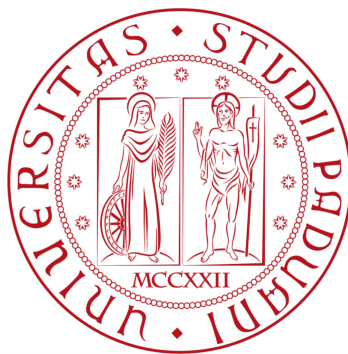




UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Dipartimento di Fisica e Astronomia “Galileo Galilei”

Corso di Laurea in Fisica

Tesi di Laurea

Superfluidità nell’elio III:
teoria ed esperimenti

Relatore

Prof. Luca Salasnich

Laureando

Alessio Inglese

Anno Accademico 2025/2026

Abstract

Nel 1970 la teoria della superconduttività era ormai consolidata. Anche la superfluidità dell'elio 4 (^4He) era stata ben approfondita. Pertanto, per molti scienziati, il campo della fisica delle basse temperature sembrava prossimo alla sua conclusione. Questa sicurezza fu scossa nel 1972 dalla sorprendente scoperta delle fasi superfluide dell' ^3He con una temperatura di transizione di circa 2,7 mK. In particolare ci fu l'osservazione di due transizioni, corrispondenti a due fasi distinte definite A e B. In questa tesi si discute la teoria BCS della superconduttività e la sua generalizzazione per l'elio 3. Questa trattazione ci permette di dare una consistente interpretazione teorica delle proprietà termodinamiche dell' ^3He liquido. Nella tesi si discutono anche gli effetti quantistici macroscopici del superfluido che permettono di ottenere un confronto diretto tra teoria ed esperimento.

Indice

Introduzione	1
1 Proprietà dell'^3He	1
2 Sezione teorica	3
2.1 Sistema di particelle	3
2.2 Gas di fermioni liberi e modello di Sommerfeld	4
2.3 Quantizzazione degli stati elettronici	4
2.4 Densità degli stati e distribuzione di Fermi–Dirac	5
2.5 Superficie di Fermi	5
2.6 Seconda Quantizzazione della Materia	6
2.7 Connessione con la teoria BCS	8
2.8 Attrazione efficace tra elettroni e quasiparticelle	9
2.9 Coppie di Cooper	10
3 Descrizione Classica dell'Elio e Potenziale di Interazione	14
4 Teoria BCS Generalizzata	14
4.1 Analogie alla teoria BCS	14
4.2 Stato normale del liquido di Fermi dell' ^3He	15
4.3 Teoria di Landau	16
4.4 Campi Molecolari	20
4.5 Interazioni di coppia nell' ^3He	21
5 Fasi Superfluide nell'^3He	24
5.1 Interazione dipolo-dipolo nell' ^3He	25
5.2 Prime Evidenze Sperimentali della fase A Superfluida	25
5.3 Dinamica dello Spin e Evidenze Sperimentali delle fasi A e B	26
6 Frazioni Superfluide nell'^3He	28
7 Conclusioni	31

Introduzione

Si descrivono le proprietà del sistema fisico seguente: l'isotopo dell' ^3He alla pressione di vapore saturo, ossia la pressione alla quale il gas è in equilibrio con il suo liquido. Nelle condizioni appena descritte l' ^3He liquefa alla temperatura $T = 3,19\text{ K}$ e rimane liquido fino a $T = 0\text{ K}$. Alla temperatura di circa 2 mK l'isotopo dell'elio diventa un superfluido e le coppie di Cooper che si formano sono caratterizzate da uno stato di tripletto di spin.

Al di sotto di $T = 3\text{ mK}$ il liquido, oltre alla fase normale, possiede due diverse fasi superfluide, denominate A e B. Molte delle loro proprietà possono essere descritte in modo qualitativo, in termini di una semplice generalizzazione della teoria BCS dei superconduttori.

1 Proprietà dell' ^3He

Nel 1937, P. Kapitza e, indipendentemente, Allen e Misener scoprirono che l'elio 4 (^4He) mostra una transizione di fase a $T_c = 2.17\text{ K}$ a pressione ambiente, al di sotto della quale scorre attraverso capillari stretti senza resistenza.

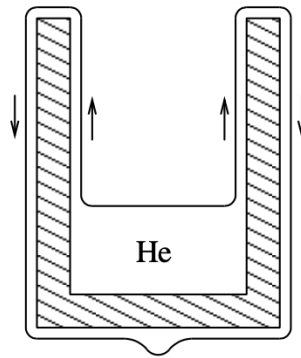


Figura 1: Superfluidità dell'elio

Sperimentalmente si nota che la viscosità cade a zero. Questo fenomeno fu chiamato superfluidità. Si osservò inoltre che, a causa della viscosità nulla, un contenitore aperto di elio tende a svuotarsi spontaneamente, perché il liquido fluisce lungo il sottilissimo strato di bagnamento (wetting layer) che ricopre microscopicamente le pareti del contenitore. Tuttavia mentre una parte del liquido scorre con viscosità nulla, un'altra parte non lo fa. Questo è stato dimostrato utilizzando pendoli di torsione costituiti da piastre immerse nell'elio. In questi esperimenti si osserva che una componente normale, dipendente dalla temperatura, oscilla insieme alle piastre. In particolare quando le piastre immerse nell'elio oscillano, la componente normale del liquido viene trascinata e oscilla con le piastre, comportandosi come un fluido ordinario; al contrario, la componente superfluida non viene trascinata, perché la sua viscosità è nulla. Questo risultato è molto importante dal punto di vista fisico perché dimostra che la superfluidità non coinvolge tutto il liquido allo stesso modo: il sistema si comporta come se fosse composto da due componenti con proprietà diverse, una normale e una superfluida.

Questo fenomeno rappresenta una manifestazione macroscopica della meccanica quantistica.

