



Università degli Studi di Padova

DIPARTIMENTO DI FISICA E ASTRONOMIA
Corso di Laurea in Fisica

**Soluzioni cosmologiche “tracking”
e l’attuale accelerazione dell’universo**

Laureando:

Elia Zanoni

Matricola 1053940

Relatore:

Prof. Nicola Bartolo

Correlatore:

Prof. Sabino Matarrese

Indice

1	Introduzione	5
2	Modello cosmologico e previsioni teoriche	7
2.1	Equazione di Friedmann	7
2.2	L'equazione dei fluidi	9
2.3	L'equazione di accelerazione	10
2.4	La legge di Hubble e il redshift cosmologico	10
2.5	Risoluzione analitica delle equazioni di Friedmann e dei fluidi .	12
2.5.1	Universo formato solamente da materia	13
2.5.2	Universo formato solo da radiazione	14
2.5.3	Modelli misti	14
2.6	Dipendenza dal redshift	15
2.7	La costante k	17
2.8	La costante cosmologica	17
3	Soluzioni "tracking" per modelli di quintessenza	21
3.1	Problemi del modello precedente	21
3.2	Modelli di quintessenza	22
3.3	Terminologia e equazioni del moto	23
3.3.1	Un po' di terminologia	23
3.3.2	Equazioni fondamentali	23
3.4	Proprietà delle soluzioni tracker e dei potenziali tracker	26
3.4.1	Quali potenziali ammettono soluzioni tracker?	26
3.4.2	Dimostrazione del 'teorema'	27
3.4.3	Casi di overshooting e undershooting	29
3.4.4	Piccole oscillazioni	30
3.5	Soluzioni tracker per potenziali con legge di potenza inversa .	32
3.6	Soluzioni tracker di potenziali con legge esponenziale	36
4	Conclusione	39

4

INDICE

A Derivazione di Γ

41

Bibliografia

45

Capitolo 1

Introduzione

Questo lavoro di tesi si divide essenzialmente in due parti. Nella prima si indagano alcuni fondamenti della cosmologia, si introducono i concetti di sistema di coordinate comovente, fattore di scala e costante di Hubble. Viene ricavata l'equazione di Friedmann, che esplicita la dipendenza della costante di Hubble dalla densità di materia e si familiarizza con il modello di fluido per l'evoluzione delle componenti cosmologiche. Si risolvono poi le equazioni di Friedmann in alcuni casi particolari. Viene inoltre introdotto il redshift cosmologico e si studia come esplicitare la dipendenza di un fluido da questo parametro. Infine si introduce il concetto di costante cosmologica.

Nella seconda parte, invece, si sottolineano i limiti del modello fin qui discusso (costituito dalle componenti di radiazione, materia e costante cosmologica) e viene presentato il concetto di quintessenza. I modelli di quintessenza rappresentano un'alternativa alla costante cosmologica per spiegare l'accelerazione attuale dell'universo, così come evidenziata da diverse osservazioni cosmologiche. Nell'ambito di tali modelli si evidenziano due problemi, il 'fine-tuning problem' e il 'coincidence problem'. Viene spiegato il concetto di soluzione tracking per risolvere il secondo e si studiano le proprietà di questo tipo di soluzioni. Viene enunciato un teorema che permette di stabilire se esistono o meno le condizioni per una soluzione tracker e successivamente vengono analizzati due casi che ammettono soluzioni tracking.

Capitolo 2

Modello cosmologico e previsioni teoriche

2.1 Equazione di Friedmann

Tutta la cosmologia si basa su quello che viene chiamato "Principio cosmologico". Una sua formulazione, particolarmente utile successivamente è la seguente:

"L'universo, visto su scale sufficientemente grandi è omogeneo e isotropo."
[7]

Questa affermazione non è banale come può sembrare e storicamente fu molto difficile accettarla. Anche adesso, se qualcuno pensa all'universo, ha nel suo immaginario un insieme di galassie ben distinte tra loro e in questa immagine che ognuno si crea ovviamente i punti non sono equivalenti gli uni agli altri. Serve pensare a una scala enormemente più grande per accettare l'omogeneità e l'isotropia.

Per ottenere l'equazione di Friedmann abbiamo bisogno di un altro risultato, facile da ricavare analiticamente ma che, essendo già stato dimostrato durante il percorso di studi, non riteniamo necessario riportare qui. Questo risultato, ricavato originariamente da Newton, afferma che:

"In una distribuzione di materia a simmetria sferica, una particella a una certa distanza dal centro non sente alcuna forza dalla materia più distante dal centro, e la materia più vicina al centro dà esattamente la forza che darebbe se fosse tutta concentrata nel centro."[4]

Questa è una conseguenza del fatto che la forza gravitazione dipende dall'inverso del quadrato della distanza.

Pensiamo adesso all'universo come a un oggetto con una densità ρ il quale si espande col passare del tempo. Supponiamo ora di prendere un punto qual-

8CAPITOLO 2. MODELLO COSMOLOGICO E PREVISIONI TEORICHE

siasi (sono tutti equivalenti) come nostro punto di osservazione e di chiamarlo centro. Se tutti i punti sono equivalenti, ciascun punto può essere pensato come centro di una distribuzione sferica. Adesso supponiamo di prendere una particella (piccolo volume, rispetto a scale cosmologiche, contenente una massa m) a una distanza r dal centro.

Per il principio sopra enunciato, questa particella risentirà solo della massa a una distanza più piccola di r dal centro ed è come se fosse tutta concentrata nel centro. Dato che ρ è costante e ho una distribuzione sferica, trovo facilmente che $M = \frac{4}{3}\pi\rho r^3$, da cui possiamo riscrivere la classica equazione di gravitazione universale in questo modo:

$$F = \frac{GMm}{r^2} = \frac{4\pi\rho r m}{3}. \quad (2.1.1)$$

Da questa ricaviamo facilmente l'energia potenziale:

$$V = -\frac{GMm}{r} = -\frac{4\pi\rho r^2 m}{3}. \quad (2.1.2)$$

Possiamo anche definire l'energia cinetica della particella come:

$$T = \frac{1}{2}m\dot{r}^2. \quad (2.1.3)$$

Adesso possiamo utilizzare la conservazione dell'energia,

$$U = T + V = \text{const.} \quad (2.1.4)$$

Sostituendo infatti otteniamo

$$U = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 - \frac{4\pi}{3}G\rho r^2 m. \quad (2.1.5)$$

A questo punto affermiamo che questa è la relazione che lega due qualsiasi particelle nell'universo e lo possiamo fare in forza del principio cosmologico. Possiamo quindi passare a un sistema di coordinate differenti, dette coordinate comoventi. Queste restano costanti durante l'espansione. Dato che l'espansione è uniforme possiamo scrivere la relazione tra la distanza fisica e la distanza comovente come [4]

$$\vec{r} = a(t)\vec{x} \quad (2.1.6)$$

dove l'omogeneità assicura che a dipenda solo dal tempo e l'isotropia che sia scalare. La quantità $a(t)$ è nota come fattore di scala dell'universo e mostra come le distanze fisiche variano col tempo, in quanto le \vec{x} restano costanti.

Utilizzando il fattore di scala per riscrivere l'equazione (2.1.5) e tenendo presente che $\dot{x} = 0$, perché le coordinate comoventi sono fisse, ottengo:

$$U = \frac{1}{2}m\dot{a}^2 x^2 - \frac{4\pi}{3}G\rho a^2 x^2 m. \quad (2.1.7)$$

Dividendo tutto per $\frac{1}{2}ma^2x^2$ ottengo facilmente [4]

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{kc^2}{a^2} \quad (2.1.8)$$

Ove $k = -2U/x^2$ e resta sempre costante. L'equazione (2.1.8) è nota come equazione di Friedmann e sarà una delle equazioni che ricorrerà più spesso all'interno di questa tesi.

2.2 L'equazione dei fluidi

Solo con l'equazione di Friedmann si farebbe ben poco, infatti serve sapere come varia ρ col passare del tempo. Per fare questo è necessario conoscere un'altra grandezza caratteristica, ovvero la pressione, indicata con p .

Possiamo ricavare a questo punto l'equazione dei fluidi a partire dalla prima legge della termodinamica,

$$dE + pdV = TdS, \quad (2.2.1)$$

applicata a un volume V , unitario in coordinate comoventi, di universo in espansione. Questo è l'equivalente di applicare la prima legge della termodinamica a un gas in un pistone. Il volume quindi ha raggio fisico a e l'energia è data da $E = mc^2$, da cui abbiamo:

$$E = \frac{4\pi}{3}\rho a^3 c^2. \quad (2.2.2)$$

La variazione di energia nel tempo è quindi:

$$\frac{dE}{dt} = 4\pi a^2 \rho c^2 \frac{da}{dt} + \frac{4\pi}{3} a^3 \frac{d\rho}{dt} c^2. \quad (2.2.3)$$

La variazione di volume è semplicemente

$$\frac{dV}{dt} = 4\pi a^2 \frac{da}{dt}. \quad (2.2.4)$$

Supponendo adesso che l'espansione sia reversibile e adiabatica ($dS = 0$) otteniamo che

$$4\pi a^2 \rho c^2 \dot{a} + \frac{4\pi}{3} a^3 \dot{\rho} c^2 + p 4\pi a^2 \dot{a} = 0. \quad (2.2.5)$$

Da questa facilmente ricaviamo[4]:

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}\left(\rho + \frac{p}{c^2}\right) = 0. \quad (2.2.6)$$

Questa è nota come equazione di continuità dei fluidi in un universo in espansione.

2.3 L'equazione di accelerazione

Con l'equazione di Friedmann e l'equazione dei fluidi possiamo ricavare una terza equazione che descrive l'accelerazione del fattore di scala. Infatti derivando l'equazione (2.1.8) rispetto al tempo otteniamo:

$$2\frac{\dot{a}}{a}\frac{a\ddot{a} - \dot{a}^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}\dot{\rho} + 2\frac{2kc^2\dot{a}}{a^3}. \quad (2.3.1)$$

Sostituendo $\dot{\rho}$ dall'equazione (2.2.6) e eliminando il fattore $2\dot{a}/a$ in ciascun termine otteniamo

$$\frac{\ddot{a}}{a} - \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = -4\pi G\left(\rho + \frac{p}{c^2}\right) + \frac{kc^2}{a^2}, \quad (2.3.2)$$

e come ultimo passaggio, usando di nuovo l'equazione (2.1.8) arriviamo all'equazione di accelerazione [4]:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}\left(\rho + 3\frac{p}{c^2}\right). \quad (2.3.3)$$

Facciamo notare che, contrariamente a quanto uno possa pensare, la presenza di pressione non implica un'espansione più veloce ma proprio il contrario, la pressione infatti dà un contributo negativo all'accelerazione.

2.4 La legge di Hubble e il redshift cosmologico

Possiamo, a partire da considerazioni che abbiamo già fatto, ricavare la legge di Hubble, la quale dice che la velocità di recessione di un oggetto (per esempio una galassia distante), dovuta all'espansione dell'universo, è proporzionale alla distanza dall'osservatore. Innanzitutto, la velocità di recessione è data da:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{|\dot{\vec{r}}|}{|\vec{r}|}\vec{r} = \frac{\dot{a}}{a}\vec{r}, \quad (2.4.1)$$

in quanto \vec{x} è costante. Facciamo quindi notare che la legge di Hubble afferma che $\vec{v} = H\vec{r}$ e che confrontandolo con l'equazione sopra si ottiene:

$$H = \frac{\dot{a}}{a}. \quad (2.4.2)$$

Abbiamo quindi trovato in modo molto semplice la legge di Hubble e abbiamo definito una stima teorica del parametro H . Possiamo anche stimarne l'evoluzione, infatti derivando la (2.1.8) e sostituendo con l'equazione (2.2.6) otteniamo (per $k = 0$):

$$\dot{H} = -4\pi G(p + \rho). \quad (2.4.3)$$

Vogliamo ora legare l'equazione del redshift

$$1 + z = \frac{\lambda_o}{\lambda_e} \quad (2.4.4)$$

dove λ_o è la lunghezza d'onda di una radiazione emessa da una sorgente (per esempio una galassia lontana) vista dall'osservatore e λ_e è quella emessa, al fattore di scala.

