ogni coppia di elementi ammette estremo inferiore ed estremo superiore. Indichiamo  $\sup\{a, b\}$  con  $a \vee b$  e  $\inf\{a, b\}$  con  $a \wedge b$ .

Un reticolo  $B$  che sia:

- *limitato*, ovvero per cui esistono massimo 1 e minimo 0, con  $1 \neq 0$
- *distributivo*, ovvero per cui vale una delle seguenti due condizioni equivalenti:

$$\text{per ogni } a, b, c \text{ in } B, a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$$

$$\text{per ogni } a, b, c \text{ in } B, a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$$

- *complementato*, ovvero per cui  $\forall a \in B \exists b \in B (a \wedge b = 0 \text{ e } a \vee b = 1)$  (tale  $b$  è detto *complemento* di  $a$ )

è detto *algebra di Boole*.

**Proposizione 1.10.** *Ogni reticolo distributivo, e in particolare ogni algebra di Boole, gode delle seguenti proprietà:*

- dati  $a, b, c$  nel reticolo, se  $a \leq b$  allora  $a \wedge c \leq b \wedge c$  e  $a \vee c \leq b \vee c$*
- assorbimento: dati  $a, b$  nel reticolo,  $(a \wedge b) \vee a = a$  e  $(a \vee b) \wedge a = a$*

*Inoltre, in ogni reticolo distributivo complementato, e in particolare in ogni algebra di Boole, ogni elemento ha un unico complemento.*

Pertanto indichiamo il complemento di  $a$  con  $\neg a$ . È definita inoltre l'*implicazione*  $a \rightarrow b$  come  $\neg a \vee b$ .

Un'algebra di Boole  $B$  è detta *completa* se vale una delle seguenti due condizioni equivalenti:

- $B$  è *sup-completa*, cioè per ogni  $X \subseteq B$ , esiste  $\bigvee X$  in  $B$
- $B$  è *inf-completa*, cioè per ogni  $X \subseteq B$ , esiste  $\bigwedge X$  in  $B$

Data un'algebra di Boole completa  $B$ , diciamo che un'algebra di Boole completa  $B'$  è una *sottoalgebra completa* di  $B$  se  $B' \subseteq B$ , l'ordine di  $B'$  è la restrizione su  $B'$  dell'ordine di  $B$ , e inf arbitrari, sup arbitrari e complementi di elementi di  $B'$  coincidono con quelli degli stessi elementi visti come elementi di  $B$ . Osserviamo, in quanto utile in seguito, che l'algebra di Boole  $2 = \{0, 1\}$  è sottoalgebra completa di ogni algebra di Boole.

Un sottoinsieme  $A \subseteq B$  è detto *anticatena* di  $B$  se per ogni  $a, b \in A$  distinti si ha  $a \wedge b = 0$ . Invece,  $A \subseteq B$  è detto *denso* in  $B$  se  $0 \notin A$  e per ogni  $0 \neq b \in B$  esiste  $a \in A$  tale che  $a \leq b$ .

Infine, si dice che una algebra di Boole  $B$  è *ccc* (cioè vale la *countable chain condition*) se ogni anticatena di  $B$  è numerabile.

## Algebre di Boole e logica classica

**Proposizione 1.11.** *In ogni algebra di Boole  $B$  valgono le leggi di De Morgan:*

$$\begin{aligned}\neg(a \vee b) &= \neg a \wedge \neg b \\ \neg(a \wedge b) &= \neg a \vee \neg b\end{aligned}$$

Inoltre, se  $B$  è completa, la distributività e le leggi di De Morgan si generalizzano a famiglie arbitrarie di elementi:

$$\begin{aligned} a \wedge \bigvee_{i \in I} b_i &= \bigvee_{i \in I} (a \wedge b_i) \\ a \vee \bigwedge_{i \in I} b_i &= \bigwedge_{i \in I} (a \vee b_i) \\ \neg(\bigvee_{i \in I} a_i) &= \bigwedge_{i \in I} \neg a_i \\ \neg(\bigwedge_{i \in I} a_i) &= \bigvee_{i \in I} \neg a_i \end{aligned}$$

Inoltre, la relazione  $\leq$  è legata all'implicazione come segue.

**Lemma 1.12.** *Dati  $a, b \in B$  algebra di Boole, vale*

$$a \leq b \iff a \rightarrow b = 1$$

*Dimostrazione.* Per la Proposizione 1.10, da  $a \leq b$  segue  $a \vee \neg a \leq b \vee \neg a$  da cui  $1 \leq a \rightarrow b$ . Viceversa, dalla stessa proposizione si ha che  $1 \leq a \rightarrow b = \neg a \vee b$  implica  $1 \wedge a \leq (\neg a \vee b) \wedge a = (\neg a \wedge a) \vee (b \wedge a) = 0 \vee (b \wedge a)$  cioè  $a \leq b \wedge a$  da cui in particolare  $a \leq b$ .  $\square$

Dai risultati esposti si nota come le proprietà che valgono per le operazioni delle algebre di Boole e quelle che valgono per i connettivi logici siano le stesse: diamo qualche dettaglio in più. Dato un linguaggio predicativo del primo ordine  $\mathcal{L}$ , consideriamo ogni termine  $t$  e ogni formula  $\phi$  di  $\mathcal{L}$  sotto *contesto*, cioè dati assieme a una lista di variabili distinte  $\underline{x}$  contenente almeno tutte le loro rispettive variabili libere. Indichiamo un termine sotto contesto con  $t_{[\underline{x}]}$  e una formula sotto contesto con  $\phi_{[\underline{x}]}$  (si tratta di fatto di considerare un nuovo linguaggio “contestualizzato”  $\mathcal{L}_{cont}$ , ma per semplicità continueremo a indicarlo con  $\mathcal{L}$ ).

Data ora un'algebra di Boole completa  $B$  e un insieme  $D$  detto *dominio di interpretazione*, è detta *valutazione booleana* una funzione  $\nu$  definita per casi: essa mappa

- le costanti  $k$  in elementi  $\nu(k)$  di  $D$ ;
- ogni simbolo relazionale  $R$  di arietà  $n$  in una funzione  $\nu(R)$  da  $D^n$  in  $B$ ;
- ogni simbolo funzionale  $f$  di arietà  $m$  in una funzione  $\nu(f)$  da  $D^m$  in  $D$ .

Una tale valutazione può essere estesa innanzitutto ai termini in contesto  $t_{[\underline{x}]}$  valutandoli in funzioni da  $D^n$  in  $D$  (dove  $n$  è la lunghezza del contesto di variabili  $[\underline{x}] = [x_1, \dots, x_n]$ ) per ricorsione sulla struttura dei termini come segue:

$$\begin{aligned} \nu(x_{i[\underline{x}]})(&\underline{a}) = a_i \\ \nu(k_{[\underline{x}]})(&\underline{a}) = \nu(k) \\ \nu(f(t_1, \dots, t_m)_{[\underline{x}]})(&\underline{a}) = \nu(f)(\nu(t_{1[\underline{x}]})(&\underline{a}), \dots, \nu(t_{m[\underline{x]}})(&\underline{a})) \end{aligned}$$

per ogni  $\underline{a} = (a_1, \dots, a_n) \in D^n$ . La valutazione viene quindi estesa alle formule in contesto  $\phi_{[\underline{x}]}$  valutandole in funzioni da  $D^n$  in  $B$  (dove  $n$  è la lunghezza del contesto di variabili  $[\underline{x}] = [x_1, \dots, x_n]$ ) per ricorsione sulla struttura dei termini come segue:

$$\begin{aligned}
\nu(R(t_1, \dots, t_m)_{[x]})(\underline{a}) &= \nu(R)(\nu(t_{1[x]})(\underline{a}), \dots, \nu(t_{m[x]})(\underline{a})) \\
\nu(\perp_{[x]})(\underline{a}) &= 0 \\
\nu(\top_{[x]})(\underline{a}) &= 1 \\
\nu(\sigma_{[x]} \wedge \tau_{[x]})(\underline{a}) &= \nu(\sigma_{[x]})(\underline{a}) \wedge \nu(\tau_{[x]})(\underline{a}) \\
\nu(\sigma_{[x]} \vee \tau_{[x]})(\underline{a}) &= \nu(\sigma_{[x]})(\underline{a}) \vee \nu(\tau_{[x]})(\underline{a}) \\
\nu(\neg\sigma_{[x]})(\underline{a}) &= \neg\nu(\sigma_{[x]})(\underline{a}) \\
\nu(\sigma_{[x]} \rightarrow \tau_{[x]})(\underline{a}) &= \nu(\sigma_{[x]})(\underline{a}) \rightarrow \nu(\tau_{[x]})(\underline{a}) \\
\nu(\forall y\phi_{[x]})(\underline{a}) &= \bigwedge_{b \in D} \nu(\phi_{[x,y]})(\underline{a}, b) \\
\nu(\exists y\phi_{[x]})(\underline{a}) &= \bigvee_{b \in D} \nu(\phi_{[x,y]})(\underline{a}, b)
\end{aligned}$$

per ogni  $\underline{a} = (a_1, \dots, a_n) \in D^n$ .

Indichiamo per brevità  $\nu(\phi_{[x]})(\underline{a})$  con  $\nu(\phi(\underline{a}))$ .

Un *enunciato* è una formula di  $\mathcal{L}$  senza variabili libere. Diciamo che un enunciato  $\phi$  è *vero* per una valutazione booleana  $\nu$  se  $\nu(\phi) = 1$ . Vale allora il seguente

**Teorema 1.13** (Validità della semantica booleana). *Se un enunciato è derivabile in logica classica allora ogni valutazione booleana lo rende vero.*

Vale anche un Teorema di Completezza per la semantica booleana, ma non sarà necessario per i nostri scopi.

### 1.3 Elementi di topologia

Dato un insieme  $X$  non vuoto, è detta *topologia* un insieme  $\tau \subseteq \mathcal{P}(X)$  tale che:

- $\emptyset, X \in \tau$
- se  $Y_i \in \tau$ , anche  $\bigcup Y_i \in \tau$
- se  $Y_1, Y_2 \in \tau$ , anche  $Y_1 \cap Y_2 \in \tau$

Gli elementi di  $\tau$  sono detti *aperti* e i loro complementari *chiusi*. Un sottoinsieme  $Y \subseteq X$  è detto *intorno* di un elemento  $y \in X$  se contiene un aperto contenente  $y$ . Dato  $y \in Y$  con  $Y \subseteq X$ ,  $y$  è detto *punto interno* di  $Y$  se esiste un intorno di  $y$  contenuto in  $Y$ . L'insieme dei punti interni di  $Y$  è detto *interno* di  $Y$  e viene indicato con  $\overset{\circ}{Y}$ . Esso risulta essere il più grande aperto contenuto in  $Y$ .

Similmente, è detta *chiusura* di  $Y$  il più piccolo chiuso contenente  $Y$ , indicato con  $\overline{Y}$ , che si dimostra esistere sempre.

$Y \subseteq X$  è detto *aperto regolare* se  $Y = (\overline{Y})^\circ$ . Ovviamente, ogni chiuso aperto è un aperto regolare. Indichiamo l'insieme di tutti gli aperti regolari in  $X$  con  $\text{RO}(X)$ .

**Lemma 1.14.** *Dato  $X$  spazio topologico,  $(\text{RO}(X), \subseteq)$  è un'algebra di Boole completa in cui*

$$\begin{aligned}
 0 &= \emptyset \\
 1 &= X \\
 U \wedge V &= U \cap V \\
 U \vee V &= (\overline{U \cap V})^\circ \\
 \neg U &= X \setminus \overline{U} \\
 \bigwedge_{i \in I} U_i &= \left( \bigcap_{i \in I} U_i \right)^\circ \\
 \bigvee_{i \in I} U_i &= \overline{\bigcup_{i \in I} U_i}^\circ
 \end{aligned}$$

Data una topologia  $\tau$  su  $X$ , una famiglia  $\mathcal{B} \subseteq \tau$  è detta *base* per  $\tau$  se per ogni  $Y \in \tau$  e per ogni  $x \in Y$  esiste  $B \in \mathcal{B}$  tale che  $x \in B$  e  $B \subseteq Y$ . Diciamo in tal caso che  $\mathcal{B}$  *genera*  $\tau$ , e che  $\tau$  è la topologia *generata* da  $\mathcal{B}$ .

Non tutte le famiglie  $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$  risultano essere basi per una qualche topologia; in particolare:

**Proposizione 1.15.** *Dato  $X \neq \emptyset$  insieme, esiste una topologia  $\tau$  di  $X$  con base una famiglia  $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$  se e solo se  $X = \bigcup \mathcal{B}$  e per ogni  $B, B' \in \mathcal{B}$  e per ogni  $x \in B \cap B'$  esiste  $B'' \in \mathcal{B}$  tale che  $x \in B''$  e  $B'' \subseteq B \cap B'$ .*

Inoltre, la definizione della base caratterizza gli aperti: data una base  $\mathcal{B}$  di  $\tau$ ,

$$Y \text{ è aperto di } \tau \iff \forall x \in Y \exists B \in \mathcal{B} (x \in B \wedge B \subseteq Y)$$

Dato  $X$  spazio topologico, un insieme  $\{Y_i\}_{i \in I} \subseteq \tau$  è detto *anticatena* se  $Y_i \cap Y_j = \emptyset$  per ogni  $i \neq j$ .  $X$  è detto *ccc* se ogni sua anticatena è numerabile.

## 2 Il modello $\mathbf{V}^B$

### 2.1 Introduzione

Per ogni  $x \in \mathbf{V}$  si consideri la *funzione caratteristica*  $\chi_x: \mathbf{V} \rightarrow 2 = \{0, 1\}$  definita da

$$\chi_x(y) = \begin{cases} 1 & \text{se } y \in x \\ 0 & \text{se } y \notin x \end{cases}$$

Notiamo che  $\chi_x(y)$  può essere interpretato come il valore di verità nella logica classica bivalente della formula  $y \in x$ . Inoltre, l'informazione contenuta nella funzione  $\chi_x$  è né più né meno di quella contenuta in  $x$ : intuitivamente, si potrebbe identificare la classe  $\mathbf{V}$  con quella delle *funzioni bivalenti*, ossia delle funzioni caratteristiche così definite. Si vorrebbe, però, che il dominio di ciascuna di queste funzioni sia formato non da insiemi ma da altre funzioni bivalenti: ciò è possibile, come si vedrà.

Visto il Teorema 1.13, si potrebbe sostituire all'algebra di Boole 2 una generica algebra di Boole completa  $B$ . Le sezioni seguenti hanno come obiettivo la costruzione di un modello per la teoria degli insiemi formato quindi da *funzioni a valori booleani*, il modello  $\mathbf{V}^B$ .

### 2.2 Costruzione e proprietà di $\mathbf{V}^B$

Sia  $B \in \mathbf{V}$  un'algebra di Boole completa, che sarà considerata fissata d'ora in avanti. In analogia con la costruzione dell'universo di Von Neumann, definiamo, per induzione su  $\alpha \in \mathbf{ON}$ :

$$V_\alpha^B = \begin{cases} \emptyset & \text{se } \alpha = 0 \\ \{x: D \rightarrow B \mid D \subseteq V_\gamma^B\} & \text{se } \alpha = \gamma + 1 \\ \bigcup_{\gamma < \alpha} V_\gamma^B & \text{se } \alpha \text{ limite} \end{cases}$$

Quindi indichiamo la classe delle *funzioni a valori booleani*, o anche degli *insiemi a valori booleani*:

$$\mathbf{V}^B = \bigcup_{\alpha \in \mathbf{ON}} V_\alpha^B = \{x \mid \exists \alpha \in \mathbf{ON} \ x \in V_\alpha^B\}$$

Poiché  $\mathbf{ON}$  è ben ordinato, dato  $x \in \mathbf{V}^B$ , è ben definito il *rango* di  $x$ , in analogia con rk su  $\mathbf{WF}$ :

$$\text{rk}_B(x) = \min\{\alpha \in \mathbf{ON} \mid x \in V_{\alpha+1}^B\}$$

Diamo alcune proprietà di  $\mathbf{V}^B$ .

#### Proposizione 2.1.

- i. Se  $\gamma < \alpha$  allora  $V_\alpha^B \subset V_\gamma^B$
- ii.  $V_\alpha^B = \{x: D \rightarrow B \mid \exists \gamma < \alpha \ D \subseteq V_\gamma^B\}$
- iii.  $\forall x, y \in \mathbf{V}^B, x \in \text{dom}(y) \Rightarrow \text{rk}_B(x) < \text{rk}_B(y)$

- iv.  $V_\alpha^B = \{x \in \mathbf{V}^B \mid \text{rk}_B(x) < \alpha\}$
- v.  $\text{rk}_B(y) = \sup\{\text{rk}_B(x) + 1 \mid x \in \text{dom}(y)\}$
- vi.  $x \in \mathbf{V}^B \iff x: D \subseteq \mathbf{V}^B \rightarrow B$

*Dimostrazione.*

- i. Per prima cosa mostriamo per induzione che per ogni  $\alpha \in \mathbf{ON}$ ,  $V_\alpha^B \subseteq V_{\alpha+1}^B$ .  
 Se  $\alpha = 0$ , banalmente  $V_0^B = \emptyset \subseteq V_1^B$ .  
 Supponiamo quindi  $V_\alpha^B \subseteq V_{\alpha+1}^B$ . Allora se  $y \in V_{\alpha+1}^B$  si ha  $\text{dom}(y) \subseteq V_\alpha^B \subseteq V_{\alpha+1}^B$  cioè  $y \in \{x: D \rightarrow B \mid D \subseteq V_{\alpha+1}^B\} = V_{\alpha+2}^B$ .  
 Infine, dato  $\lambda$  ordinale limite, se  $y \in V_\lambda^B$ , esiste  $\alpha < \lambda$  tale che  $y \in V_\alpha^B$ . Allora per ipotesi induttiva  $y \in V_{\alpha+1}^B$  cioè  $\text{dom}(y) \subseteq V_\alpha^B \subseteq V_\lambda^B$ , pertanto  $y \in V_{\lambda+1}^B$ .

Inoltre, vale in realtà  $V_\alpha^B \subset V_{\alpha+1}^B$ :

$$|V_{\alpha+1}^B| \geq |B^{V_\alpha^B}| \geq 2^{|V_\alpha^B|} > |V_\alpha^B|$$

per il Teorema di Cantor e perché  $B$  ha almeno i due elementi 0, 1.

Possiamo ora mostrare che se  $\gamma < \alpha$  si ha  $V_\gamma^B \subset V_\alpha^B$ . Ragioniamo per induzione su  $\alpha$ .

Il caso  $\alpha = \gamma + 1$  è stato appena mostrato.

Supponendo  $V_\gamma^B \subset V_\alpha^B$ , da quanto visto si ha  $V_\alpha^B \subset V_{\alpha+1}^B$ , pertanto  $V_\gamma^B \subset V_{\alpha+1}^B$ .

Se vale  $V_\gamma^B \subset V_\alpha^B$  per ogni  $\gamma < \alpha < \lambda$  con  $\lambda$  limite, si ha

$$V_\gamma^B \subset V_\gamma^B \cup \bigcup_{\gamma < \alpha < \lambda} V_\alpha^B \subseteq \bigcup_{\alpha < \lambda} V_\alpha^B = V_\lambda^B$$

- ii. Se  $\alpha = 0$ , l'uguaglianza è banalmente verificata.

Se  $\alpha = \beta + 1$  è ordinale successore, allora

$$V_\alpha^B = \{x: D \rightarrow B \mid D \subseteq V_\beta^B\} \subseteq \{x: D \rightarrow B \mid \exists \gamma < \alpha \ D \subseteq V_\gamma^B\}$$

D'altronde, se esiste  $\gamma < \alpha$  tale che  $D \subseteq V_\gamma^B$ , allora  $\gamma \leq \beta$ , quindi per *i.* si ha  $D \subseteq V_\beta^B$  e vale anche l'altra inclusione.

Infine, se  $\alpha$  è ordinale limite, per definizione  $x \in V_\alpha^B$  implica che esiste  $\gamma + 1 < \alpha$  successore tale che  $x \in V_{\gamma+1}^B$ . Ma allora per tale  $\gamma < \alpha$  si ha  $\text{dom}(x) \subseteq V_\gamma^B$ .

Viceversa, se esiste  $\gamma < \alpha$  tale che  $\text{dom}(x) \subseteq V_\gamma^B$ , allora  $x \in V_{\gamma+1}^B \subseteq V_\alpha^B$ .

- iii. Sia  $\alpha = \text{rk}_B(y)$ . Allora  $y \in V_{\alpha+1}^B$ , cioè esiste  $\gamma < \alpha + 1$  per cui  $\text{dom}(y) \subseteq V_\gamma^B$ , ma notiamo che  $\gamma < \alpha + 1$  equivale a  $\gamma \leq \alpha$ . Pertanto, dato  $x \in \text{dom}(y)$ , si ha  $x \in V_\gamma^B$  e quindi  $\text{rk}_B(x) < \gamma \leq \alpha$ .

- iv.  $\text{rk}_B(x) < \alpha \iff \exists \gamma < \alpha \ x \in V_{\gamma+1}^B \iff \exists \gamma < \alpha \ \text{dom}(x) \subseteq V_\gamma^B \iff x \in V_\alpha^B$ .

- v. Sia  $\alpha = \sup\{\text{rk}_B(x) + 1 \mid x \in \text{dom}(y)\}$ .

( $\geq$ ) Da *iii.* segue  $\alpha < \text{rk}_B(y) + 1$  cioè  $\alpha \leq \text{rk}_B(y)$ .

( $\leq$ ) Sia  $x \in \text{dom}(y)$ . Allora  $\text{rk}_B(x) + 1 \leq \alpha$ , cioè  $\text{rk}_B(x) < \alpha$ . Ma per *iv.* si ha allora  $x \in V_\alpha^B$ . Pertanto  $\text{dom}(y) \subseteq V_\alpha^B$ , cioè  $y \in V_{\alpha+1}^B$ , da cui  $\text{rk}_B(y) \leq \alpha$ .

*vi.* ( $\Rightarrow$ )  $x \in \mathbf{V}^B \Rightarrow \exists \alpha \in \mathbf{ON} \ x \in V_\alpha^B$ . Allora per *ii.*  $\exists \gamma < \alpha \ \text{dom}(x) \subseteq V_\gamma^B \subseteq \mathbf{V}^B$ .

( $\Leftarrow$ ) Supponiamo  $\text{dom}(x) \subseteq \mathbf{V}^B$  e sia  $\alpha = \sup\{\text{rk}_B(y) + 1 \mid y \in \text{dom}(x)\}$ . Allora, dato  $y \in \text{dom}(x)$ , si ha  $\text{rk}_B(y) + 1 \leq \alpha$ , cioè  $\text{rk}_B(y) < \alpha$  e perciò, da *iv.*,  $y \in V_\alpha^B$ . Quindi  $\text{dom}(x) \subseteq V_\alpha^B$  da cui  $x \in V_{\alpha+1}^B \subseteq \mathbf{V}^B$ .

□

Le proprietà *i.* e *iii.-v.* sono analoghe a quelle date nella Proposizione 1.5 per **WF**. Inoltre, per  $\mathbf{V}^B$  vale un principio di induzione, che verrà utilizzato frequentemente nelle dimostrazioni.

**Teorema 2.2** (Principio di Induzione per  $\mathbf{V}^B$ ). *Per ogni formula  $\phi(x)$ ,*

$$\forall x \in \mathbf{V}^B (\forall y \in \text{dom}(x) \phi(y) \rightarrow \phi(x)) \rightarrow \forall x \in \mathbf{V}^B \phi(x)$$

*Dimostrazione.* Supponiamo valga  $\forall x \in \mathbf{V}^B (\forall y \in \text{dom}(x) \phi(y) \rightarrow \phi(x))$  e supponiamo per assurdo  $\exists x \in \mathbf{V}^B \neg \phi(x)$ . Sia  $N = \{\text{rk}_B(y) \mid y \in \mathbf{V}^B \neg \phi(y)\}$ . Allora  $N \neq \emptyset$  e  $N$  è sottoclasse di  $\mathbf{ON}$ . Dunque, poiché  $\in$  ben fondata e set-like su  $\mathbf{ON}$ , per Teorema 1.3 esiste  $\mu \in$ -minimale per  $N$ . Poiché  $\mathbf{ON}$  totalmente ordinato da  $\in$ , si ha in realtà  $\mu = \min N$ . Sia allora  $\bar{x} \in \mathbf{V}^B$  tale che  $\neg \phi(\bar{x})$  e  $\text{rk}_B(\bar{x}) = \mu$ . Allora  $\forall y \in \text{dom}(\bar{x}) \text{rk}_B(y) < \text{rk}_B(\bar{x}) = \mu$  e quindi  $\forall y \in \text{dom}(\bar{x}) \phi(y)$ . Per ipotesi si ha pertanto  $\phi(\bar{x})$ , assurdo.