L'elio atmosferico naturale è composto per il 99.9999% da ^4He e solo per lo 0.0001% da ^3He , l'unico altro isotopo stabile. Di conseguenza, le proprietà osservate dell'elio liquido sono essenzialmente indistinguibili da quelle dell' ^4He puro.

Gli atomi di ^4He sono bosoni, poiché sono costituiti da un numero pari (sei) di fermioni (4 nucleoni e 2 elettroni). Per sistemi di bosoni debolmente interagenti, A. Einstein predisse nel 1925 la possibilità di una transizione di fase verso uno stato condensato, noto come condensazione di Bose-Einstein.

In molti aspetti le proprietà dell' ^4He superfluido risultano diverse da quelle previste per un condensato di Bose-Einstein ideale. La ragione principale è che le interazioni tra gli atomi di elio sono in realtà piuttosto forti, e quindi il sistema non può essere descritto come un gas di bosoni debolmente interagenti.

Si mettono a confronto i diagrammi di fase P-T dell'elio 3 e dell'elio 4:

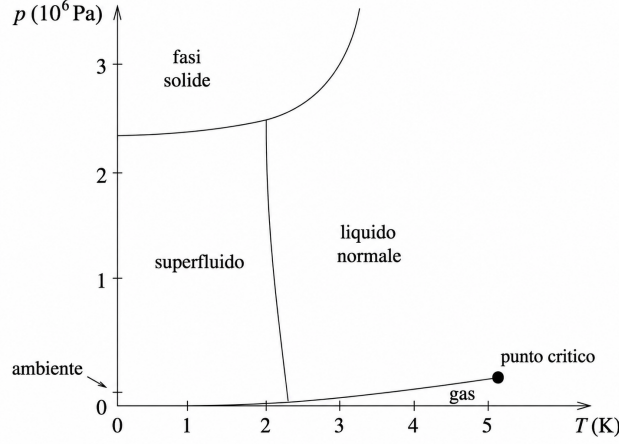


Figura 2: Diagramma P-T dell' ^4He

L'altro isotopo dell'elio, ^3He , è costituito da atomi fermionici (3 nucleoni e 2 elettroni), per cui la condensazione di Bose–Einstein non può avvenire direttamente. Infatti, inizialmente non fu osservata alcuna transizione superfluida nell'intervallo di temperature dell'ordine di pochi kelvin. Fu quindi una grande sorpresa quando la superfluidità venne finalmente osservata a temperature molto più basse, inferiori a circa 2.6 mK, da D. Lee, D. Osheroff e R. Richardson nel 1972. Scoprirono due nuove fasi a basse temperature: inizialmente interpretate erroneamente come possibili fasi solide magnetiche. L' ^3He superfluido mostra le stesse proprietà fondamentali dell' ^4He superfluido. Tuttavia, a differenza di quanto accade nell' ^4He , i due stati superfluidi dell' ^3He sono sensibili a un campo magnetico applicato. Questo suggerisce la presenza di gradi di libertà magnetici rilevanti alle basse energie.

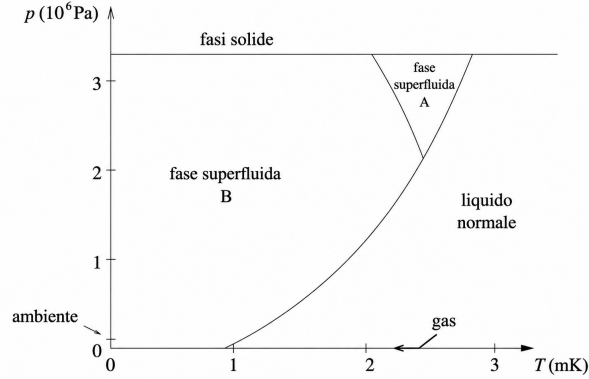


Figura 3: Diagramma P-T dell' ^3He

In particolare si presentano le caratteristiche dell'elio 3 sotto la temperatura critica:

Caratteristica	Fase A (anisotropa)	Fase B (isotropa)
Tipo di accoppiamento	p-wave, spin triplet ($S = 1$)	p-wave, spin triplet ($S = 1$)
Orientamento del d-vettore	Libero di ruotare nello spazio	Accoppiato isotropicamente all'orbitale
Direzione del vettore orbitale $\mathbf{l}$	Fissata lungo l'asse di simmetria	Isotropo, nessuna direzione preferenziale
Modi di spin	Gapless (fluttuazioni del d-vettore)	Modi di Leggett, generalmente gapped
Simmetria magnetica	Anisotropia	Isotropia

Tabella 1: Fasi A e B dell'elio 3 superfluido.

L'introduzione fa riferimento alla bibliografia [4] e [8].

2 Sezione teorica

2.1 Sistema di particelle

Uno stato di particella singola si denota in notazione bra-ket:

$$|x\rangle = |\mathbf{r}, s\rangle$$

che descrive le coordinate di posizione della particella e il relativo spin: questo vettore appartiene in generale a uno spazio di Hilbert astratto $\mathcal{H}$.

Per descrivere un sistema di N particelle identiche, ossia particelle che non possono essere distinte da nessun metodo sperimentale, si utilizza la funzione d'onda a molti corpi:

$$\psi(\mathbf{r}_1, s_1; \dots; \mathbf{r}_N, s_N) \in \mathcal{H}_{\mathbf{r}} \otimes \mathcal{H}_s$$

che è il prodotto tensore di due spazi di Hilbert: delle posizioni e di spin.

La statistica della particella, ossia fermionica o bosonica, è determinata dallo spin della particella e per un sistema composto è lo spin totale a determinare la statistica del sistema: l' ^4He ha spin totale $s = 0$, invece l' ^3He ha spin totale $s = \frac{1}{2}$.

L'hamiltoniano di un sistema ad N particelle identiche è il seguente:

$$\hat{H}_0 = \sum_{i=1}^N \hat{h}_i(x_i), \quad (1)$$

con $\hat{h}(x) = -\frac{\hbar^2}{2m_e} \nabla^2 + U(\mathbf{r})$ e $U(\mathbf{r})$ il potenziale di confinamento esterno.