Introduciamo adesso una metrica adatta per misurare le distanze in gioco. Un universo omogeneo ed isotropo è definito dalla metrica di Fridman-Robertson-Walker. La metrica FRW, per un universo piatto, può essere scritta in questo modo:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a(t)^2 (dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)). \quad (2.4.5)$$

Consideriamo adesso la propagazione della luce. Possiamo dire con certezza che $ds^2 = 0$. A un certo tempo tutti i punti, secondo il principio cosmologico, sono equivalenti, per semplicità quindi consideriamo un raggio luminoso che si propaga da $r = 0$ a $r = r_0$ con $d\theta = d\phi = 0$. Le coordinate spaziali sono comoventi, quindi le galassie restano a coordinate fissate: l'espansione è tutta data dal fattore di scala $a(t)$.

Nel nostro caso quindi

$$\frac{cdt}{a(t)} = dr. \quad (2.4.6)$$

Per sapere quanto tempo impiega da $r = 0$ a $r = r_0$ basta semplicemente integrare.

$$\int_{t_e}^{t_r} \frac{cdt}{a} = \int_0^{r_0} dr. \quad (2.4.7)$$

Supponiamo adesso che il raggio di luce sia emesso leggermente dopo, cioè a $t_e + dt_e$ e verrà ricevuto a $t_r + dt_r$. Le galassie invece saranno sempre nello

stesso punto in quanto sto considerando coordinate comoventi. Possiamo quindi scrivere:

$$\int_{t_e+dt_e}^{t_r+dt_r} \frac{cdt}{a} = \int_0^{r_0} dr. \quad (2.4.8)$$

Dalle ultime due equazioni vediamo subito che:

$$\int_{t_e+dt_e}^{t_r+dt_r} \frac{cdt}{a} = \int_{t_e}^{t_r} \frac{cdt}{a}. \quad (2.4.9)$$

Questo diventa

$$\int_{t_e+dt_e}^{t_r} \frac{cdt}{a} + \int_{t_r}^{t_r+dt_r} \frac{cdt}{a} = \int_{t_e}^{t_e+dt_e} \frac{cdt}{a} + \int_{t_e+dt_e}^{t_r} \frac{cdt}{a}. \quad (2.4.10)$$

$$\int_{t_e}^{t_e+dt_e} \frac{cdt}{a} = \int_{t_r}^{t_r+dt_r} \frac{cdt}{a} \quad (2.4.11)$$

Ora poiché stiamo integrando su una porzione infinitesima l'equazione precedente diventa

$$\frac{dt_r}{a(t_r)} = \frac{dt_e}{a(t_e)}. \quad (2.4.12)$$

Se $dt_e = 1/\nu_e$ e $dt_o = 1/\nu_o$ (dove ν_e e ν_o) sono le frequenze della luce emessa e assorbita) otteniamo:

$$\nu_e a(t_e) = \nu_o a(t_o) \quad (2.4.13)$$

o equivalentemente [6]

$$\frac{\lambda_r}{\lambda_e} = \frac{a(t_r)}{a(t_e)}. \quad (2.4.14)$$

L'applicazione standard è fissare il tempo di ricezione al tempo attuale t_0 e di conseguenza abbiamo

$$\frac{a(t_0)}{a(t_e)} = 1 + z. \quad (2.4.15)$$

Questa è la relazione che cercavamo tra il fattore di scala e il fattore di redshift cosmologico. Facciamo notare che $1 + z = 1$ significa tempo presente mentre $1 + z \rightarrow \infty$ significa primi momenti dell'universo.

2.5 Risoluzione analitica delle equazioni di Friedmann e dei fluidi

Procediamo adesso a risolvere le equazioni di Friedmann e dei fluidi, in particolare considereremo casi particolari risolvibili analiticamente.

2.5.1 Universo formato solamente da materia

Una delle proprietà della materia (non collisionale) è che la pressione interna è $p = 0$. Da questa otteniamo facilmente:

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}\rho = 0 \implies \frac{1}{a} \frac{d}{dt}(\rho a^3) = 0 \implies \frac{d}{dt}(\rho a^3) = 0. \quad (2.5.1)$$

Da questa otteniamo che

$$\rho \propto \frac{1}{a^3}. \quad (2.5.2)$$

Questo tipo di soluzione è proprio quella che ci aspettavamo, infatti la densità cala proporzionalmente all'aumento di volume, come è naturale che sia. Risolviamo adesso l'equazione di Friedmann ponendoci nel caso $k = 0$. In questo momento può sembrare che lo si faccia per comodità di calcolo, ma vedremo tra poco che è il caso più significativo. Inoltre, dato che compare solo \dot{a}/a possiamo moltiplicare a per una costante in modo che ai nostri giorni $a = 1$. Questa scelta implica inoltre che le coordinate comoventi siano anche le coordinate fisiche all'epoca presente. Per tutte le quantità useremo il pedice "0" per indicare che sono al tempo attuale.

Abbiamo quindi che

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \left(\frac{a}{a_0}\right)^{-3}, \quad (2.5.3)$$

e sostituendola nell'equazione (2.1.8)

$$\dot{a}^2 = \frac{8\pi G \rho_0 a_0^3}{3} \frac{1}{a}. \quad (2.5.4)$$

Supponendo una soluzione del tipo $a \propto t^q$, questa è risolta da [4]

$$a(t) = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{\frac{2}{3}}, \quad \rho(t) = \frac{\rho_0 t_0^2}{t^2} \quad (2.5.5)$$

Possiamo scrivere anche un'equazione che lega la densità al redshift cosmologico utilizzando le equazioni (2.4.15) e (2.5.3):

$$\rho = \rho_0(1+z)^3 \quad (2.5.6)$$

Questa espressione sarà utile, in quanto è molto utilizzata in cosmologia la variabile $1+z$ al posto della variabile temporale.

2.5.2 Universo formato solo da radiazione

Supponiamo adesso di aver un universo formato solo da radiazione. Questa obbedisce alla legge $p = \rho c^2/3$, quindi otteniamo:

$$\dot{\rho} + 4\frac{\dot{a}}{a}\rho = 0. \quad (2.5.7)$$

Risolvendo come nel caso precedente troviamo:

$$\rho \propto \frac{1}{a^{-4}} \quad (2.5.8)$$

e arriviamo a [4]:

$$a(t) = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{1/2} \quad \rho(t) = \frac{\rho_0 t_0^2}{t^2} \quad \rho = \rho_0(1+z)^4. \quad (2.5.9)$$

2.5.3 Modelli misti

Nel nostro universo convivono sia materia sia radiazione e quindi è utile vedere cosa succede in questo caso. Assumiamo che la densità di radiazione sia molto maggiore della densità della materia. Questo vuol dire che, risolvendo l'equazione dei fluidi, trascuriamo la parte di materia e consideriamo solo quella di radiazione. Vediamo poi come evolve la densità di materia nel tempo.

Le equazioni sono quindi:

$$a(t) \propto t^{1/2} \quad \rho_{rad} \propto \frac{1}{t^2} \quad \rho_{mat} \propto \frac{1}{a^3} \propto \frac{1}{t^{3/2}}. \quad (2.5.10)$$

Facciamo notare che la densità di materia diminuisce nel tempo meno velocemente rispetto alla velocità di radiazione, ci sarà quindi un momento in cui saranno confrontabili. Per quanto piccola la percentuale di densità di materia sia all'inizio, a un certo punto diventerà dominante. Risolviamo ora le equazioni considerando la materia la componente dominante dell'universo e otteniamo:

$$a(t)t^{2/3} \quad \rho_{mat} \propto \frac{1}{t^2} \quad \rho_{rad} \propto \frac{1}{a^4} \propto \frac{1}{t^{8/3}}. \quad (2.5.11)$$

Se la materia quindi a un certo punto è dominante, lo sarà sempre nell'evoluzione dell'universo perché la densità di radiazione cala più velocemente rispetto alla densità di materia.

2.6 Dipendenza dal redshift

Abbiamo calcolato come evolvono le densità di materia e di radiazione nel tempo assumendo che l'una o l'altra sia trascurabile e poi abbiamo ricavato la loro dipendenza dal redshift. Esiste un procedimento più corretto per arrivare a tale dipendenza, che non implica nessuna assunzione a priori. Per valutare ρ_m e ρ_r basta infatti risolvere due semplici equazioni differenziali.

$$\dot{\rho}_m + 3H\rho_m = 0 \qquad \dot{\rho}_r + 4H\rho_r = 0. \quad (2.6.1)$$

Vediamo più nel dettaglio cosa comporta la derivazione.

$$\frac{d}{dt}\rho = \frac{d(1+z)}{dt} \frac{d}{d(1+z)}\rho = \frac{d}{dt} \frac{a_0}{a} \frac{d}{d(1+z)}\rho = -\frac{\dot{a}}{a} \frac{a_0}{a} \frac{d}{d(1+z)}\rho = \quad (2.6.2)$$

$$\frac{d}{dt}\rho = -H(1+z) \frac{d}{d(1+z)}\rho. \quad (2.6.3)$$

Possiamo quindi sostituire la (2.6.3) nella (2.6.1) e semplificare H ottenendo:

$$-(1+z) \frac{d}{d(1+z)}\rho_m + 3\rho_m = 0 \quad -(1+z) \frac{d}{d(1+z)}\rho_r + 4\rho_r = 0. \quad (2.6.4)$$

Risolvendo queste equazioni differenziali otteniamo:

$$\rho_m = \rho_{0,m}(1+z)^3 \qquad \rho_r = \rho_{0,r}(1+z)^4 \quad (2.6.5)$$

Queste sono identiche alle equazioni ricavate in precedenza e non abbiamo fatto nessuna approssimazione per trovarle. In questo lavoro utilizzeremo un parametro di densità che avrà come valore al giorno d'oggi $\rho_{0,m} = 0.2$. Il valore di $\rho_{0,r}$ è stato scelto in modo da essere trascurabile rispetto a quello di materia in quanto oggi $\rho_{0,r} \ll \rho_{0,m}$. Per il valore di $\rho_{0,m}$ spiegheremo dopo il perché di tale scelta. Sottolineiamo di nuovo che il pedice 0 indica i valori attuali. Ricordiamo che il valore $1+z = 1$ coincide con il valore attuale, mentre abbiamo scelto come valore iniziale $1+z = 10^{12}$. Si può vedere che a un certo punto la densità di materia diventa dominante rispetto a quella di radiazione. Parleremo spesso più avanti di densità di background

$$\rho_B = \rho_r + \rho_m. \quad (2.6.6)$$

Si può vedere che la densità di background segue prima la densità di radiazione, in quanto è la componente dominante, e poi quella di materia.