□

### 2.2.1 Una logica per $\mathbf{V}^B$

Ora, affinché  $\mathbf{V}^B$  possa veramente essere un modello “a valori booleani” per **ZFC**, vogliamo valutare all’interno di  $B$  ogni formula della teoria degli insiemi. Sia quindi  $\mathcal{L}$  il linguaggio della teoria degli insiemi e definiamo la valutazione booleana  $\|\cdot\|$  sulle formule atomiche:

$$\begin{aligned} \|u \in v\| &= \bigvee_{y \in \text{dom}(v)} (v(y) \wedge \|u = y\|) \\ \|u = v\| &= \bigwedge_{x \in \text{dom}(u)} (u(x) \rightarrow \|x \in v\|) \wedge \bigwedge_{y \in \text{dom}(v)} (v(y) \rightarrow \|y \in u\|) \end{aligned}$$

E poi per ricorsione sulla complessità della formula, come già visto nel Capitolo 1:

$$\begin{aligned} \|\sigma \wedge \tau\| &= \|\sigma\| \wedge \|\tau\| \\ \|\sigma \vee \tau\| &= \|\sigma\| \vee \|\tau\| \\ \|\neg \sigma\| &= \neg \|\sigma\| \\ \|\sigma \rightarrow \tau\| &= \|\sigma\| \rightarrow \|\tau\| \\ \|\forall x \phi(x)\| &= \bigwedge_{u \in \mathbf{V}^B} \|\phi(u)\| \\ \|\exists x \phi(x)\| &= \bigvee_{u \in \mathbf{V}^B} \|\phi(u)\| \end{aligned}$$



La definizione di  $\|\cdot\|$  sulle formule atomiche può essere interpretata come una “probabilità” di appartenenza e di uguaglianza tra due insiemi. Essa viene intuitivamente parzialmente giustificata dalle tautologie

$$\begin{aligned} u \in v &\leftrightarrow \exists y \in v (u = y) \\ u = v &\leftrightarrow \forall x \in u (x \in v) \wedge \forall y \in v (y \in u) \end{aligned}$$

Più cruciale della naturalezza della definizione è chiedersi però se essa sia effettivamente una buona definizione, poiché è stata data per ricorsione anche sulle formule atomiche stesse. A tal proposito, definiamo la relazione  $\prec$  su  $\mathbf{V}^B \times \mathbf{V}^B$ :

$$(x, y) \prec (u, v) \iff (x \in \text{dom}(u) \wedge y = v) \vee (x = u \wedge y \in \text{dom}(v))$$

Vale il seguente

**Risultato.**  $\prec$  è ben fondata e set-like su  $\mathbf{V}^B \times \mathbf{V}^B$ .

*Dimostrazione.*

- $\prec$  è ben fondata. Infatti, sia  $X \subseteq \mathbf{V}^B \times \mathbf{V}^B$ ,  $X \neq \emptyset$  e

$$R = \{(\text{rk}_B(x), \text{rk}_B(y)) \mid (x, y) \in X\}$$

Poiché  $X$  è insieme non vuoto, anche  $R$  è insieme non vuoto per **Rimpiazzamento**. Sia ora  $R_1 = \{\text{rk}_B(x) \mid (x, y) \in X\}$ . Ancora, poiché  $X$  è insieme non vuoto, per **Rimpiazzamento** anche  $R_1$  è insieme non vuoto. Inoltre, per definizione è sottoclasse di **ON** e quindi ammette minimo: sia  $m_1 = \min R_1$ . Sia similmente  $R_2 = \{\text{rk}_B(y) \mid (x, y) \in X \wedge \text{rk}_B(x) = m_1\}$ . Anch'essa è sottoclasse non vuota di **ON**, pertanto ammette minimo: sia  $m_2 = \min R_2$ . Allora  $(m_1, m_2) \in R$ , quindi esiste  $(x, y) \in X$  tale che  $\text{rk}_B(x) = m_1$  e  $\text{rk}_B(y) = m_2$ . Esso è  $\prec$ -minimale per  $X$ , infatti se esistesse  $(x', y') \in X$  tale che  $(x', y') \prec (x, y)$ , si dovrebbe avere, in particolare,  $x' \in \text{dom}(x)$  oppure  $y' \in \text{dom}(y)$ . Quindi, dalla Proposizione 2.1 *iii*. si avrebbe  $\text{rk}_B(x') < \text{rk}_B(x) = m_1$  oppure  $\text{rk}_B(y') < \text{rk}_B(y) = m_2$ , assurdo in entrambi i casi.

- $\prec$  è set-like. Infatti per ogni  $(u, v) \in \mathbf{V}^B \times \mathbf{V}^B$  si ha

$$\begin{aligned} \{(x, y) \mid (x, y) \prec (u, v)\} &= \{(x, y) \mid (x \in \text{dom}(u) \wedge y = v) \vee (x = u \wedge y \in \text{dom}(v))\} \\ &= \{(x, v) \mid x \in \text{dom}(u)\} \cup \{(u, y) \mid y \in \text{dom}(v)\} \end{aligned}$$

Ma entrambi sono insiemi per **Rimpiazzamento** e la loro unione è un insieme per **Unione**.

□

Pertanto, in forza del Teorema 1.4, è possibile definire per ricorsione su  $\prec$  la funzione tra classi  $\mathbf{G}: \mathbf{V}^B \times \mathbf{V}^B \rightarrow \mathbf{V}$ :

$$\mathbf{G}(u, v) = (\|u \in v\|, \|v \in u\|, \|u = v\|, \|v = u\|)$$

tramite una certa funzione tra classi  $\mathbf{F}: \mathbf{V}^B \times \mathbf{V}^B \times \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$  come l'unica funzione tale che:

$$\mathbf{G}(u, v) = \mathbf{F}(u, v, \mathbf{G}|_{\{(x, y): (x, y) \prec (u, v)\}})$$

Da cui si ottiene la buona definizione di  $\|u \in v\|$  e di  $\|u = v\|$ .

Sottolineiamo che la “ricorsione sulla complessità delle formule” utilizzata per definire  $\|\cdot\|$  non è formalizzabile all’interno di **ZFC**. Si può evitare il problema effettuando la costruzione di  $\mathbf{V}^B$  all’interno di un  $M \in V$  che sia modello per **ZFC**.

Diremo che<sup>1</sup>  $\sigma$  è vera in  $\mathbf{V}^B$  se  $\|\sigma\| = 1$ . Se  $\sigma$  è vera in  $\mathbf{V}^B$ , scriveremo anche

$$\mathbf{V}^B \models \sigma$$

Il teorema seguente è un risultato fondamentale su  $\|\cdot\|$ .

**Teorema 2.3.** *Tutti gli assiomi della logica classica predicativa del primo ordine con l’uguaglianza sono veri in  $\mathbf{V}^B$ . In particolare, si ha*

- i.  $\|u = u\| = 1$
- ii.  $u(x) \leq \|x \in u\|$  per ogni  $x \in \text{dom}(u)$
- iii.  $\|u = v\| = \|v = u\|$
- iv.  $\|u = v\| \wedge \|v = w\| \leq \|u = w\|$
- v.  $\|u = v\| \wedge \|u \in w\| \leq \|v \in w\|$
- vi.  $\|v = w\| \wedge \|u \in v\| \leq \|u \in w\|$
- vii.  $\|u = v\| \wedge \|\phi(u)\| \leq \|\phi(v)\|$  per ogni formula  $\phi(x)$

*Dimostrazione.* Gli assiomi che non coinvolgono l’uguaglianza sono veri per il Teorema 1.13 perché  $\|\cdot\|$  è una valutazione booleana. i. e vii. completano la dimostrazione per quelli che coinvolgono l’uguaglianza.

- i. Invochiamo il principio di induzione su  $\mathbf{V}^B$ . Sia quindi  $u \in \mathbf{V}^B$  e supponiamo che  $\forall x \in \text{dom}(u) \|x = x\| = 1$ . Allora, se  $x \in \text{dom}(u)$ ,

$$\|x \in u\| = \bigvee_{y \in \text{dom}(u)} (u(y) \wedge \|x = y\|) \geq u(x) \wedge \|x = x\| = u(x) \quad (\star)$$

Quindi:

$$\begin{aligned} \|u = u\| &= \bigwedge_{x \in \text{dom}(u)} (u(x) \rightarrow \|x \in u\|) \wedge \bigwedge_{x \in \text{dom}(u)} (u(x) \rightarrow \|x \in u\|) \\ &= \bigwedge_{x \in \text{dom}(u)} (u(x) \rightarrow \|x \in u\|) \\ &= \bigwedge_{x \in \text{dom}(u)} (\neg u(x) \vee \|x \in u\|) \\ &\geq \bigwedge_{x \in \text{dom}(u)} (\neg u(x) \vee u(x)) = 1 \end{aligned}$$

Da cui  $\|u = u\| = 1$ .

---

<sup>1</sup>Indichiamo qui con  $\sigma$  enunciati, ma anche formule con variabili libere: in questo caso se  $\sigma_{[x]}$  è formula in contesto, essa è vera in  $\mathbf{V}^B$  se per ogni  $\underline{u} \subseteq \mathbf{V}^B$  della stessa lunghezza del contesto si ha  $\|\sigma_{[x]}\|(\underline{u}) = 1$ . Inoltre consentiremo, con un abuso di notazione, a  $\sigma$  di essere una formula in cui delle variabili sono sostituite con elementi di  $\mathbf{V}^B$ ; in tal caso  $\|\sigma\|$  sarà l’abbreviazione già introdotta precedentemente.

*ii.* Già mostrato in  $(\star)$ , in quanto effettivamente vale *i*.

*iii.* Ovvio dalla simmetria nella definizione di  $\|u = v\|$ .

*iv.* Anche qui per induzione su  $\mathbf{V}^B$  per la formula  $\phi(x): \|x = v\| \wedge \|v = w\| \leq \|x = w\|$ . Siano quindi  $u, v, w \in \mathbf{V}^B$  e supponiamo  $\forall x \in \text{dom}(u), \|x = v\| \wedge \|v = w\| \leq \|x = w\|$ . Siano ora  $y \in \text{dom}(v), z \in \text{dom}(w)$ . Allora per ipotesi induttiva vale  $\|x = y\| \wedge \|y = z\| \leq \|x = z\|$ . Pertanto si ha

$$\begin{aligned} & \|x = y\| \wedge \|y = z\| \wedge w(z) \leq \|x = z\| \wedge w(z) \\ \Rightarrow & \bigvee_{z \in \text{dom}(w)} (\|x = y\| \wedge \|y = z\| \wedge w(z)) \leq \bigvee_{z \in \text{dom}(w)} (\|x = z\| \wedge w(z)) \\ & \Rightarrow \|x = y\| \wedge \|y \in w\| \leq \|x \in w\| \end{aligned} \quad (A)$$

Inoltre, per definizione di  $\|v = w\|$  e poiché  $y \in \text{dom}(v)$ , si ha  $\|v = w\| \leq v(y) \rightarrow \|y \in w\|$ , da cui:

$$\|v = w\| \wedge v(y) \leq \|y \in w\| \quad (B)$$

Da (A) e (B) segue  $\|x = y\| \wedge \|v = w\| \wedge v(y) \leq \|x = y\| \wedge \|y \in w\| \leq \|x \in w\|$ , da cui

$$\begin{aligned} & \bigvee_{y \in \text{dom}(v)} (\|x = y\| \wedge \|v = w\| \wedge v(y)) \leq \|x \in w\| \\ & \Rightarrow \|x \in v\| \wedge \|v = w\| \leq \|x \in w\| \end{aligned} \quad (C)$$

Inoltre, analogamente a (B) si ha anche  $\|u = v\| \wedge u(x) \leq \|x \in v\|$ , da cui, sfruttando (C):

$$\|u = v\| \wedge u(x) \wedge \|v = w\| \leq \|x \in v\| \wedge \|v = w\| \leq \|x \in w\|$$

Da cui  $\|u = v\| \wedge \|v = w\| \leq u(x) \rightarrow \|x \in w\|$ , che implica:

$$\|u = v\| \wedge \|v = w\| \leq \bigwedge_{x \in \text{dom}(u)} (u(x) \rightarrow \|x \in w\|) \quad (D)$$

Ora osserviamo che per *iii.* l'ipotesi induttiva è equivalente a  $\forall x \in \text{dom}(u) \|w = v\| \wedge \|v = x\| \leq \|w = x\|$ , che, con passaggi analoghi a quelli che hanno portato a (D), porta a

$$\|w = v\| \wedge \|v = u\| \leq \bigwedge_{x \in \text{dom}(w)} (w(x) \rightarrow \|x \in u\|)$$

che, insieme a (D), vista la definizione di  $\|u = w\|$ , dà la tesi.

*v.* Già mostrato in (A), in quanto effettivamente vale *iv*.

*vi.* Già mostrato in (C), in quanto effettivamente vale *iv*.

*vii.* Mostriamolo per induzione sulla complessità della formula  $\phi$ .

- Se  $\phi(u)$  è una formula atomica, allora è della forma  $u = y$  oppure  $u \in y$  oppure  $y \in u$ , con  $y \in \mathbf{V}^B$ . Già mostrato in *iv.*, *v.* e *vi.* rispettivamente.
- Se  $\phi(u): \psi(u) \wedge \chi(u)$ , supponiamo la tesi valga per  $\psi$  e per  $\chi$ . Allora:

$$\begin{aligned} \|u = v\| \wedge \|\phi(u)\| &= \|u = v\| \wedge \|\psi(u) \wedge \chi(u)\| = \\ &= \|u = v\| \wedge \|\psi(u)\| \wedge \|\chi(u)\| = \\ &= \|u = v\| \wedge \|\psi(u)\| \wedge \|u = v\| \wedge \|\chi(u)\| \leq \\ &\leq \|\psi(v)\| \wedge \|\chi(v)\| = \|\psi(v) \wedge \chi(v)\| = \|\phi(v)\| \end{aligned}$$

- Se  $\phi(u): \neg\psi(u)$ , supponiamo la tesi valga per  $\psi$ . Vale

$$\|u = v\| \wedge \|\psi(v)\| \wedge \neg\|\psi(u)\| \leq \|\psi(u)\| \wedge \neg\|\psi(u)\| = 0$$

cioè  $\|u = v\| \wedge \|\psi(v)\| \wedge \neg\|\psi(u)\| = 0$ . Ora,

$$\begin{aligned} \|u = v\| \wedge \|\phi(u)\| &= \|u = v\| \wedge \|\neg\psi(u)\| = \|u = v\| \wedge \neg\|\psi(u)\| \wedge 1 = \\ &= \|u = v\| \wedge \neg\|\psi(u)\| \wedge (\|\psi(v)\| \vee \|\neg\psi(v)\|) = \\ &= (\|u = v\| \wedge \neg\|\psi(u)\| \wedge \|\psi(v)\|) \vee (\|u = v\| \wedge \neg\|\psi(u)\| \wedge \|\neg\psi(v)\|) = \\ &= 0 \vee (\|u = v\| \wedge \neg\|\psi(u)\| \wedge \|\neg\psi(v)\|) \leq \|\neg\psi(v)\| = \|\phi(v)\| \end{aligned}$$

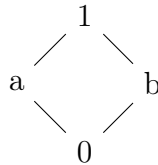
- Se  $\phi(u): \exists y \psi(y, u)$ , supponiamo la tesi valga per  $\psi$ , cioè  $\forall w \in \mathbf{V}^B \|u = v\| \wedge \|\psi(w, u)\| \leq \|\psi(w, v)\|$ . Allora:

$$\begin{aligned} \|u = v\| \wedge \|\phi(u)\| &= \|u = v\| \wedge \|\exists y \psi(y, u)\| = \|u = v\| \wedge \bigvee_{w \in \mathbf{V}^B} \|\psi(w, u)\| = \\ &= \bigvee_{w \in \mathbf{V}^B} (\|u = v\| \wedge \|\psi(w, u)\|) \leq \bigvee_{w \in \mathbf{V}^B} \|\psi(w, v)\| = \\ &= \|\exists y \psi(y, v)\| = \|\phi(v)\| \end{aligned}$$

Da cui seguono anche le affermazioni analoghe per  $\vee$ ,  $\rightarrow$  e  $\forall$  grazie alle leggi di De Morgan.

□

**Osservazione.** In generale, in *ii.* non vale l'uguaglianza. Per vederlo in un esempio concreto, consideriamo  $B = \{0, a, b, 1\}$ , con  $b = \neg a$ .



Sia  $e = \emptyset$ ,  $e_x: e \mapsto x$  per ogni  $x \in B$ . Vale allora, per ogni  $x \in B$ :

$$\|e \in e_x\| = \bigvee_{y \in \text{dom}(e_x)} (e_x(y) \wedge \|y = e\|) = e_x(e) \wedge \|e = e\| = x \wedge 1 = x$$

Da cui otteniamo

$$\begin{aligned}
\|e_0 = e_b\| &= \bigwedge_{x \in \text{dom}(e_0)} (e_0(x) \rightarrow \|x \in e_b\|) \wedge \bigwedge_{x \in \text{dom}(e_b)} (e_b(x) \rightarrow \|x \in e_0\|) \\
&= (e_0(e) \rightarrow \|e \in e_b\|) \wedge (e_b(e) \rightarrow \|e \in e_0\|) \\
&= (0 \rightarrow b) \wedge (b \rightarrow 0) = 1 \wedge \neg b = a
\end{aligned}$$

(Similmente, si ottiene  $\|e_0 = e_a\| = b$ ,  $\|e_1 = e_x\| = x$  per ogni  $x \in B$  e  $\|e_a = e_b\| = 0$ , ma non sono utili per il nostro esempio.) Sia ora  $v: \{e_0, e_b\} \rightarrow B$ ,  $e_0 \mapsto 1$ ,  $e_b \mapsto 0$ . Allora vediamo che

$$\begin{aligned}
\|e_b \in v\| &= \bigvee_{x \in \text{dom}(v)} (v(x) \wedge \|x = e_b\|) \\
&= (v(e_0) \wedge \|e_0 = e_b\|) \vee (v(e_b) \wedge \|e_b = e_b\|) \\
&= (1 \wedge a) \vee (0 \wedge 1) = a \vee 0 = a
\end{aligned}$$

e pertanto  $v(e_b) = 0 \not\leq a = \|e_b \in v\|$ .

Ciò va contro l'intuizione per cui gli elementi di  $\mathbf{V}^B$  sono "funzioni caratteristiche a valori booleani" e ciò è giustificato dalla ricorsività nella definizione di  $\|\cdot \in \cdot\|$ ; ciononostante, tale idea può essere parzialmente recuperata. Definiamo *estensionali* gli elementi  $v$  di  $\mathbf{V}^B$  tali che  $v(x) = \|x \in v\|$  per ogni  $x \in \text{dom}(v)$ . Allora vale il seguente

**Risultato.** Per ogni  $u \in \mathbf{V}^B$  esiste  $v \in \mathbf{V}^B$  estensionale tale che  $\|u = v\| = 1$ .

*Dimostrazione.* Sia  $u \in \mathbf{V}^B$  e vediamo che  $v = \{(x, \|x \in u\|) \mid x \in \text{dom}(u)\}$  soddisfa le richieste.

- $\|u = v\| = \bigwedge_{x \in \text{dom}(u)} (u(x) \rightarrow \|x \in v\|) \wedge \bigwedge_{y \in \text{dom}(v)} (v(y) \rightarrow \|y \in u\|)$  ma per definizione  $\text{dom}(u) = \text{dom}(v)$  e  $\|y \in u\| = v(y)$ , quindi  $v(y) \rightarrow \|y \in u\| = 1$ . Inoltre, per 2.3,  $u(x) \leq \|x \in u\| = v(x) \leq \|x \in v\|$  pertanto  $u(x) \rightarrow \|x \in v\| = 1$ . Da queste insieme segue  $\|u = v\| = 1$ .
- $v$  è estensionale. Infatti, dal Teorema 2.3 si ha ovviamente  $v(x) \leq \|x \in v\|$  ma anche  $\|x \in v\| = \|x \in v\| \wedge 1 = \|x \in v\| \wedge \|u = v\| \leq \|x \in u\| = v(x)$ .

□

Inoltre, il Teorema 2.3 ha la seguente conseguenza, che giustifica a posteriori la definizione di  $\|\cdot \in \cdot\|$  e  $\|\cdot = \cdot\|$ .

**Corollario 2.4.**

- $\|\exists x \in u \phi(x)\| = \bigvee_{x \in \text{dom}(u)} (u(x) \wedge \|\phi(x)\|)$
- $\|\forall x \in u \phi(x)\| = \bigwedge_{x \in \text{dom}(u)} (u(x) \rightarrow \|\phi(x)\|)$

*Dimostrazione.* Basta mostrare *i.*, in quanto *ii.* segue per dualità. Dunque:

$$\begin{aligned}
\|\exists x \in u \phi(x)\| &= \|\exists x(x \in u \wedge \phi(x))\| \\
&= \bigvee_{x \in \mathbf{V}^B} \|x \in u \wedge \phi(x)\| \\
&= \bigvee_{x \in \mathbf{V}^B} \bigvee_{y \in \text{dom}(u)} (u(y) \wedge \|x = y\| \wedge \|\phi(x)\|) \\
&= \bigvee_{y \in \text{dom}(u)} [u(y) \wedge \bigvee_{x \in \mathbf{V}^B} (\|x = y\| \wedge \|\phi(x)\|)] \\
&= \bigvee_{y \in \text{dom}(u)} [u(y) \wedge \|\exists x(x = y \wedge \phi(x))\|] \\
&= \bigvee_{y \in \text{dom}(u)} (u(y) \wedge \|\phi(y)\|)
\end{aligned}$$

in quanto  $\phi(y)$  e  $\exists x(x = y \wedge \phi(x))$  sono logicamente equivalenti e quindi hanno la stessa valutazione per il Teorema 1.13.  $\square$

### 2.2.2 $\mathbf{V}^B$ è un'estensione di $\mathbf{V}$

Come abbiamo visto,  $\mathbf{V}^B$  è una classe di funzioni e la sua costruzione non poteva che avvenire in  $\mathbf{V}$ , quindi è chiaro che  $\mathbf{V}^B$  è una sottoclasse di  $\mathbf{V}$ . Vogliamo ora vedere che, in realtà, vale anche l'altra inclusione, ovvero la classe  $\mathbf{V}^B$  contiene una copia isomorfa di  $\mathbf{V}$ . A tal fine, cominciamo considerando una sottoalgebra completa  $B'$  di  $B$  e definiamo  $\|\cdot\|^{B'}$  a valori in  $B'$  analogamente a quanto fatto per  $\|\cdot\|$  per  $B$ .

**Teorema 2.5.** *Sia  $B'$  una sottoalgebra completa di  $B$ . Allora*

*i.  $\mathbf{V}^{B'}$  è una sottoclasse di  $\mathbf{V}^B$*

*Inoltre, per  $u, v \in \mathbf{V}^{B'}$ :*

*ii.  $\|u \in v\|^{B'} = \|u \in v\|$*

*iii.  $\|u = v\|^{B'} = \|u = v\|$*

*Dimostrazione.*

*i.* Mostriamo per induzione su  $\alpha \in \mathbf{ON}$  che, per ogni  $\alpha$ ,  $V_\alpha^{B'} \subseteq V_\alpha^B$ .

- Se  $\alpha = 0$ ,  $V_0^{B'} = \emptyset \subseteq \emptyset = V_0^B$ .
- Sia  $V_\alpha^{B'} \subseteq V_\alpha^B$  per ogni  $\alpha < \gamma$ . Allora

$$V_\gamma^{B'} = \{x: D \rightarrow B' \mid \exists \alpha < \gamma D \subseteq V_\alpha^{B'}\} \subseteq \{x: D \rightarrow B \mid \exists \alpha < \gamma D \subseteq V_\alpha^B\} = V_\gamma^B$$

perché  $B' \subseteq B$  e  $V_\alpha^{B'} \subseteq V_\alpha^B$ .

ii.-iii. Mostriamo entrambi contemporaneamente per induzione su  $\mathbf{V}^{B'}$ . Sia  $v \in \mathbf{V}^{B'}$  e supponiamo

$$\forall y \in \text{dom}(v), \forall u \in \mathbf{V}^{B'} \begin{cases} \|u \in y\|^{B'} = \|u \in y\| \\ \|u = y\|^{B'} = \|u = y\| \\ \|y \in u\|^{B'} = \|y \in u\| \end{cases}$$

Allora vediamo subito che

$$\|u \in v\|^{B'} = \bigvee_{y \in \text{dom}(v)} (v(y) \wedge \|u = y\|^{B'}) = \bigvee_{y \in \text{dom}(v)} (v(y) \wedge \|u = y\|) = \|u \in v\|$$

Inoltre si ha anche

$$\begin{aligned} \|v \in u\|^{B'} &= \bigvee_{y \in \text{dom}(u)} (u(y) \wedge \|v = y\|^{B'}) \\ &= \bigvee_{y \in \text{dom}(u)} (u(y) \wedge \bigwedge_{x \in \text{dom}(v)} (v(x) \rightarrow \|x \in y\|^{B'}) \wedge \bigwedge_{x \in \text{dom}(y)} (y(x) \rightarrow \|x \in v\|^{B'})) \end{aligned}$$

Ma  $\|x \in y\|^{B'} = \|x \in y\|$  per ogni  $x \in \text{dom}(v)$  per ipotesi induttiva e

$$\|x \in v\|^{B'} = \bigvee_{z \in \text{dom}(v)} (v(z) \wedge \|z = x\|^{B'}) = \bigvee_{z \in \text{dom}(v)} (v(z) \wedge \|z = x\|) = \|x \in v\|$$

per ogni  $x \in \text{dom}(y)$ , ancora per ipotesi induttiva. Quindi

$$\|v \in u\|^{B'} = \bigvee_{y \in \text{dom}(u)} (u(y) \wedge \|v = y\|) = \|v \in u\|$$

Infine,

$$\|u = v\|^{B'} = \bigwedge_{y \in \text{dom}(u)} (u(y) \rightarrow \|y \in v\|^{B'}) \wedge \bigwedge_{y \in \text{dom}(v)} (v(y) \rightarrow \|y \in u\|^{B'})$$

ma per ipotesi induttiva  $\|y \in u\|^{B'} = \|y \in u\|$  per ogni  $y \in \text{dom}(v)$  e

$$\|y \in v\|^{B'} = \bigvee_{x \in \text{dom}(v)} (v(x) \wedge \|x = y\|^{B'}) = \bigvee_{x \in \text{dom}(v)} (v(x) \wedge \|x = y\|) = \|y \in v\|$$

per ogni  $y \in \text{dom}(u)$ . Pertanto  $\|u = v\|^{B'} = \|u = v\|$  come si voleva.  $\square$

Ciò in realtà vale per ogni formula ristretta  $\phi$ , dove  $\phi$  è detta *ristretta* se ogni suo quantificatore è della forma  $\exists x \in y$  o  $\forall x \in y$ :

**Teorema 2.6.** *Sia  $B'$  una sottoalgebra completa di  $B$ . Allora per ogni formula ristretta  $\phi(v_1, \dots, v_n)$  e per ogni  $u_1, \dots, u_n \in \mathbf{V}^{B'}$ :*

$$\|\phi(u_1, \dots, u_n)\|^{B'} = \|\phi(u_1, \dots, u_n)\|$$

*Dimostrazione.* Facilmente per induzione sulla complessità di  $\phi$ .