In generale l'hamiltoniano di singola particella $\hat{h}$ soddisfa all'equazione agli autovalori:

$$\hat{h}(x)\phi_n(x) = \varepsilon_n\phi_n(x), \quad (2)$$

con $n=1,2,\dots$ ed essendo $\hat{h}$ operatore autoaggiunto, per il teorema spettrale le funzioni d'onda $\{\phi_n(x)\}$ formano una base ortonormale dello spazio di Hilbert $\mathcal{H}$.

La funzione d'onda del sistema può essere scritta in termini delle funzioni d'onda di singola particella $\phi_n(x)$, tenendo conto della statistica delle particelle.

Trattando N bosoni la più semplice funzione d'onda a molti corpi è:

$$\psi(x_1, \dots, x_N) = \phi_1(x_1) \cdots \phi_1(x_N) \quad (3)$$

che indica la configurazione in cui tutte le particelle si trovano nello stato fondamentale di particella singola e viene chiamato Condensato di Bose-Einstein puro;

per N fermioni la più semplice funzione d'onda è data dal determinante di Slater in modo da rispettare il Principio di Esclusione di Pauli:

$$\Psi(x_1, \dots, x_N) = \frac{1}{\sqrt{N!}} \begin{vmatrix} \phi_1(x_1) & \phi_2(x_1) & \dots & \phi_N(x_1) \\ \phi_1(x_2) & \phi_2(x_2) & \dots & \phi_N(x_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_1(x_N) & \phi_2(x_N) & \dots & \phi_N(x_N) \end{vmatrix}. \quad (4)$$

L'hamiltoniano $\hat{H}_0$ è separabile e dunque le energie per questi due sistemi sono rispettivamente:

$$E_{\text{bosoni}} = N\varepsilon_1, \quad (5)$$

$$E_{\text{fermioni}} = \varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_N \quad (6)$$

e la più alta energia di particella singola è chiamata energia di Fermi ε_F . Questa definizione è accettabile per il sistema che si andrà a trattare che è il gas di Fermi a temperatura zero. Ma in generale per i sistemi finiti con un intervallo energetico non nullo tra l'ultimo stato occupato e il primo stato vuoto è definita come:

$$\varepsilon_F = \lim_{T \rightarrow 0} \mu(T) \quad (7)$$

dove μ è il potenziale chimico.

Questa definizione porta ad un valore intermedio tra i due livelli energetici e dunque un valore differente rispetto alla definizione precedente nel continuo.

2.2 Gas di fermioni liberi e modello di Sommerfeld

Il modello a gas uniforme di fermioni non-interagenti (Modello a gas di Fermi) si ottiene ponendo $U(\mathbf{r}) = 0$ e imponendo delle condizioni periodiche agli estremi delle funzioni d'onda di singola particella.

Si considerano onde piane con uno spinore di Pauli:

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \chi_s \quad (8)$$

con χ_s lo spinore per lo spin-up e lo spin-down lungo l'asse z:

$$\chi_{\uparrow} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \chi_{\downarrow} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (9)$$

I metalli possono essere descritti, in prima approssimazione, dal modello di Sommerfeld, che costituisce un'estensione quantistica del modello classico di Drude ed è di natura semiclassica. In tale modello gli elettroni sono trattati come particelle non interagenti, libere di muoversi all'interno del cristallo.

2.3 Quantizzazione degli stati elettronici

Si considerino N elettroni non interagenti confinati all'interno di una scatola cubica di lato L e volume $V = L^3$. Gli autovalori dell'operatore quantità di moto sono ottenuti risolvendo l'equazione agli autovalori

$$\hat{\mathbf{P}}|\Psi\rangle = -i\hbar\nabla|\Psi\rangle = \hbar\mathbf{k}|\Psi\rangle. \quad (10)$$

Nella rappresentazione delle posizioni, la funzione d'onda del singolo elettrone assume la forma

$$\psi(\mathbf{r}) = \langle \mathbf{r} | \Psi \rangle = A e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \quad (11)$$

che soddisfa l'equazione di Schrödinger per una particella libera

$$\hat{H}\psi(\mathbf{r}) = \frac{\hat{\mathbf{P}}^2}{2m_e} \psi(\mathbf{r}) = -\frac{\hbar^2}{2m_e} \nabla^2 \psi(\mathbf{r}) = E\psi(\mathbf{r}). \quad (12)$$

Imponendo le condizioni al contorno periodiche di Born-Von Karman, che richiedono l'uguaglianza della funzione d'onda agli estremi della scatola, si ottiene

$$k_i = n_i \frac{2\pi}{L}, \quad n_i \in \mathbb{Z}, \quad i = x, y, z. \quad (13)$$

Le energie di singola particella sono:

$$\varepsilon_{\mathbf{k}} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{4\pi^2}{L^2} (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2), \quad (14)$$

avendo usato la condizione al contorno.

Nel limite termodinamico $L \rightarrow \infty$, gli stati ammessi diventano così densi da poter considerare la variabile $\mathbf{k}$ come continua:

$$\sum_{n_x, n_y, n_z} \rightarrow \int dn_x dn_y dn_z \Rightarrow \sum_{\mathbf{k}} \rightarrow \frac{L^3}{(2\pi)^3} \int d^3k$$

avendo effettuato il cambio di variabili: $d^3n = \frac{L^3}{(2\pi)^3} d^3k$.

Il numero totale di particelle fermioniche è:

$$N = \sum_s \sum_{\mathbf{k}} \theta(\varepsilon_F - \varepsilon_{\mathbf{k}}) \quad (15)$$

con θ la funzione di Heaviside.

Per ipotesi i fermioni sono occupati solo fino all'energia di Fermi che è determinata fissando N .