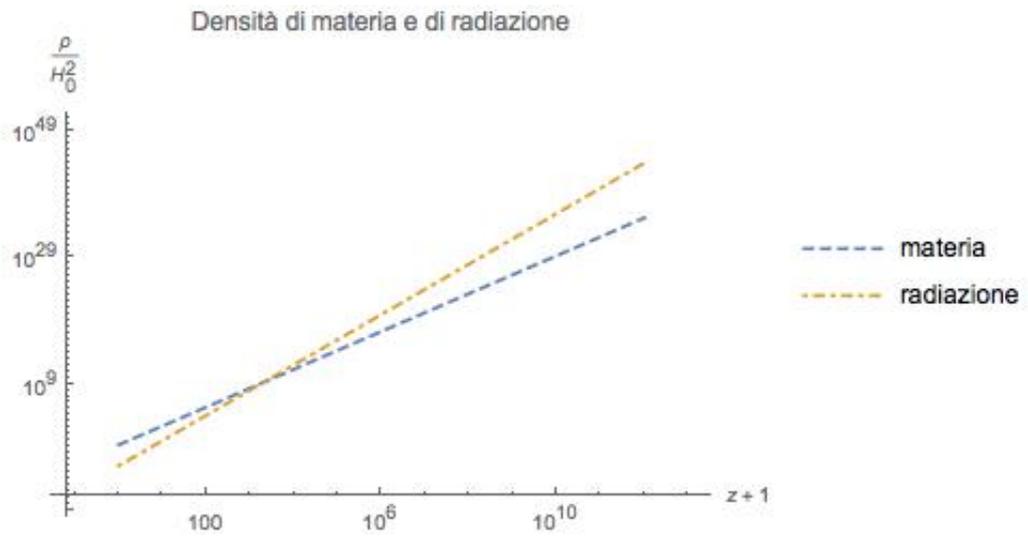


Figura 2.1: Dipendenza da $1+z$ di ρ_m e ρ_r

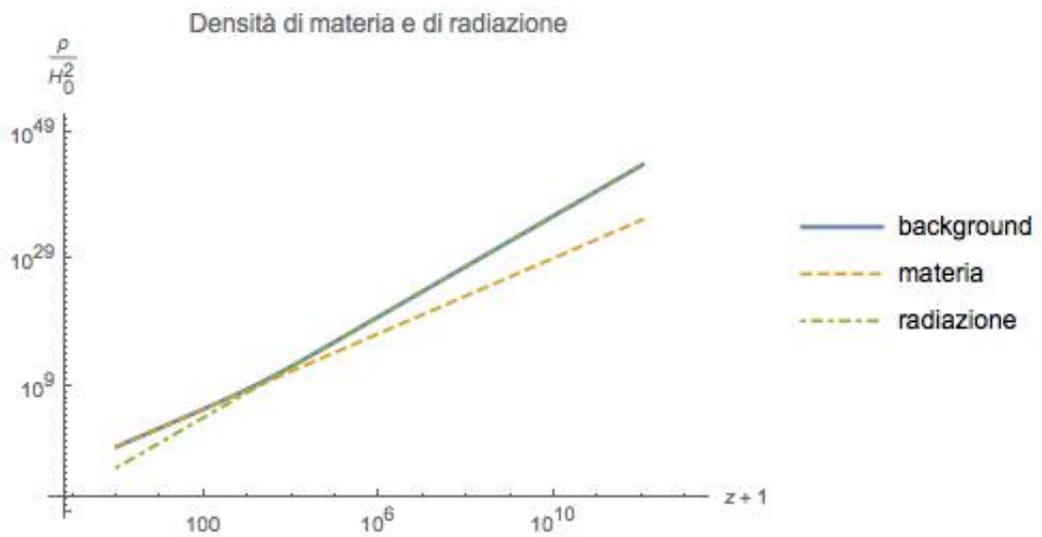


Figura 2.2: Densità di background $\rho_B = \rho_m + \rho_r$

2.7 La costante k

La costante k ha un significato molto più profondo rispetto a quello che le abbiamo attribuito noi nella nostra derivazione. Infatti se l'avessimo ricavata partendo da un modello che tenesse conto della Relatività Generale avremmo visto che k quantifica la curvatura dell'universo. Abbiamo quindi tre casi diversi di valori possibili per la costante k che caratterizzano diverse geometrie dell'universo[7].

- $k > 0$ geometria sferica;
- $k = 0$ geometria piatta;
- $k < 0$ geometria iperbolica.

Ora, per quel che riguarda il nostro universo, varie osservazioni cosmologiche sono con estrema precisione del tutto compatibili con una geometria piatta ($k=0$), per cui per tutto il resto della trattazione considereremo solo questo caso.

2.8 La costante cosmologica

Quando Einstein formulò la relatività generale credeva fortemente che l'universo fosse statico. Introdusse la costante cosmologica per ottenere un modello statico dell'universo. Benché adesso il motivo per cui Λ è stata introdotta originariamente sia svanito, questa resta un importante oggetto in cosmologia, rappresenta infatti la componente dominante all'epoca presente.

Questa costante appare nell'equazione di Friedmann in questo modo:

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2} + \frac{\Lambda}{3}. \quad (2.8.1)$$

Λ può essere sia positiva che negativa, il caso più considerato è $\Lambda > 0$. Considerando il caso in cui $k = 0$, l'equazione di accelerazione diventa:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}\left(\rho + \frac{3p}{c^2}\right) + \frac{\Lambda}{3}. \quad (2.8.2)$$

Appare quindi evidente che Λ può dare un contributo positivo all'accelerazione, agendo come forza repulsiva. Se Λ fosse abbastanza grande potrebbe dominare sul primo termine e determinare un universo in accelerazione, dando così una spiegazione teorica alle evidenze sperimentali che il nostro universo sta attraversando una fase di espansione accelerata (si veda per esempio

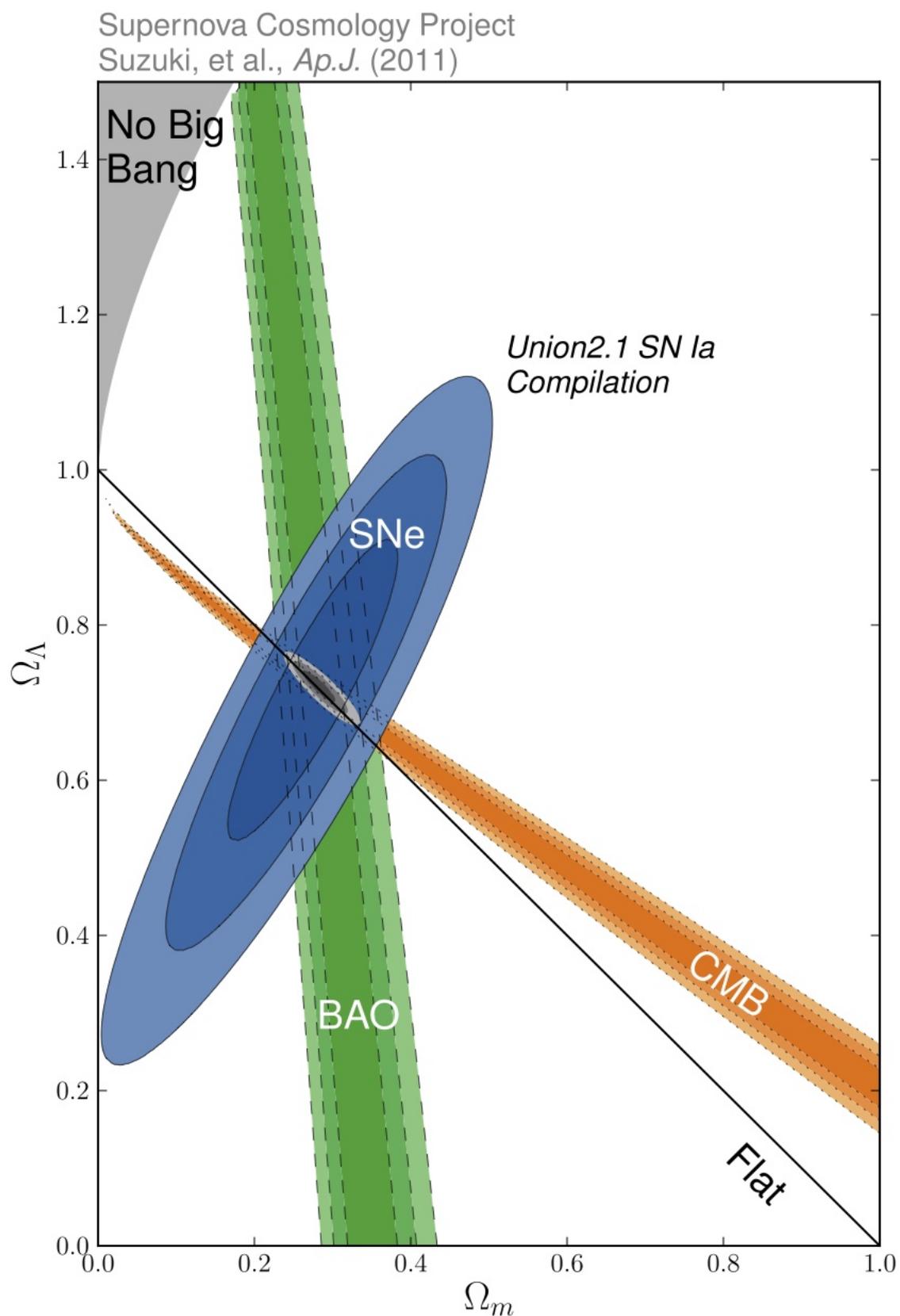


Figura 2.3: Regioni di confidenza al 68.3%, 95.4%, e 99.7% nel piano Ω_M , Ω_Λ dalle osservazioni sulle SNe combinate con i risultati delle osservazioni su BAO e CMB entrambi senza errori sistematici. Si è assunta una costante cosmologica ($w = -1$) per la dark energy.

la figura 2.3 [3]). La figura 2.3 riporta le misure sperimentali di Ω_M e Ω_Λ e rappresenta una delle stime più precise dello stato attuale delle cose.

Definendo $\rho_\Lambda = \Lambda/8\pi G$ abbiamo

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}(\rho + \rho_\Lambda) - \frac{k}{a^2}. \quad (2.8.3)$$

L'equazione dei fluidi per Λ risulta essere

$$\dot{\rho}_\Lambda + 3H(\rho_\Lambda + p_\Lambda) = 0. \quad (2.8.4)$$

Poiché Λ è costante deve essere

$$p_\Lambda = -\rho_\Lambda \quad (2.8.5)$$

Da cui $w_\Lambda = -1$.

Abbiamo però dei problemi teorici che nascono dall'introduzione della costante cosmologica. Infatti per essere rilevante oggi $\rho_\Lambda \approx \rho_{mat} \approx 10^{-47}$ GeV. Questo valore è dai 50 ai 120 ordini di grandezza più piccolo della densità del vuoto, che dipende dalle fluttuazioni quantistiche dei campi sullo stato di vuoto. Abbiamo inoltre che, poiché ρ_{mat} varia nel tempo mentre Λ resta costante, le condizioni iniziali devono essere fissate in modo molto accurato per far sì che i valori delle due densità siano confrontabili al giorno d'oggi.

Capitolo 3

Soluzioni "tracking" per modelli di quintessenza

3.1 Problemi del modello precedente

Le equazioni ricavate precedentemente sono:

$$H^2 = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \kappa(\rho_{mat} + \rho_{rad}) \quad (3.1.1)$$

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0 \quad (3.1.2)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) \quad (3.1.3)$$

$$\dot{H} = -4\pi G(p + \rho). \quad (3.1.4)$$

Dove $\kappa = 8\pi G/3$ e $c = 1$.

Dall'ultima equazione appare evidente che, considerando i casi in cui siano presenti solo materia ($p = 0$) o radiazione ($p = \rho/3$), è impossibile avere un'accelerazione positiva. Per averla infatti servirebbe che $p < -\rho/3$ come si deduce dall'equazione (3.1.3). Ora i dati sperimentali riguardo alle supernovae Ia [2] (e altre osservazioni cosmologiche, come per esempio le anisotropie in temperatura del Fondo Cosmico di Microonde [3]) dicono che il nostro universo si sta espandendo in modo accelerato, deve esserci quindi qualcos'altro che permetta questo tipo di accelerazione. Un primo candidato può essere trovato nella costante cosmologica, ma abbiamo visto i problemi teorici che si porta dietro. Viene quindi introdotto il concetto di 'Dark energy', ovvero un'energia con pressione negativa che non riusciamo a misurare direttamente ma di cui possiamo vederne gli effetti su scala cosmologica.

3.2 Modelli di quintessenza

Uno dei modi per modellizzare questa 'Dark energy' è attraverso quella che viene definita quintessenza. Questa è una componente dinamica, in lenta evoluzione, spazialmente non omogenea e ha pressione negativa[6]. Ai fini della dinamica di background (in un universo cioè 'omogeneo ed isotropo') tale componente può essere pensata come un campo scalare dipendente dal tempo $\phi(t)$ e soggetto a un potenziale $V(\phi)$. Possiamo quindi scrivere la densità di energia e la pressione come:

$$\rho_\phi = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi) \qquad p_\phi = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi). \qquad (3.2.1)$$

La prima di queste due equazioni ci determina la densità di energia ed è possibile notare la dipendenza da un termine cinetico sommato a un potenziale. Questa ha quindi la forma caratteristica dell'energia di una particella. La seconda invece si può ricavare attraverso il tensore energia impulso del campo [1].

Se definiamo una funzione di stato $w_\phi = \frac{p_\phi}{\rho_\phi}$, per il campo scalare essa sarà compresa tra -1 e 1, permettendo alla pressione di essere negativa. A seconda del potenziale a cui è soggetto il campo questa pressione può essere costante, in evoluzione più o meno lenta o oscillante. Può anche succedere che durante l'evoluzione w_ϕ diventi positiva e successivamente ritorni a soddisfare la definizione di quintessenza. Un problema di questo modello è che al giorno d'oggi ρ_ϕ e la densità di materia sono confrontabili, nonostante il fatto che queste componenti evolvano in modo completamente diverso. Pertanto le condizioni iniziali dovrebbero essere impostate ad hoc per avere la situazione attuale. Questo è noto come 'coincidence problem'. Un secondo aspetto è che il valore della densità di energia di quintessenza, che potrebbe essere pensata come energia del vuoto, è molto piccolo rispetto ai valori tipici della fisica delle particelle. Questo è noto come 'fine-tuning problem'. Un modo per aggirare il 'coincidence problem' è quello di parlare di 'tracker field', il quale ha un'equazione del moto con soluzioni che si comportano in modo simile a degli attrattori, nel senso che un'ampia insieme di condizioni iniziali convergono a una stessa soluzione per l'evoluzione di ρ_ϕ e w_ϕ . Questo vedremo che ci permette anche di avere come condizione iniziale per $\Omega_\phi = \frac{\rho_\phi}{\rho_c}$ un valore di 10^{-3} che è compatibile con l'equipartizione di energia tra tutti gli stati iniziali.¹

¹Con ρ_c indichiamo la densità critica, ovvero quella per cui $\rho_c = H/\kappa$ cioè $\rho_c = \rho_\phi + \rho_{mat} + \rho_{rad}$

3.3 Terminologia e equazioni del moto

3.3.1 Un po' di terminologia

Vogliamo adesso per chiarezza definire alcune parole chiave che ci saranno utili nei prossimi paragrafi[6].