- Se  $\phi$  è elementare, si tratta del Teorema 2.5.
- Se  $\phi: \psi \wedge \chi$ , supponiamo la tesi valga per  $\psi$  e  $\chi$ . Allora  $\|\phi\|^{B'} = \|\psi \wedge \chi\|^{B'} = \|\psi\|^{B'} \wedge \|\chi\|^{B'} = \|\psi\| \wedge \|\chi\| = \|\psi \wedge \chi\| = \|\phi\|$ .
- Se  $\phi: \neg\psi$ , supponiamo la tesi valga per  $\psi$ . Allora  $\|\phi\|^{B'} = \|\neg\psi\|^{B'} = \neg\|\psi\|^{B'} = \neg\|\psi\| = \|\neg\psi\| = \|\phi\|$ .
- Se  $\phi(v_1, \dots, v_n): \exists x \in u \psi(x, v_1, \dots, v_n)$ , supponiamo la tesi valga per  $\psi(v_0, \dots, v_n)$ . Allora

$$\begin{aligned} \|\phi\|^{B'} &= \|\exists x \in u \psi(x, v_1, \dots, v_n)\|^{B'} = \bigvee_{x \in \text{dom}(u)}^{B'} (u(x) \wedge \|\psi(x, v_1, \dots, v_n)\|^{B'}) = \\ &= \bigvee_{x \in \text{dom}(u)}^B (u(x) \wedge \|\psi(x, v_1, \dots, v_n)\|) = \|\exists x \in u \psi(x, v_1, \dots, v_n)\| = \|\phi\| \end{aligned}$$

Gli altri per dualità. □

Dunque, se  $\mathbf{V}^B$  è un modello di **ZFC**,  $\mathbf{V}^{B'}$  risulta essere un “sottomodello” di  $\mathbf{V}^B$ . Possiamo ora mostrare che  $\mathbf{V}$  è una sottoclasse di  $\mathbf{V}^B$ . Diamo, a tal proposito, per ricorsione su  $\in$ , la seguente

**Definizione.** Per ogni  $x \in \mathbf{V}$ ,  $\hat{x} \stackrel{\text{def}}{=} \{(\hat{y}, 1) : y \in x\}$

Osserviamo che per ogni  $x \in \mathbf{V}$ ,  $\hat{x} \in \mathbf{V}^2$  che è sottoclasse di  $\mathbf{V}^B$ , in quanto  $2$  è sottoalgebra completa di  $B$ , come notato nel Capitolo 1.2. Chiamiamo *standard* gli elementi  $u \in \mathbf{V}^B$  tali che esiste  $x \in \mathbf{V}$  per cui  $u = \hat{x}$ . Dal Teorema 2.5 segue che, dati  $x, y \in \mathbf{V}$ :

$$\begin{aligned} \|\hat{x} \in \hat{y}\| &= \|\hat{x} \in \hat{y}\|^2 \in 2 \\ \|\hat{x} = \hat{y}\| &= \|\hat{x} = \hat{y}\|^2 \in 2 \end{aligned}$$

ovvero appartenenza ed uguaglianza tra insiemi standard sono valutate in modo bivalente. In realtà,  $\mathbf{V}$  e  $\mathbf{V}^2$  risultano essere isomorfi:

**Teorema 2.7.**

*i.* Per ogni  $x \in \mathbf{V}$  e per ogni  $u \in \mathbf{V}^B$  si ha  $\|u \in \hat{x}\| = \bigvee_{y \in x} \|u = \hat{y}\|$

*ii.* Per ogni  $x, y \in \mathbf{V}$  si ha

$$\begin{aligned} x \in y &\iff \|\hat{x} \in \hat{y}\| = 1 \\ x = y &\iff \|\hat{x} = \hat{y}\| = 1 \end{aligned}$$

*iii.* L'applicazione  $x \mapsto \hat{x}$  è iniettiva da  $\mathbf{V}$  in  $\mathbf{V}^2$ .

*iv.* Per ogni  $u \in \mathbf{V}^2$  esiste un unico  $x \in \mathbf{V}$  tale che  $\|u = \hat{x}\| = 1$ .



v. Per ogni formula  $\phi(v_1, \dots, v_n)$  e per ogni  $x_1, \dots, x_n \in \mathbf{V}$  vale

$$\phi(x_1, \dots, x_n) \iff \|\phi(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n)\|^2 = 1$$

Se  $\phi$  è ristretta, vale anche

$$\phi(x_1, \dots, x_n) \iff \|\phi(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n)\| = 1$$

Infine, se  $\phi$  è  $\Sigma_1$ , ovvero della forma  $\exists v\psi(v, v_1, \dots, v_n)$  con  $\psi$  ristretta, vale anche

$$\phi(x_1, \dots, x_n) \implies \|\phi(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n)\| = 1$$

*Dimostrazione.*

i. Segue dalla definizione:

$$\begin{aligned} \|u \in \hat{x}\| &= \bigvee_{v \in \text{dom}(\hat{x})} (\hat{x}(v) \wedge \|u = v\|) \\ &= \bigvee_{y \in x} (\hat{x}(\hat{y}) \wedge \|u = \hat{y}\|) \text{ perché } v \in \text{dom}(\hat{x}) \iff \text{esiste } y \in x \text{ tale che } v = \hat{y} \\ &= \bigvee_{y \in x} (1 \wedge \|u = \hat{y}\|) = \bigvee_{y \in x} \|u = \hat{y}\| \end{aligned}$$

ii. Per induzione sul rango di  $y$ . Supponiamo che, dato  $y \in \mathbf{V}$ , per ogni  $z \in \mathbf{V}$  con  $\text{rk}(z) < \text{rk}(y)$  valga

$$\forall x \in \mathbf{V} \begin{cases} x \in z \iff \|\hat{x} \in \hat{z}\| = 1 \\ x = z \iff \|\hat{x} = \hat{z}\| = 1 \\ z \in x \iff \|\hat{z} \in \hat{x}\| = 1 \end{cases}$$

Allora, per la Proposizione 1.5 ii. ed essendo  $\|\cdot\| = \|\cdot\|^2$  su  $\mathbf{V}^2$ , si ottiene:

$$\begin{aligned} x \in y &\iff \exists u \in y (x = u) \iff \exists u \in y (\|\hat{x} = \hat{u}\| = 1) \iff \bigvee_{u \in y} \|\hat{x} = \hat{u}\| = 1 \\ &\iff \|\hat{x} \in \hat{y}\| = 1 \end{aligned}$$

grazie a i. Inoltre,

$$y \in x \iff \exists u \in x (y = u) \iff \exists u \in x (\forall z \in y (z \in u) \wedge \forall z \in u (z \in y))$$

Ma  $z \in u \iff \|\hat{z} \in \hat{u}\| = 1$  per ogni  $z \in y$  per ipotesi induttiva e

$$\begin{aligned} z \in y &\iff \exists w \in y (w = z) \iff \exists w \in y (\|\hat{w} = \hat{z}\| = 1) \iff \bigvee_{w \in y} \|\hat{w} = \hat{z}\| = 1 \\ &\iff \|\hat{z} \in \hat{y}\| = 1 \end{aligned}$$

per ogni  $z \in u$ , similmente a quanto visto prima. Dunque

$$\begin{aligned}
y \in x &\iff \exists u \in x (\forall z \in y (\|\hat{z} \in \hat{u}\| = 1) \wedge \forall z \in u (\|\hat{z} \in \hat{y}\| = 1)) \\
&\iff \bigvee_{u \in x} (\bigwedge_{z \in y} \|\hat{z} \in \hat{u}\| \wedge \bigwedge_{z \in u} \|\hat{z} \in \hat{y}\|) = 1 \\
&\iff \bigvee_{u \in x} \|\hat{y} = \hat{u}\| = 1 \\
&\iff \|\hat{y} \in \hat{x}\| = 1
\end{aligned}$$

grazie a *i*. Infine,

$$1 = \|\hat{x} = \hat{y}\| = \bigwedge_{u \in x} \|\hat{u} \in \hat{y}\| \wedge \bigwedge_{v \in y} \|\hat{v} \in \hat{x}\|$$

è equivalente a  $\forall u \in x, \forall v \in y (\|\hat{u} \in \hat{y}\| = 1 = \|\hat{v} \in \hat{x}\|)$ . Per ogni  $v \in y$  per ipotesi induttiva si ha però  $\|\hat{v} \in \hat{x}\| = 1 \iff v \in x$  e da *i*. vale

$$1 = \|\hat{u} \in \hat{y}\| = \bigvee_{z \in y} \|\hat{u} = \hat{z}\|$$

e ciò è equivalente per ipotesi induttiva a  $\exists z \in y (u = z)$  cioè  $u \in y$ . Pertanto, abbiamo

$$\begin{aligned}
\forall u \in x, \forall v \in y (\|\hat{u} \in \hat{y}\| = 1 = \|\hat{v} \in \hat{x}\|) &\iff \forall u \in x, \forall v \in y (u \in y \wedge v \in x) \\
&\iff \forall u \in x (u \in y) \wedge \forall v \in y (v \in x) \\
&\iff x = y
\end{aligned}$$

da cui la tesi.

*iii.* Siano  $x, y \in \mathbf{V}$  e supponiamo  $\hat{x} = \hat{y}$ . Allora  $\|\hat{x} = \hat{y}\| = 1$  e quindi da *ii.* segue  $x = y$ .

*iv.* Mostriamo l'esistenza per induzione su  $\mathbf{V}^B$ . Sia quindi  $u \in \mathbf{V}^2$  e supponiamo che per ogni  $v \in \text{dom}(u)$  esista  $y \in \mathbf{V}$  tale che  $\|v = \hat{y}\| = 1$ . Dobbiamo mostrare che esiste  $x \in \mathbf{V}$  tale che  $\|u = \hat{x}\| = 1$ . Sia quindi

$$x = \{y \in \mathbf{V} : \exists v \in \text{dom}(u) (\|v = \hat{y}\| \wedge u(v) = 1)\}$$

Si ha  $x \in \mathbf{V}$ . Infatti, poiché  $\text{dom}(u) \in \mathbf{V}$ , per **Separazione**

$$u' = \{v \in \text{dom}(u) : u(v) = 1\}$$

è un insieme. Allora è istanza di **Rimpiazzamento**:

$$\forall v \in u' \exists y \|v = \hat{y}\| = 1 \rightarrow \exists \tilde{x} \forall v \in u' \exists y \in \tilde{x} \|v = \hat{y}\| = 1$$

Poiché per ipotesi induttiva vale l'antecedente, esiste tale  $\tilde{x}$  insieme. Allora per **Separazione** è insieme

$$\begin{aligned}
x &= \{y \in \tilde{x} : \exists v \in u' (\|v = \hat{y}\| = 1)\} \\
&= \{y \in \tilde{x} : \exists v \in \text{dom}(u) (\|v = \hat{y}\| = 1 \wedge u(v) = 1)\} \\
&= \{y \in \mathbf{V} : \exists v \in \text{dom}(u) (\|v = \hat{y}\| = 1 \wedge u(v) = 1)\}
\end{aligned}$$

dove l'ultima uguaglianza vale perché  $\forall v \in u' \exists! y \|v = \hat{y}\| = 1$ . Infatti, dato  $v \in u'$  e  $y \in \tilde{x}$  tale che  $\|v = \hat{y}\| = 1$ , preso  $z \in \mathbf{V}$  tale che  $\|v = \hat{z}\| = 1$ , si ottiene  $1 = \|v = \hat{z}\| \wedge \|v = \hat{y}\| \leq \|\hat{z} = \hat{y}\|$  e quindi  $z = y$  per *ii*.

Dobbiamo mostrare che

$$\begin{aligned} 1 = \|u = \hat{x}\| &= \bigwedge_{v \in \text{dom}(u)} (u(v) \rightarrow \|v \in \hat{x}\|) \wedge \bigwedge_{v \in \text{dom}(\hat{x})} (\hat{x}(v) \rightarrow \|v \in u\|) \\ &= \bigwedge_{v \in \text{dom}(u)} (u(v) \rightarrow \|v \in \hat{x}\|) \wedge \bigwedge_{z \in x} \|\hat{z} \in u\| \end{aligned}$$

in quanto  $v \in \text{dom}(\hat{x}) \iff \exists z \in x (v = \hat{z})$  e  $\forall v \in \text{dom}(\hat{x}) \hat{x}(v) = 1$ . Mostriamo quindi che (a) se  $v \in \text{dom}(u)$ ,  $u(v) \leq \|v \in \hat{x}\|$ ; e (b) se  $z \in x$ ,  $\|\hat{z} \in u\| = 1$ .

- (a) Poiché  $u \in \mathbf{V}^2$ , dato  $v \in \text{dom}(u)$ , si ha  $u(v) = 0$  oppure  $u(v) = 1$ . Nel primo caso la tesi vale banalmente. Se invece  $u(v) = 1$ , poiché  $v \in \text{dom}(u)$  per ipotesi induttiva esiste  $y \in V$  tale che  $\|v = \hat{y}\| = 1$  e quindi per definizione tale  $y$  appartiene a  $x$ . Per *ii*, allora  $\|\hat{y} \in \hat{x}\| = 1$  da cui

$$u(v) = 1 = \|v = \hat{y}\| \wedge \|\hat{y} \in \hat{x}\| \leq \|v \in \hat{x}\|$$

- (b) Se  $z \in x$ , per definizione esiste  $v \in \text{dom}(u)$  tale che  $\|v = \hat{z}\| = 1$  e  $u(v) = 1$ . Ma allora

$$1 = \|v = \hat{z}\| \wedge u(v) \leq \|v = \hat{z}\| \wedge \|v \in u\| \leq \|\hat{z} \in u\|$$

cioè  $\|\hat{z} \in u\| = 1$ .

Mostriamo l'unicità. Siano  $u \in \mathbf{V}^2$  e  $x_1, x_2 \in \mathbf{V}$  tali che  $\|u = \hat{x}_1\| = 1 = \|u = \hat{x}_2\|$ . Allora per il Teorema 2.3 *iv*, si ha  $1 = \|\hat{x}_1 = u\| \wedge \|u = \hat{x}_2\| \leq \|\hat{x}_1 = \hat{x}_2\|$  cioè  $\|\hat{x}_1 = \hat{x}_2\| = 1$ . Pertanto da *ii*, segue  $x_1 = x_2$ .

v. Mostriamo la prima affermazione per induzione sulla complessità di  $\phi$ .

- Il caso  $\phi$  atomica è già mostrato in *ii*.

- Se  $\phi: \psi \wedge \chi$ , supponiamo  $\psi \iff \|\psi\|^2 = 1$  e  $\chi \iff \|\chi\|^2 = 1$ . Allora

$$\begin{aligned} \phi \iff \psi \wedge \chi &\iff \|\psi\|^2 = 1 = \|\chi\|^2 \iff \|\psi\|^2 \wedge \|\chi\|^2 = 1 \iff \|\psi \wedge \chi\|^2 = 1 \\ &\iff \|\phi\|^2 = 1 \end{aligned}$$

- Se  $\phi: \neg\psi$ , supponiamo  $\psi \iff \|\psi\|^2 = 1$ . Allora, essendo  $\|\cdot\|^2$  valutazione binaria:

$$\begin{aligned} \phi \iff \neg\psi &\iff \|\psi\|^2 < 1 \iff \|\psi\|^2 = 0 \iff \neg\|\psi\|^2 = 1 \iff \|\neg\psi\|^2 = 1 \\ &\iff \|\phi\|^2 = 1 \end{aligned}$$

- Se  $\phi: \exists x \psi$ , siano  $x_1, \dots, x_n \in \mathbf{V}$  e supponiamo

$$\psi(x, x_1, \dots, x_n) \iff \|\psi(\hat{x}, \hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n)\|^2 = 1$$

Allora:

( $\Rightarrow$ ) Se  $\phi(x_1, \dots, x_n)$ , allora  $\exists x \psi(x, x_1, \dots, x_n)$ . Per ipotesi allora

$$\exists x \in \mathbf{V} \|\psi(\hat{x}, \hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n)\|^2 = 1$$

Ma, poiché  $\hat{x} \in \mathbf{V}^2$ , si ha certamente

$$1 = \bigvee_{u \in \mathbf{V}^2} \|\psi(u, \hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n)\|^2 = \|\exists u \psi(u, \hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n)\|^2 = \|\phi(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n)\|^2$$

( $\Leftarrow$ ) Se  $1 = \|\phi(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n)\|^2 = \|\exists u \psi(u, \hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n)\|^2 = \bigvee_{u \in \mathbf{V}^2} \|\psi(u, \hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n)\|^2$

allora  $\exists u \in \mathbf{V}^2 \|\psi(u, \hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n)\|^2 = 1$ . Ma da *iv.* abbiamo che  $\exists x \in \mathbf{V} \|u = \hat{x}\|^2 = 1$ , pertanto  $\exists x \in \mathbf{V} 1 = \|\psi(u, \hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n)\|^2 \wedge \|u = \hat{x}\|^2 \leq \|\psi(\hat{x}, \hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n)\|^2$  cioè  $\exists x \|\psi(\hat{x}, \hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n)\|^2 = 1$  da cui, per ipotesi induttiva, segue  $\exists x \psi(x, x_1, \dots, x_n)$  che è esattamente  $\phi(x_1, \dots, x_n)$ .

Gli altri si ottengono per mezzo delle leggi di De Morgan.

La seconda affermazione segue dalla prima e dal Teorema 2.6.

Mostriamo l'ultima affermazione. Dalla prima segue che  $\|\phi(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n)\|^2 = 1$  ovvero

$$\bigvee_{u \in \mathbf{V}^2} \|\psi(u, \hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n)\|^2 = 1$$

Essendo valutazioni bivalenti, deve esistere  $\bar{u} \in \mathbf{V}^2$  tale che  $\|\psi(\bar{u}, \hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n)\|^2 = 1$ . Per *iv.* esiste un unico  $x \in \mathbf{V}$  tale che  $\|\bar{u} = \hat{x}\| = 1$ . Essendo inoltre  $\psi$  ristretta, per il Teorema 2.6 si ha

$$\begin{aligned} \|\psi(\hat{x}, \hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n)\| &\geq \|\bar{u} = \hat{x}\| \wedge \|\psi(\bar{u}, \hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n)\| \\ &= 1 \wedge \|\psi(\bar{u}, \hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n)\| \\ &= \|\psi(\bar{u}, \hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n)\|^2 = 1 \end{aligned}$$

Poiché  $\hat{x} \in \mathbf{V}^B$ , si ottiene quanto si voleva:

$$\|\phi(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n)\| = \bigvee_{u \in \mathbf{V}^B} \|\psi(u, \hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n)\| \geq \|\psi(\hat{x}, \hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n)\| = 1$$

□

### 2.3 $\mathbf{V}^B$ è modello di ZFC

Vogliamo ora giustificare l'espressione "modello a valori booleani", cioè vogliamo mostrare che  $\mathbf{V}^B$  è un modello per **ZFC**. Bisognerà verificare che per ogni assioma  $\sigma$  di **ZFC**, si ha  $\|\sigma\| = 1$ ; prima, però, è necessario dare qualche definizione e qualche risultato preliminare.

Dati sottoinsiemi  $\{a_i \mid i \in I\} \subseteq B$  e  $\{u_i \mid i \in I\} \subseteq \mathbf{V}^B$ , indichiamo con la *combinazione*  $\sum_{i \in I} a_i u_i$  l'elemento  $u \in \mathbf{V}^B$  tale che

$$\text{dom}(u) = \bigcup_{i \in I} \text{dom}(u_i)$$

definito,  $\forall z \in \text{dom}(u)$ , da

$$u(z) = \bigvee_{i \in I} (a_i \wedge \|z \in u_i\|)$$

**Lemma 2.8.** *Siano  $\{a_i \mid i \in I\} \subseteq B$  e  $\{u_i \mid i \in I\} \subseteq \mathbf{V}^B$  e sia  $u = \sum_{i \in I} a_i u_i$ . Se per ogni  $i, j \in I$  vale*

$$a_i \wedge a_j \leq \|u_i = u_j\|$$

*allora, per ogni  $i \in I$ ,*

$$a_i \leq \|u = u_i\|$$

*In particolare, il risultato vale se  $\{a_i \mid i \in I\}$  è un'anticatena.*

*Dimostrazione.* Scriviamo  $\|u = u_i\| = a \wedge b$ , con

$$a = \bigwedge_{z \in \text{dom}(u)} (u(z) \rightarrow \|z \in u_i\|)$$

$$b = \bigwedge_{z \in \text{dom}(u_i)} (u_i(z) \rightarrow \|z \in u\|)$$

Se  $z \in \text{dom}(u)$ , allora

$$\begin{aligned} a_i \wedge u(z) &= a_i \wedge \bigvee_{j \in I} (a_j \wedge \|z \in u_j\|) \\ &= \bigvee_{j \in I} (a_i \wedge a_j \wedge \|z \in u_j\|) \\ &\leq \bigvee_{j \in I} (\|u_i = u_j\| \wedge \|z \in u_j\|) \text{ per ipotesi} \\ &\leq \bigvee_{j \in I} \|z \in u_i\| = \|z \in u_i\| \end{aligned}$$

Pertanto  $a_i \leq u(z) \rightarrow \|z \in u_i\|$ , da cui  $a_i \leq a$ . Inoltre, se  $z \in \text{dom}(u_i)$ :

$$a_i \wedge u_i(z) \leq a_i \wedge \|z \in u_i\| \leq u(z) \leq \|z \in u\|$$

da cui  $a_i \leq u_i(z) \rightarrow \|z \in u\|$  e quindi  $a_i \leq b$ . Dunque  $a_i \leq a \wedge b$ .  $\square$

Tale lemma è utile per dimostrare il seguente risultato, che è di fatto un'*existence property* per  $\mathbf{V}^B$ .

**Teorema 2.9** (Principio del massimo). *Data una formula  $\phi$ , esiste  $u \in \mathbf{V}^B$  tale che*

$$\|\exists x \phi(x)\| = \|\phi(u)\|$$

*In particolare, se  $\|\exists x \phi(x)\| = 1$ , allora esiste  $u \in \mathbf{V}^B$  tale che  $\|\phi(u)\| = 1$ .*

*Dimostrazione.* Per definizione si ha

$$\|\exists x\phi(x)\| = \bigvee_{u \in \mathbf{V}^B} \|\phi(u)\|$$

Poiché  $B$  è un insieme, lo è anche  $A = \{\|\phi(u)\| : u \in \mathbf{V}^B\} \subseteq B$ . Per ogni  $b \in A$ ,  $\{\text{rk}_B(u) : \|\phi(u)\| = b\}$  è classe di ordinali, quindi ammette minimo: sia

$$\alpha_b = \min\{\text{rk}_B(u) : \|\phi(u)\| = b\}$$

Inoltre, per ogni  $b \in A$  consideriamo

$$W_b = \{u \in \mathbf{V}^B : \|\phi(u)\| = b \wedge \text{rk}_B(u) = \alpha_b\}$$

Esso è insieme in quanto sottoinsieme di  $V_{\alpha_b+1}^B$ . Allora per **Scelta** da ciascun  $W_b$  possiamo scegliere un elemento  $u_b$  e per **Rimpiazzamento** è insieme  $\{u_b : b \in A\}$ . Esso può essere ben ordinato per **Scelta** come  $\{u_\xi : \xi < \alpha\}$ .

Riassumendo, esistono un ordinale  $\alpha$  e un insieme  $\{u_\xi : \xi < \alpha\} \subseteq \mathbf{V}^B$  tali che  $\{\|\phi(u)\| : u \in \mathbf{V}^B\} = \{\|\phi(u_\xi)\| : \xi < \alpha\}$ . Quindi

$$\|\exists x\phi(x)\| = \bigvee_{\xi < \alpha} \|\phi(u_\xi)\|$$

Siano ora, per  $\xi < \alpha$ ,

$$a_\xi = \|\phi(u_\xi)\| \wedge \neg \bigvee_{\gamma < \xi} \|\phi(u_\gamma)\|$$

Mostriamo che  $\{a_\xi : \xi < \alpha\}$  è un'anticatena. Siano  $\xi < \zeta < \alpha$ . Allora

$$\begin{aligned} a_\xi \wedge a_\zeta &= \|\phi(u_\xi)\| \wedge \neg \bigvee_{\gamma < \xi} \|\phi(u_\gamma)\| \wedge \|\phi(u_\zeta)\| \wedge \neg \bigvee_{\lambda < \zeta} \|\phi(u_\lambda)\| \\ &= \|\phi(u_\xi)\| \wedge \|\phi(u_\zeta)\| \wedge \bigwedge_{\gamma < \xi} \|\neg\phi(u_\gamma)\| \wedge \bigwedge_{\lambda < \zeta} \|\neg\phi(u_\lambda)\| = 0 \end{aligned}$$

in quanto  $\exists \lambda < \zeta$  tale che  $\lambda = \xi$ . Quindi  $\{a_\xi : \xi < \alpha\}$  è anticatena.