2.4 Densità degli stati e distribuzione di Fermi–Dirac

A temperatura finita il numero totale di elettroni assume l'espressione:

$$N = \int_0^\infty g(\varepsilon_{\mathbf{k}}) f_{FD}(\varepsilon_{\mathbf{k}}) d\varepsilon, \quad (16)$$

dove

$$f_{FD}(\varepsilon_{\mathbf{k}}) = \frac{1}{e^{(\varepsilon_{\mathbf{k}} - \mu)/k_B T} + 1} \quad (17)$$

è la distribuzione di Fermi–Dirac.

Alla temperatura $T = 0$ K, l'energia di Fermi ε_F è definita come l'energia al di sotto della quale tutti gli stati sono occupati, mentre quelli al di sopra risultano vuoti. In questo limite vale

$$f_{FD}(\varepsilon_F, \varepsilon_{\mathbf{k}}) = \theta(\varepsilon_F - \varepsilon_{\mathbf{k}}) = \begin{cases} 1, & \varepsilon_{\mathbf{k}} \leq \varepsilon_F, \\ 0, & \varepsilon_{\mathbf{k}} > \varepsilon_F, \end{cases} \quad \mu = \varepsilon_F. \quad (18)$$

Il numero totale di elettroni a temperatura zero si calcola ponendo $s = \frac{1}{2}$ e dunque la somma sugli spin contribuisce con un fattore 2:

$$N_{T=0} = \frac{2V}{(2\pi)^3} \int d^3k \theta(\varepsilon_F - \frac{\hbar^2 k^2}{2m_e}). \quad (19)$$

Inoltre si definisce la densità uniforme elettronica come

$$n = \frac{N}{V} = \frac{1}{4\pi^3} \int_0^{k_F} d^3k = \frac{1}{4\pi^3} \int_0^{k_F} dk k^2 \int d\Omega = \frac{k_F^3}{3\pi^2}. \quad (20)$$

2.5 Superficie di Fermi

Nello spazio dei vettori d'onda, gli stati elettronici occupati a temperatura zero sono contenuti all'interno di una sfera di raggio k_F , detta *sfera di Fermi*, con

$$k_F = \sqrt{\frac{2m_e \varepsilon_F}{\hbar^2}} = (3\pi^2 n)^{1/3}, \quad (21)$$

avendo usato la relazione

$$\varepsilon_F = \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m_e}. \quad (22)$$

L'energia di Fermi può essere espressa come

$$\varepsilon_F = \frac{\hbar^2}{2m_e} (3\pi^2 n)^{2/3}. \quad (23)$$

La temperatura di Fermi è definita da:

$$\varepsilon_F = k_B T_F. \quad (24)$$

In particolare nei metalli, alla temperatura $T = 0$ K, gli stati elettronici sono riempiti fino al livello di Fermi. Esiste una densità finita di stati al livello di Fermi, data da

$$g(\varepsilon_F) = \left. \frac{dN}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=\varepsilon_F} = \frac{V}{2\pi^2} \left(\frac{2m_e}{\hbar^2} \right)^{3/2} \sqrt{\varepsilon_F}, \quad (25)$$

con riferimenti [7], [3] e [1].

2.6 Seconda Quantizzazione della Materia

Un campo di materia non-relativistico $\psi(\mathbf{r}, t)$ è rappresentato da un campo di Schrödinger $\psi(\mathbf{r}, t)$, che dipende dalla posizione $\mathbf{r}$ e dal tempo t e dunque può essere visto come un insieme continuo di gradi di libertà nello spazio. Scomponendo il campo in modi normali, ciascun modo ha una propria autofrequenza ω_k e si comporta come un oscillatore armonico indipendente: diventa una somma infinita di oscillatori armonici che descrivono le possibili autofrequenze del campo di materia.

In particolare il campo di materia non-relativistico può essere descritto come una somma infinita di oscillatori armonici indipendenti: si introducono gli operatori di creazione e di annichilazione che agiscono sullo spazio di Fock $\mathcal{F} = \bigoplus_{N=0}^{\infty} \mathcal{H}_N$. Questi operatori permettono di costruire configurazioni di particelle bosoniche e fermioniche in base alle regole di commutazione degli operatori. Le particelle possono interagire tra loro o con il campo elettromagnetico quantistico che risulta anch'esso quantizzato. A livello formale il campo di materia è definito come il campo di Schrödinger a particella singola $\psi(\mathbf{r}, t)$ che soddisfa l'equazione

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left(\frac{-\hbar^2}{2m} \nabla^2 + U(\mathbf{r}) \right) \psi(\mathbf{r}, t),$$

con $U(\mathbf{r})$ il potenziale esterno che agisce sulla particella. Se si sceglie $\psi(\mathbf{r}, t) = \phi_\alpha(\mathbf{r}) e^{-\frac{i}{\hbar} \varepsilon_\alpha t}$ si ottiene l'equazione di Schrödinger stazionaria:

$$\left(\frac{-\hbar^2}{2m} \nabla^2 + U(\mathbf{r}) \right) \phi_\alpha(\mathbf{r}) = \varepsilon_\alpha \phi_\alpha(\mathbf{r}).$$

In generale per uno stato non stazionario si può esprimere il campo con l'espansione di Wigner-Jordan che è una sovrapposizione di più autostati dell'energia:

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \sum_{\alpha} c_{\alpha}(t) \phi_{\alpha}(\mathbf{r})$$

con $\int d^3r \phi_{\alpha}^*(\mathbf{r}) \phi_{\beta}(\mathbf{r}) = \delta_{\alpha\beta}$. Dunque si ottiene:

$$i\hbar \frac{\partial \psi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = i\hbar \dot{c}_{\alpha}(t) = \varepsilon_{\alpha} c_{\alpha}(t)$$

e si trova che $c_{\alpha}(t) = c_{\alpha}(0) e^{-\frac{i}{\hbar} \varepsilon_{\alpha} t}$.