- *Quintessenza*: una componente dell'energia che evolve nel tempo, non omogenea nello spazio, con una pressione negativa e un'equazione di stato $w_\phi < 0$.
- *Q-field*: campo la cui energia si comporta come quintessenza ai giorni nostri, in periodi precedenti potrebbe avere $w_\phi > 0$.
- *Tracker field*: campo la cui evoluzione secondo la sua equazione del moto definisce la tracker solution, ovvero la soluzione attrattrice a cui convergono le soluzioni dell'equazione del moto del campo di quintessenza per un vasto insieme di condizioni iniziali del campo e delle sue derivate.
- *Convergenza*: comportamento nel quale le soluzioni dell'equazione del moto del Q-field sono trascinate a una soluzioni comune. C'è una leggera differenza tra 'tracking' e convergenza perché le soluzioni tracker possono attraversare un periodo in cui non si avvicinano le une alle altre.
- *Famiglia di soluzioni tracker*: Per un potenziale $V(\phi) = M^4 \bar{v}(Q/M)$ dove (\bar{v} è una funzione dimensionale di Q/M), c'è una famiglia di soluzioni tracker parametrizzate da M. Il valore di M si trova misurando sperimentalmente Ω_{mat} al giorno d'oggi.

3.3.2 Equazioni fondamentali

Abbiamo visto che

$$\rho_\phi = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi), \quad p_\phi = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - V(\phi). \quad (3.3.1)$$

Inserendo queste equazioni nell'equazione di continuità (3.1.2) otteniamo:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi) \right) + 3H \left(\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi) + \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - V(\phi) \right) = 0, \quad (3.3.2)$$

$$\ddot{\phi} + V'(\phi) \dot{\phi} + 3H \dot{\phi}^2 = 0, \quad (3.3.3)$$

dove con ' intendiamo la derivata rispetto al campo. Riscrivendo otteniamo:

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V' = 0[1]. \quad (3.3.4)$$

Questa è nota come equazione del moto e in questa è contenuta l'evoluzione del campo nel tempo. Ricordiamo però che H non è costante ma dipende dalle densità in gioco:

$$H^2 = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \kappa \left(\rho_m + \rho_r + \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi) \right). \quad (3.3.5)$$

L'equazione di stato é:

$$w_\phi = \frac{p_\phi}{\rho_\phi} = \frac{\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi)}{\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi)}. \quad (3.3.6)$$

Possiamo combinare queste tre espressioni in una forma più utile successivamente. Definiamo

$$x = \frac{1 + w_\phi}{1 - w_\phi} = \frac{1}{2} \frac{\dot{\phi}^2}{V}. \quad (3.3.7)$$

$$\frac{d}{d \ln a} = \frac{dt}{d \ln a} \frac{d}{dt} = \frac{a}{\dot{a}} \frac{d}{dt} = \frac{1}{H} \frac{d}{dt} \quad (3.3.8)$$

Si nota facilmente che x è il rapporto tra energia cinetica e potenziale del campo mentre la derivazione rispetto a $\ln a$ è spesso utile da usare in cosmologia rispetto al tempo t .

$$\frac{d \ln x}{d \ln a} = \frac{1}{H} \frac{d}{dt} \ln x = \frac{1}{H} \frac{\dot{x}}{x}, \quad (3.3.9)$$

$$\frac{d \ln x}{d \ln a} = \frac{1}{H} \frac{1 - w_\phi}{1 + w_\phi} \frac{1}{2} \frac{2\dot{\phi}\ddot{\phi}V - V'\dot{\phi}^2}{V^2}. \quad (3.3.10)$$

Usando l'equazione del moto otteniamo

$$\frac{d \ln x}{d \ln a} = \frac{1}{H} \frac{1 - w_\phi}{1 + w_\phi} \frac{1}{2} \left(\frac{-6H\dot{\phi}^2 V - 2V'V\dot{\phi} - V'\dot{\phi}^3}{V^2} \right), \quad (3.3.11)$$

e quindi

$$\frac{d \ln x}{d \ln a} = \frac{1}{H} \frac{1 - w_\phi}{1 + w_\phi} \frac{1}{2} \left(-6H \frac{\dot{\phi}^2}{2V} \right) + \frac{1}{H} \frac{1 - w_\phi}{1 + w_\phi} \left(-\frac{V'}{V} \dot{\phi} - \frac{V'}{V} \frac{\dot{\phi}^3}{2V} \right). \quad (3.3.12)$$

Da qui segue

$$6 + \frac{d \ln x}{d \ln a} = \frac{1}{H} \frac{1 + w_\phi}{1 + w_\phi} \frac{\dot{\phi}^2}{2V} \left(-\frac{2V}{\dot{\phi}} - \dot{\phi} \right) \frac{V'}{V}, \quad (3.3.13)$$

$$6 + \frac{d \ln x}{d \ln a} = \frac{1}{H} \left(-2 \frac{\dot{\phi}^2/2 + V}{\dot{\phi}} \right) \frac{V'}{V}. \quad (3.3.14)$$

Utilizzando la definizione di H (3.3.5) e di $\Omega_\phi = \frac{\rho_\phi}{\rho_c}$ possiamo scrivere:

$$6 + \frac{d \ln x}{d \ln a} = \mp \sqrt{\frac{\Omega_{phi}}{\kappa}} \frac{2}{\sqrt{1/2\dot{\phi}^2 + V}} \frac{1/2\dot{\phi}^2 + V}{\dot{\phi}} \frac{V'}{V}, \quad (3.3.15)$$

e

$$6 + \frac{d \ln x}{d \ln a} = \mp \sqrt{\frac{\Omega_{phi}}{\kappa}} 2 \frac{\sqrt{1/2\dot{\phi}^2 + V}}{\dot{\phi}} \frac{V'}{V}, \quad (3.3.16)$$

e infine

$$\frac{V'}{V} = \mp \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\kappa}{\Omega_\phi}} \sqrt{1 + w_\phi} \left(6 + \frac{d \ln x}{d \ln a} \right). \quad (3.3.17)$$

D'ora in avanti ci riferiremo a questa equazione quando parleremo di equazione del moto[6].

La soluzione tracker ha la proprietà che w_ϕ è quasi costante e giace tra $-1 < w_\phi < w_B$. Supponendo $1 + w_\phi = \mathcal{O}(1)$ abbiamo che:

$$\frac{V'}{V} \approx \sqrt{\frac{\kappa}{\Omega_\phi}} \approx \frac{H}{\dot{\phi}} \sqrt{1 + w_\phi} \approx \frac{H}{\dot{\phi}}. \quad (3.3.18)$$

Questo è ciò che prevede l'equazione del moto per la soluzione tracker e infatti è nota come condizione tracker[6]. Un'importante funzione le cui proprietà determinano se la soluzione tracker esista o meno è data da[6]:

$$\Gamma = \frac{V''V}{V'^2} \quad (3.3.19)$$

Ci si rende conto facilmente che se facciamo la derivata dell'equazione del moto otteniamo:

$$\left(\frac{V'}{V} \right)' = \frac{V''V - V'^2}{V^2} = \frac{V'^2}{V^2} \left(\frac{V''V}{V'^2} - 1 \right) \quad (3.3.20)$$

da cui:

$$\Gamma = \frac{V''V}{V'^2} = 1 + \left(\frac{V'}{V} \right)' \frac{V^2}{V'^2} \quad (3.3.21)$$

Possiamo riscrivere Γ in termini di $\dot{x} = d \ln x / d \ln a$, di $\ddot{x} = d^2 \ln x / d \ln a^2$ e delle funzioni di stato w_ϕ e w_B

$$\Gamma = 1 - \frac{2}{1+w_\phi} \frac{\ddot{x}}{(6+\dot{x})^2} - \frac{1-w_\phi}{2(1+w_\phi)} \frac{\dot{x}}{6+\dot{x}} + \frac{3}{6+\dot{x}} \frac{(w_B-w_\phi)(1-\Omega_\phi)}{1+w_\phi}. \quad (3.3.22)$$

Ci riferiremo a questa come equazione tracker.

Facciamo adesso notare che l'equazione (3.3.22) non è quella riportata nella Ref. [6], ovvero in quello principalmente usato in questo lavoro di tesi. Tale articolo infatti propone la seguente espressione come equazione per Γ

$$\Gamma = 1 + \frac{w_B-w_\phi}{2(1+w_\phi)} - \frac{1+w_B-2w_\phi}{2(1+w_\phi)} \frac{\dot{x}}{6+\dot{x}} - \frac{2}{(1+w_\phi)} \frac{\ddot{x}}{(6+\dot{x})^2}. \quad (3.3.23)$$

La derivazione di (3.3.22) è riportata nell'appendice A e, nella Ref. [8], gli autori arrivano, pur seguendo un procedimento diverso dal nostro alla stessa espressione (abbiamo voluto inserire in questo lavoro la derivazione che avevamo fatto ancora prima di sapere che l'equazione in Ref.[6] fosse sbagliata). Gli autori di tale articolo quindi hanno mostrato che l'equazione 3.3.22 è l'espressione corretta mentre (3.3.23) presenta errori. Le differenze tra le due sono minime ma non trascurabili.

3.4 Proprietà delle soluzioni tracker e dei potenziali tracker

3.4.1 Quali potenziali ammettono soluzioni tracker?

Vogliamo vedere adesso quali proprietà devono avere i potenziali, e di conseguenza la funzione Γ affinché esistano soluzioni tracker. Possiamo evidenziare tre diversi casi e questo sarà il "teorema" centrale di tutta la nostra discussione[6]:

- Ogni potenziale tale per cui $\Gamma > 1$ e quasi costante su tutto il range di valori iniziali di ϕ ammette una soluzione tracking con la peculiarità di avere $w_\phi < w_B$;
- Ogni potenziale tale per cui $1 - (1 - w_B)/(6 + 2w_B) < \Gamma < 1$ e Γ è quasi costante ammette un comportamento tracker con $w_B < w_\phi < (1/2)(1 + w_B)$
- Non esiste nessun comportamento di tipo tracker se invece $\Gamma < 1 - (1 - w_B)/(6 + 2w_B)$.

3.4. PROPRIETÀ DELLE SOLUZIONI TRACKER E DEI POTENZIALI TRACKER27

Osserviamo che le condizioni che abbiamo indicato, per come sono espresse, sono sufficienti e non necessarie. Facciamo notare che le condizioni iniziali possono variare di oltre 50 ordini di grandezza. Infatti è possibile scegliere come valore iniziale della densità del campo di quintessenza qualsiasi valore tra la densità critica oggi e la densità di background nelle fasi iniziali dell'universo. L'importanza di questo teorema è che per capire se esistano o meno soluzioni tracking basta fare un semplice test sul potenziale e in particolare sulla funzione Γ . Quando si dice che Γ deve essere quasi costante si intende che:

$$\left| \frac{d}{d \ln a}(\Gamma) \right| \ll |\Gamma|, \quad (3.4.1)$$

ovvero che

$$\left| \frac{d\Gamma}{H dt} \right| = \left| \frac{\Gamma' \dot{\phi}}{H} \right| \ll |\Gamma| \quad (3.4.2)$$

E considerando che la condizione per la soluzione tracker è $V'/V \approx H/\dot{\phi}$ otteniamo

$$\left| \frac{\Gamma' V}{\Gamma V'} \right| \ll 1. \quad (3.4.3)$$

Questa condizione vediamo che dipende solo dal potenziale e tramite questa è possibile verificare l'ipotesi di avere Γ quasi costante.

3.4.2 Dimostrazione del 'teorema'

La dimostrazione di questo teorema è divisa in due parti. Nella prima vogliamo verificare che a dati valori di Γ corrispondano i valori richiesti della funzione di stato w_ϕ , nella seconda invece verificheremo che, indipendentemente dal valore iniziale, le soluzioni seguono da un certo punto in poi la stessa soluzione traccia.