Mostriamo che l'elemento cercato è

$$u = \sum_{\xi < \alpha} a_\xi u_\xi$$

Infatti, per il Lemma 2.8 vale  $a_\xi \leq \|u = u_\xi\|$  per ogni  $\xi < \alpha$ . Inoltre, per definizione  $a_\xi \leq \|\phi(u_\xi)\|$  per ogni  $\xi < \alpha$ . Da queste insieme segue:

$$\|\phi(u)\| \geq \|u = u_\xi\| \wedge \|\phi(u_\xi)\| \geq a_\xi$$

Quindi:

$$\|\phi(u)\| \geq \bigvee_{\xi < \alpha} a_\xi = \bigvee_{\xi < \alpha} \|\phi(u_\xi)\| = \|\exists x\phi(x)\|$$

dove la penultima uguaglianza vale in quanto per definizione si ha

$$\bigvee_{\xi < \alpha} a_\xi = \bigvee_{\xi < \alpha} (\|\phi(u_\xi)\| \wedge \bigwedge_{\gamma < \xi} \|\neg\phi(u_\gamma)\|)$$

e chiaramente

$$\bigvee_{\xi < \alpha} (\|\phi(u_\xi)\| \wedge \bigwedge_{\gamma < \xi} \|\neg\phi(u_\gamma)\|) = \bigvee_{\xi < \alpha} \|\phi(u_\xi)\|$$

Ciò mostra  $\|\phi(u)\| \geq \|\exists x\phi(x)\|$ . L'altra disuguaglianza  $\|\exists x\phi(x)\| \geq \|\phi(u)\|$  vale banalmente in quanto  $u \in \mathbf{V}^B$ .  $\square$

Dal Principio del massimo si ottiene il seguente

**Corollario 2.10.** *Sia  $\phi$  una formula tale che  $\|\exists x\phi(x)\| = 1$ . Allora:*

- i. Per ogni  $v \in \mathbf{V}^B$  esiste  $u \in \mathbf{V}^B$  tale che  $\|\phi(u)\| = 1$  e  $\|\phi(v)\| = \|u = v\|$ .*
- ii. Se  $\psi$  è una formula per cui per ogni  $u \in \mathbf{V}^B$   $\|\phi(u)\| = 1$  implica  $\|\psi(u)\| = 1$ , allora  $\|\forall x[\phi(x) \rightarrow \psi(x)]\| = 1$ .*

*Dimostrazione.*

- i.* Sia  $v \in \mathbf{V}^B$  e sia  $w \in \mathbf{V}^B$  ottenuto dal Principio del massimo, cioè tale che  $\|\phi(w)\| = 1$ . Sia  $b = \|\phi(v)\|$  e poniamo  $u = bv + \neg bw$ . Allora, poiché chiaramente  $\{b, \neg b\}$  è un'anticatena, grazie al Lemma 2.8:

$$\|\phi(u)\| \geq \|u = v \wedge \phi(v)\| \vee \|u = w \wedge \phi(w)\| \geq (b \wedge b) \vee (\neg b \wedge 1) = b \vee \neg b = 1$$

Da questo segue anche che  $\|u = v\| = \|u = v\| \wedge \|\phi(u)\| \leq \|\phi(v)\|$ . Inoltre, come già utilizzato, vale anche  $\|u = v\| \geq b = \|\phi(v)\|$ .

- ii.* Sia  $v \in \mathbf{V}^B$ . Per *i.* esiste  $u \in \mathbf{V}^B$  tale che  $\|\phi(u)\| = 1$  e  $\|\phi(v)\| = \|u = v\|$ . Allora per ipotesi si ha  $\|\psi(u)\| = 1$  e quindi

$$\|\phi(v)\| = \|u = v\| = \|u = v\| \wedge \|\psi(u)\| \leq \|\psi(v)\|$$

Pertanto  $\|\phi(v) \rightarrow \psi(v)\| = 1$  per ogni  $v \in \mathbf{V}^B$ , da cui

$$\|\forall x[\phi(x) \rightarrow \psi(x)]\| = \bigwedge_{v \in \mathbf{V}^B} \|\phi(v) \rightarrow \psi(v)\| = 1 \quad \square$$

È inoltre utile dare la seguente definizione. Un insieme  $v \subseteq \mathbf{V}^B$  è detto *ritratto* di  $u \in \mathbf{V}^B$  se:

- per ogni  $x \in v$ ,  $\|x \in u\| = 1$
- per ogni  $y \in \mathbf{V}^B$  tale che  $\|y \in u\| = 1$  esiste un'unico  $x \in v$  per cui  $\|x = y\| = 1$

ossia  $v$  contiene tutti gli insiemi booleani che “appartengono secondo il modello” (cioè con “probabilità” 1) a  $u$ . È vero che

**Teorema 2.11.** *Ogni  $u \in \mathbf{V}^B$  ha un ritratto.*

*Dimostrazione.* Sia  $u \in \mathbf{V}^B$ . Per ogni  $x \in \mathbf{V}^B$  sia  $f_x \in \mathbf{V}^B$  con  $\text{dom}(f_x) = \text{dom}(u)$  e, per ogni  $z \in \text{dom}(f_x)$ ,

$$f_x(z) = u(z) \wedge \|z = x\|$$

Sia ora  $F = \{f_x \mid x \in \mathbf{V}^B\}$ . Si ha  $F \subseteq B^{\text{dom}(u)} \in \mathbf{V}$ , pertanto  $F$  è insieme. Inoltre, chiaramente,  $\forall f \in F \exists x (f = f_x)$ . Applichiamo allora la seguente istanza di Rimpiazzamento:

$$\forall f \in F \exists x (f = f_x) \rightarrow \exists w \forall f \in F \exists x \in w (f = f_x)$$

Per costruzione, quindi, per tale  $w$  si ha che, per ogni  $y \in \mathbf{V}^B$ , esiste  $x \in w$  tale che  $f_x = f_y$ . Per Scelta e Rimpiazzamento, sia  $v$  l'insieme ottenuto scegliendo un rappresentante per ogni classe di equivalenza di  $\sim$  sull'insieme  $a = \{x \in w : \|x \in u\| = 1\}$ , dove  $x \sim y$  se e solo se  $\|x = y\| = 1$ . Allora  $v$  è un ritratto di  $u$ :

- Poiché  $\sim$  è definita su  $a = \{x \in w : \|x \in u\| = 1\}$ , se  $x \in v$  si ha banalmente  $\|x \in u\| = 1$ .
- Sia  $y \in \mathbf{V}^B$  con  $\|y \in u\| = 1$ . Allora come detto esiste  $\tilde{x} \in w$  tale che  $f_{\tilde{x}} = f_y$ . Vediamo che, per ogni  $z \in \text{dom}(u)$ :

$$\begin{aligned} \|\tilde{x} = y\| &\geq \|\tilde{x} = z\| \wedge \|z = y\| \geq u(z) \wedge \|\tilde{x} = z\| \wedge \|z = y\| \wedge u(z) = \\ &= f_{\tilde{x}}(z) \wedge f_y(z) = f_y(z) \end{aligned}$$

pertanto

$$\|\tilde{x} = y\| \geq \bigvee_{z \in \text{dom}(u)} f_y(z) = \bigvee_{z \in \text{dom}(u)} (u(z) \wedge \|z = y\|) = \|y \in u\| = 1$$

Ora,

$$\|\tilde{x} \in u\| \geq \|y \in u\| \wedge \|\tilde{x} = y\| = 1$$

cioè  $\tilde{x} \in a$ . Ma allora per costruzione esiste un unico  $x \in v$  tale che  $\|x = \tilde{x}\| = 1$  e quindi  $\|x = y\| \geq \|x = \tilde{x}\| \wedge \|\tilde{x} = y\| = 1$ , come si voleva. □

Osserviamo che, dati  $v_1, v_2$  ritratti di  $u$ , per ogni  $x_1 \in v_1$  si ha  $\|x_1 \in u\| = 1$  e pertanto esiste un unico  $x_2 \in v_2$  tale che  $\|x_1 = x_2\| = 1$ . Ovviamente vale anche che per ogni  $x_2 \in v_2$  esiste un unico  $x_1 \in v_1$  tale che  $\|x_2 = x_1\| = 1$ , cioè la funzione  $x_1 \mapsto x_2$  è invertibile: il ritratto di un insieme booleano è quindi unico a meno di biiezioni date dall'“uguaglianza nel modello”.

Inoltre, se  $1 = \|u \neq \emptyset\| = \|\exists x (x \in u)\|$ , per il Principio del massimo anche ogni ritratto di  $u$  è non vuoto.

**Lemma 2.12.** *Sia  $u \in \mathbf{V}^B$  tale che  $\|u \neq \emptyset\| = 1$  e sia  $v$  un ritratto di  $u$ . Allora per ogni  $x \in \mathbf{V}^B$  esiste  $y \in v$  tale che  $\|x = y\| = \|x \in u\|$ .*



*Dimostrazione.* Sia  $x \in \mathbf{V}^B$ . Per ipotesi  $1 = \|u \neq \emptyset\| = \|\exists z \phi(z)\|$  con  $\phi(z): z \in u$ . Allora per il Corollario 2.10 *i.* esiste  $w \in \mathbf{V}^B$  tale che  $\|w \in u\| = 1$  e  $\|x \in u\| = \|x = w\|$ . Poiché  $\|w \in u\| = 1$ , essendo  $v$  ritratto esiste un unico  $y \in v$  tale che  $\|y = w\| = 1$ . Mostriamo che è l'elemento cercato, ovvero che  $\|x = y\| = \|x \in u\|$ . Vale innanzitutto

$$\|x = y\| \geq \|x = w\| \wedge \|w = y\| = \|x = w\| = \|x \in u\|$$

Inoltre, poiché da  $y \in v$  segue  $\|y \in u\| = 1$ :

$$\|x \in u\| \geq \|x = y\| \wedge \|y \in u\| = \|x = y\|$$

da cui la tesi. □

Finalmente possiamo mostrare che

**Teorema 2.13.** *Tutti gli assiomi, e quindi tutti i teoremi, di ZFC sono veri in  $\mathbf{V}^B$ .*

tramite una serie di lemmi.

**Lemma 2.14.** *Estensionalità è vero in  $\mathbf{V}^B$ .*

*Dimostrazione.* L'assioma si può scrivere come

$$\forall x \forall y [\forall z (z \in x \rightarrow z \in y) \wedge \forall z (z \in y \rightarrow z \in x) \rightarrow x = y]$$

Ma, dati  $x, y \in \mathbf{V}^B$ , la valutazione dell'antecedente per il Corollario 2.4 è

$$\bigwedge_{z \in \text{dom}(x)} (x(z) \rightarrow \|z \in y\|) \wedge \bigwedge_{z \in \text{dom}(y)} (y(z) \rightarrow \|z \in x\|)$$

che è precisamente la definizione di  $\|x = y\|$ . □

**Lemma 2.15.** *Separazione è vero in  $\mathbf{V}^B$ .*

*Dimostrazione.* Ricordando che Separazione è

$$\forall u \exists v \forall x [x \in v \leftrightarrow x \in u \wedge \phi(x)]$$

prendiamo  $u \in \mathbf{V}^B$  e definiamo  $v \in \mathbf{V}^B$  tale che  $\text{dom}(v) = \text{dom}(u)$  definito, se  $x \in \text{dom}(v)$ , da  $v(x) = u(x) \wedge \|\phi(x)\|$ . Vale

$$\|\forall x [x \in v \leftrightarrow x \in u \wedge \phi(x)]\| = \|\forall x \in v [x \in u \wedge \phi(x)]\| \wedge \|\forall x \in u [\phi(x) \rightarrow x \in v]\|$$

ma

$$\begin{aligned} \|\forall x \in v [x \in u \wedge \phi(x)]\| &= \bigwedge_{x \in \text{dom}(v)} [v(x) \rightarrow (\|x \in u\| \wedge \|\phi(x)\|)] \\ &= \bigwedge_{x \in \text{dom}(v)} [(u(x) \wedge \|\phi(x)\|) \rightarrow (\|x \in u\| \wedge \|\phi(x)\|)] = 1 \end{aligned}$$

in quanto  $u(x) \leq \|x \in u\|$ . Similmente

$$\|\forall x \in u [\phi(x) \rightarrow x \in v]\| = \bigwedge_{x \in \text{dom}(u)} [u(x) \rightarrow (\|\phi(x)\| \rightarrow \|x \in v\|)] = 1$$

in quanto, per  $x \in \text{dom}(u) = \text{dom}(v)$ , si ha  $u(x) \wedge \|\phi(x)\| = v(x) \leq \|x \in v\|$  che è equivalente a  $u(x) \leq \|\phi(x)\| \rightarrow \|x \in v\|$  ovvero  $u(x) \rightarrow (\|\phi(x)\| \rightarrow \|x \in v\|) = 1$ . □

**Lemma 2.16.** Rimpiazzamento è vero in  $\mathbf{V}^B$ .

*Dimostrazione.* Ricordando che Rimpiazzamento è

$$\forall u[\forall x \in u \exists y \phi(x, y) \rightarrow \exists v \forall x \in u \exists y \in v \phi(x, y)]$$

vogliamo mostrare che, fissato  $u \in \mathbf{V}^B$ , vale

$$\|\forall x \in u \exists y \phi(x, y)\| \leq \|\exists v \forall x \in u \exists y \in v \phi(x, y)\|$$

Il primo membro è

$$\begin{aligned} \|\forall x \in u \exists y \phi(x, y)\| &= \bigwedge_{x \in \text{dom}(u)} (u(x) \rightarrow \|\exists y \phi(x, y)\|) \\ &= \bigwedge_{x \in \text{dom}(u)} (u(x) \rightarrow \bigvee_{y \in \mathbf{V}^B} \|\phi(x, y)\|) \end{aligned} \tag{1}$$

Vogliamo scrivere tale sup come su un insieme piuttosto che su una classe. A tal proposito notiamo che, poiché  $B$  è un insieme, per ogni  $x \in \text{dom}(u)$  lo è anche

$$A_x = \{\|\phi(x, y)\| : y \in \mathbf{V}^B\} \subseteq B$$

Per ogni  $b \in A_x$ ,  $\{\text{rk}_B(y) : \|\phi(x, y)\| = b\}$  è classe di ordinali, quindi ammette minimo: sia

$$\alpha_{x,b} = \min\{\text{rk}_B(y) : \|\phi(x, y)\| = b\}$$

Inoltre, per ogni  $b \in A_x$  consideriamo

$$W_{x,b} = \{y \in \mathbf{V}^B : \|\phi(x, y)\| = b \wedge \text{rk}_B(y) = \alpha_{x,b}\}$$

Esso è insieme in quanto sottoinsieme di  $V_{\alpha_{x,b}+1}^B$ . Allora per Scelta da ciascun  $W_{x,b}$  possiamo scegliere un elemento  $y_{x,b}$  e per Rimpiazzamento è insieme  $W_x = \{y_{x,b} : b \in A_x\}$ . Sia  $\alpha_x$  il minimo ordinale per cui  $W_x \subseteq V_{\alpha_x}^B$ . Allora per costruzione, per ogni  $x \in \text{dom}(u)$ :

$$\bigvee_{y \in W_x} \|\phi(x, y)\| \leq \bigvee_{y \in V_{\alpha_x}^B} \|\phi(x, y)\| \leq \bigvee_{y \in \mathbf{V}^B} \|\phi(x, y)\| = \bigvee_{y \in W_x} \|\phi(x, y)\|$$

cioè in particolare, per ogni  $x \in \text{dom}(u)$ :

$$\bigvee_{y \in V_{\alpha_x}^B} \|\phi(x, y)\| = \bigvee_{y \in \mathbf{V}^B} \|\phi(x, y)\|$$

Inoltre è funzione  $x \mapsto \alpha_x$ . Essa ha dominio  $\text{dom}(u)$  e immagine  $\alpha = \sup\{\alpha_x \mid x \in \text{dom}(u)\}$ . Chiaramente, per ogni  $x \in \text{dom}(u)$ :

$$\bigvee_{y \in V_{\alpha_x}^B} \|\phi(x, y)\| \leq \bigvee_{y \in V_{\alpha}^B} \|\phi(x, y)\|$$

Dunque, mettendo tutto insieme e proseguendo da (1):

$$\begin{aligned}
\|\forall x \in u \exists y \phi(x, y)\| &= \bigwedge_{x \in \text{dom}(u)} (u(x) \rightarrow \bigvee_{y \in \mathbf{V}^B} \|\phi(x, y)\|) \\
&= \bigwedge_{x \in \text{dom}(u)} (u(x) \rightarrow \bigvee_{y \in V_{\alpha_x}^B} \|\phi(x, y)\|) \\
&\leq \bigwedge_{x \in \text{dom}(u)} (u(x) \rightarrow \bigvee_{y \in V_{\alpha}^B} \|\phi(x, y)\|)
\end{aligned} \tag{2}$$

Sia ora  $v = V_{\alpha}^B \times \{1\} \in \mathbf{V}^B$ . Allora

$$\bigvee_{y \in V_{\alpha}^B} \|\phi(x, y)\| = \|\exists y \in v \phi(x, y)\|$$

e vediamo che (2) è proprio ciò che si voleva dimostrare.  $\square$

**Lemma 2.17.** *Unione è vero in  $\mathbf{V}^B$ .*

*Dimostrazione.* Dobbiamo provare

$$\forall u \exists v \forall x [x \in v \leftrightarrow \exists y \in u (x \in y)]$$

Sia quindi  $u \in \mathbf{V}^B$  e definiamo  $v \in \mathbf{V}^B$  con dominio  $\text{dom}(v) = \bigcup \{\text{dom}(y) \mid y \in \text{dom}(u)\}$  tale che, per ogni  $x \in \text{dom}(v)$ :

$$v(x) = \|\exists y \in u (x \in y)\|$$

Allora

$$\begin{aligned}
\|\forall x \in v \exists y \in u (x \in y)\| &= \bigwedge_{x \in \text{dom}(v)} (v(x) \rightarrow \|\exists y \in u (x \in y)\|) \\
&= \bigwedge_{x \in \text{dom}(v)} (\|\exists y \in u (x \in y)\| \rightarrow \|\exists y \in u (x \in y)\|) = 1
\end{aligned}$$

Rimane da mostrare che  $\forall x [\exists y \in u (x \in y) \rightarrow x \in v]$  è vera. Mostriamo però che è vera l'equivalente  $\forall y \in u \forall x \in y (x \in v)$ . Sia

$$\begin{aligned}
a &= \|\forall y \in u \forall x \in y (x \in v)\| \\
&= \bigwedge_{y \in \text{dom}(u)} (u(y) \rightarrow \bigwedge_{x \in \text{dom}(y)} (y(x) \rightarrow \|x \in v\|)) \\
&= \bigwedge_{y \in \text{dom}(u)} (\neg u(y) \vee \bigwedge_{x \in \text{dom}(y)} (\neg y(x) \vee \|x \in v\|)) \\
&= \bigwedge_{y \in \text{dom}(u)} \bigwedge_{x \in \text{dom}(y)} (\neg u(y) \vee \neg y(x) \vee \|x \in v\|)
\end{aligned}$$

Se  $x \in \text{dom}(y)$  e  $y \in \text{dom}(u)$ , per costruzione si ha  $x \in \text{dom}(v)$  e quindi per ogni  $x \in \text{dom}(y)$  vale  $\|x \in v\| \geq v(x)$ . Inoltre, supponendo ancora  $x \in \text{dom}(y)$  e  $y \in \text{dom}(u)$ :

$$\begin{aligned} u(y) \wedge y(x) &\leq u(y) \wedge \|x \in y\| \\ &\leq \bigvee_{y \in \text{dom}(u)} (u(y) \wedge \|x \in y\|) \\ &= \|\exists y \in u(x \in y)\| = v(x) \end{aligned}$$

Da cui  $\neg u(y) \vee \neg y(x) \geq \neg v(x)$ . Quindi, tutto ciò considerato:

$$a \geq \bigwedge_{y \in \text{dom}(u)} \bigwedge_{x \in \text{dom}(y)} (\neg v(x) \vee v(x)) = 1$$

come si voleva. □

**Lemma 2.18.** Potenza è vero in  $\mathbf{V}^B$ .

*Dimostrazione.* Bisogna mostrare la verità di

$$\forall u \exists v \forall x [x \in v \leftrightarrow x \subseteq u]$$

dove  $x \subseteq u$  abbrevia  $\forall y \in x (y \in u)$ . Sia quindi  $u \in \mathbf{V}^B$  e definiamo  $v \in \mathbf{V}^B$  con  $\text{dom}(v) = B^{\text{dom}(u)} = \{x : \text{dom}(u) \rightarrow B\}$  tale che, per ogni  $x \in \text{dom}(v)$ :

$$v(x) = \|x \subseteq u\| = \|\forall y \in x (y \in u)\|$$

Si ottiene facilmente

$$\begin{aligned} \|\forall x \in v (x \subseteq u)\| &= \bigwedge_{x \in \text{dom}(v)} (v(x) \rightarrow \|x \subseteq u\|) \\ &= \bigwedge_{x \in \text{dom}(v)} (\|x \subseteq u\| \rightarrow \|x \subseteq u\|) = 1 \end{aligned}$$

Rimane quindi da mostrare  $\|\forall x (x \subseteq u \rightarrow x \in v)\| = 1$ . Sia quindi  $x \in \mathbf{V}^B$  e definiamo  $\tilde{x} \in \mathbf{V}^B$  con  $\text{dom}(\tilde{x}) = \text{dom}(u)$  e, per ogni  $y \in \text{dom}(\tilde{x})$ ,  $\tilde{x}(y) = \|y \in x\|$ . Se mostriamo che valgono

$$\|x \subseteq u\| \leq \|x = \tilde{x}\| \tag{1}$$

$$\|x \subseteq u\| \leq \|\tilde{x} \in v\| \tag{2}$$

Allora si ha  $\|x \subseteq u\| \leq \|x = \tilde{x}\| \wedge \|\tilde{x} \in v\| \leq \|x \in v\|$  e dunque la tesi. Cominciamo da (1), osservando che, per ogni  $y \in \mathbf{V}^B$

$$\begin{aligned} \|y \in \tilde{x}\| &= \bigvee_{z \in \text{dom}(\tilde{x})} (\tilde{x}(z) \wedge \|z = y\|) \\ &= \bigvee_{z \in \text{dom}(\tilde{x})} (\|z \in x\| \wedge \|z = y\|) \leq \|y \in x\| \end{aligned}$$

Quindi  $\|\tilde{x} \subseteq x\| = \|\forall y(y \in \tilde{x} \rightarrow y \in x)\| = 1$ . Inoltre, per ogni  $y \in \mathbf{V}^B$  si ha anche

$$\begin{aligned} \|y \in u \wedge y \in x\| &= \bigvee_{z \in \text{dom}(u)} (u(z) \wedge \|y = z\|) \wedge \|y \in x\| \\ &\leq \bigvee_{z \in \text{dom}(u)} (\|y = z\| \wedge \|y \in x\|) \\ &\leq \bigvee_{z \in \text{dom}(u)} (\|y = z\| \wedge \|z \in x\|) \\ &= \bigvee_{z \in \text{dom}(\tilde{x})} (\|y = z\| \wedge \tilde{x}(z)) \\ &= \|y \in \tilde{x}\| \end{aligned}$$

cioè  $\|\forall y(y \in u \wedge y \in x \rightarrow y \in \tilde{x})\| = 1$ , che possiamo abbreviare come  $\|u \cap x \subseteq \tilde{x}\| = 1$ . Poiché è verità logica che

$$\forall y(y \in x \rightarrow y \in u) \rightarrow \forall y(y \in u \wedge y \in x \leftrightarrow y \in x)$$

cioè  $x \subseteq u \rightarrow u \cap x = x$ , vale  $\|x \subseteq u\| \leq \|u \cap x = x\|$ , quindi

$$\|x \subseteq u\| \leq \|u \cap x = x\| \wedge 1 = \|u \cap x = x\| \wedge \|u \cap x \subseteq \tilde{x}\| \leq \|x \subseteq \tilde{x}\|$$

da cui, usando quanto mostrato precedentemente,

$$\|x \subseteq u\| \leq \|x \subseteq \tilde{x}\| \wedge 1 \leq \|x \subseteq \tilde{x}\| \wedge \|\tilde{x} \subseteq x\| = \|x = \tilde{x}\|$$

ovvero (1). Procediamo con (2), che si ottiene in modo più diretto:

$$\begin{aligned} \|x \subseteq u\| &= \|\forall y(y \in x \rightarrow y \in u)\| \\ &= \bigwedge_{y \in \mathbf{V}^B} (\|y \in x\| \rightarrow \|y \in u\|) \\ &\leq \bigwedge_{y \in \text{dom}(\tilde{x})} (\tilde{x}(y) \rightarrow \|y \in u\|) \\ &= \|\forall y \in \tilde{x}(y \in u)\| \\ &= \|\tilde{x} \subseteq u\| = v(\tilde{x}) \leq \|\tilde{x} \in v\| \end{aligned}$$

□

Ciò considerato, è utile dare la seguente definizione. Dato  $u \in \mathbf{V}^B$ , le *parti booleane*  $\mathcal{P}^B(u)$  di  $u$  sono l'elemento  $v \in \mathbf{V}^B$  tale che  $\text{dom}(v) = B^{\text{dom}(u)}$  e, per  $x \in \text{dom}(v)$ ,  $v(x) = \|x \subseteq u\|$ . La dimostrazione appena data evidenzia come  $\mathbf{V}^B \models \mathcal{P}^B(u) = \mathcal{P}(u)$ .