L'energia media del sistema totale è:

$$H = \int d^3r \left(\sum_{\beta} c_{\beta}^* \phi_{\beta}^* \right) \left(\frac{-\hbar^2}{2m} \nabla^2 + U(\mathbf{r}) \right) \left(\sum_{\alpha} c_{\alpha} \phi_{\alpha} \right) = \sum_{\alpha, \beta} c_{\beta}^* c_{\alpha} \int d^3r \phi_{\beta}^* \varepsilon_{\alpha} \phi_{\alpha} = \sum_{\alpha, \beta} \delta_{\alpha, \beta} \varepsilon_{\alpha} c_{\beta}^* c_{\alpha},$$

poiché è soddisfatta la seguente equazione: $\left(\frac{-\hbar^2}{2m} \nabla^2 + U(\mathbf{r}) \right) \phi_{\alpha} = \varepsilon_{\alpha} \phi_{\alpha}$ e allora:

$$H = \sum_{\alpha, \beta} c_{\beta}^* c_{\alpha} \int d^3r \phi_{\beta}^*(\mathbf{r}) \varepsilon_{\alpha} \phi_{\alpha}(\mathbf{r}) = \sum_{\alpha} \varepsilon_{\alpha} c_{\alpha}^* c_{\alpha}$$

che si riscrive come: $H = \sum_{\alpha} \frac{\varepsilon_{\alpha}}{2} (c_{\alpha}^* c_{\alpha} + c_{\alpha} c_{\alpha}^*)$.

Si introducono le variabili reali:

$$q_{\alpha}(t) = \sqrt{\frac{2\hbar}{\omega_{\alpha}}} \frac{1}{2} (c_{\alpha}(t) + c_{\alpha}^*(t));$$

$$p_{\alpha}(t) = \sqrt{2\hbar\omega_{\alpha}} \frac{1}{2i} (c_{\alpha}(t) - c_{\alpha}^*(t)).$$

con $\omega_{\alpha} = \frac{\varepsilon_{\alpha}}{\hbar}$ autofrequenza relativa all'autoenergia corrispondente.

In questo modo si ottiene:

$$H = \sum_{\alpha} \frac{p_{\alpha}^2}{2} + \frac{1}{2} \omega_{\alpha}^2 q_{\alpha}^2$$

che rappresenta l'energia di un numero infinito di oscillatori armonici reali di massa unitaria e frequenza ω_α . Si procede con la quantizzazione canonica promuovendo le variabili appena introdotte ad operatori:

$$q_\alpha \rightarrow \hat{q}_\alpha, \quad p_\alpha \rightarrow \hat{p}_\alpha,$$

con la regola di commutazione $[\hat{q}_\alpha, \hat{p}_\beta] = i\hbar\delta_{\alpha\beta}$ e dunque si può definire l'operatore hamiltoniano:

$$\hat{H} = \sum_\alpha \left(\frac{\hat{p}_\alpha^2}{2} + \frac{1}{2}\omega_\alpha^2 \hat{q}_\alpha^2 \right).$$

Introducendo rispettivamente gli operatori di creazione e distruzione:

$$\hat{a}_\alpha^\dagger = \sqrt{\frac{\omega_\alpha}{2\hbar}} \left(\hat{q}_\alpha - \frac{i}{\omega_\alpha} \hat{p}_\alpha \right), \quad \hat{a}_\alpha = \sqrt{\frac{\omega_\alpha}{2\hbar}} \left(\hat{q}_\alpha + \frac{i}{\omega_\alpha} \hat{p}_\alpha \right)$$

con le rispettive regole di commutazione: $[\hat{a}_\alpha, \hat{a}_\beta^\dagger] = \delta_{\alpha\beta}$ e $[\hat{a}_\alpha, \hat{a}_\beta] = [\hat{a}_\alpha^\dagger, \hat{a}_\beta^\dagger] = 0$. Dunque è possibile riscrivere l'operatore hamiltoniano come:

$$\hat{H} = \sum_\alpha \varepsilon_\alpha \left(\hat{a}_\alpha^\dagger \hat{a}_\alpha + \frac{1}{2} \right).$$

Il sistema quantistico vive nello spazio di Fock $\mathcal{F} = \bigoplus_{N=0}^{\infty} \mathcal{H}_N$ con $\mathcal{H}_N = \mathcal{H}^{\otimes N}$ simmetrizzato o antisimmetrizzato in base al sistema di particelle identiche.

Si sceglie una base dello spazio a una particella ϕ_α e lo stato di una particella in questa base è $|\psi\rangle = \sum_\alpha c_\alpha |\alpha\rangle$.

Dunque un generico stato dello spazio di Fock è:

$$|...n_\alpha...n_\beta...n_\gamma...\rangle,$$

con n_α particelle nello stato di singola particella $|\alpha\rangle$ e così via.

Gli operatori di costruzione e distruzione appena definiti vivono nello spazio di Fock e agiscono come:

$$\hat{a}_\alpha^\dagger |...n_\alpha...\rangle = \sqrt{n_\alpha + 1} |...n_\alpha + 1...\rangle$$

$$\hat{a}_\alpha |...n_\alpha...\rangle = \sqrt{n_\alpha} |...n_\alpha - 1...\rangle$$

Lo stato di occupazione delle particelle si costruisce a partire dallo stato vuoto:

$$|0\rangle = |...0...0...0...\rangle.$$

Ad esempio se si considera $n_\alpha = 0, 1, 2$ il numero delle particelle del modo α , lo stato corrispondente sarà:

$$|n_1, n_2, \dots\rangle = \frac{(\hat{a}_1^\dagger)^{n_1}}{\sqrt{n_1!}} \frac{(\hat{a}_2^\dagger)^{n_2}}{\sqrt{n_2!}} \dots |0\rangle.$$

Per i bosoni $n_\alpha = 0, 1, 2, 3, \dots$ e per i fermioni $n_\alpha = 0, 1$ per il principio di esclusione di Pauli.