La condizione che Γ sia costante è importante per determinare l'equazione di stato. Tenendo presente che $\Omega_\phi \ll 1$ per tutta l'evoluzione della soluzione tracker, e assumendo che Γ dipenda poco da x e dalle sue derivate, in modo tale da risultare costante abbiamo che

$$\Gamma \approx 1 + \frac{w_B - w_\phi}{2(1 + w_\phi)}. \quad (3.4.4)$$

Da cui invertendo otteniamo[6]:

$$w_\phi \approx \frac{w_B - 2(\Gamma - 1)}{1 + 2(\Gamma - 1)}. \quad (3.4.5)$$

Si nota facilmente che la condizione $\Gamma > 1$ assicura che $w_\phi < w_B$. Risolvendo l'equazione (3.4.5) per il caso $1 - (1 - w_B)/(6 + 2w_B) < \Gamma < 1$ otteniamo facilmente che $w_B < w_\phi < (1/2)(1 + w_B)$. Ora il caso più interessante fisicamente è il primo perché è il caso in cui w_ϕ può essere minore di zero, che è appunto quello che vogliamo.

Se siamo esattamente sulla soluzione tracking, cioè w_ϕ rispetta la (3.4.5) per tutta la sua evoluzione possiamo ricavarci come varia la densità di energia di quintessenza. Abbiamo infatti che:

$$w_\phi = \frac{p_\phi}{\rho_\phi} \implies p_\phi = w_\phi \rho_\phi \implies \dot{\rho}_\phi + 3H\rho_\phi(1 + w_\phi) = 0. \quad (3.4.6)$$

Da questa otteniamo facilmente, ricordandoci come ricavare la dipendenza da $1 + z$

$$\rho_\phi = \rho_0(1 + z)^{3(1+w_\phi)}. \quad (3.4.7)$$

La soluzione tracker è quindi perfettamente determinata conoscendo Γ e la funzione di stato di background. Precedentemente abbiamo determinato solo la densità di background ma possiamo ricavarci facilmente w_B

$$w_B = \frac{p_m + p_r}{\rho_m + \rho_r} = \frac{\frac{1}{3}\rho_r}{\rho_m + \rho_r}. \quad (3.4.8)$$

Si nota facilmente che $w_B \approx 1/3$ nella prima parte della sua evoluzione nella quale domina ρ_r mentre $w_B \approx 0$ quando domina ρ_m .

Bisogna adesso dimostrare che se $\Gamma \approx \text{const}$ le soluzioni generiche dell'equazione del moto per differenti valori iniziali convergono verso la soluzione tracker scritta in precedenza. In particolare, con tutta generalità, ρ_ϕ^i potrà variare tra $\rho_{0,c}$ e ρ_B^i , ovvero la densità critica attuale e la densità di background iniziale. Vogliamo che $\rho_\phi^i < \rho_B^i$ in modo tale da non influire sulla formazione delle strutture cosmiche. Per dimostrare questa seconda parte conviene riscrivere la (3.3.17) in questo modo. [6]

$$\frac{1}{6} \frac{d \ln x}{d \ln a} = - \frac{1}{3\sqrt{k(1+w_\phi)}} \sqrt{\Omega_\phi} \frac{V'}{V} - 1 \equiv \Delta(t) - 1. \quad (3.4.9)$$

Possiamo inoltre riscrivere questa equazione tenendo conto che:

$$\frac{d \ln x}{d \ln a} = \frac{2}{1 - w_\phi^2} \frac{d \ln w_\phi}{H dt}. \quad (3.4.10)$$

La (3.4.9) diventa

$$\frac{1}{3} \frac{1}{1 - w_\phi^2} \frac{d \ln w_\phi}{H dt} = \Delta(t) - 1. \quad (3.4.11)$$

Questa equazione mostra che se $\Delta \approx 1$ allora sarò sulla soluzione tracker in quanto $w_\phi \approx \text{const}$, altrimenti w_ϕ varierà più o meno rapidamente. Nel paragrafo successivo vedremo come, indipendentemente dalle condizioni iniziali, avremo che la funzione di stato convergerà alla soluzione tracker (completando così la dimostrazione).

3.4.3 Casi di overshooting e undershooting

Abbiamo detto che $\rho_{0,c} < \rho_\phi^i < \rho_B^i$, se però indichiamo con $\bar{\rho}_\phi^i$ la condizione iniziale della soluzione tracker possiamo distinguere due casi, ovvero $\rho_{0,c} < \rho_\phi^i < \bar{\rho}_\phi^i$ e $\bar{\rho}_\phi^i < \rho_\phi^i < \rho_B^i$, nel primo caso diremo che si tratta di un caso di undershooting mentre nel secondo di overshooting.

Iniziamo analizzando il caso di overshooting. Possiamo dividere l'evoluzione in tre fasi.[6]

1. Il campo, siccome abbiamo un'energia potenziale molto alta e V'/V è grande, rotola immediatamente e rapidamente lungo il potenziale e viene a dominare da subito l'energia cinetica. Abbiamo quindi $w_\phi \rightarrow +1$. Anche dalla (3.4.10) possiamo vedere che w_ϕ tende al suo valore massimo in quanto sono grandi sia V'/V che Ω_ϕ , quindi anche Δ e di conseguenza $d \ln x / d \ln a \gg 1$. In questa fase l'energia cinetica è molto grande e quindi ϕ attraversa $\bar{\phi}$ senza stabilirsi su essa.
2. Mentre ϕ rotola V'/V e Ω_ϕ diminuiscono rapidamente e quindi Δ diventa più piccolo di 1. Ciò significa che w_ϕ inizia a diminuire da +1 fino a -1. Quando raggiunge -1 il campo è praticamente congelato attorno ad un valore costante, perciò anche ρ_ϕ è costante.
3. Quando $w_\phi \approx -1$, Δ ricomincia a crescere in quanto, anche se V'/V e ρ_ϕ restano costanti, diminuisce ρ_B e quindi aumenta Ω_ϕ . Quando Δ raggiunge di nuovo l'unità w_ϕ ricomincia a crescere e il campo rotola di nuovo. Adesso però l'energia cinetica è minore rispetto al primo punto e quindi con delle piccole oscillazioni abbiamo che ϕ si stabilisce sulla soluzione tracking $\bar{\phi}$.

Torneremo tra un attimo a queste piccole oscillazione, prima però consideriamo il caso di undershoot. In questo caso abbiamo che anziché partire dal punto 1, dovremo partire dal punto 3 in quanto siamo già nel caso in cui $w_\phi \rightarrow -1$.

3.4.4 Piccole oscillazioni

Ci resta da dimostrare che se siamo sufficientemente vicini alla soluzione tracker allora abbiamo una convergenza verso tale soluzione.

Riprendiamo l'equazione relativa a Γ

$$\Gamma = 1 + \frac{3}{6 + \dot{x}} \frac{(w_B - w_\phi)(1 - \Omega_\phi)}{1 + w_\phi} - \frac{1 - w_\phi}{2(1 + w_\phi)} \frac{\dot{x}}{6 + \dot{x}} - \frac{2}{1 + w_\phi} \frac{\ddot{x}}{(6 + \dot{x})^2}. \quad (3.4.12)$$

Ora supponiamo di avere $w_\phi = w_0 + \delta$, dove w_0 è il valore della soluzione tracker, e lo sostituiamo nella (3.4.12) tenendo poi in considerazione solo i termini lineari in δ e nelle sue derivate.

Assumiamo che Γ sia costante o comunque vari molto lentamente e che $\Omega_\phi \ll 1$. I termini Γ e 1 sono soluzioni di δ e pertanto si elimineranno assieme agli altri primi termini dello sviluppo.

Il secondo termine dopo l'uguale può essere scritto come:

$$\frac{(w_B - w_\phi)(1 - \Omega_\phi)}{2(1 + w_\phi)} = \frac{w_B - w_0 - \delta}{2(1 + w_0 + \delta)} = \frac{w_B - w_0 - \delta}{2(1 + w_0)(1 + \frac{\delta}{1 + w_0})} = \quad (3.4.13)$$

$$= \frac{w_B - w_0 - \delta}{2(1 + w_0)} \left(1 - \frac{\delta}{1 + w_0}\right) = \frac{w_B - w_0}{2(1 + w_0)} - \frac{\delta}{2(1 + w_0)} \left(1 + \frac{w_B - w_0}{1 + w_0}\right) + O(\delta^2) \quad (3.4.14)$$

Ora il primo termine dello sviluppo, come tutti i primi termini dei vari sviluppi che faremo, soddisfa l'equazione (3.4.12) e quindi complessivamente darà contributo nullo all'equazione su δ . Trascuriamo per questa analisi i termini agli ordini superiori al secondo. Otteniamo quindi come primo contributo il termine

$$-\frac{\delta(1 + w_B)}{2(1 + w_0)^2}. \quad (3.4.15)$$

Per considerare il termine che dipende da \dot{x} nella (3.4.12) dobbiamo prima capire come questo si espande rispetto δ .

$$x = \frac{1 + w_\phi}{1 - w_\phi} = \frac{1 + w_0 + \delta}{1 - w_0 - \delta} = \frac{1 + w_0 + \delta}{(1 - w_0)(1 - \frac{\delta}{1 - w_0})} = \quad (3.4.16)$$

$$= \frac{1 + w_0 + \delta}{(1 - w_0)} \left(1 + \frac{\delta}{1 - w_0}\right) = \frac{1 + w_0}{(1 - w_0)} + \frac{\delta}{1 - w_0} \left(1 + \frac{1 + w_0}{1 - w_0}\right) + O(\delta) = \quad (3.4.17)$$

$$= \frac{1 + w_0}{(1 - w_0)} + \frac{2\delta}{(1 - w_0)^2}. \quad (3.4.18)$$

3.4. PROPRIETÀ DELLE SOLUZIONI TRACKER E DEI POTENZIALI TRACKER31

Quello che serve per calcolare le derivate è però il $\ln x$

$$\ln x = \ln\left(x_0 + \frac{2\delta}{(1-w_0)^2}\right) = \ln\left[x_0\left(1 + \frac{2\delta}{(1+w_0)(1-w_0)}\right)\right] = \quad (3.4.19)$$

$$= \ln x_0 + \ln\left(1 + \frac{2\delta}{(1+w_0)(1-w_0)}\right) = \ln x_0 + \frac{2\delta}{(1+w_0)(1-w_0)}. \quad (3.4.20)$$

Quindi abbiamo che

$$\dot{x} = \dot{x}_0 + \frac{2\dot{\delta}}{(1+w_0)(1-w_0)} \quad \ddot{x} = \ddot{x}_0 + \frac{2\ddot{\delta}}{(1+w_0)(1-w_0)}. \quad (3.4.21)$$

Sostituendo nella (3.4.12) e semplificando i primi termini dello sviluppo che soddisfano la loro equazione per Γ otteniamo:

$$0 = -\frac{\delta(1+w_B)}{2(1+w_0)^2} - \frac{1-w_\phi}{2(1+w_\phi)} \frac{1}{6+\dot{x}} \frac{2\dot{\delta}}{(1+w_0)(1-w_0)} - \frac{2}{(1+w_\phi)} \frac{1}{(6+\dot{x})^2} \frac{2\ddot{\delta}}{(1+w_0)(1-w_0)}. \quad (3.4.22)$$

Ora notiamo che il secondo e il terzo termine dipendono ancora da w_ϕ . Se poi espandiamo in serie di Taylor tutti i termini che non abbiamo ancora considerato compaiono derivate ad ordini superiori al primo. Gli unici termini in cui δ e le sue derivate restano al primo ordine sono quelli in cui w_ϕ è diventato semplicemente w_0 , ovvero i termini zero dello sviluppo.

$$0 = -\frac{\delta(1+w_B)}{2(1+w_0)^2} - \frac{1-w_0}{2(1+w_0)} \frac{1}{6+\dot{x}} \frac{2\dot{\delta}}{(1+w_0)(1-w_0)} - \frac{2}{(1+w_0)} \frac{1}{(6+\dot{x})^2} \frac{2\ddot{\delta}}{(1+w_0)(1-w_0)} \quad (3.4.23)$$

A questo punto facendo le dovute semplificazioni otteniamo:

$$0 = \ddot{\delta} + \frac{1}{4}(6+\dot{x})(1-w_0)\dot{\delta} + \frac{1}{8}(1+w_B)(1-w_0)(6+\dot{x})^2\delta. \quad (3.4.24)$$

Tra le ipotesi avevamo che Γ fosse quasi costante, di conseguenza x varia molto lentamente e quindi possiamo trascurare i termini $\dot{x}\dot{\delta}$ e $\ddot{x}\delta$ ottenendo:

$$\ddot{\delta} + \frac{3}{2}(1-w_0)\dot{\delta} + \frac{9}{2}(1+w_B)(1-w_0)\delta = 0. \quad (3.4.25)$$

Questa non è altro che una equazione differenziale del secondo ordine che ci dice come varia la distanza della soluzione iniziale dalla soluzione tracker. Le soluzioni sono del tipo $\delta \approx a^\gamma$ con

$$\gamma = -\frac{3}{4}(1 - w_0) \pm \frac{i}{2} \sqrt{18(1 + w_B)(1 - w_0) - \frac{9}{2}(1 - w_0)^2}. \quad (3.4.26)$$

La parte reale dell'esponente è negativa per $-1 < w_0 < 1$ che include tutti i casi di nostro interesse. Senza altre condizioni quindi scopriamo che le soluzioni che si avvicinano alla soluzione tracker convergono ad essa in modo esponenziale.