**Lemma 2.19.** *Infinito è vero in  $\mathbf{V}^B$ .*

*Dimostrazione.* Tale assioma è  $\exists u \phi(u)$  dove  $\phi(u)$  è

$$\emptyset \in u \wedge \forall x \in u \exists y \in u (x \in y)$$

Essa è chiaramente una formula ristretta; inoltre sicuramente vale  $\phi(\omega)$ . Dunque, per il Teorema 2.7, si ha  $\|\phi(\hat{\omega})\| = 1$  e di conseguenza  $\|\exists u \phi(u)\| = 1$ . □

**Lemma 2.20.** *Fondazione è vero in  $\mathbf{V}^B$ .*

*Dimostrazione.* Tale assioma è  $\forall x[\forall y \in x\phi(y) \rightarrow \phi(x)] \rightarrow \forall x\phi(x)$ . Poniamo

$$b = \|\forall x[\forall y \in x\phi(y) \rightarrow \phi(x)]\|$$

Allora vogliamo mostrare che, per ogni  $x \in \mathbf{V}^B$ ,  $b \leq \|\phi(x)\|$ . Ragioniamo per induzione su  $\mathbf{V}^B$ , cioè, fissato  $x \in \mathbf{V}^B$ , supponiamo la tesi valga per ogni  $y \in \text{dom}(x)$ . Allora

$$b \leq \bigwedge_{y \in \text{dom}(x)} \|\phi(y)\| \leq \bigwedge_{y \in \text{dom}(x)} (x(y) \rightarrow \|\phi(y)\|) = \|\forall y \in x\phi(y)\|$$

Ma per definizione di  $b$  si ha

$$b = \bigwedge_{z \in \mathbf{V}^B} \|\forall y \in z\phi(y) \rightarrow \phi(z)\| \leq \|\forall y \in x\phi(y) \rightarrow \phi(x)\|$$

Pertanto

$$b \leq \|\forall y \in x\phi(y)\| \wedge \|\forall y \in x\phi(y) \rightarrow \phi(x)\| \leq \|\phi(x)\|$$

come si voleva. □

**Lemma 2.21.** *Scelta è vero in  $\mathbf{V}^B$ .*

*Dimostrazione.* Mostriamo la validità del Lemma di Zorn, da cui segue la validità di *Scelta*. Per il Corollario 2.10 *ii.* è sufficiente mostrare che, per ogni  $X, \leq_X \in \mathbf{V}^B$ , se

$$\mathbf{V}^B \models (X, \leq_X) \text{ è un insieme parzialmente ordinato induttivo non vuoto}$$

allora

$$\mathbf{V}^B \models (X, \leq_X) \text{ ha un elemento massimale}$$

Supponiamo quindi valga l'antecedente e sia  $Y$  un ritratto di  $X$ . Definiamo su  $Y$  la relazione  $\leq_Y$  come

$$y \leq_Y y' \iff \|y \leq_X y'\| = 1$$

per ogni  $y, y' \in Y$ . Essa è un ordine parziale largo, infatti:

- vale la proprietà riflessiva: per ipotesi si ha

$$\|\forall y(y \in X \rightarrow y \leq_X y)\| = 1$$

da cui, in particolare, per ogni  $y \in Y$  si ha  $\|y \in X\| \leq \|y \leq_X y\|$ . Ma, essendo  $Y$  ritratto di  $X$ , per ogni  $y \in Y$  vale  $\|y \in X\| = 1$ , da cui  $\|y \leq_X y\| = 1$  cioè  $y \leq_Y y$ .

- vale la proprietà antisimmetrica: siano  $y, y' \in Y$  e supponiamo  $y \leq_Y y'$  e  $y' \leq_Y y$ , ovvero  $\|y \leq_X y'\| = \|y' \leq_X y\| = 1$ . Per ipotesi si ha

$$\|\forall y \forall y' [(y \in X) \wedge (y' \in X) \wedge (y \leq_X y') \wedge (y' \leq_X y) \rightarrow (y = y')]\| = 1$$

da cui  $\|y \in X\| \wedge \|y' \in X\| \wedge \|y \leq_X y'\| \wedge \|y' \leq_X y\| \leq \|y = y'\|$ . Ma, essendo  $Y$  ritratto di  $X$ , vale  $\|y \in X\| = \|y' \in X\| = 1$  e pertanto tutti i termini al primo membro sono uguali a 1. Quindi  $\|y = y'\| = 1$  e per proprietà del ritratto  $y = y'$ .

- vale la proprietà transitiva: siano  $y, y', y'' \in Y$  e supponiamo  $y \leq_Y y'$  e  $y' \leq_Y y''$ , ovvero  $\|y \leq_X y'\| = \|y' \leq_X y''\| = 1$ . Per ipotesi si ha

$$\|\forall y \forall y' \forall y'' [(y \in X) \wedge (y' \in X) \wedge (y'' \in X) \wedge (y \leq_X y') \wedge (y' \leq_X y'') \rightarrow (y \leq_X y'')]\| = 1$$

da cui  $\|y \in X\| \wedge \|y' \in X\| \wedge \|y'' \in X\| \wedge \|y \leq_X y'\| \wedge \|y' \leq_X y''\| \leq \|y \leq_X y''\|$ . Ma, essendo  $Y$  ritratto di  $X$ , vale  $\|y \in X\| = \|y' \in X\| = \|y'' \in X\| = 1$  e pertanto tutti i termini al primo membro sono uguali a 1. Quindi  $\|y \leq_X y''\| = 1$  cioè  $y \leq_Y y''$ .

Vogliamo inoltre mostrare che  $(Y, \leq_Y)$  è induttivo. Sia  $C$  una catena in  $Y$ . Sia  $C' \in \mathbf{V}^B$  con  $\text{dom}(C') = C$  e  $C'(z) = 1$  per ogni  $z \in \text{dom}(C')$ , cioè  $C' = C \times \{1\}$ . Allora  $\mathbf{V}^B \models C'$  è catena in  $X$ . Infatti, si ha  $\mathbf{V}^B \models C' \subseteq X$ , in quanto

$$\|C' \subseteq X\| = \|\forall y \in C'(y \in X)\| = \bigwedge_{y \in \text{dom}(C')} (C'(y) \rightarrow \|y \in X\|) = \bigwedge_{y \in C} \|y \in X\| = 1$$

essendo  $C'(y) = 1$  e  $\|y \in X\| = 1$  per ogni  $y \in C \subseteq Y$  che è ritratto di  $X$ . Inoltre, poiché  $C$  catena di  $Y$ :

$$\begin{aligned} \forall x, y \in C (x \leq_Y y \vee y \leq_Y x) &\Rightarrow \forall x, y \in C (\|x \leq_X y\| = 1 \vee \|y \leq_X x\| = 1) \\ &\Rightarrow \forall x, y \in C (\|x \leq_X y\| \vee \|y \leq_X x\| = 1) \\ &\Rightarrow \forall x, y \in \text{dom}(C') (\|x \leq_X y\| \vee \|y \leq_X x\| = 1) \end{aligned}$$

Ma quindi

$$\begin{aligned} 1 &= \bigwedge_{x \in \text{dom}(C')} \bigwedge_{y \in \text{dom}(C')} (\|x \leq_X y\| \vee \|y \leq_X x\|) \\ &= \bigwedge_{x \in \text{dom}(C')} [C'(x) \rightarrow \bigwedge_{y \in \text{dom}(C')} [C'(y) \rightarrow (\|x \leq_X y\| \vee \|y \leq_X x\|)]] \\ &= \|\forall x, y \in C' (x \leq_X y \vee y \leq_X x)\| \end{aligned}$$

ovvero è vero in  $\mathbf{V}^B$  che  $C'$  è catena in  $X$ . Per ipotesi allora

$$\mathbf{V}^B \models \exists x (x \text{ maggiorante di } C' \text{ in } X)$$

quindi, per il Principio del massimo, esiste  $u \in \mathbf{V}^B$  tale che

$$\mathbf{V}^B \models u \text{ è un maggiorante di } C' \text{ in } X$$

In particolare si ha quindi  $\|u \in X\| = 1$  e, essendo  $Y$  ritratto di  $X$ , esiste (unico)  $w \in Y$  tale che  $\|u = w\| = 1$ . Allora  $w$  è maggiorante di  $C$  in  $Y$ . Infatti, dato  $y \in C$ , vale  $\|y \in C'\| \geq C'(y) = 1$  da cui  $\|y \leq_X w\| \geq \|u = w\| \wedge \|y \leq_X u\| = 1$  che implica per definizione  $y \leq_Y w$ .

Pertanto  $Y$  è induttivo, come si voleva. Per il Lemma di Zorn su  $\mathbf{V}$ , esiste  $c \in Y$  massimale. Essendo  $Y$  ritratto di  $X$ ,  $\|c \in X\| = 1$ . Per concludere, rimane da mostrare che

$$\mathbf{V}^B \models c \text{ è elemento massimale di } X$$

Sia a tal proposito  $x \in \mathbf{V}^B$ . Per il Lemma 2.12, esiste  $y \in Y$  tale che  $\|x \in X\| = \|x = y\|$ . Allora

$$\|c \leq_X x\| \wedge \|x \in X\| = \|c \leq_X x\| \wedge \|x = y\| \leq \|c \leq_X y\| \quad (1)$$

Consideriamo ora la combinazione  $v = ay + \neg ac$ , con  $a = \|c \leq_X y\|$ . Allora  $\|v \in X\| = 1$ , infatti, per il Lemma 2.8, essendo  $\{a, \neg a\}$  anticatena:

$$\begin{aligned} \|v \in X\| &\geq \|v = c\| \wedge \|c \in X\| = \|v = c\| \geq \neg a \\ \|v \in X\| &\geq \|v = y\| \wedge \|y \in X\| = \|v = y\| \geq a \end{aligned}$$

e quindi  $\|v \in X\| \geq a \vee \neg a = 1$ . Da ciò, per definizione di ritratto esiste  $z \in Y$  per cui  $\|v = z\| = 1$ . Inoltre, similmente:

$$\begin{aligned} \|c \leq_X v\| &\geq \|c \leq_X y\| \wedge \|v = y\| \geq a \wedge a = a \\ \|c \leq_X v\| &\geq \|c \leq_X c\| \wedge \|v = c\| \geq 1 \wedge \neg a = \neg a \end{aligned}$$

e quindi  $\|c \leq_X v\| \geq a \vee \neg a = 1$ . Pertanto:

$$\|c \leq_X z\| \geq \|c \leq_X v\| \wedge \|v = z\| = 1$$

da cui per definizione  $c \leq_Y z$ . Quindi, per massimalità di  $c$ , si ottiene  $c = z$ . Ma allora

$$\|c \leq_X y\| = a \leq \|y = v\| = \|y = v\| \wedge \|v = z\| \leq \|y = z\| = \|y = c\|$$

che dà, assieme a (1):

$$\begin{aligned} \|c \leq_X x \wedge x \in X\| &= \|c \leq_X x \wedge x \in X\| \wedge \|x \in X\| \leq \|c \leq_X y\| \wedge \|x \in X\| \\ &\leq \|y = c\| \wedge \|x = y\| \leq \|x = c\| \end{aligned}$$

da cui la tesi  $\mathbf{V}^B \models \forall x \in X (c \leq_X x \rightarrow x = c)$ . □

Ciò conclude la dimostrazione che  $\mathbf{V}^B$  è un modello di **ZFC**.

## 2.4 Ordinali e cardinali in $\mathbf{V}^B$

Vediamo in questa sezione qual è l'interpretazione in  $\mathbf{V}^B$  degli ordinali e dei cardinali. Indichiamo con  $\text{Ord}(x)$  la formula

$$\forall y \in \mathcal{P}(x) (y \neq \emptyset \rightarrow \exists z \in y \forall w \in y (w \neq z \rightarrow z \in w)) \wedge \forall y \in x (y \subseteq x)$$

ovvero “ $x$  è un ordinale”. Tale formula è ristretta, quindi per il Teorema 2.7 *v.* si ha  $\|\text{Ord}(\hat{\alpha})\| = 1$  per ogni  $\alpha$  ordinale. Chiamiamo *ordinali standard* gli elementi di  $\mathbf{V}^B$  del tipo  $\hat{\alpha}$  per  $\alpha$  ordinale. Il seguente teorema, nonostante non venga richiamato in seguito, è di per sé interessante in quanto mostra come gli ordinali non standard non siano poi così lontani dagli ordinali standard.

**Teorema 2.22.** *Per ogni  $u \in \mathbf{V}^B$ ,*

$$\|\text{Ord}(u)\| = \bigvee_{\alpha \in \text{ON}} \|u = \hat{\alpha}\|$$



*Dimostrazione.* Poiché  $\|\text{Ord}(\hat{\alpha})\| = 1$ , si ha  $\|u = \hat{\alpha}\| = \|u = \hat{\alpha}\| \wedge \|\text{Ord}(\hat{\alpha})\| \leq \|\text{Ord}(u)\|$ , da cui

$$\bigvee_{\alpha \in \mathbf{ON}} \|u = \hat{\alpha}\| \leq \|\text{Ord}(u)\|$$

Per mostrare la disuguaglianza inversa, consideriamo per ogni  $x \in \text{dom}(u)$  la classe  $D_x = \{\xi: \|x = \hat{\xi}\| \neq 0\}$  e la funzione (tra classi)

$$\begin{aligned} \Phi_x: D_x &\rightarrow B \\ \xi &\mapsto \|x = \hat{\xi}\| \end{aligned}$$

Essa è iniettiva. Per mostrare ciò, osserviamo che, dati  $\xi \neq \eta \in D_x$ , dal Teorema 2.7 segue  $\|\hat{\xi} = \hat{\eta}\| < 1$ , ma, essendo  $\hat{\xi}, \hat{\eta} \in \mathbf{V}^2$ , per il Teorema 2.5 si deve avere  $\|\hat{\xi} = \hat{\eta}\| = 0$ . Allora se fosse  $\Phi_x(\xi) = \Phi_x(\eta)$ , cioè  $\|x = \hat{\xi}\| = \|x = \hat{\eta}\|$ , seguirebbe  $\|x = \hat{\xi}\| = \|x = \hat{\xi}\| \wedge \|x = \hat{\eta}\| \leq \|\hat{\xi} = \hat{\eta}\| = 0$ , assurdo perché  $\xi \in D_x$ . Pertanto  $\Phi_x$  è iniettiva e quindi invertibile nell'immagine. Essendo però  $\Phi_x(D_x) \subseteq B$  insieme, per **Rimpiazzamento** si ha  $D_x \in \mathbf{V}$ . Quindi è insieme anche

$$D = \bigcup_{x \in \text{dom}(u)} D_x$$

Ora, dato  $\alpha_0$  ordinale, se  $\alpha_0 > \alpha$  per ogni  $\alpha$  ordinale in  $D$ , chiaramente per ogni  $x \in \text{dom}(u)$  si ha  $\alpha_0 > \alpha$  per ogni  $\alpha$  ordinale in  $D_x$ , quindi in particolare per ogni  $x \in \text{dom}(u)$  si ha  $\alpha_0 \notin D_x$  cioè  $\|x = \hat{\alpha}_0\| = 0$ . Pertanto:

$$\|\hat{\alpha}_0 \in u\| = \bigvee_{x \in \text{dom}(u)} (u(x) \wedge \|x = \hat{\alpha}_0\|) = 0$$

Essendo inoltre teorema di **ZFC**  $\text{Ord}(u) \wedge \text{Ord}(v) \rightarrow u \in v \vee u = v \vee v \in u$ , si ottiene

$$\|\text{Ord}(u)\| \leq \|u \in \hat{\alpha}_0\| \vee \|u = \hat{\alpha}_0\| \vee \|\hat{\alpha}_0 \in u\| = \|u \in \hat{\alpha}_0\| \vee \|u = \hat{\alpha}_0\| \quad (1)$$

Essendo  $\alpha_0$  ordinale, chiaramente

$$\|u = \hat{\alpha}_0\| \leq \bigvee_{\alpha \in \mathbf{ON}} \|u = \hat{\alpha}\|$$

Inoltre

$$\|u \in \hat{\alpha}_0\| = \bigvee_{\alpha \in \alpha_0} \|u = \hat{\alpha}\| \leq \bigvee_{\alpha \in \mathbf{ON}} \|u = \hat{\alpha}\|$$

da cui, da (1):

$$\|\text{Ord}(u)\| \leq \|u \in \hat{\alpha}_0\| \vee \|u = \hat{\alpha}_0\| \leq \bigvee_{\alpha \in \mathbf{ON}} \|u = \hat{\alpha}\|$$

□

Passiamo ora ai cardinali. Indichiamo con  $\aleph_{\hat{\alpha}}$  i cardinali “interni” al modello, ovvero, ogniqualvolta scriveremo  $\mathbf{V}^B \models \phi(\aleph_{\hat{\alpha}})$  intenderemo  $\mathbf{V}^B \models \exists x(\phi(x) \wedge R(x, \hat{\alpha}))$ , dove  $R(x, \alpha)$  è la formula che asserisce “ $x = \aleph_{\alpha}$ ” nel linguaggio della teoria degli insiemi. Indichiamo inoltre con  $\text{Card}(x)$  la formula che asserisce “ $x$  è un cardinale”. Ovviamente,  $\mathbf{V}^B \models \text{Card}(\aleph_{\hat{\alpha}})$ .

**Teorema 2.23.**

- i.  $|x| = |y| \Rightarrow \mathbf{V}^B \models |\hat{x}| = |\hat{y}|$
- ii.  $\mathbf{V}^B \models \hat{\aleph}_0 = \aleph_0$
- iii. Per ogni  $\alpha \in \mathbf{ON}$ ,  $\mathbf{V}^B \models \hat{\aleph}_\alpha \leq \aleph_\alpha$

*Dimostrazione.*

- i. Dati  $x, y \in \mathbf{V}$ , la formula  $|x| = |y|$  è

$$\exists f[\forall x_1 \in x \exists! y_1 \in y((x_1, y_1) \in f) \wedge \forall y_1 \in y \exists! x_1 \in x((x_1, y_1) \in f)]$$

Ricordando anche che  $\exists! u \in v \phi(u)$  abbrevia  $\exists u \in v(\phi(u) \wedge \forall u' \in v(\phi(u') \rightarrow u = u'))$ , è chiaro che la formula tra parentesi quadre è ristretta e pertanto la formula  $|x| = |y|$  è  $\Sigma_1$ . Per il Teorema 2.7 *v.* segue quindi la tesi.

- ii. La formula  $x = \aleph_0$  è un'abbreviazione della formula che definisce  $\aleph_0$ , cioè, ad esempio, “ $x$  è il più piccolo ordinale limite”. In simboli:

$$\text{Ord}(x) \wedge x \neq 0 \wedge \forall y \in x(x \neq y \cup \{y\}) \wedge \forall y \in x(y = 0 \vee \exists z \in y(y = z \cup \{z\}))$$

Tale formula è ristretta e pertanto il risultato segue dal Teorema 2.7 *v.*

- iii. Per induzione su  $\alpha$ . Se  $\alpha = 0$ , essendo  $\hat{0} = \hat{\emptyset} = \emptyset = 0$ , la tesi segue da *i.* Supponiamo ora  $\alpha > 0$  e  $\mathbf{V}^B \models \hat{\aleph}_\beta \leq \aleph_\beta$  per ogni  $\beta < \alpha$ . Consideriamo  $\aleph_0 \leq \xi < \aleph_\alpha$ . Allora esiste  $\beta < \alpha$  tale che  $|\xi| = \aleph_\beta$  e quindi per *i.*  $||\hat{\xi}| = |\hat{\aleph}_\beta|| = 1$ . Per ipotesi induttiva segue

$$1 = ||\hat{\xi}| = |\hat{\aleph}_\beta|| \wedge ||\hat{\aleph}_\beta| \leq \aleph_\beta|| \leq ||\hat{\xi}| \leq \aleph_\beta||$$

dove  $||\hat{\aleph}_\beta| \leq \aleph_\beta|| = 1$  in quanto è teorema di **ZFC**

$$\text{Ord}(\xi) \wedge \text{Ord}(\eta) \wedge \xi \leq \aleph_\eta \rightarrow |\xi| \leq \aleph_\eta$$

Essendo che  $\mathbf{V}^B \models \text{Ord}(\hat{\aleph}_\beta)$  e  $\mathbf{V}^B \models \text{Ord}(\hat{\beta})$  perché  $\aleph_\beta, \beta$  ordinali e  $\mathbf{V}^B \models \hat{\aleph}_\beta \leq \aleph_\beta$  per ipotesi induttiva, si ottiene la validità dell'antecedente, da cui la validità del conseguente. Inoltre, per  $\xi < \aleph_0$ , si ha  $\mathbf{V}^B \models \hat{\xi} < \hat{\aleph}_0$  e quindi  $\mathbf{V}^B \models \hat{\xi} < \aleph_\alpha$  in quanto

$$1 = ||\hat{\xi} < \hat{\aleph}_0|| \wedge ||\hat{\aleph}_0 = \aleph_0|| \wedge ||\aleph_0 \leq \aleph_\alpha|| \leq ||\hat{\xi} < \aleph_\alpha||$$

Pertanto, per ogni  $\xi < \aleph_\alpha$ , vale  $\mathbf{V}^B \models \hat{\xi} < \aleph_\alpha$ . Ricordando che sugli ordinali la relazione  $<$  è esattamente la relazione  $\in$ , abbiamo, dato  $\eta \in \mathbf{V}$ :

$$||\eta < \hat{\aleph}_\alpha|| = \bigvee_{\xi < \aleph_\alpha} ||\eta = \hat{\xi}|| = \bigvee_{\xi < \aleph_\alpha} (||\eta = \hat{\xi}|| \wedge ||\hat{\xi} < \aleph_\alpha||) \leq ||\eta < \aleph_\alpha||$$

Quindi  $\mathbf{V}^B \models \forall \eta(\eta < \hat{\aleph}_\alpha \rightarrow \eta < \aleph_\alpha)$ . Essendo che è teorema di **ZFC**

$$\forall \eta(\eta < \Upsilon \rightarrow \eta < \aleph_\xi) \rightarrow \Upsilon \leq \aleph_\xi$$

e avendo visto che vale in  $\mathbf{V}^B$  l'antecedente con  $\Upsilon = \hat{\aleph}_\alpha$  e  $\xi = \hat{\alpha}$ , si ottiene  $\mathbf{V}^B \models \hat{\aleph}_\alpha \leq \aleph_\alpha$ .

□

Vale inoltre il seguente

**Teorema 2.24.**

- i.  $\mathbf{V}^B \models \text{Card}(\hat{\alpha})$  per ogni  $\alpha \leq \omega$ .
- ii. Se  $\mathbf{V}^B \models \text{Card}(\hat{\alpha})$ , allora  $\text{Card}(\alpha)$ .

*Dimostrazione.*

- i. Se  $\alpha = \omega = \aleph_0$ , dal Teorema 2.23 ii. si ottiene

$$1 = \|\text{Card}(\aleph_0)\| \wedge \|\aleph_0 = \hat{\aleph}_0\| \leq \|\text{Card}(\hat{\aleph}_0)\| = \|\text{Card}(\hat{\omega})\|$$

essendo  $\|\text{Card}(\aleph_0)\| = \|\text{Card}(\aleph_0)\| = 1$ . È inoltre teorema di **ZFC** la formula  $\forall \alpha (\alpha \in \omega \rightarrow \text{Card}(\alpha))$ . In più, come appena detto,  $\|\omega = \hat{\omega}\| = 1$ , pertanto

$$\mathbf{V}^B \models \forall \alpha (\alpha \in \hat{\omega} \rightarrow \text{Card}(\alpha))$$

cioè  $\bigwedge_{\alpha \in \omega} \|\text{Card}(\hat{\alpha})\| = 1$ , da cui la tesi.

- ii. Mostriamo la contronominale. Notiamo che la formula  $\neg \text{Card}(x)$  è

$$\neg \text{Ord}(x) \vee \exists f \exists y \in x (\text{Fun}(f, x, y) \wedge \text{In}(f, x, y))$$

dove  $\text{Fun}(f, x, y)$  è la formula  $\forall x_1 \in x \exists! y_1 \in y \exists z \in f (z = (x_1, y_1))$  cioè “ $f$  è funzione da  $x$  a  $y$ ” e  $\text{In}(f, x, y)$  è la formula

$$\forall x' \in x \forall x'' \in x ((x' \neq x'' \wedge \exists y' \in y \exists y'' \in y ((x', y') \in f \wedge (x'', y'') \in f)) \rightarrow y' \neq y'')$$

cioè “ $f$  è iniettiva da  $x$  a  $y$ ”. Essendo  $\neg \text{Ord}$ ,  $\text{Fun}$ ,  $\text{In}$  formule ristrette,  $\neg \text{Card}$  è formula  $\Sigma_1$ . Allora, se non vale  $\text{Card}(\alpha)$ , vale  $\neg \text{Card}(\alpha)$  e per il Teorema 2.7 v. segue che  $\|\neg \text{Card}(\hat{\alpha})\| = 1$  e quindi  $\|\text{Card}(\hat{\alpha})\| \neq 1$ . □

Osserviamo che  $\text{Card}(x)$  non è una formula  $\Sigma_1$  e quindi l’inverso di ii. in generale non vale, ossia non tutti i cardinali in  $\mathbf{V}$  rimangono cardinali se visti in  $\mathbf{V}^B$ . Vediamo però che se  $B$  è ccc tale proprietà è verificata.