Si può definire l'operatore numero che conta il numero di particelle nello stato di singola particella α come $\hat{N}_\alpha = \hat{a}_\alpha^\dagger \hat{a}_\alpha$ che soddisfa l'equazione agli autovalori:

$$\hat{N}_\alpha |...n_\alpha...\rangle = n_\alpha |...n_\alpha...\rangle.$$

Dunque si arriva a formulare l'espressione dell'hamiltoniana in seconda quantizzazione nel modo seguente:

$$\hat{H} = \sum_\alpha \varepsilon_\alpha \hat{N}_\alpha.$$

Si possono descrivere i sistemi quantistici con gli operatori di campo bosonico e fermionico:

$$\hat{\psi}(\mathbf{r}, t) = \sum_\alpha \hat{a}_\alpha \phi_\alpha(\mathbf{r}),$$

con $\phi_\alpha(\mathbf{r}) = \langle \mathbf{r} | \alpha \rangle$ stato ad una particella nella rappresentazione delle posizioni.

Per il campo fermionico è necessario imporre delle regole di anticommutazione in modo da rispettare il principio di esclusione di Pauli:

$$\{\hat{a}_\alpha, \hat{a}_\beta^\dagger\} = \delta_{\alpha\beta}$$

$$\{\hat{a}_\alpha, \hat{a}_\beta\} = \{\hat{a}_\alpha^\dagger, \hat{a}_\beta^\dagger\} = 0.$$

Una conseguenza è che $(\hat{a}_\alpha^\dagger)^2 = 0 \implies \hat{N}_\alpha = \hat{N}_\alpha^2 \implies n_\alpha^2 = n_\alpha$ e $n_\alpha = 0, 1$.

Il campo bosonico e fermionico soddisfano a:

$$[\hat{\psi}(\mathbf{r}, t), \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}', t)] = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}').$$

La proprietà del campo bosonico o fermionico è quella di creare una particella nello stato $|\mathbf{r}, t\rangle$ a partire dallo stato vuoto:

$$\hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}, t) |0\rangle = \sum_\alpha \hat{a}_\alpha^\dagger(t) \phi_\alpha^*(\mathbf{r}) |0\rangle = \sum_\alpha \hat{a}_\alpha^\dagger e^{\frac{i\varepsilon_\alpha t}{\hbar}} \langle \alpha | \mathbf{r} \rangle |0\rangle = \sum_\alpha e^{\frac{i\varepsilon_\alpha t}{\hbar}} |\alpha\rangle \langle \alpha | \mathbf{r} \rangle = |\mathbf{r}, t\rangle.$$

Infine si può riscrivere l'hamiltoniano a molti corpi come:

$$\hat{H} = \int d^3r \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}, t) \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + U(\mathbf{r}) \right) \hat{\psi}(\mathbf{r}, t)$$

L'ultimo passo è quello di introdurre un potenziale di interazione tra le particelle del sistema.

L'hamiltoniano in prima quantizzazione è della forma:

$$\hat{H}^{(N)} = \sum_{i=1}^N \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_i^2 + U(\mathbf{r}_i) \right) + \frac{1}{2} \sum_{i,j,i \neq j} V(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) = \sum_{i=1}^N \hat{h}_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j,i \neq j} V_{i,j}.$$

In seconda quantizzazione risulta essere:

$$\hat{H} = \sum_\alpha \varepsilon_\alpha \hat{c}_\alpha^\dagger \hat{c}_\alpha + \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta\gamma\delta} V_{\alpha\beta\gamma\delta} \hat{c}_\alpha^\dagger \hat{c}_\beta^\dagger \hat{c}_\gamma \hat{c}_\delta$$

con $V_{\alpha\beta\gamma\delta} = \int d^3r d^3r' \phi_\alpha^*(\mathbf{r}) \phi_\beta^*(\mathbf{r}') V(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \phi_\gamma(\mathbf{r}) \phi_\delta(\mathbf{r}')$ e infine si ottiene:

$$\hat{H} = \int d^3r \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}, t) \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + U(\mathbf{r}) \right) \hat{\psi}(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{2} V_{\alpha\beta\gamma\delta} = \int d^3r d^3r' \phi_\alpha^*(\mathbf{r}) \phi_\beta^*(\mathbf{r}') V(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \phi_\gamma(\mathbf{r}) \phi_\delta(\mathbf{r}'),$$

dove si è fatto riferimento alla bibliografia [7].

2.7 Connessione con la teoria BCS

Le considerazioni precedenti costituiscono la base matematica per la formulazione della teoria di Bardeen, Cooper e Schrieffer (BCS), la prima teoria microscopica in grado di descrivere i superconduttori.

Al di sotto di una temperatura critica T_c che la teoria predice essere $\sim M^{-\frac{1}{2}}$ con M la massa del reticolo cristallino, la densità degli stati elettronici di un superconduttore mostra l'apertura di un gap energetico 2Δ attorno al livello di Fermi ε_F , che separa gli stati occupati da quelli non occupati.

A differenza del gap di banda nei semiconduttori o negli isolanti, il gap superconduttivo è sempre centrato sul livello di Fermi e non impedisce la conduzione elettrica. Tale gap è stato osservato sperimentalmente ed è in completo accordo con le previsioni della teoria BCS.

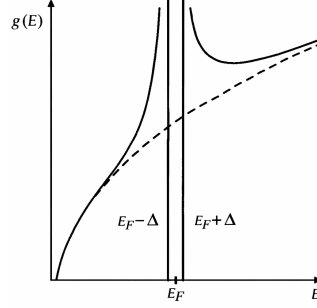


Figura 4: Il gap di energia 2Δ in un superconduttore

Inoltre la teoria fornisce un'interpretazione fisica del concetto di funzione d'onda macroscopica, $\psi(\mathbf{r})$ (parametro d'ordine): essenzialmente descrive una funzione d'onda macroscopica, o condensato, di coppie di Cooper che saranno trattate nella sezione 2.9.