3.5 Soluzioni tracker per potenziali con legge di potenza inversa

Fino adesso abbiamo trattato solo il caso generale. Vediamo cosa succede praticamente prendendo un determinato potenziale. Consideriamo $V = M^{4+\alpha}/\phi^\alpha$ [6], dove M è una scala di energia. In questo caso troviamo

$$V' = -\alpha \frac{M^{4+\alpha}}{\phi^{\alpha+1}}, \quad (3.5.1)$$

$$V'' = \alpha(\alpha + 1) \frac{M^{4+\alpha}}{\phi^{\alpha+2}}, \quad (3.5.2)$$

e quindi

$$\Gamma = \frac{V''V}{V'^2} = \frac{M^{4+\alpha}}{\phi^\alpha} \alpha(\alpha + 1) \frac{M^{4+\alpha}}{\phi^{\alpha+2}} \left(-\frac{1}{\alpha} \frac{\phi^{\alpha+1}}{M^{4+\alpha}} \right)^2, \quad (3.5.3)$$

che porta infine a

$$\Gamma = 1 + \alpha^{-1}. \quad (3.5.4)$$

Abbiamo quindi constatato che $\Gamma > 1$, ed è costante per questo tipo di potenziali e quindi ammette soluzioni tracking con la condizione $w_\phi < w_B$ che è quella fisicamente più interessante. Andiamo quindi a vedere se effettivamente abbiamo tale comportamento.

Dobbiamo risolvere delle equazioni differenziali, lo faremo numericamente, per capire come si comporterà il sistema. Vogliamo però riscriverle utilizzando la dipendenza da $1+z$ evidenziata nel paragrafo 2.6. Utilizziamo questo paragrafo perché altrimenti dovremmo risolvere un'equazione differenziale in più, ovvero quella relativa al fattore di scala. Troviamo

$$\rho_B = \rho_{0,m}(1+z)^3 + \rho_{0,r}(1+z)^4 \quad (3.5.5)$$

$$H^2 = \kappa \left[\rho_B + \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi) \right] = \kappa \left[\rho_B + \frac{1}{2} \phi'^2 H^2 (1+z)^2 + V(\phi) \right]. \quad (3.5.6)$$

In questo caso si è indicato con ' la derivazione rispetto a $1+z$. Ricavando di nuovo H^2 otteniamo:

$$H^2 = \frac{\kappa(\rho_B + V(\phi))}{1 - \frac{1}{2} \kappa \phi'^2 (1+z)^2}. \quad (3.5.7)$$

Abbiamo inoltre che, partendo dall'equazione (3.1.4), possiamo scrivere

$$\dot{H} = -\frac{3}{2} \kappa \left(\rho_B + p_B + \dot{\phi}^2 \right). \quad (3.5.8)$$

Da questa come prima

$$HH'(1+z) = \frac{3}{2} \kappa \left[\rho_B + p_B + H^2 (1+z)^2 \phi'^2 \right]. \quad (3.5.9)$$

L'ultima equazione che ci manca da esplicitare rispetto a $1+z$ è

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V^\phi = 0 \quad (3.5.10)$$

dove adesso indichiamo con l'apice ϕ la derivata rispetto al campo, facciamo notare che questa notazione è diversa da quella usata precedentemente.

$$-H(1+z)(-H(1+z)\phi')' - 3H^2(1+z)\phi + V^\phi = 0 \quad (3.5.11)$$

$$H^2(1+z)^2\phi'' + HH'(1+z)^2\phi' - 2H^2(1+z)\phi' + V^\phi = 0 \quad (3.5.12)$$

Questa, una volta sostituiti H^2 e $H'H$, è un'equazione differenziale del secondo ordine.

Adesso dobbiamo valutare le grandezze in gioco. Una stima della costante di Hubble ai nostri giorni è $H_0 \approx 10^{-42}$ GeV. Abbiamo inoltre che $k^2 \approx 8\pi G \approx m_{Pl}^{-2}$, dove $m_{Pl} \approx 10^{18}$ GeV è la massa di Plank ridotta. Possiamo a questo punto fornire una stima di M . Abbiamo infatti che $H_0^2 \approx k^2 V(\phi_0)$, in quanto in tempi recenti diventa dominante la densità di quintessenza. Supponendo inoltre che $\phi_0 \approx m_{Pl}$ (condizione necessaria per avere un'accelerazione in tempi recenti) abbiamo che $H_0^2 m_{Pl}^2 \approx M^{4+\alpha} / m_{Pl}^\alpha$. Da questa otteniamo[5]:

$$M \approx \left(\frac{H_0}{m_{Pl}} \right)^{\frac{2}{4+\alpha}} m_{Pl}. \quad (3.5.13)$$

Con i valori indicati sopra e $\alpha = 6$ otteniamo $M \approx 10^6$ GeV, che è un'energia confrontabile con quelle della fisica delle particelle.

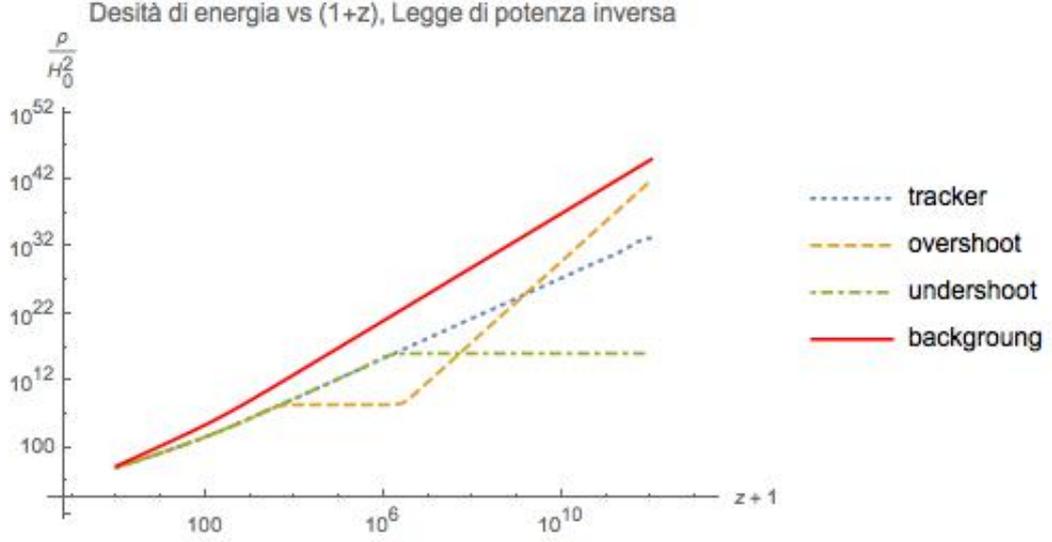


Figura 3.1: Soluzioni tracking per potenziale con legge di potenza inversa $V = 1/\phi^6$. Possiamo notare che sia il caso di overshooting che undershooting dopo un periodo in cui restano congelati convergono alla soluzione tracker

A questo punto, per comodità di calcolo definiamo $\tilde{H} = H/H_0$, ovvero otteniamo $\tilde{H}_0 = 1$. Mettendoci poi in unità naturali abbiamo che $k = 1$ e quindi $m_{Pl} \approx 1$. Le nostre unità di misura d'ora in avanti saranno tutte rispetto a H_0^2 . In queste dimensioni abbiamo $\tilde{M} \approx 1$. Questo è un valore approssimato che rende bene il fatto che al giorno d'oggi diventa importante la densità di energia del campo scalare. Noi utilizzeremo $\tilde{M} = 1$, il valore esatto viene fissato in modo preciso andando a considerare il valore misurato di $\Omega_{\phi,0}$.

Risolvendo l'equazione differenziale (3.5.12) con diversi valori di $\phi(10^{12})$, dove 10^{12} è il valore iniziale che abbiamo scelto per $1+z$ e considerando che

$$\rho_\phi = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi) = \frac{1}{2}(1+z)^2 H^2 \phi'^2 + V(\phi) \quad (3.5.14)$$

otteniamo il grafico in figura 3.1 nel quale è evidenziata la densità di background, la soluzione tracker e un caso di overshoot e uno di undershoot.

Risolvendo l'equazione (3.4.5) con $\Gamma = 1 + \alpha^{-1}$ otteniamo

$$w_\phi = \frac{\alpha w_B - 2}{\alpha + 2} \quad (3.5.15)$$

Da questa equazione troviamo che, per $\alpha = 6$, $w_\phi = 0$ durante il periodo dominato dalla densità di radiazione ($w_B = 1/3$), mentre $w_\phi = -0.25$ du-

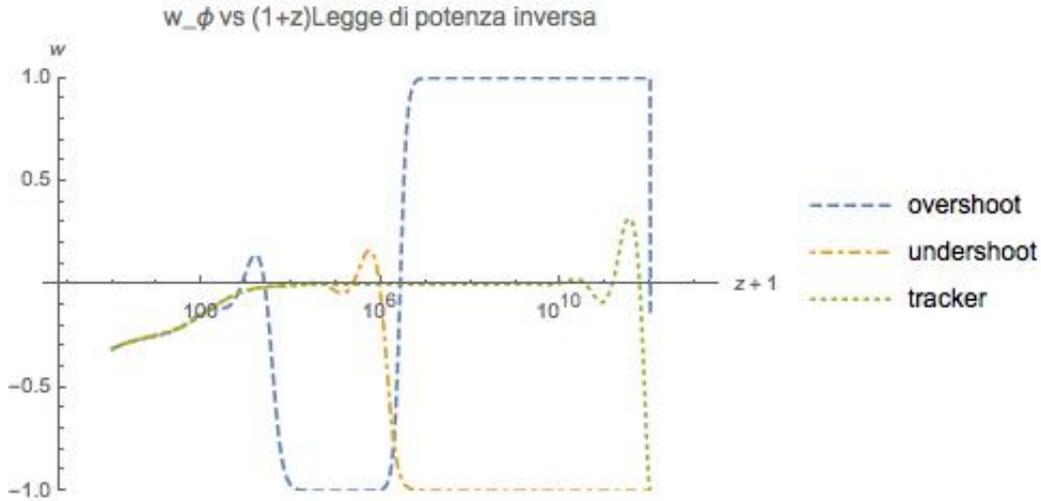


Figura 3.2: Equazione di stato per la soluzione tracker e per i casi di overshooting e undershooting

rante il periodo dominato dalla densità di materia ($w_B = 0$). In figura 3.2 possiamo vedere come varia la funzione di stato w_ϕ . Come abbiamo sottolineato in precedenza, nel caso di overshooting tende subito a +1, poi a -1 e infine si stabilizza sulla soluzione tracker trovata analiticamente. Nel caso dell'undershooting invece resta ferma a -1 e poi viene attratta anch'essa sulla soluzione tracker. In figura 3.3 sottolineiamo la dipendenza di Ω_ϕ da $(1+z)$ e notiamo che Ω_ϕ oggi diventa dominante.

Vogliamo adesso motivare la scelta di $\alpha = 6$. Innanzitutto per $\alpha < 5$ non c'è convergenza alla soluzione tracker entro l'epoca attuale. Per $\alpha \geq 5$ invece la convergenza avviene entro l'equivalenza materia radiazione. In più vogliamo che α sia piccolo in modo tale da avere w_ϕ abbastanza vicino a -1 con $\Omega_\phi \approx 0.8$. Abbiamo ricavato prima come w_ϕ dipende da α ed è facile verificare che più α è piccolo, più lo è w_ϕ . Il valore $\alpha = 6$ è quindi il valore che rende meglio questo compromesso tra la convergenza in tempi ragionevoli e w_ϕ sufficientemente piccolo. Sperimentalmente vogliamo che $w_\phi < -0.6$ con $\Omega_\phi \approx 0.8$ ma con il tipo di potenziale scelto finora non riusciamo ad ottenere tale risultato[6].