**Teorema 2.25.** *Sia  $B$  algebra di Boole completa e ccc. Allora, dati  $\alpha, x, y \in \mathbf{V}$ ,*

- i. Se  $\text{Card}(\alpha)$ , allora  $\mathbf{V}^B \models \text{Card}(\hat{\alpha})$ .
- ii.  $\mathbf{V}^B \models \hat{\aleph}_\alpha = \aleph_{\hat{\alpha}}$
- iii.  $|x| = |y|$  se e solo se  $\mathbf{V}^B \models |\hat{x}| = |\hat{y}|$ .

*Dimostrazione.*

- i. Sia  $\alpha$  cardinale. Se  $\alpha \leq \aleph_0$ , il risultato vale in generale come visto nel Teorema 2.24  
i. Supponiamo quindi  $\alpha > \aleph_0$ . Osserviamo che è teorema di **ZFC**

$$\forall \alpha [\text{Card}(\alpha) \leftrightarrow \forall \beta \in \alpha \nexists f (f \text{ funzione suriettiva da } \beta \text{ in } \alpha)]$$

pertanto

$$\mathbf{V}^B \models \forall \alpha [\text{Card}(\alpha) \leftrightarrow \forall \beta \in \alpha \nexists f (f \text{ funzione suriettiva da } \beta \text{ in } \alpha)]$$

da cui  $\|\text{Card}(\alpha)\| = \|\forall \beta \in \alpha \nexists f (f \text{ funzione suriettiva da } \beta \text{ in } \alpha)\|$  e quindi in particolare  $\mathbf{V}^B \models \text{Card}(\hat{\alpha})$  è equivalente a

$$\mathbf{V}^B \models \forall \beta \in \hat{\alpha} \nexists f (f \text{ funzione suriettiva da } \beta \text{ in } \hat{\alpha})$$

ovvero

$$\bigwedge_{\beta < \alpha} \|\nexists f (f \text{ funzione suriettiva da } \hat{\beta} \text{ in } \hat{\alpha})\| = 1$$

Supponiamo per assurdo che ciò non valga. Allora esistono un cardinale  $\beta < \alpha$  e  $0 \neq a \in B$  tali che

$$\|\exists f (f \text{ funzione suriettiva da } \hat{\beta} \text{ in } \hat{\alpha})\| = a$$

Per il Principio del Massimo esiste allora  $f \in \mathbf{V}^B$  tale che

$$\|f \text{ funzione suriettiva da } \hat{\beta} \text{ in } \hat{\alpha}\| = a$$

quindi in particolare

$$a \leq \|\forall \eta \in \hat{\alpha} \exists \xi \in \hat{\beta} (f(\xi) = \eta)\| = \bigwedge_{\eta < \alpha} \bigvee_{\xi < \beta} \|f(\hat{\xi}) = \hat{\eta}\|$$

e perciò per ogni  $\eta < \alpha$  esiste un  $\xi_\eta < \beta$  minimo tale che  $a \leq \|f(\hat{\xi}_\eta) = \hat{\eta}\|$  da cui

$$\|f(\hat{\xi}_\eta) = \hat{\eta}\| \wedge a \neq 0$$

Di fatto è stata definita la funzione  $\phi: \alpha \rightarrow \beta$ ,  $\eta \mapsto \xi_\eta$ . Essendo  $\beta < \alpha$  e  $\alpha$  non numerabile, sicuramente esiste  $\gamma < \beta$  tale che

$$X = \phi^{-1}(\gamma) = \{\eta < \alpha \mid \xi_\eta = \gamma\}$$

è non numerabile (altrimenti  $|\alpha| = |\bigcup_{\gamma \in \beta} \phi^{-1}(\gamma)| \leq |\omega| \cdot |\beta| = \max\{|\omega|, |\beta|\} < |\alpha|$ ). Ma allora anche l'insieme

$$\{\|f(\hat{\gamma}) = \hat{\eta}\| \wedge a \mid \eta \in X\}$$

è non numerabile. Infatti, dati  $\eta, \mu \in X$  con  $\eta \neq \mu$ , si ha  $\|\hat{\eta} = \hat{\mu}\| = 0$ . Se fosse  $\|f(\hat{\gamma}) = \hat{\eta}\| \wedge a = \|f(\hat{\gamma}) = \hat{\mu}\| \wedge a$ , si avrebbe l'assurdo

$$\begin{aligned} 0 &= \|\hat{\eta} = \hat{\mu}\| \geq \|f(\hat{\gamma}) = \hat{\eta}\| \wedge \|f(\hat{\gamma}) = \hat{\mu}\| \geq \\ &\geq \|f(\hat{\gamma}) = \hat{\eta}\| \wedge a \wedge \|f(\hat{\gamma}) = \hat{\mu}\| \wedge a = \|f(\hat{\gamma}) = \hat{\eta}\| \wedge a \neq 0 \end{aligned}$$

Inoltre, tale insieme è un'anticatena di  $B$ , infatti in modo simile, dati  $\eta \neq \mu$ :

$$\|f(\hat{\gamma}) = \hat{\eta}\| \wedge a \wedge \|f(\hat{\gamma}) = \hat{\mu}\| \wedge a \leq \|\hat{\eta} = \hat{\mu}\| = 0$$

Quindi esiste in  $B$  un'anticatena non numerabile, contro l'ipotesi di ccc.

*ii.* Per induzione su  $\alpha$ . Il caso  $\alpha = 0$  vale in generale per il Teorema 2.23 *ii*.  
 Supponiamo allora  $\mathbf{V}^B \models \hat{\aleph}_\beta = \aleph_\beta$  per ogni  $\beta < \alpha$ . Per il Teorema 2.23 *iii*. è sufficiente mostrare che  $\mathbf{V}^B \models \aleph_{\hat{\alpha}} \leq \hat{\aleph}_\alpha$ . Per *i*. vale  $\mathbf{V}^B \models \text{Card}(\hat{\aleph}_\alpha)$ . Inoltre, per  $\beta < \alpha$ , ovviamente si ha  $\mathbf{V}^B \models \hat{\aleph}_\beta < \hat{\aleph}_\alpha$ . Per ipotesi induttiva allora  $\mathbf{V}^B \models \aleph_\beta < \hat{\aleph}_\alpha$ . Dunque, come si voleva:

$$1 = \|\text{Card}(\hat{\aleph}_\alpha)\| \wedge \bigwedge_{\beta < \alpha} \|\aleph_\beta < \hat{\aleph}_\alpha\| = \|\text{Card}(\hat{\aleph}_\alpha) \wedge \forall \beta < \hat{\alpha} (\aleph_\beta < \hat{\aleph}_\alpha)\| \leq \|\aleph_{\hat{\alpha}} \leq \hat{\aleph}_\alpha\|$$

dove l'ultima disuguaglianza vale perché è teorema di **ZFC**

$$\text{Card}(\Upsilon) \wedge \forall \beta < \alpha (\aleph_\beta < \Upsilon) \rightarrow \aleph_\alpha \leq \Upsilon$$

*iii.* Siano  $x, y \in \mathbf{V}$ . Per il Teorema 2.23 *i*. basta mostrare che se  $\mathbf{V}^B \models |\hat{x}| = |\hat{y}|$  allora  $|x| = |y|$ . Siano  $\alpha, \beta$  cardinali tali che  $|x| = \alpha$  e  $|y| = \beta$ . Tali formule sono abbreviazioni: ad esempio,  $|x| = \alpha$  è

$$\text{Card}(\alpha) \wedge \exists f(\text{Fun}(f, x, \alpha) \wedge \text{In}(f, x, \alpha)) \wedge \exists g(\text{Fun}(g, \alpha, x) \wedge \text{In}(g, \alpha, x))$$

Poiché per *i*.  $\text{Card}(\alpha)$  implica  $\mathbf{V}^B \models \text{Card}(\hat{\alpha})$  e poiché le formule con cui è congiunta  $\text{Card}(\alpha)$  sono  $\Sigma_1$ , abbiamo  $\mathbf{V}^B \models |\hat{x}| = \hat{\alpha}$  e analogamente  $\mathbf{V}^B \models |\hat{y}| = \hat{\beta}$ . Ma allora per ipotesi  $\mathbf{V}^B \models \hat{\alpha} = \hat{\beta}$  da cui  $\alpha = \beta$  e quindi  $|x| = |y|$ .  $\square$

Per poter dare un ultimo utile risultato riguardo le cardinalità, dobbiamo definire le *coppie ordinate* in  $\mathbf{V}^B$ . Dati  $u, v \in \mathbf{V}^B$ , siano

$$\begin{aligned} \{u\}^B &\stackrel{\text{def}}{=} \{(u, 1)\} \\ \{u, v\}^B &\stackrel{\text{def}}{=} \{u\}^B \cup \{v\}^B \\ (u, v)^B &\stackrel{\text{def}}{=} \{\{u\}^B, \{u, v\}^B\}^B \end{aligned}$$

È chiaro che sono tutti elementi di  $\mathbf{V}^B$ . Notiamo incidentalmente che  $\{u, v\}^B$  verifica **Coppia**:

$$\begin{aligned} \|u \in \{u, v\}^B\| &= \bigvee_{w \in \text{dom}(\{u, v\}^B)} (\{u, v\}^B(w) \wedge \|w = u\|) \\ &= \bigvee_{w \in \{u, v\}} \|w = u\| = \|u = u\| \vee \|v = u\| = 1 \end{aligned}$$

e analogamente  $\|v \in \{u, v\}^B\| = 1$ . Inoltre,  $(u, v)^B$  ha effettivamente le proprietà di una “coppia ordinata”, infatti vale che

$$\mathbf{V}^B \models \forall x \forall y \forall u \forall v [(x, y)^B = (u, v)^B \leftrightarrow x = u \wedge y = v] \quad (\star)$$

**Lemma 2.26.** Per ogni  $u \in \mathbf{V}^B$  esiste  $f \in \mathbf{V}^B$  tale che

$$\mathbf{V}^B \models \text{Fun}(f) \wedge \text{dom}(f) = \widehat{\text{dom}(u)} \wedge u \subseteq \text{im}(f)$$

e pertanto  $\mathbf{V}^B \models |u| \leq |\widehat{\text{dom}(u)}|$ .

*Dimostrazione.* Sia  $u \in \mathbf{V}^B$  e definiamo

$$f = \{(\hat{z}, z)^B \mid z \in \text{dom}(u)\} \times \{1\}$$

Verifichiamo ora che  $\mathbf{V}^B \models \text{Fun}(f) \wedge \text{dom}(f) = \widehat{\text{dom}(u)}$ , ovvero

$$\mathbf{V}^B \models \forall x \in \widehat{\text{dom}(u)} \exists y((x, y)^B \in f) \quad (1)$$

e

$$\mathbf{V}^B \models \forall x \in \widehat{\text{dom}(u)} ((x, y)^B \in f \wedge (x, y') \in f \rightarrow y = y') \quad (2)$$

e infine

$$\mathbf{V}^B \models z \in f \rightarrow \exists x \in \widehat{\text{dom}(u)} \exists y(z = (x, y)^B) \quad (3)$$

Partiamo da (1), la cui valutazione è uguale a

$$\begin{aligned} & \bigwedge_{x \in \text{dom}(u)} (1 \rightarrow \bigvee_{y \in \mathbf{V}^B} \|(x, y)^B \in f\|) \\ &= \bigwedge_{x \in \text{dom}(u)} \bigvee_{y \in \mathbf{V}^B} \bigvee_{z \in \text{dom}(f)} (f(z) \wedge \|z = (x, y)^B\|) \\ &= \bigwedge_{x \in \text{dom}(u)} \bigvee_{y \in \mathbf{V}^B} \bigvee_{z \in \text{dom}(u)} \|(\hat{z}, z)^B = (x, y)^B\| && \text{poiché } f(z) = 1 \\ &= \bigwedge_{x \in \text{dom}(u)} \bigvee_{y \in \mathbf{V}^B} \bigvee_{z \in \text{dom}(u)} (\|\hat{z} = \hat{x}\| \wedge \|z = y\|) && \text{per } (\star) \end{aligned}$$

e ciò è uguale a 1 in quanto è sufficiente prendere, per ogni  $x \in \text{dom}(u)$ ,  $y = z = x$ .  
Passiamo a (2).

$$\begin{aligned} & \|\forall x \in \widehat{\text{dom}(u)} ((x, y)^B \in f \wedge (x, y') \in f \rightarrow y = y')\| = \\ &= \bigwedge_{x \in \text{dom}(u)} (\|(x, y)^B \in f\| \wedge \|(x, y')^B \in f\| \rightarrow \|y = y'\|) \\ &= \bigwedge_{x \in \text{dom}(u)} (\bigvee_{z \in \text{dom}(f)} \|z = (x, y)^B\| \wedge \bigvee_{w \in \text{dom}(f)} \|w = (x, y')^B\| \rightarrow \|y = y'\|) \\ &= \bigwedge_{x \in \text{dom}(u)} (\bigvee_{z \in \text{dom}(u)} \|(\hat{z}, z)^B = (x, y)^B\| \wedge \bigvee_{w \in \text{dom}(u)} \|(\hat{w}, w)^B = (x, y')^B\| \rightarrow \|y = y'\|) \\ &= \bigwedge_{x \in \text{dom}(u)} \bigvee_{z \in \text{dom}(u)} \bigvee_{w \in \text{dom}(u)} (\|(\hat{z}, z)^B = (x, y)^B\| \wedge \|(\hat{w}, w)^B = (x, y')^B\| \rightarrow \|y = y'\|) \end{aligned}$$

però per ogni  $x \in \text{dom}(u)$  per  $z = w = x$  si ha

$$\begin{aligned} \|(x, x)^B = (x, y)^B\| \wedge \|(x, x)^B = (x, y')^B\| &\leq \|(x, y)^B = (x, y')^B\| \\ &= \|\hat{x} = \hat{x}\| \wedge \|y = y'\| \\ &= \|y = y'\| \end{aligned}$$

da cui  $\|(\hat{x}, x)^B = (\hat{x}, y)^B\| \wedge \|(\hat{x}, x)^B = (\hat{x}, y')^B\| \rightarrow \|y = y'\| = 1$  da cui quanto si voleva. Mostriamo che vale (3):

$$\begin{aligned}
\|z \in f\| &= \bigvee_{x \in \text{dom}(f)} (f(x) \wedge \|z = x\|) \\
&= \bigvee_{x \in \text{dom}(u)} \|z = (\hat{x}, x)^B\| && \text{essendo } f(x) = 1 \\
&\leq \bigvee_{x \in \text{dom}(u)} \bigvee_{y \in \mathbf{V}^B} \|z = (\hat{x}, y)^B\| \\
&= \|\exists x \in \widehat{\text{dom}(u)} \exists y (z = (x, y)^B)\|
\end{aligned}$$

Infine, vale  $\|u \subseteq \text{im}(f)\| = \|y \in u \rightarrow \exists x (x, y)^B \in f\|$ . Però

$$\begin{aligned}
\|\exists x (x, y)^B \in f\| &= \bigvee_{x \in \mathbf{V}^B} \|(x, y)^B \in f\| \\
&= \bigvee_{x \in \mathbf{V}^B} \bigvee_{z \in \text{dom}(f)} (f(z) \wedge \|z = (x, y)^B\|) \\
&= \bigvee_{x \in \mathbf{V}^B} \bigvee_{z \in \text{dom}(u)} \|(\hat{z}, z)^B = (x, y)^B\| && \text{poiché } f(z) = 1 \\
&= \bigvee_{z \in \text{dom}(u)} \bigvee_{x \in \mathbf{V}^B} (\|\hat{z} = x\| \wedge \|z = y\|) && \text{per } (\star) \\
&= \bigvee_{z \in \text{dom}(u)} (\|z = y\| \wedge \bigvee_{x \in \mathbf{V}^B} \|\hat{z} = x\|) \\
&= \bigvee_{z \in \text{dom}(u)} \|z = y\| \\
&\geq \bigvee_{z \in \text{dom}(u)} (u(z) \wedge \|z = y\|) = \|y \in u\|
\end{aligned}$$

da cui la tesi.

Per concludere, notiamo che, in **ZFC**, se esiste  $f: B \rightarrow A$  e  $A' \subseteq \text{im}(f)$ , allora è possibile definire  $g: A' \rightarrow B$  iniettiva, scegliendo per ogni  $a \in A'$  un elemento in  $f^{-1}(a)$ . Da ciò per definizione  $|A'| \leq |B|$ . Poiché  $\mathbf{V}^B$  è modello di **ZFC**, da quanto mostrato finora segue  $\mathbf{V}^B \models |u| \leq |\widehat{\text{dom}(u)}|$ .  $\square$

### 3 Forcing

Esporre in questo Capitolo il concetto di forcing, adattandolo al contesto dei modelli a valori booleani. Sia  $(P, \leq)$  un insieme parzialmente ordinato. Dati  $p, q \in P$ , diciamo che  $p$  raffina  $q$  o anche  $p$  è un raffinamento di  $q$  se  $p \leq q$  e diciamo invece che sono *compatibili* se esiste  $r \in P$  tale che  $r \leq p$  e  $r \leq q$ . Scriveremo in tal caso  $\text{Comp}(p, q)$ .  $P$  è detto *raffinato* se

$$\forall p, q \in P [q \not\leq p \rightarrow \exists p' \leq q \neg \text{Comp}(p, p')]$$

cioè se, ogniqualvolta  $q$  non raffina  $p$ , esiste un raffinamento di  $q$  incompatibile con  $p$ . Per ogni  $p \in P$  sia

$$O_p = \{q \in P \mid q \leq p\}$$

Osserviamo che  $P = \bigcup_{p \in P} \{p\} \subseteq \bigcup_{p \in P} O_p$  e che, dati  $p, q \in P$ , per ogni  $r \in O_p \cap O_q$  si ha che  $r \in O_r \subseteq O_p \cap O_q$ . Allora, per la Proposizione 1.15, esiste su  $P$  una topologia generata dagli  $O_p$  al variare di  $p \in P$  ed essa è detta *topologia dell'ordine*.  $\text{RO}(P)$  indica quindi l'insieme degli aperti regolari in  $P$  per tale topologia.

#### Lemma 3.1.

- i.  $P$  è raffinato se e solo se  $O_p \in \text{RO}(P)$  per ogni  $p \in P$ .
- ii. Se  $P$  è raffinato, la mappa  $p \mapsto O_p$  è un isomorfismo d'ordine da  $P$  in un sottoinsieme denso di  $\text{RO}(P)$ .

*Dimostrazione.*

- i. Vediamo innanzitutto che, nella topologia dell'ordine su  $P$ , per  $X \subseteq P$ , si ha

$$(\overline{X})^\circ = \{q \in P \mid \forall p' \leq q \exists r \in X (r \leq p')\} \quad (1)$$

A tal fine, mostriamo che  $X$  è aperto se e solo se per ogni  $y \in X$  e per ogni  $x \leq y$  si ha  $x \in X$ . Sia  $X$  aperto,  $y \in X$  e  $x \leq y$ . Allora esiste  $p \in P$  tale che  $O_p \subseteq X$  e  $y \in O_p$ , ma per definizione di  $O_p$  si ha allora  $y \leq p$  da cui  $x \leq p$  e quindi  $x \in O_p \subseteq X$ . Viceversa, ricordando la caratterizzazione degli aperti data nel Capitolo 1.3, supponiamo per assurdo che esista  $\bar{x} \in X$  tale che, per ogni  $p \in P$ , se  $O_p \subseteq X$  allora  $\bar{x} \notin O_p$ . Per ipotesi si ha, per ogni  $x \leq \bar{x}$ , che  $x \in X$ , da cui  $O_{\bar{x}} \subseteq X$  e quindi  $\bar{x} \notin O_{\bar{x}}$ , assurdo.

Dato  $X \subseteq P$ , consideriamo  $C_X = \{p \in P \mid \exists q \in X (q \leq p)\}$ . Possiamo ora mostrare che  $C_X = \overline{X}$ . Chiaramente  $X \subseteq C_X$  e  $C_X$  è chiuso in quanto il complementare  $P \setminus C_X = \{p \in P \mid \forall q \in X (q \not\leq p)\}$  è aperto. Infatti, consideriamo  $y \in P \setminus C_X$  e  $x \leq y$ . Dalla prima segue che per ogni  $q \in X$ ,  $q \not\leq y$  e questo, assieme alla seconda, implica  $x \notin X$ , da cui  $x \notin C_X$  ossia  $x \in P \setminus C_X$ . Infine, mostriamo che  $P \setminus C_X$  è il più grande aperto che non interseca  $X$ , cioè, se  $P \setminus C_X \subseteq U$  e  $X \cap U = \emptyset$  con  $U$  aperto, vale  $U = P \setminus C_X$ . Siano quindi  $p \in U$  e  $q \in X$ . Se fosse  $q \leq p$ , essendo  $U$  aperto si avrebbe  $q \in U$ , assurdo perché  $U$  non interseca  $X$ . Quindi  $q \not\leq p$  e per definizione segue  $q \in P \setminus C_X$ , come si voleva. Pertanto concludiamo che

$$\overline{X} = \{p \in P \mid \exists q \in X (q \leq p)\} \quad (2)$$



Mostriamo ora che, dato  $X \subseteq P$ , si ha  $\overset{\circ}{X} = I_X$ , con  $I_X = \{p \in P \mid \forall q \leq p (q \in X)\}$ . Sicuramente  $I_X \subseteq X$ . Inoltre,  $I_X$  è aperto: siano  $y \in I_X$  e  $x \leq y$ . Allora per ogni  $z \leq x$  si ha  $z \leq y$  da cui, per definizione di  $I_X$ ,  $z \in X$ . Ma allora, sempre per definizione,  $x \in I_X$ , cioè  $I_X$  è aperto. Infine,  $I_X$  è il più grande aperto contenuto in  $X$ , cioè, se  $I_X \subseteq U \subseteq X$  con  $U$  aperto, deve essere  $I_X = U$ . Infatti, sia  $p \in U$ . Per ogni  $q \leq p$ , essendo  $U$  aperto, si ha  $q \in U$  da cui  $q \in X$ . Ma allora per definizione  $p \in I_X$ , come si voleva. Concludiamo allora che

$$\overset{\circ}{X} = \{p \in P \mid \forall q \leq p (q \in X)\} \quad (3)$$

Da (2) e (3) segue quindi (1). Utilizzando quanto trovato per  $X = O_p$ , si ottiene

$$\begin{aligned} (\overline{O_p})^\circ &= \{q \in P \mid \forall p' \leq q \exists r \leq p (r \leq p')\} \\ &= \{q \in P \mid \forall p' \leq q \text{ Comp}(p, p')\} \end{aligned}$$

Possiamo ora mostrare la tesi.

( $\Rightarrow$ ) Poiché  $O_p$  è aperto, si ha sicuramente  $O_p \subseteq (\overline{O_p})^\circ$ . Inoltre, se  $q \notin O_p$ , si ha  $q \not\leq p$  e quindi, essendo  $P$  raffinato, esiste  $p' \leq q$  per cui  $\neg \text{Comp}(p, p')$  e pertanto  $q \notin (\overline{O_p})^\circ$ . Quindi  $O_p = (\overline{O_p})^\circ$ , cioè  $O_p \in \text{RO}(P)$ .

( $\Leftarrow$ ) Se  $O_p \in \text{RO}(P)$ , allora  $O_p = (\overline{O_p})^\circ$ , quindi, poiché da  $q \not\leq p$  segue  $q \notin O_p$ , si ha  $q \notin O_p = (\overline{O_p})^\circ$ , ovvero  $\exists p' \leq q \neg \text{Comp}(p, p')$ . Quindi  $P$  è raffinato.

ii. Sia  $\Phi: p \mapsto O_p$ . Poiché  $P$  è raffinato, da *i.* segue  $O_p \in \text{RO}(P)$ . Poiché  $\{O_p \mid p \in P\}$  è una base per  $\text{RO}(P)$ , per ogni  $\emptyset \neq X \in \text{RO}(P)$  esiste  $p \in P$  per cui  $O_p \subseteq X$ , cioè  $\Phi(P)$  è denso in  $\text{RO}(P)$ . Mostriamo che  $\Phi$  è iniettiva. Se  $O_p = O_{p'}$ , poiché  $p \in O_p$  e  $p' \in O_{p'}$ , valgono  $p \leq p'$  e  $p' \leq p$ , da cui  $p = p'$ . Inoltre,  $\Phi$  preserva l'ordine in quanto, se  $p \leq p'$ , per definizione  $O_p \subseteq O_{p'}$ .  $\square$

**Corollario 3.2.**  *$P$  è raffinato se e solo se esiste un isomorfismo d'ordine tra  $P$  e un sottoinsieme denso di un algebra di Boole completa.*

*Dimostrazione.* Il “solo se” segue dal Lemma 3.1. Viceversa, supponiamo che esista un isomorfismo d'ordine tra  $P$  e un sottoinsieme denso di un algebra di Boole completa  $B$ . Identifichiamo allora  $P$  con la sua immagine, che è densa in  $B$ . Vediamo che  $q \leq p$  se e solo se  $q \wedge \neg p = 0$ . Infatti, da  $q \leq p$  segue  $q \wedge \neg p \leq p \wedge \neg p = 0$ . Se invece  $q \wedge \neg p = 0$ , allora  $q \leq q \wedge 1 = q \wedge \neg(q \wedge \neg p) = q \wedge (\neg q \vee p) = (q \wedge \neg q) \vee (q \wedge p) = q \wedge p \leq p$ , come si voleva. Mostriamo ora che  $P$  è raffinato. Supponiamo  $q \not\leq p$ ; allora  $q \wedge \neg p \neq 0$ . Poiché  $P$  è denso, esiste  $p' \in P$  tale che  $p' \leq q \wedge \neg p$ . Perciò  $p' \leq q$ . Inoltre  $\neg \text{Comp}(p, p')$ . Infatti, se esistesse  $r \in P$  tale che  $r \leq p$  e  $r \leq p'$ , da quest'ultimo si avrebbe  $r \leq q \wedge \neg p \leq \neg p$ . Ma quindi  $r \leq p \wedge \neg p = 0$ , assurdo perché  $0 \notin P$  essendo  $P$  denso.  $\square$

Possiamo allora dire che un'algebra di Boole completa  $B$  è detta *completamento booleano* di  $P$  se esiste un isomorfismo d'ordine tra  $P$  e un sottoinsieme denso di  $B$ . Pertanto,  $P$  ammette completamento booleano se e solo se è raffinato. Il completamento booleano è unico a meno di isomorfismo (cfr. [9]).