2.8 Attrazione efficace tra elettroni e quasiparticelle

In riferimento a [2] si inizia a delineare il modello della teoria BCS. La prima ipotesi fondamentale della teoria BCS afferma che, in prossimità della superficie di Fermi, esiste un'interazione attrattiva efficace tra gli elettroni. A prima vista, tale ipotesi sembra essere in netto contrasto con l'evidente repulsione coulombiana tra due elettroni, descritta dal potenziale

$$V(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (26)$$

Tuttavia, il potenziale coulombiano sopra riportato è valido per elettroni liberi nel vuoto. Nel caso dei metalli, gli elettroni non possono essere trattati come particelle libere, poiché il loro moto è fortemente influenzato dall'ambiente circostante. Di conseguenza, il potenziale coulombiano non è più sufficiente a descrivere correttamente l'interazione tra due elettroni all'interno di un solido.

In tale contesto è più appropriato introdurre il concetto di *quasiparticella*. Le quasiparticelle sono definite come eccitazioni elementari del solido e consistono in elettroni in movimento insieme alla cosiddetta *buca di scambio-correlazione* che li circonda.

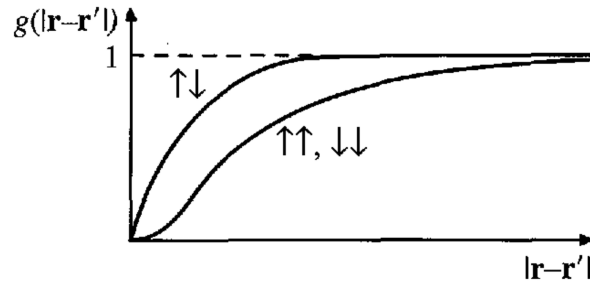


Figura 5: Buca di scambio-correlazione

In figura è mostrata la funzione di correlazione a coppie del gas elettronico,

$$g(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \quad (27)$$

che misura la probabilità relativa di trovare un elettrone nella posizione $\mathbf{r}'$ dato che un altro elettrone si trova in $\mathbf{r}$.

Per rispettare il principio di esclusione di Pauli, la funzione di correlazione si annulla nel punto di coincidenza per particelle con spin parallelo,

$$g(\mathbf{r} = \mathbf{r}') = 0 \quad (\uparrow\uparrow, \downarrow\downarrow), \quad (28)$$

fenomeno noto come *buca di scambio*.

Oltre agli effetti di scambio, l'interazione coulombiana repulsiva implica un elevato costo energetico quando due elettroni si trovano a distanza molto ravvicinata, indipendentemente dal loro stato di spin. Questo effetto prende il nome di *correlazione elettronica*.

Quando un elettrone si muove all'interno del metallo, gli altri elettroni del sistema si riorganizzano in modo tale da soddisfare il principio di esclusione di Pauli e, allo stesso tempo, minimizzare l'energia coulombiana complessiva. Pertanto, considerando il sistema costituito dall'*elettrone più la sua buca di scambio-correlazione*, l'interazione coulombiana originaria viene trasformata in una forza efficace notevolmente ridotta, a causa dello schermaggio prodotto dalle altre particelle del gas elettronico.

Questo meccanismo costituisce il punto di partenza per l'emergere di un'interazione attrattiva efficace tra elettroni in prossimità della superficie di Fermi, alla base della teoria BCS.

2.9 Coppie di Cooper

Cooper osservò che l'interazione efficace è attrattiva soltanto in prossimità della superficie di Fermi e il sistema più semplice da descrivere è l'effetto di tale attrazione su una singola coppia di elettroni posta appena al di fuori del mare di Fermi occupato: essi formano uno stato legato. Il liquido di Fermi diventa instabile perché, appena esiste una minima attrazione tra elettroni vicino alla superficie di Fermi, essi possono ridurre la loro energia formando coppie. Quindi lo stato con elettroni di Bloch indipendenti non è più quello di minima energia. Questo risultato è sorprendente poiché due elettroni isolati nello spazio libero non riuscirebbero a legarsi tramite una stessa interazione attrattiva così debole per via dell'energia cinetica e della repulsione elettrica. Il modello di Cooper assume le stesse ipotesi di lavoro già delineate in precedenza: una superficie di Fermi sferica a temperatura zero, nella quale tutti gli stati con $k < k_F$ sono occupati e aggiungendo due elettroni extra al di fuori della superficie di Fermi, essi interagiscono tramite l'interazione elettrone-fonone. La funzione d'onda a due particelle degli elettroni aggiunti ha la forma:

$$\psi(\mathbf{r}_1, s_1, \mathbf{r}_2, s_2) = e^{i\mathbf{k}_{cm} \cdot \mathbf{R}_{cm}} \Phi(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \phi_{s_1, s_2}^{spin} \quad (29)$$

dove $R_{cm} = (r_1 + r_2)/2$, $\hbar k_{cm}$ è il momento totale della coppia e $s_1 = s_2 = \frac{1}{2}$. Si trova che l'energia minima corrisponde a una coppia senza moto del centro di massa e dunque nello stato fondamentale $k_{cm} = 0$.

La funzione d'onda di spin può essere uno stato di singoletto:

$$\phi_{s_1, s_2}^{spin} = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle), \quad (30)$$

con spin totale $s=0$;

oppure tripletto di spin:

$$\phi_{s_1, s_2}^{spin} = |\uparrow\uparrow\rangle, \quad (31)$$

$$\phi_{s_1, s_2}^{spin} = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle), \quad (32)$$

$$\phi_{s_1, s_2}^{spin} = |\downarrow\downarrow\rangle, \quad (33)$$

con spin totale $s = 1$.