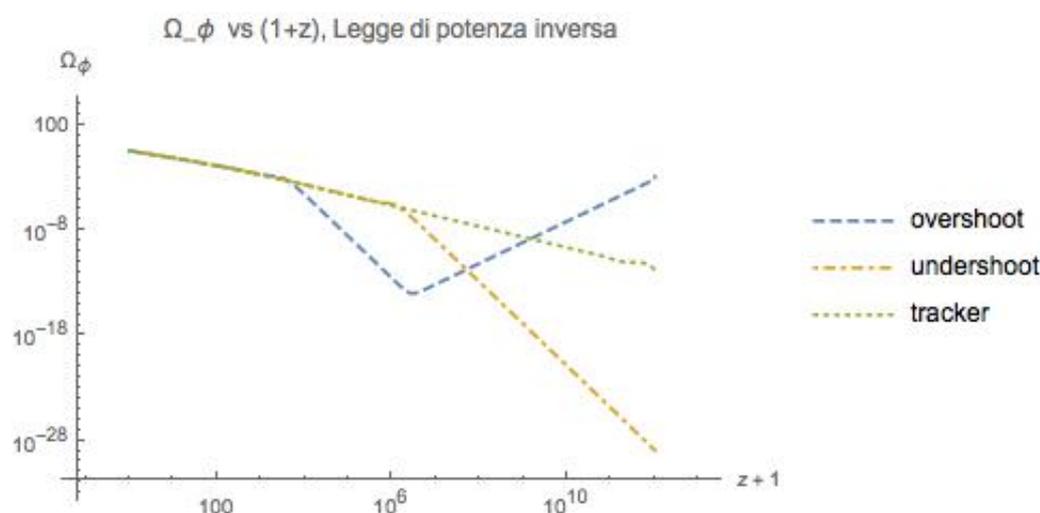


Figura 3.3: Ω_ϕ nei casi di overshooting, undershooting e tracker. Si può notare che in tutti e tre i casi tende a 10^0 per $(1+z) \rightarrow 1$

3.6 Soluzioni tracker di potenziali con legge esponenziale

Prima abbiamo visto che sarebbe conveniente avere potenziali $\phi^{-\alpha}$, con α grandi all'inizio per consentire la convergenza e piccoli alla fine per avere w_ϕ più piccolo possibile. Un compromesso è una serie infinita di potenze. Infatti all'inizio, con $\phi \ll 1$ domineranno i termini con α più grande mentre al crescere di ϕ inizieranno a dominare i termini con α piccolo. Un buon candidato è $V(\phi) = M^4 \exp(M/\phi)$. Vediamo se soddisfa le condizioni su Γ per avere una soluzione tracker.

$$V' = -M^4 \frac{\exp(M/\phi)}{\phi^2} M, \quad (3.6.1)$$

$$V'' = M^4 \frac{(1 + 2\phi/M) \exp(M/\phi)}{\phi^4} M^2, \quad (3.6.2)$$

e quindi

$$\Gamma = 1 + 2 \frac{\phi}{M}. \quad (3.6.3)$$

Con questa verifica sappiamo che Γ è sempre maggiore di 1 ed è costante purché $\frac{\phi}{M} \ll 1$, caso che a noi va bene. M viene determinato con considerazioni simili a quelle fatte nel caso del potenziale con legge di potenza inversa.

Vediamo quindi, anche in questo caso, come si comportano le soluzioni dell'equazione differenziale (3.5.12). In figura 3.4 riportiamo come variano le

3.6. SOLUZIONI TRACKER DI POTENZIALI CON LEGGE ESPONENZIALE³⁷

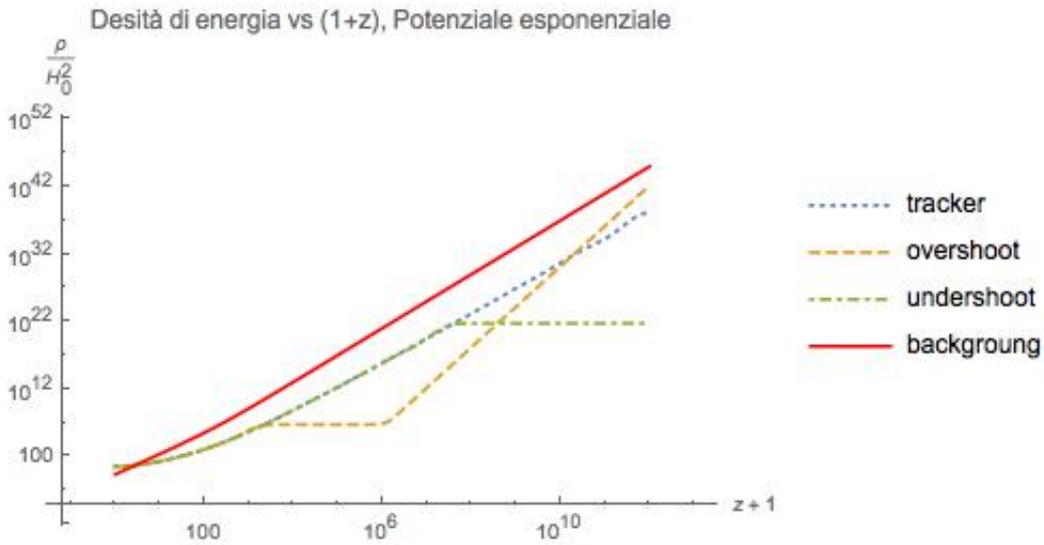


Figura 3.4: Soluzioni tracking per il potenziale $V(\phi) = \exp(1/\phi)$, come nel caso precedente si può vedere che sia l'overshoot che l'undershoot convergono alla soluzione tracker la quale supera la densità di background in tempi recenti

densità dei casi di overshooting e undershooting e la densità di background. Facciamo notare che il potenziale esponenziale ci dà il comportamento tracker voluto, come assicurato dal teorema enunciato precedentemente. Il grafico in figura 3.5 mostra inoltre che è possibile avere valori di w_ϕ molto vicini a -1 ai giorni nostri. Il potenziale esponenziale quindi ha una maggiore compatibilità con i dati sperimentali ai giorni nostri rispetto al potenziale precedentemente usato. Riportiamo poi per completezza in figura 3.6 come varia Ω_ϕ in questo caso e facciamo notare che si può vedere molto bene il fatto che sia dominante ai nostri giorni.

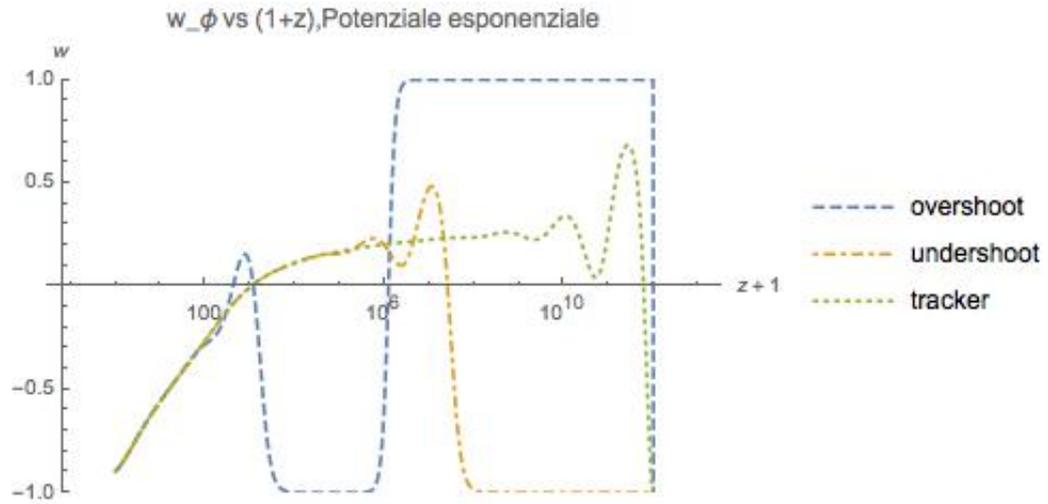


Figura 3.5: In questo caso vediamo che w_ϕ ha il comportamento desiderato di avvicinarsi a -1 ai giorni nostri

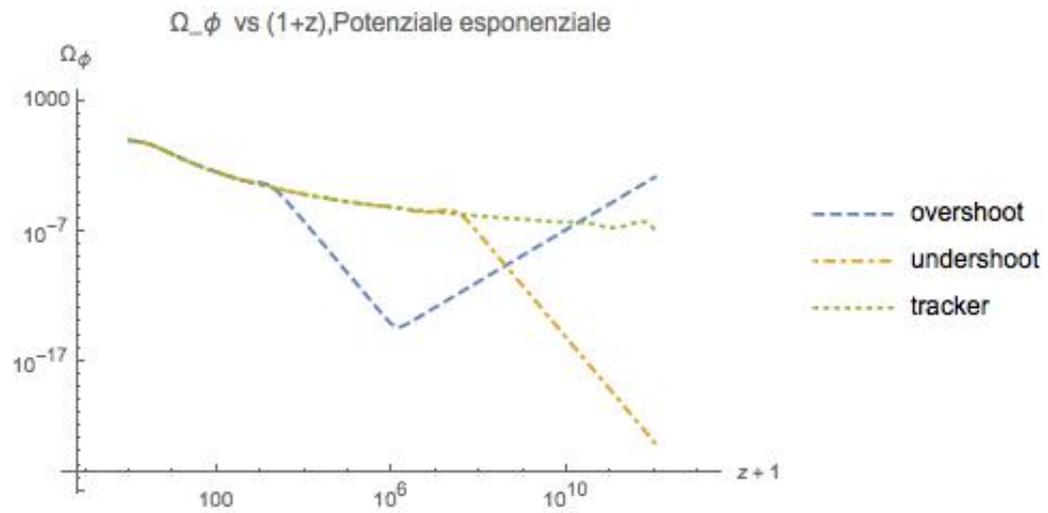


Figura 3.6: Questo grafico ci mostra come varia Ω_ϕ e il fatto che diventa la componente dominante ai nostri giorni

Capitolo 4

Conclusione

In questo lavoro di tesi ci siamo proposti di ripercorrere alcuni modelli cosmologici che sono stati formulati durante gli anni e capire i loro punti di forza e le loro debolezze. Ci siamo quindi resi conto che un universo formato solo da materia o radiazione non permetteva l'accelerazione dell'universo verificata sperimentalmente. Una prima soluzione è stata trovata introducendo una costante cosmologica, purtroppo però questa sollevava problemi teorici difficilmente eliminabili. Ci siamo quindi concentrati su quelli che si chiamano modelli di quintessenza. Anche qua sono sorti problemi, in particolare due, il problema di coincidenza e il problema di 'fine-tuning'. Per risolvere il problema di coincidenza abbiamo introdotto il concetto di soluzioni tracker. Queste sono soluzioni della stessa equazione differenziale ma con condizioni iniziali molto diverse. Con opportune condizioni sul potenziale che governa l'evoluzione di tali soluzioni è possibile trovare famiglie di soluzioni che durante la loro evoluzione si uniscono su una traccia comune. Queste soluzioni soddisfano la richiesta di diventare confrontabili con la densità di background ai giorni nostri, di essere trascurabili rispetto a questa nelle fasi iniziali e di avere una grande libertà sulle condizioni iniziali. Questo tipo di soluzioni risolve opportunamente il problema della coincidenza.

Resta in sospeso il 'fine-tuning problem', la densità di energia di quintessenza infatti è molto piccola rispetto alla densità del vuoto tipica della fisica delle particelle. Questo implica che, o tale densità non è un buon candidato per la quintessenza, o la quintessenza non sia il modello adatto per questo problema. Abbiamo trovato però un risultato che concilia leggermente il modello di quintessenza con i valori della fisica particolare. Infatti la scale di masse in gioco nel parametro libero del potenziale è compatibile con le masse della fisica delle particelle. Questo ovviamente non risolve il 'fine-tuning problem' ma è positivo che, senza nessuna ragione a priori, tali grandezze siano simili.