Dato  $P$  raffinato e  $B$  suo completamento booleano tramite  $\Phi$ ,  $P$  verrà d'ora in avanti identificato con il sottoinsieme denso  $\Phi(P)$  e verrà chiamato *insieme di condizioni* per  $B$ .

Sia quindi  $B$  un'algebra di Boole completa e sia  $P$  un insieme di condizioni per  $B$ , con  $P$  sottoinsieme denso di  $B$ . Diamo finalmente la seguente

**Definizione** (Forcing). Per ogni enunciato  $\sigma$  e per ogni  $p \in P$ , diciamo che  $p$  forza  $\sigma$ , e scriviamo  $p \Vdash \sigma$ , se  $p \leq \|\sigma\|$ , ove  $\|\sigma\|$  indica la valutazione booleana a valori in  $B$  di  $\sigma$ .

**Teorema 3.3.** *Siano  $\sigma$  e  $\tau$  enunciati e sia  $\phi$  una formula. Allora:*

- i.  $p \Vdash \neg\sigma \iff$  non esiste  $q \leq p$  tale che  $q \Vdash \sigma$
- ii.  $p \Vdash \sigma \wedge \tau \iff p \Vdash \sigma$  e  $p \Vdash \tau$
- iii.  $p \Vdash \sigma \vee \tau \iff$  per ogni  $q \leq p$  esiste  $r \leq q$  tale che  $r \Vdash \sigma$  o  $r \Vdash \tau$
- iv.  $p \Vdash \sigma \rightarrow \tau \iff$  per ogni  $q \leq p$ , se  $q \Vdash \sigma$  allora  $q \Vdash \tau$
- v.  $p \Vdash \forall x \phi(x) \iff$  per ogni  $u \in \mathbf{V}^B$  si ha  $p \Vdash \phi(u)$
- vi.  $p \Vdash \exists x \phi(x) \iff$  per ogni  $q \leq p$  esiste  $r \leq q$  ed esiste  $u \in \mathbf{V}^B$  tali che  $r \Vdash \phi(u)$
- vii. Se  $a \in \mathbf{V}$ ,  $p \Vdash \forall x \in \hat{a} \phi(x) \iff$  per ogni  $x \in a$  si ha  $p \Vdash \phi(\hat{x})$
- viii. Se  $a \in \mathbf{V}$ ,  $p \Vdash \exists x \in \hat{a} \phi(x) \iff$  per ogni  $q \leq p$  esiste  $r \leq q$  ed esiste  $x \in a$  tali che  $p \Vdash \phi(\hat{x})$
- ix.  $\|\sigma\| = 0 \iff$  non esiste  $p$  tale che  $p \Vdash \sigma$
- x.  $\|\sigma\| = 1 \iff$  per ogni  $p$  si ha  $p \Vdash \sigma$
- xi. Per ogni  $p$  esiste  $q \leq p$  tale che  $q \Vdash \sigma$  o  $q \Vdash \neg\sigma$
- xii. Se  $p \Vdash \sigma$  allora non è vero che  $p \Vdash \neg\sigma$
- xiii. Se  $q \leq p$  e  $p \Vdash \sigma$  allora  $q \Vdash \sigma$

*Dimostrazione.*

- i. Se  $p \Vdash \neg\sigma$ , per definizione  $p \leq \neg\|\sigma\|$ . Allora per ogni  $q \leq p$  si ha  $q \not\leq \|\sigma\|$ , in quanto se così non fosse si avrebbe  $q \leq \|\sigma\| \wedge \neg\|\sigma\| = 0$ , assurdo in quanto  $P$  denso in  $B$ . Quindi non vale  $q \Vdash \sigma$ . Viceversa, se non è vero che  $p \Vdash \neg\sigma$ , allora  $p \not\leq \neg\|\sigma\|$ , da cui  $p \wedge \|\sigma\| \neq 0$ . Quindi, essendo  $P$  denso, esiste  $q \in P$  tale che  $q \leq p \wedge \|\sigma\|$ , ovvero esiste  $q \leq p$  tale che  $q \leq \|\sigma\|$ , cioè  $q \Vdash \sigma$ .
- ii.  $p \Vdash \sigma \wedge \tau \iff p \leq \|\sigma \wedge \tau\| = \|\sigma\| \wedge \|\tau\| \iff p \leq \|\sigma\|$  e  $p \leq \|\tau\| \iff p \Vdash \sigma$  e  $p \Vdash \tau$ .

iii. Vediamo che

$$\begin{aligned}
p \Vdash \sigma \vee \tau &\iff p \Vdash \neg(\neg\sigma \wedge \neg\tau) \\
&\iff \text{non esiste } q \leq p \text{ tale che } q \Vdash \neg\sigma \wedge \neg\tau \\
&\iff \text{non esiste } q \leq p \text{ tale che } q \Vdash \neg\sigma \text{ e } q \Vdash \neg\tau \\
&\iff \text{non esiste } q \leq p \text{ tale che non esista } r \leq q \text{ per cui } r \Vdash \sigma \\
&\quad \text{e non esista } r \leq q \text{ per cui } r \Vdash \tau \\
&\iff \text{per ogni } q \leq p \text{ esiste } r \leq q \text{ tale che } r \Vdash \sigma \\
&\quad \text{o esiste } r \leq q \text{ tale che } r \Vdash \tau \\
&\iff \text{per ogni } q \leq p \text{ esiste } r \leq q \text{ tale che } r \Vdash \sigma \text{ o } r \Vdash \tau
\end{aligned}$$

iv. ( $\Rightarrow$ ) Supponiamo che  $p \leq \|\sigma \rightarrow \tau\| = \neg\|\sigma\| \vee \|\tau\|$  e sia  $q \leq p$  con  $q \leq \|\sigma\|$ . Allora  $q \leq p \leq \neg\|\sigma\| \vee \|\tau\|$  e quindi

$$q \leq \|\sigma\| \wedge (\neg\|\sigma\| \vee \|\tau\|) = \|\sigma\| \wedge \|\tau\| \leq \|\tau\|$$

( $\Leftarrow$ ) Essendo  $p \wedge \|\sigma\| \leq p$  e  $p \wedge \|\sigma\| \leq \|\sigma\|$  cioè  $p \wedge \|\sigma\| \Vdash \sigma$ , per ipotesi  $p \wedge \|\sigma\| \Vdash \tau$ , ovvero  $p \wedge \|\sigma\| \leq \|\tau\|$ . Ma allora

$$p \leq \neg\|\sigma\| \vee p = \neg\|\sigma\| \vee (p \wedge \|\sigma\|) \leq \neg\|\sigma\| \vee \|\tau\| = \|\sigma \rightarrow \tau\|$$

cioè  $p \Vdash \sigma \rightarrow \tau$ .

v.  $p \Vdash \forall x \phi(x) \iff p \leq \bigwedge_{u \in \mathbf{V}^B} \|\phi(u)\| \iff p \leq \|\phi(u)\|$  per ogni  $u \in \mathbf{V}^B \iff p \Vdash \phi(u)$  per ogni  $u \in \mathbf{V}^B$ .

vi. Vediamo che

$$\begin{aligned}
p \Vdash \exists x \phi(x) &\iff p \Vdash \neg \forall x \neg \phi(x) \\
&\iff \text{non esiste } q \leq p \text{ tale che } q \Vdash \forall x \neg \phi(x) \\
&\iff \text{non esiste } q \leq p \text{ tale che per ogni } u \in \mathbf{V}^B \text{ si abbia } q \Vdash \neg \phi(u) \\
&\iff \text{non esiste } q \leq p \text{ tale che per ogni } u \in \mathbf{V}^B \text{ non esista } r \leq q \\
&\quad \text{tale che } r \Vdash \phi(u) \\
&\iff \text{per ogni } q \leq p \text{ esiste } u \in \mathbf{V}^B \text{ ed esiste } r \leq q \text{ tale che } r \Vdash \phi(u)
\end{aligned}$$

vii. Vediamo che

$$\begin{aligned}
p \Vdash \forall x \in \hat{a} \phi(x) &\iff p \leq \bigwedge_{x \in \text{dom}(\hat{a})} (\hat{a}(x) \rightarrow \|\phi(x)\|) \\
&\iff p \leq \bigwedge_{x \in a} (\hat{a}(\hat{x}) \rightarrow \|\phi(\hat{x})\|) \\
&\iff p \leq \bigwedge_{x \in a} \|\phi(\hat{x})\| \\
&\iff p \leq \|\phi(\hat{x})\| \text{ per ogni } x \in a \\
&\iff p \Vdash \phi(\hat{x}) \text{ per ogni } x \in a
\end{aligned}$$

viii. Vediamo che

$$\begin{aligned}
p \Vdash \exists x \in \hat{a} \phi(x) &\iff p \Vdash \exists x(x \in \hat{a} \wedge \phi(x)) \\
&\iff \text{per ogni } q \leq p \text{ esiste } r \leq q \text{ ed esiste } u \in \mathbf{V}^B \text{ tale che} \\
&\quad r \Vdash u \in \hat{a} \wedge \phi(u) \\
&\iff \text{per ogni } q \leq p \text{ esiste } r \leq q \text{ ed esistono } u \in \mathbf{V}^B \text{ e } x \in a \\
&\quad \text{tali che } r \Vdash u = \hat{x} \wedge \phi(u) \\
&\iff \text{per ogni } q \leq p \text{ esiste } r \leq q \text{ ed esistono } u \in \mathbf{V}^B \text{ e } x \in a \\
&\quad \text{tali che } r \leq \|u = \hat{x}\| \wedge \|\phi(u)\|
\end{aligned}$$

e questo chiaramente implica  $r \leq \|\phi(\hat{x})\|$ , cioè  $r \Vdash \phi(\hat{x})$ . Viceversa, cioè se per ogni  $q \leq p$  esiste  $r \leq q$  ed esiste  $x \in a$  tale che  $r \Vdash \phi(\hat{x})$ , basta prendere  $u = \hat{x}$  e l'ultima affermazione tra le precedenti è verificata.

ix. Se  $\|\sigma\| = 0$ , essendo  $P$  denso si ha  $p \not\leq \|\sigma\|$  per ogni  $p$ . Se invece per ogni  $p \in P$  si ha  $p \not\leq \|\sigma\|$ , si deve avere  $\|\sigma\| = 0$ , in quanto, se così non fosse, ancora per densità di  $P$  esisterebbe  $p$  tale che  $p \leq \|\sigma\|$ . Quindi  $\|\sigma\| = 0$  se e solo se per ogni  $p$  si ha  $p \not\leq \|\sigma\|$ , se e solo se non esiste  $p$  tale che  $p \leq \|\sigma\|$ .

x. Se  $\|\sigma\| = 1$ , per ogni  $p$  si ha  $p \leq \|\sigma\|$  cioè  $p \Vdash \sigma$ . Viceversa, supponiamo che per ogni  $p$  si abbia  $p \leq \|\sigma\|$ . Se fosse  $\|\sigma\| \neq 1$ , allora  $\|\neg\sigma\| \neq 0$  e dalla densità di  $P$  segue che esiste  $p$  tale che  $p \leq \|\neg\sigma\|$  cioè  $p \Vdash \neg\sigma$ . Ma allora da ii. si ha  $p \leq 0$ , assurdo perché  $P$  denso.

xi. Sia  $p \in P$ . Se  $p \Vdash \sigma$ , basta prendere  $q = p$ . In caso contrario, si ha  $p \not\leq \|\sigma\|$  e quindi  $p \wedge \neg\|\sigma\| \neq 0$ . Dalla densità di  $P$ , esiste  $q \leq p \wedge \neg\|\sigma\|$  da cui  $q \Vdash \neg\sigma$ .

xii. Supponiamo  $p \Vdash \sigma$ . Se per assurdo  $p \Vdash \neg\sigma$ , da ii. segue  $p \Vdash \perp$  cioè  $p = 0$ , assurdo.

xiii. Se  $q \leq p$  e  $p \leq \|\sigma\|$ , per transitività  $q \leq \|\sigma\|$ , da cui la tesi. □

Consideriamo ora un caso leggermente diverso che tornerà utile nel Capitolo successivo. Siano  $X, Y \in \mathbf{V}$  con  $|Y| \geq 2$  e poniamo  $C(X, Y) = \{f: \tilde{X} \rightarrow Y \mid \tilde{X} \subseteq X \wedge |\tilde{X}| < \aleph_0\}$ . Mostriamo che

**Lemma 3.4.**  $(C(X, Y), \supseteq)$  è insieme parzialmente ordinato raffinato.

*Dimostrazione.*  $\supseteq$  è ovviamente ordine parziale. Siano allora  $f, g \in C(X, Y)$  tali che  $g \not\supseteq f$ , ovvero esiste  $\bar{x} \in \text{dom}(f)$  tale che  $\bar{x} \notin \text{dom}(g)$  oppure  $f(\bar{x}) \neq g(\bar{x})$ . Vogliamo mostrare che esiste  $h \in C(X, Y)$  con  $h \supseteq g$  per cui non esista  $r \in C(X, Y)$  tale che  $r \supseteq f$  e  $r \supseteq h$ . Se  $f(\bar{x}) \neq g(\bar{x})$ , basta prendere  $h = g$  e ogni estensione di  $f$  non potrà essere estensione di  $g$ . Se invece  $\bar{x} \notin \text{dom}(g)$ , sia  $h: \text{dom}(g) \cup \{\bar{x}\} \rightarrow Y$  con

$$h(x) = \begin{cases} g(x) & \text{se } x \in \text{dom}(g) \\ y & \text{se } x = \bar{x} \end{cases}$$

con  $y \in Y$  tale che  $y \neq f(\bar{x})$ , che esiste in quanto  $Y$  ha almeno due elementi. Allora  $h \in C(X, Y)$ ,  $h \supseteq g$  e ogni estensione  $r$  di  $h$  non è estensione di  $f$  in quanto differisce da  $f$  in almeno  $\bar{x}$ .  $\square$

Vogliamo mostrare che vale un risultato simile al Lemma 3.1 *ii.*, ovvero che  $C(X, Y)$  è isomorfo a un sottoinsieme denso di un'algebra di Boole completa. Descriviamo esplicitamente tale isomorfismo e tale algebra di Boole. Per ogni  $p \in C(X, Y)$ , sia

$$N(p) = \{f \in Y^X \mid f \supseteq p\}$$

Similmente a quanto già visto, osserviamo che gli insiemi  $N(p)$  costituiscono una base per una topologia su  $Y^X$ . Infatti essi ricoprono  $Y^X$  in quanto ogni funzione estende una sua restrizione a un sottoinsieme finito del suo dominio, e inoltre, dati  $p, q \in C(X, Y)$ , se  $N(p) \cap N(q) \neq \emptyset$  allora  $N(p \cup q) = N(p) \cap N(q)$ , essendo ancora  $p \cup q \in C(X, Y)$ , e si conclude grazie alla Proposizione 1.15.

Nella topologia generata dall'insieme  $\{N(p) \mid p \in C(X, Y)\}$  su  $Y^X$ , ogni  $N(p)$  è chiaramente aperto in quanto elemento della base. Inoltre  $N(p)$  è anche chiuso: mostriamo infatti che il complementare è intorno di ogni suo punto. Sia  $f \in Y^X \setminus N(p)$ . Allora  $f \not\supseteq p$ , ovvero esiste  $\bar{x} \in \text{dom}(p)$  tale che  $f(\bar{x}) \neq p(\bar{x})$ . Definiamo

$$\begin{aligned} q: \tilde{X} \cup \{\bar{x}\} &\rightarrow Y \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

ove  $\tilde{X} \subseteq X$  con  $|\tilde{X}| < \aleph_0$ . Chiaramente  $q \in C(X, Y)$  e  $f \supseteq q$ , cioè  $f \in N(q)$ . Inoltre, se  $g \in N(q)$ , si ha  $g \supseteq q$  e quindi  $q \not\supseteq p$  perché  $g(\bar{x}) \neq p(\bar{x})$ , pertanto  $g \in Y^X \setminus N(p)$ . Quindi  $N(q) \subseteq Y^X \setminus N(p)$  e  $N(p)$  è chiuso. Quindi in particolare  $N(p)$  è aperto regolare; pertanto, è definita la mappa  $N: C(X, Y) \rightarrow \text{RO}(Y^X)$ ,  $p \mapsto N(p)$ .

**Lemma 3.5.**  $N$  è un isomorfismo d'ordine con un sottoinsieme denso di  $\text{RO}(Y^X)$ .

*Dimostrazione.*

- $N$  è iniettiva. Infatti, dati  $p_1 \neq p_2$ , o  $\text{dom}(p_1) \cap \text{dom}(p_2) = \emptyset$  o esiste  $\bar{x} \in \text{dom}(p_1) \cap \text{dom}(p_2)$  tale che  $p_1(\bar{x}) \neq p_2(\bar{x})$ . Nel primo caso, osserviamo che esistono funzioni in  $Y^X$  che coincidono con  $p_1$  su  $\text{dom}(p_1)$  e che differiscono da  $p_2$  su (almeno un elemento di)  $\text{dom}(p_2)$  in quanto  $|Y| \geq 2$ . Nel secondo caso ogni estensione di  $p_1$  non può essere estensione di  $p_2$ . In entrambi i casi quindi  $N(p_1) \neq N(p_2)$ .
- $N$  è isomorfismo d'ordine tra  $C(X, Y)$  e la sua immagine. Infatti, se  $p_1 \supseteq p_2$ , per definizione  $f \in N(p_1)$  implica  $f \in N(p_2)$ , cioè  $N(p_1) \subseteq N(p_2)$ .
- L'immagine di  $N$  è densa in  $\text{RO}(Y^X)$ . Infatti chiaramente per ogni  $p \in C(X, Y)$  si ha  $N(p) \neq \emptyset$ , cioè  $0_{\text{RO}(Y^X)} = \emptyset \notin N(C(X, Y))$ . Inoltre, poiché  $\{N(p) \mid p \in C(X, Y)\}$  è base, segue subito che per ogni  $\emptyset \neq U \in \text{RO}(Y^X)$  esiste  $p \in C(X, Y)$  per cui  $N(p) \subseteq U$ .  $\square$

Pertanto  $\text{RO}(Y^X)$  è il completamento booleano di  $C(X, Y)$  e quest'ultimo è un insieme di condizioni per  $\text{RO}(Y^X)$ .

## 4 L'indipendenza di CH

Obiettivo di questo Capitolo è dare un esempio di come il modello  $\mathbf{V}^B$  possa essere utile nella ricerca di risultati di indipendenza in teoria degli insiemi. In particolare, mostreremo *metà* dell'indipendenza dell'Ipotesi del Continuo dalla teoria  $\mathbf{ZFC}$ , ossia la coerenza di  $\mathbf{ZFC} + \neg\mathbf{CH}$ . Ci serviremo del modello  $\mathbf{V}^B$  ove  $B$  è una specifica algebra di Boole completa. Sarà comunque necessario il seguente

**Teorema 4.1** (Gödel).

$$\text{Con}(\mathbf{ZF}) \rightarrow \text{Con}(\mathbf{ZFC} + \mathbf{GCH})$$

Per la dimostrazione si veda [5] o direttamente [1].

Come algebra di Boole useremo  $\text{RO}(2^I)$ , con  $I$  un particolare insieme, già introdotta nel Capitolo precedente. La Proposizione seguente assicura che valgano le forti proprietà sui cardinali del Teorema 2.25.

**Proposizione 4.2.** *Sia  $I$  un insieme e consideriamo l'insieme  $2^I$  dotato della topologia generata da  $\{N(p) \mid p \in C(I, 2)\}$  con  $N(p) = \{f \in 2^I \mid f \supseteq p\}$ . Allora tale spazio topologico è ccc.*

*Dimostrazione.* Sia  $\mathcal{U}$  un'anticatena di  $2^I$ . Allora per ogni  $U \in \mathcal{U}$  esiste  $p_U \in C(I, 2)$  tale che  $N(p_U) \subseteq U$ .  $(N(p_U))_{U \in \mathcal{U}}$  è ancora un'anticatena di  $2^I$  e  $|(N(p_U))_{U \in \mathcal{U}}| = |\mathcal{U}|$ . Possiamo pertanto supporre che  $\mathcal{U}$  sia un'anticatena di aperti di base. Definiamo allora, per ogni  $n \in \omega$

$$S_n(\mathcal{U}) = \{N(p) \in \mathcal{U} : |\text{dom}(p)| = n\}$$

Mostriamo per induzione sui naturali che, per ogni  $\mathcal{U}$  anticatena di aperti di base,  $S_n(\mathcal{U})$  è insieme finito, da cui segue che  $|\mathcal{U}| = \sum_{n \in \omega} |S_n(\mathcal{U})| \leq \aleph_0$ . Sia  $n \in \omega$  e supponiamo dunque che per ogni  $m < n$  e per ogni  $\mathcal{U}$  come sopra si abbia  $|S_m(\mathcal{U})| < \aleph_0$ .

Fissiamo ora  $\mathcal{U}$  anticatena di aperti di base e  $N(p) \in S_n(\mathcal{U})$ . Per ogni  $\emptyset \neq A \subseteq \text{dom}(p)$  e per ogni  $q: A \rightarrow 2$  siano

$$J_{A,q} = \{h \in C(I, 2) : N(h) \in S_n(\mathcal{U}) \wedge \text{dom}(h) \cap \text{dom}(p) = A \wedge h|_A = q\}$$

e

$$\mathcal{V}_{A,q} = \{N(h \setminus q) : h \in J_{A,q}\}$$

Dati  $h, h' \in J_{A,q}$ , si deve avere  $\text{dom}(h \setminus q) \cap \text{dom}(h' \setminus q) \neq \emptyset$  perché altrimenti esisterebbe un'estensione comune sia ad  $h$  che ad  $h'$ , ovvero  $N(h) \cap N(h') \neq \emptyset$  contro l'ipotesi che  $\mathcal{U}$  è anticatena. Per lo stesso motivo nell'intersezione dei loro domini  $h \setminus q$  e  $h' \setminus q$  non possono coincidere e pertanto  $N(h \setminus q) \cap N(h' \setminus q) = \emptyset$ . Inoltre, se  $h \in J_{A,q}$  si ha  $\text{dom}(h \setminus q) = n - |A|$ . Pertanto  $\mathcal{V}_{A,q}$  è un'anticatena e  $S_{n-|A|}(\mathcal{V}_{A,q}) = \mathcal{V}_{A,q}$ . Essendo  $n - |A| < n$ , per ipotesi induttiva  $\mathcal{V}_{A,q}$  ha cardinalità finita. Inoltre è chiaro che  $|\mathcal{V}_{A,q}| = |J_{A,q}|$  e che, per ogni  $N(h) \in S_n(\mathcal{U})$ ,  $\text{dom}(h) \cap \text{dom}(p) \neq \emptyset$  e che per  $A = \text{dom}(h) \cap \text{dom}(p)$  vale  $h \in J_{A,h|_A}$ . Ma allora, essendo i sottoinsiemi  $A$  di  $\text{dom}(p)$  in numero finito come anche le funzioni  $q: A \rightarrow 2$ ,

$$|S_n(\mathcal{U})| = \left| \bigcup_{A,q} \{N(h) : h \in J_{A,q}\} \right| \leq \sum_{A,q} |J_{A,q}| < \aleph_0$$

come si voleva. □

**Corollario 4.3.**  $\text{RO}(2^I)$  è ccc.

*Dimostrazione.* Ogni anticatena di  $\text{RO}(2^I)$  è anche anticatena di  $2^I$ , dunque numerabile.  $\square$

Sarà inoltre necessario disporre di una buona stima della cardinalità dell'algebra di Boole considerata. A tal fine diamo anche i seguenti risultati.

**Lemma 4.4.** *Sia  $X$  spazio topologico ccc. Sia  $\mathcal{B}$  una base per  $X$  e sia  $B = \text{RO}(X)$ . Allora  $|B| \leq |\mathcal{B}|^{\aleph_0}$ .*

*Dimostrazione.* Sia  $U \in B$ . Consideriamo l'insieme

$$\mathfrak{F} = \{\mathcal{F} \mid \mathcal{F} \subseteq \mathcal{B} \cap \mathcal{P}(U) \wedge \forall F, F' \in \mathcal{F} (F \neq F' \rightarrow F \cap F' = \emptyset)\}$$

ordinato dall'inclusione e una sua catena  $(\mathcal{F}_i)_{i \in I}$ . Allora essa ammette maggiorante  $\bigcup_{i \in I} \mathcal{F}_i$ , infatti  $\bigcup_{i \in I} \mathcal{F}_i \subseteq \mathcal{B} \cap \mathcal{P}(U)$  perché  $F \in \bigcup_{i \in I} \mathcal{F}_i$  implica che esiste  $i \in I$  tale che  $F \in \mathcal{F}_i \subseteq \mathcal{B} \cap \mathcal{P}(U)$  e, per ogni  $F \neq F' \in \bigcup_{i \in I} \mathcal{F}_i$ , esistono  $i, j \in I$  tali che  $F \in \mathcal{F}_i$  e  $F' \in \mathcal{F}_j$ . Essendo  $(\mathcal{F}_i)_{i \in I}$  catena, sia senza perdita di generalità  $\mathcal{F}_i \subseteq \mathcal{F}_j$ . Dunque  $F, F' \in \mathcal{F}_j$  e quindi  $F \cap F' = \emptyset$ . Infine, per ogni  $j \in I$  vale  $\mathcal{F}_j \subseteq \bigcup_{i \in I} \mathcal{F}_i$ .

Pertanto, per il Lemma di Zorn, sia  $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}$  massimale e poniamo  $G = \bigcup \mathcal{F}$ . Vogliamo mostrare che  $U = (\overline{G})^\circ$ .

Se  $x \in G$ , esiste  $F \in \mathcal{F}$  tale che  $x \in F$ . Ma essendo  $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(U)$ , si ha  $F \subseteq U$ , ovvero  $F \subseteq U$  e quindi  $x \in U$ . Pertanto  $G \subseteq U$ . Essendo  $U$  aperto regolare, si ottiene  $(\overline{G})^\circ \subseteq (\overline{U})^\circ = U$ .

Viceversa, consideriamo  $U \setminus \overline{G}$ . Esso è aperto; se non fosse vuoto dovrebbe pertanto contenere un aperto di base, ovvero esisterebbe  $V \in \mathcal{B}$  tale che  $V \subseteq U$  e  $V \cap \overline{G} = \emptyset$ , da cui  $V \cap \bigcup \mathcal{F} = \emptyset$  e quindi  $V \cap F = \emptyset$  per ogni  $F \in \mathcal{F}$ . Ma allora si avrebbe  $\mathcal{F} \subsetneq \mathcal{F} \cup \{V\} \in \mathfrak{F}$ , contro la massimalità di  $\mathcal{F}$ . Quindi  $U \setminus \overline{G} = \emptyset$ , da cui  $U \subseteq \overline{G}$  e  $U \subseteq \overline{G}^\circ$ , come si voleva. Pertanto, detto  $\Lambda$  l'insieme delle anticatene di  $X$  formate da aperti di base, la funzione  $\Phi: B \rightarrow \Lambda$ ,  $U \mapsto \mathcal{F}$  è iniettiva, in quanto  $\Phi(U) = \Phi(U')$  implica  $(\bigcup \mathcal{F})^\circ = (\bigcup \mathcal{F}')^\circ$  e quindi per quanto visto  $U = U'$ . Dunque  $|B| \leq |\Lambda| \leq |\mathcal{B}|^{\aleph_0}$ , in quanto ogni anticatena in  $\Lambda$  è numerabile perché  $X$  è ccc.  $\square$

**Corollario 4.5.** *Se  $|I| = \aleph_\alpha$ , allora  $\aleph_\alpha \leq |\text{RO}(2^I)| \leq \aleph_\alpha^{\aleph_0}$ .*

*Dimostrazione.* Per definizione una base  $\mathcal{B}$  per la topologia di  $2^I$  è formata dagli insiemi

$$\{f \in 2^I \mid f(i_1) = a_1, \dots, f(i_n) = a_n\}$$

al variare di  $i_1, \dots, i_n \in I$ , di  $a_1, \dots, a_n \in 2$  e di  $n \in \omega$ . Allora

$$|\mathcal{B}| = \sum_{n \in \omega} \aleph_\alpha^n \cdot 2^n = \aleph_0 \cdot \aleph_\alpha = \aleph_\alpha$$

Come osservato prima di enunciare il Lemma 3.5, ogni insieme di questo tipo è regolare, quindi sicuramente  $\aleph_\alpha \leq |\text{RO}(2^I)|$ . D'altro canto, per la Proposizione 4.2  $2^I$  è ccc, quindi per il Lemma 4.4 si ha  $|\text{RO}(2^I)| \leq \aleph_\alpha^{\aleph_0}$ .  $\square$

Possiamo ora dimostrare il Teorema principale del Capitolo, per il quale particolari scelte dell'insieme  $I$  prima considerato portano a far variare notevolmente la cardinalità delle parti di  $\omega$  nel modello (sotto una certa ipotesi).

**Teorema 4.6.** *Sia  $B = \text{RO}(2^{\omega \times \omega_\alpha})$ . Se  $\aleph_\alpha^{\aleph_0} = \aleph_\alpha$ , allora*

$$\mathbf{V}^B \models 2^{\aleph_0} = \aleph_{\hat{\alpha}}$$

*Dimostrazione.* Poiché  $|\omega \times \omega_\alpha| = \aleph_0 \cdot \aleph_\alpha = \aleph_\alpha$ , per il Corollario 4.5 si ottiene  $\aleph_\alpha \leq |B| \leq \aleph_\alpha^{\aleph_0} = \aleph_\alpha$ , cioè  $|B| = \aleph_\alpha$ . Allora

$$|\text{dom}(\mathcal{P}^B(\hat{\omega}))| = |B^{\text{dom}(\hat{\omega})}| = \aleph_\alpha^{\aleph_0} = \aleph_\alpha$$

e poiché per il Lemma 2.26 si ha  $\mathbf{V}^B \models |\mathcal{P}^B(\hat{\omega})| \leq |\widehat{\text{dom}(\mathcal{P}^B(\hat{\omega}))}|$ , otteniamo

$$\mathbf{V}^B \models |\mathcal{P}^B(\hat{\omega})| \leq |\hat{\aleph}_\alpha|$$

e quindi, poiché dal Lemma 2.18 segue  $\mathbf{V}^B \models \mathcal{P}^B(\hat{\omega}) = \mathcal{P}(\hat{\omega})$ ,

$$\mathbf{V}^B \models |\mathcal{P}(\hat{\omega})| \leq |\hat{\aleph}_\alpha|$$

Per il Corollario 4.3  $B$  è ccc, pertanto per il Teorema 2.25 abbiamo  $\mathbf{V}^B \models |\hat{\aleph}_\alpha| = \aleph_{\hat{\alpha}}$ , da cui

$$\mathbf{V}^B \models |\mathcal{P}(\hat{\omega})| \leq \aleph_{\hat{\alpha}}$$

e quindi

$$\mathbf{V}^B \models 2^{\aleph_0} \leq \aleph_{\hat{\alpha}}$$

in quanto  $|\mathcal{P}(X)| = 2^{|X|}$  per la Proposizione 1.9. Rimane da mostrare che  $\mathbf{V}^B \models \aleph_{\hat{\alpha}} \leq 2^{\aleph_0}$ . Sia, per ogni  $\nu < \omega_\alpha$ ,  $u_\nu$  tale che  $\text{dom}(u_\nu) = \text{dom}(\hat{\omega})$  e, per ogni  $n \in \omega$ ,

$$u_\nu(\hat{n}) = \{f \in 2^{\omega \times \omega_\alpha} \mid f(n, \nu) = 1\}$$

Mostriamo che  $u_\nu \in \mathbf{V}^B$ , cioè  $u_\nu(\hat{n}) \in B$  per ogni  $n \in \omega$ . Fissato  $n \in \omega$ , vediamo che  $u_\nu(\hat{n})$  è aperto: sia  $f \in u_\nu(\hat{n})$  e prendiamo  $p: (n, \nu) \mapsto 1$ . Allora  $p \in C(\omega \times \omega_\alpha, 2)$  e  $f \supseteq p$ , cioè  $f \in N(p)$ . Inoltre se  $g \supseteq p$ , banalmente  $g(n, \nu) = 1$  ovvero  $g \in u_\nu(\hat{n})$ , cioè  $N(p) \subseteq u_\nu(\hat{n})$ .  $u_\nu(\hat{n})$  è anche chiuso. Sia  $f \in 2^{\omega \times \omega_\alpha} \setminus u_\nu(\hat{n})$ . Allora  $f(n, \nu) = 0$  e analogamente a prima si mostra che, detto  $q: (n, \nu) \mapsto 0$ ,  $f \in N(q)$  e  $N(q) \subseteq 2^{\omega \times \omega_\alpha} \setminus u_\nu(\hat{n})$ . Quindi  $u_\nu(\hat{n})$  è aperto chiuso, dunque regolare.

Sappiamo inoltre che  $P = C(\omega \times \omega_\alpha, 2)$  è insieme di condizioni per  $B$ . Mostriamo che, per  $p \in P$ :

$$p \Vdash \hat{n} \in u_\nu \iff p(n, \nu) = 1$$

Osserviamo innanzitutto che per definizione  $p \Vdash \hat{n} \in u_\nu \iff N(p) \subseteq \|\hat{n} \in u_\nu\|$ . Ora:

( $\Rightarrow$ ) Sia  $f \in N(p)$ . Per ipotesi

$$f \in \|\hat{n} \in u_\nu\| = \bigvee_{m \in \omega} (u_\nu(\hat{m}) \wedge \|\hat{n} = \hat{m}\|) = u_\nu(\hat{n})$$

essendo  $\|\hat{n} = \hat{m}\| = \emptyset$  per  $n \neq m$ . Ma allora per definizione  $f(n, \nu) = 1$ . Quindi per ogni  $f \supseteq p$  si ha  $f(n, \nu) = 1$ , dunque  $(n, \nu) \in \text{dom}(p)$  e  $p(n, \nu) = 1$ .



( $\Leftarrow$ ) Sia  $f \in N(p)$ , cioè  $f \supseteq p$ . Essendo  $p(n, \nu) = 1$ , anche  $f(n, \nu) = 1$ , pertanto  $f \in u_\nu(\hat{n}) = \|\hat{n} \in u_\nu\|$  da quanto appena visto.

Da ciò segue anche che  $p \Vdash \hat{n} \notin u_\nu \iff p(n, \nu) = 0$ . Infatti, per il Teorema 3.3:

$$\begin{aligned} p \Vdash \neg(\hat{n} \in u_\nu) &\iff \nexists q \supseteq p(q \Vdash \hat{n} \in u_\nu) \iff \nexists q \supseteq p(q(n, \nu) = 1) \\ &\iff \forall q \supseteq p(q(n, \nu) = 0) \iff p(n, \nu) = 0 \end{aligned}$$

Usiamo ciò per dimostrare che, se  $\mu \neq \nu \in \omega_\alpha$ , allora  $\|u_\mu = u_\nu\| = 0$ . Se per assurdo così non fosse, allora esistono  $\mu \neq \nu \in \omega_\alpha$  per cui  $\|u_\mu = u_\nu\| \neq 0$ . Essendo  $P$  denso in  $B$ , esiste allora  $p \in P$  tale che  $p \Vdash u_\mu = u_\nu$ . Il dominio di  $p$  è finito, cioè esiste  $k \in \omega$  tale che  $\text{dom}(p) = \{(n_1, \xi_1), \dots, (n_k, \xi_k)\}$  con  $n_1, \dots, n_k \in \omega$  e  $\xi_1, \dots, \xi_k \in \omega_\alpha$ . È quindi possibile scegliere  $n \in \omega$  per cui  $(n, \xi) \notin \text{dom}(p)$  per ogni  $\xi \in \omega_\alpha$ . Poniamo ora

$$p' = p \cup \{((n, \mu), 1), ((n, \nu), 0)\}$$

Allora  $p'(n, \mu) = 1$  e  $p'(n, \nu) = 0$ , cioè per quanto mostrato  $p' \Vdash \hat{n} \in u_\mu$  e  $p' \Vdash \hat{n} \notin u_\nu$ . Allora per il Teorema 3.3  $p' \Vdash \hat{n} \in u_\mu \wedge \hat{n} \notin u_\nu$ , da cui  $p' \Vdash u_\mu \neq u_\nu$ . Ma per definizione  $p' \supseteq p$  e  $p \Vdash u_\mu = u_\nu$ , da cui  $p' \Vdash u_\mu = u_\nu$ , cioè  $p' = 0$ , contro la densità di  $P$ . Sia ora  $f \in \mathbf{V}^B$  con

$$f = \{(\hat{\nu}, u_\nu)^B : \nu < \omega_\alpha\} \times \{1\}$$

Vogliamo mostrare che

$$\mathbf{V}^B \models f \text{ è una funzione iniettiva da } \hat{\omega}_\alpha \text{ in } \mathcal{P}(\hat{\omega})$$

Cominciamo col mostrare che  $\mathbf{V}^B \models \forall x \in \hat{\omega}_\alpha \exists y ((x, y)^B \in f)$ .

$$\begin{aligned} \|\forall x \in \hat{\omega}_\alpha \exists y ((x, y)^B \in f)\| &= \bigwedge_{x \in \omega_\alpha} (1 \rightarrow \bigvee_{y \in \mathbf{V}^B} \bigvee_{z \in \text{dom}(f)} (f(z) \wedge \|z = (\hat{x}, y)^B\|)) \\ &= \bigwedge_{x < \omega_\alpha} \bigvee_{y \in \mathbf{V}^B} \bigvee_{\nu < \omega_\alpha} \|(\hat{\nu}, u_\nu)^B = (\hat{x}, y)^B\| \\ &= \bigwedge_{x < \omega_\alpha} \bigvee_{y \in \mathbf{V}^B} \bigvee_{\nu < \omega_\alpha} (\|\hat{\nu} = \hat{x}\| \wedge \|u_\nu = y\|) = 1 \end{aligned}$$

in quanto per ogni  $x < \omega_\alpha$  è sufficiente prendere  $\nu = x$  e  $y = u_\nu = u_x$ .

Vediamo ora che  $\mathbf{V}^B \models \forall x \in \hat{\omega}_\alpha ((x, y)^B \in f \wedge (x, y')^B \in f \rightarrow y = y')$ .

$$\begin{aligned} \|\forall x \in \hat{\omega}_\alpha ((x, y)^B \in f \wedge (x, y')^B \in f \rightarrow y = y')\| &= \\ &= \bigwedge_{x < \omega_\alpha} (\|(\hat{x}, y)^B \in f\| \wedge \|(\hat{x}, y')^B \in f\| \rightarrow \|y = y'\|) \\ &= \bigwedge_{x < \omega_\alpha} ( \bigvee_{z \in \text{dom}(f)} \|z = (\hat{x}, y)^B\| \wedge \bigvee_{w \in \text{dom}(f)} \|w = (\hat{x}, y')^B\| \rightarrow \|y = y'\| ) \\ &= \bigwedge_{x < \omega_\alpha} ( \bigvee_{\nu < \omega_\alpha} \|(\hat{\nu}, u_\nu)^B = (\hat{x}, y)^B\| \wedge \bigvee_{\xi < \omega_\alpha} \|(\hat{\xi}, u_\xi)^B = (\hat{x}, y')^B\| \rightarrow \|y = y'\| ) \\ &= \bigwedge_{x < \omega_\alpha} \bigvee_{\nu < \omega_\alpha} \bigvee_{\xi < \omega_\alpha} (\|(\hat{\nu}, u_\nu)^B = (\hat{x}, y)^B\| \wedge \|(\hat{\xi}, u_\xi)^B = (\hat{x}, y')^B\| \rightarrow \|y = y'\|) \end{aligned}$$

ma per ogni  $x < \omega_\alpha$  per  $\nu = \xi = x$  si ha

$$\begin{aligned} \|(\hat{x}, u_x)^B = (\hat{x}, y)^B\| \wedge \|(\hat{x}, u_x)^B = (\hat{x}, y')^B\| &\leq \|(\hat{x}, y)^B = (\hat{x}, y')^B\| \\ &= \|\hat{x} = \hat{x}\| \wedge \|y = y'\| \\ &= \|y = y'\| \end{aligned}$$

da cui  $\|(\hat{x}, u_x)^B = (\hat{x}, y)^B\| \wedge \|(\hat{x}, u_x)^B = (\hat{x}, y')^B\| \rightarrow \|y = y'\| = 1$  da cui quanto si voleva.

Per poter concludere che  $\mathbf{V}^B \models f$  funzione con dominio  $\hat{\omega}_\alpha$ , rimane da mostrare che  $\mathbf{V}^B \models z \in f \rightarrow \exists y \exists x \in \hat{\omega}_\alpha ((x, y)^B = z)$ , ma ciò è immediato:

$$\begin{aligned} \|z \in f\| &= \bigvee_{w \in \text{dom}(f)} (f(z) \wedge \|w = z\|) = \bigvee_{x < \omega_\alpha} \|(\hat{x}, u_x)^B = z\| \\ &\leq \bigvee_{y \in \mathbf{V}^B} \bigvee_{x < \omega_\alpha} \|(\hat{x}, y)^B = z\| = \|\exists y \exists x \in \hat{\omega}_\alpha ((x, y)^B = z)\| \end{aligned}$$

Mostriamo ora che  $\mathbf{V}^B \models f$  ha codominio  $\mathcal{P}(\omega)$ . Vediamo innanzitutto che

$$\|u_\nu \subseteq \hat{\omega}\| = \bigwedge_{n \in \omega} (u_\nu(\hat{n}) \rightarrow \|\hat{n} \in \hat{\omega}\|) = \bigwedge_{n \in \omega} (u_\nu(\hat{n}) \rightarrow 1) = 1$$

Ricordando che  $\|\mathcal{P}(\hat{\omega}) = \mathcal{P}^B(\hat{\omega})\| = 1$ , vogliamo  $\|(x, y)^B \in f\| \leq \|y \in \mathcal{P}^B(\hat{\omega})\|$ . Allora:

$$\begin{aligned} \|y \in \mathcal{P}^B(\hat{\omega})\| &= \bigvee_{z \in \text{dom}(\mathcal{P}^B(\hat{\omega}))} (\mathcal{P}^B(\hat{\omega})(z) \wedge \|z = y\|) \\ &= \bigvee_{z \in B^{\text{dom}(\hat{\omega})}} (\|z \subseteq \hat{\omega}\| \wedge \|z = y\|) \\ &\geq \bigvee_{\nu < \omega_\alpha} (\|u_\nu \subseteq \hat{\omega}\| \wedge \|u_\nu = y\|) && \text{essendo } \{u_\nu \mid \nu < \omega_\alpha\} \subseteq B^{\text{dom}(\hat{\omega})} \\ &= \bigvee_{\nu < \omega_\alpha} \|u_\nu = y\| && \text{essendo } \|u_\nu \subseteq \hat{\omega}\| = 1 \\ &\geq \bigvee_{\nu < \omega_\alpha} (\|\hat{\nu} = x\| \wedge \|u_\nu = y\|) \\ &= \bigvee_{\nu < \omega_\alpha} \|(\hat{\nu}, u_\nu)^B = (x, y)^B\| \\ &= \bigvee_{z \in \text{dom}(f)} (f(z) \wedge \|z = (x, y)^B\|) && \text{essendo } f(z) = 1 \\ &= \|(x, y)^B \in f\| \end{aligned}$$

Infine, vediamo l'iniettività, ovvero  $\mathbf{V}^B \models (x, y)^B \in f \wedge (x', y')^B \in f \wedge y = y' \rightarrow x = x'$ .

$$\begin{aligned}
& \|(x, y)^B \in f \wedge (x', y')^B \in f \wedge y = y' \rightarrow x = x'\| = \\
&= \bigvee_{z \in \text{dom}(f)} \|z = (x, y)^B\| \wedge \bigvee_{w \in \text{dom}(f)} \|w = (x', y')^B\| \wedge \|y = y'\| \rightarrow \|x = x'\| \\
&= \bigvee_{\mu < \omega_\alpha} \bigvee_{\nu < \omega_\alpha} (\|(\hat{\mu}, u_\mu)^B = (x, y)^B\| \wedge \|(\hat{\nu}, u_\nu)^B = (x', y')^B\| \wedge \|y = y'\| \rightarrow \|x = x'\|) \\
&= \bigvee_{\mu < \omega_\alpha} \bigvee_{\nu < \omega_\alpha} (\|\hat{\mu} = x\| \wedge \|u_\mu = y\| \wedge \|\hat{\nu} = x'\| \wedge \|u_\nu = y'\| \wedge \|y = y'\| \rightarrow \|x = x'\|) \\
&= 1
\end{aligned}$$

in quanto basta avere  $\mu \neq \nu$  affinché

$$\begin{aligned}
\|\hat{\mu} = x\| \wedge \|u_\mu = y\| \wedge \|\hat{\nu} = x'\| \wedge \|u_\nu = y'\| \wedge \|y = y'\| &\leq \|\hat{\mu} = x\| \wedge \|\hat{\nu} = x'\| \wedge \|u_\mu = u_\nu\| \\
&= 0 \leq \|x = x'\|
\end{aligned}$$

avendo già mostrato che se  $\mu \neq \nu$  si ha  $\|\mu \neq \nu\| = 0$ . Questo conclude l'iniettività di  $f$  in  $\mathbf{V}^B$ .

Inoltre, essendo  $B$  ccc, per il Teorema 2.25 si ha  $\mathbf{V}^B \models \hat{\omega}_\alpha = \omega_{\hat{\alpha}}$ , quindi:

$$\mathbf{V}^B \models f \text{ è una funzione iniettiva da } \omega_{\hat{\alpha}} \text{ in } \mathcal{P}(\hat{\omega})$$

da cui, come si voleva,

$$\mathbf{V}^B \models \aleph_{\hat{\alpha}} \leq 2^{\aleph_0}$$

□

Per poter concludere, è necessario un risultato di consistenza relativa.

**Lemma 4.7.** *Siano  $T, T'$  estensioni di  $\mathbf{ZF}$  tali che  $\text{Con}(\mathbf{ZF}) \rightarrow \text{Con}(T')$ . Dato  $B \in \mathbf{V}$ , se*

$$T' \vdash B \text{ è un'algebra di Boole completa}$$

*e, per ogni assioma  $\tau$  di  $T$ , vale*

$$T' \vdash \|\tau\|^B = 1_B$$

*allora  $\text{Con}(\mathbf{ZF}) \rightarrow \text{Con}(T)$ .*

*Dimostrazione.* Se  $T$  è contraddittoria, esistono  $\tau_1, \dots, \tau_n$  assiomi di  $T$  tali che

$$\vdash \tau_1 \wedge \dots \wedge \tau_n \rightarrow \perp$$

Allora per ipotesi

$$T' \vdash \|\tau_1 \wedge \dots \wedge \tau_n\| \leq \|\perp\| = 0$$

ma anche

$$T' \vdash \|\tau_1 \wedge \dots \wedge \tau_n\| = 1$$

e quindi

$$T' \vdash 1 \leq 0$$

ovvero anche  $\neg \text{Con}(T')$ , da cui per ipotesi  $\neg \text{Con}(\mathbf{ZF})$ . □

**Corollario 4.8.**

$$\text{Con}(\mathbf{ZF}) \rightarrow \text{Con}(\mathbf{ZFC} + \neg\mathbf{CH})$$

*Dimostrazione.* Consideriamo  $T = \mathbf{ZFC} + \neg\mathbf{CH}$  e  $T' = \mathbf{ZFC} + \mathbf{GCH}$ . Ovviamente, in  $T'$ ,  $B = \text{RO}(2^{\omega \times \omega_2})$  è un'algebra di Boole completa e tutti gli assiomi di  $\mathbf{ZFC}$  sono validi. Inoltre in  $T'$  vale

$$\aleph_2^{\aleph_0} = (2^{\aleph_1})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_1} = \aleph_2$$

per cui in  $T'$ , per il Teorema 4.6, vale anche

$$\mathbf{V}^B \models 2^{\aleph_0} = \aleph_2$$

da cui  $T' \vdash \|\sigma\| = 1$  con  $\sigma = \neg\mathbf{CH}$ , unico assioma di  $T$  non assioma di  $\mathbf{ZFC}$ . Inoltre, per il Teorema 4.1,  $\text{Con}(\mathbf{ZF}) \rightarrow \text{Con}(T')$ , pertanto per il Lemma 4.7 si conclude che  $\text{Con}(\mathbf{ZF}) \rightarrow \text{Con}(T)$ .  $\square$

Osserviamo che per ogni  $\alpha$  ordinale successore l'algebra  $B = \text{RO}(2^{\omega \times \omega_\alpha})$  produce un modello in cui  $2^{\aleph_0} = \aleph_\alpha$  e quindi, forse sorprendentemente, la cardinalità delle parti di  $\omega$  (o equivalentemente quella di  $\mathbb{R}$ ) può essere assunta arbitrariamente grande ottenendo comunque una teoria coerente.

## Riferimenti bibliografici

- [1] Kurt Gödel. *Consistency of the Continuum Hypothesis. (AM-3), Volume 3*. Princeton: Princeton University Press, 1941. ISBN: 9781400881635. DOI: doi:10.1515/9781400881635. URL: <https://doi.org/10.1515/9781400881635>.
- [2] John L. Kelley. *General topology*. eng. New York: Springer-Verlag, 1955. ISBN: 0387901256.
- [3] Dana Scott. «A Proof of the Independence of the Continuum Hypothesis». In: *Mathematical Systems Theory, Vol. 1, No. 2* (1967).
- [4] Joseph R. Shoenfield. «Unramified forcing». In: *American Mathematical Society* (1971). URL: <https://mathscinet.ams.org/mathscinet/relay-station?mr=0280359>.
- [5] Kenneth Kunen. *Set theory: an introduction to independence proofs*. eng. Studies in logic and the foundations of mathematics. Amsterdam New York Oxford: North-Holland, 1980. ISBN: 0444854010.
- [6] Paul Moritz Cohn. *Basic algebra: groups, rings and fields*. eng. London: Springer, 2003. ISBN: 1852335874.
- [7] John L. Bell. *Set theory: boolean-valued models and independence proofs*. eng. 3. ed. Oxford logic guides. Oxford: Clarendon Press, 2005. ISBN: 0198568525.
- [8] Thomas Jech. *Set theory*. eng. 3. ed. Springer monographs in mathematics. Berlin: Springer, 2006. ISBN: 9783540440857.
- [9] Paul Halmos e Steven Givant. *Introduction to Boolean Algebras*. eng. 1. ed. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer, 2008. ISBN: 9780387402932.
- [10] Maria Emilia Maietti. *Note di Logica Matematica*. 2022.