Appendice A

Derivazione di Γ

Partiamo dall'equazione (3.3.17) che riscriviamo per comodità

$$\frac{V'}{V} = \mp \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\kappa}{\Omega_\phi}} \sqrt{1 + w_\phi} \left(6 + \frac{d \ln x}{d \ln a} \right). \quad (\text{A.0.1})$$

e consideriamo anche l'equazione (3.3.21)

$$\Gamma = \frac{V''V}{V'^2} = 1 + \left(\frac{V'}{V} \right)' \frac{V^2}{V'^2}. \quad (\text{A.0.2})$$

Dobbiamo quindi riuscire a derivare V'/V rispetto al campo ϕ . Riscriviamo la (A.0.1) in questo modo:

$$\frac{V'}{V} = -\sqrt{k} \sqrt{\frac{\rho_B + 1/2\dot{\phi}^2 + V(\phi)}{1/2\dot{\phi}^2 + V(\phi)}} \sqrt{\frac{\dot{\phi}^2}{1/2\dot{\phi}^2 + V(\phi)}} \left(6 + \frac{d \ln x}{d \ln a} \right) \quad (\text{A.0.3})$$

da cui

$$\frac{V'}{V} = -\frac{1}{2} H \frac{\dot{\phi}}{1/2\dot{\phi}^2 + V(\phi)} (6 + \dot{x}). \quad (\text{A.0.4})$$

Adesso facciamo notare che

$$\frac{d}{d\phi} \frac{d}{d \ln a} = \frac{dt}{d\phi} \frac{d \ln a}{dt} \frac{d}{d \ln a} \frac{d}{d \ln a} = \frac{1}{\dot{\phi}} H \frac{d^2}{d \ln^2 a}. \quad (\text{A.0.5})$$

Possiamo adesso derivare (A.0.4) e moltiplicarlo per $(V/V')^2$. Definiamo

$$-\frac{1}{2} H \frac{\dot{\phi}}{1/2\dot{\phi}^2 + V(\phi)} = A, \quad (6 + \dot{x}) = B \quad (\text{A.0.6})$$

Quello che dobbiamo fare è andare a calcolare

$$\left(\frac{V}{V'}\right)^2 (AB' + A'B). \quad (\text{A.0.7})$$

Iniziamo con il primo dei due termini tra parentesi

$$\left(\frac{V}{V'}\right)^2 AB' = -\frac{1}{\left(\frac{1}{2}H\frac{\dot{\phi}}{1/2\dot{\phi}^2+V(\phi)}(6+\dot{x})\right)^2} \frac{1}{2}H\frac{\dot{\phi}}{1/2\dot{\phi}^2+V(\phi)}\left(\frac{H}{\dot{\phi}}\ddot{x}\right) = \quad (\text{A.0.8})$$

$$= -2\frac{1/2\dot{\phi}^2+V(\phi)}{\dot{\phi}^2}\frac{\ddot{x}}{(6+\dot{x})^2} = -\frac{2}{1+w_\phi}\frac{\ddot{x}}{(6+\dot{x})^2}. \quad (\text{A.0.9})$$

Il secondo termine è molto più complicato

$$\begin{aligned} \left(\frac{V}{V'}\right)^2 A'B &= -\frac{1}{\left(\frac{1}{2}H\frac{\dot{\phi}}{1/2\dot{\phi}^2+V(\phi)}(6+\dot{x})\right)^2} \\ &\frac{1}{2}\frac{(H'\dot{\phi}+H(\dot{\phi}'))(1/2\dot{\phi}^2+V(\phi))-H\dot{\phi}(1/2\dot{\phi}^2+V(\phi))'}{(1/2\dot{\phi}^2+V(\phi))^2}(6+\dot{x}) = \quad (\text{A.0.10}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= -\frac{2}{6+\dot{x}}\frac{1}{H^2\dot{\phi}^2}\left[\frac{1}{\dot{\phi}}\left(-\frac{3}{2}\kappa\right)\left(\rho_B+p_B+\dot{\phi}^2\right)\dot{\phi}+H\frac{1}{\dot{\phi}}\ddot{\phi}\right]\left(\frac{1}{2}\dot{\phi}^2+V\right)+ \\ &\quad +\frac{2}{6+\dot{x}}\frac{1}{H^2\dot{\phi}^2}H\dot{\phi}\left(\frac{1}{\dot{\phi}}\ddot{\phi}\dot{\phi}+V'\right) = \quad (\text{A.0.11}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= -\frac{2}{6+\dot{x}}\left[-\frac{3}{2}\kappa\frac{1}{H^2\dot{\phi}^2}\left(\rho_B+p_B+\dot{\phi}^2\right)+\frac{\ddot{\phi}}{H\dot{\phi}^3}\right]\left(\frac{1}{2}\dot{\phi}^2+V\right)+ \\ &\quad +\frac{2}{6+\dot{x}}\left(\frac{\ddot{\phi}}{H\dot{\phi}}+\frac{V'}{H\dot{\phi}}\right) = \quad (\text{A.0.12}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= -\frac{2}{6+\dot{x}}\left[-\frac{3}{2}\kappa\frac{1}{H^2\dot{\phi}^2}\left(\rho_B+p_B\right)\left(\frac{1}{2}\dot{\phi}^2+V\right)+\left(-\frac{3}{2}\frac{\kappa\dot{\phi}^2}{H^2}+\frac{\ddot{\phi}}{H\dot{\phi}}\right)\frac{1/2\dot{\phi}^2+V}{\dot{\phi}^2}\right]+ \\ &\quad +\frac{2}{6+\dot{x}}\left(\frac{\ddot{\phi}}{H\dot{\phi}}+\frac{V'}{H\dot{\phi}}\right). \quad (\text{A.0.13}) \end{aligned}$$

Definisco

$$C = -\frac{2}{6+\dot{x}} \left[-\frac{3}{2}\kappa \frac{1}{H^2\dot{\phi}^2} (\rho_B + p_B) \left(\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V \right) \right] \quad (\text{A.0.14})$$

e

$$D = -\frac{2}{6+\dot{x}} \left[\left(-\frac{3}{2}\kappa \frac{\dot{\phi}^2}{H^2} + \frac{\ddot{\phi}}{H\dot{\phi}} \right) \frac{1/2\dot{\phi}^2 + V}{\dot{\phi}^2} - \left(\frac{\ddot{\phi}}{H\dot{\phi}} + \frac{V'}{H\dot{\phi}} \right) \right]. \quad (\text{A.0.15})$$

Ho quindi, usando(3.3.4) e (3.3.6),

$$D = -\frac{2}{6+\dot{x}} \left[\left(-\frac{3}{2}\kappa \frac{\dot{\phi}^2}{H^2} + \frac{-3H\dot{\phi} - V'}{H\dot{\phi}} \right) \frac{1}{1+w_\phi} - \left(\frac{-3H\dot{\phi} - V'}{H\dot{\phi}} + \frac{V'}{H\dot{\phi}} \right) \right], \quad (\text{A.0.16})$$

e

$$D = -\frac{2}{6+\dot{x}} \left[-\frac{3}{2}\kappa \frac{\dot{\phi}^2}{H^2(1+w_\phi)} + 3 \left(\frac{w_\phi}{1+w_\phi} \right) - \frac{V'}{H\dot{\phi}} \frac{1}{1+w_\phi} \right] \quad (\text{A.0.17})$$

e quindi

$$D = -\frac{2}{6+\dot{x}} \left[-\frac{3\kappa}{2} \frac{1/2\dot{\phi}^2 + V}{\kappa(\rho_B + 1/2\dot{\phi}^2 + V)} + 3 \left(\frac{w_\phi}{1+w_\phi} \right) - \frac{V'}{VH\dot{\phi}} \frac{V}{1+w_\phi} \right]. \quad (\text{A.0.18})$$

Sfruttando l'equazione (A.0.4) otteniamo

$$D = -\frac{2}{6+\dot{x}} \left[-\frac{3}{2}\Omega_\phi + 3 \left(\frac{w_\phi}{1+w_\phi} \right) - \left(-\frac{1}{2}H \frac{\dot{\phi}}{1/2\dot{\phi}^2 + V(\phi)} (6+\dot{x}) \right) \frac{1}{H\dot{\phi}} \frac{V}{1+w_\phi} \right], \quad (\text{A.0.19})$$

da cui

$$D = -\frac{2}{6+\dot{x}} \left[-\frac{3}{2}\Omega_\phi + 3 \left(\frac{w_\phi}{1+w_\phi} \right) + \frac{6+\dot{x}}{4} \frac{1-w_\phi}{1+w_\phi} \right], \quad (\text{A.0.20})$$

e

$$D = -\frac{1-w_\phi}{2(1+w_\phi)} \frac{\dot{x}}{6+\dot{x}} - \frac{2}{6+\dot{x}} \left(-\frac{3}{2}\Omega_\phi + 3 \frac{w_\phi}{1+w_\phi} + \frac{3}{2} \frac{1-w_\phi}{1+w_\phi} \right). \quad (\text{A.0.21})$$

Da questa arriviamo alla forma finale

$$D = -\frac{1-w_\phi}{2(1+w_\phi)} \frac{\dot{x}}{6+\dot{x}} + \frac{3}{6+\dot{x}} \left(-\frac{w_\phi(1-\Omega_\phi)}{1+w_\phi} + \frac{\Omega_\phi - 1}{w_\phi + 1} \right). \quad (\text{A.0.22})$$

Riprendiamo ora l'equazione (A.0.14), la quale diventa

$$C = \frac{3}{6 + \dot{x}} \frac{\rho_B + p_B}{\rho_B + 1/2\dot{\phi}^2 + V} \frac{1}{1 + w_\phi}, \quad (\text{A.0.23})$$

da cui

$$C = \frac{3}{6 + \dot{x}} \frac{\Omega_B(1 + w_B)}{1 + w_\phi}, \quad (\text{A.0.24})$$

e infine

$$C = \frac{3}{6 + \dot{x}} \frac{(1 - \Omega_\phi)(1 + w_B)}{1 + w_\phi}. \quad (\text{A.0.25})$$

Tenendo presente l'equazione (A.0.7) e facendo tutte le sostituzioni otteniamo un'espressione esplicita per l'equazione (A.0.2)

$$\begin{aligned} \Gamma = 1 - \frac{2}{1 + w_\phi} \frac{\ddot{x}}{(6 + \dot{x})^2} \\ - \frac{1 - w_\phi}{2(1 + w_\phi)} \frac{\dot{x}}{6 + \dot{x}} + \frac{3}{6 + \dot{x}} \left(-\frac{w_\phi(1 - \Omega_\phi)}{1 + w_\phi} + \frac{\Omega_\phi - 1}{w_\phi + 1} \right) \\ + \frac{3}{6 + \dot{x}} \frac{(1 - \Omega_\phi)(1 + w_B)}{1 + w_\phi}, \quad (\text{A.0.26}) \end{aligned}$$

che diventa

$$\Gamma = 1 - \frac{2}{1 + w_\phi} \frac{\ddot{x}}{(6 + \dot{x})^2} - \frac{1 - w_\phi}{2(1 + w_\phi)} \frac{\dot{x}}{6 + \dot{x}} + \frac{3}{6 + \dot{x}} \frac{(w_B - w_\phi)(1 - \Omega_\phi)}{1 + w_\phi}. \quad (\text{A.0.27})$$

Questa è l'equazione che poi è riportata nella sezione 3.3.2.

Bibliografia

- [1] M. Sami Edmund J. Copeland and Shinji Tsujikawa. Dynamics of dark energy. *Int.J.Mod.Phys.D15:1753-1936,2006*, 2006.
- [2] Adam G. Riess et al. Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant. *Astron.J.116:1009-1038,1998*, 1998.
- [3] Suzuki et al. Spectra and hst light curves of six type ia supernovae at $0.511 < z < 1.12$ and the union2 compilation. *The Astrophysical Journal*, 2010.
- [4] Andrew Liddle. *An introduction to modern cosmology*. Wiley, 2003.
- [5] Shinji Tsujikawa Luca Amendola. *Dark Energy, theory and observations*. Cambridge, 2010.
- [6] Ivaylo Zlatev Paul J. Steinhardt, Limin Wang. Cosmological tracking solutions. *Physical Review D. Volume 59, 123504*, 1999.
- [7] Francesco Lucchin Peter Coles. *Cosmology, the origin and evolution of cosmic structure*. Wiley, 2002.
- [8] C. Rubano, P. Scudellaro, E. Piedipalumbo, S. Capozziello, and M. Capone. Exponential potential for tracker fields. *Phys. Rev. D 69, 103510*, 2004.