La maggioranza dei superconduttori noti presentano coppie di Cooper in stato di singoletto. Per il postulato di simmetrizzazione bisogna imporre l'antisimmetria della funzione d'onda fermionica:

$$\Psi(\mathbf{r}_1, s_1; \mathbf{r}_2, s_2) = -\Psi(\mathbf{r}_2, s_2; \mathbf{r}_1, s_1). \quad (34)$$

Poiché il singoletto di spin è antisimmetrico rispetto allo scambio degli spin, la parte spaziale deve essere simmetrica:

$$\Phi(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = +\Phi(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \quad (35)$$

e dunque è una funzione pari.

Si espande $\Phi(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$ in onde di Bloch assumendo elettroni liberi nello stato di onde piane $\psi_{\mathbf{k}} = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$:

$$\Phi(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = \sum_{\mathbf{k}} \phi_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)} \quad (36)$$

con $\phi_{\mathbf{k}} = \phi_{-\mathbf{k}}$ i coefficienti di espansione e vale l'identità perchè Φ essendo simmetrica per scambio è pari. Si ottiene la funzione d'onda:

$$\Psi(\mathbf{r}_1, s_1; \mathbf{r}_2, s_2) = \sum_{\mathbf{k}} \phi_{\mathbf{k}} \begin{vmatrix} \psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}_1) \uparrow & \psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}_2) \downarrow \\ \psi_{-\mathbf{k}}(\mathbf{r}_1) \uparrow & \psi_{-\mathbf{k}}(\mathbf{r}_2) \downarrow \end{vmatrix} = \sum_{\mathbf{k}} \phi_{\mathbf{k}} |\Psi_{\mathbf{k}}\rangle \quad (37)$$

ed è soluzione dell'equazione di Schrödinger stazionaria $\hat{H}|\Psi\rangle = E|\Psi\rangle$.

Essendo $k_{cm} = 0 \implies \mathbf{k}_2 = -\mathbf{k}_1$ e si considerano gli stati finali con $k' > k_F$:

$$\langle \psi_{\mathbf{k}} | \hat{H} | \psi \rangle = \langle \psi_{\mathbf{k}} | E | \psi \rangle, \quad (38)$$

con E l'energia totale dello stato a due particelle. L'hamiltoniano consiste in due energie di stati di Bloch $\varepsilon_{\mathbf{k}}$ con $\varepsilon_{\mathbf{k}} = \varepsilon_{-\mathbf{k}}$, insieme all'interazione efficace $-|g_{eff}|^2$ che risulta costante e indipendente dal momento perchè si considera il regime di superconduttività: $\hbar\omega_D \gg k_B T$ con ω_D la frequenza di Debye e gli elettroni si trovano entro l'energia $k_B T$ dalla superficie di Fermi.

Per $\mathbf{k}$ fissato

$$E\phi_{\mathbf{k}} = 2\varepsilon_{\mathbf{k}} - |g_{eff}|^2 \sum_{\mathbf{k}'} \phi_{\mathbf{k}'} . \quad (39)$$

L'interazione efficace prende un momento $\mathbf{q} = \mathbf{k}' - \mathbf{k}$ da uno degli elettroni che emette un fonone e lo trasferisce all'altro elettrone e tale trasferimento si può interpretare tramite l'assorbimento di tale fonone da parte del secondo elettrone. Così la coppia di elettroni $(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$ diventa una coppia $(\mathbf{k}', -\mathbf{k}')$.

L'ipotesi $\varepsilon_{\mathbf{k}} < \hbar\omega_D$ restringe i possibili valori di $\mathbf{k}$, limitandoli ad un sottile guscio tra $k = k_F$ e $k = k_F + \frac{\omega_D}{v}$ con v la velocità di gruppo di onda di Bloch alla superficie di Fermi.

L'obiettivo è calcolare l'energia E del sistema fissando il valore di $\mathbf{k}$: sia $C = \sum_{\mathbf{k}} \phi_{\mathbf{k}}$,

$$E\phi_{\mathbf{k}} = 2\varepsilon_{\mathbf{k}}\phi_{\mathbf{k}} - C|g_{eff}|^2 \implies \phi_{\mathbf{k}} = -C \frac{|g_{eff}|^2}{E - 2\varepsilon_{\mathbf{k}}}, \quad (40)$$

ma per consistenza deve valere

$$C = \sum_{\mathbf{k}} \phi_{\mathbf{k}} = -C|g_{eff}|^2 \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{E - 2\varepsilon_{\mathbf{k}}} \implies 1 = -|g_{eff}|^2 \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{E - 2\varepsilon_{\mathbf{k}}}. \quad (41)$$

La restrizione sui valori di $\mathbf{k}$ sull'intervallo sopra definito permette di passare al limite di integrale:

$$1 = -|g_{eff}|^2 g(\varepsilon_F) \int_0^{\hbar\omega_D} d\varepsilon \frac{1}{E - 2\varepsilon}. \quad (42)$$

L'energia del sistema risulta essere:

$$E = 2\hbar\omega_D e^{-\frac{1}{\lambda}}, \quad (43)$$

con $\lambda = |g_{eff}|^2 g(\varepsilon_F) \ll 1$ il parametro di coppia elettrone-fonone. Risulta essere un valore piccolo dato che l'ordine di grandezza dell'interazione efficace è noto e forma uno stato legato. La scala energetica della superconduttività è determinata dall'energia di Debye, ma moltiplicata per un fattore esponenziale molto piccolo ed è così spiegata la temperatura di transizione $T_c \sim 1$ K. Le energie di Debye nella maggior parte dei

materiali sono dell'ordine $\sim 100 - 300$ K: temperature molto più alte. L'interazione attrattiva non sempre porta ad uno stato legato, ma l'ipotesi che il mare di fermi sia pieno porta alla formazione di uno stato legato con un'interazione attrattiva infinitesimale. Inoltre si è ipotizzato che la funzione d'onda dello stato accoppiato sia indipendente dalla direzione di $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ e quindi si può scrivere:

$$\Phi(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = f_l(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|)Y_l^m(\theta, \phi). \quad (44)$$

Si nota che le soluzioni considerate sono quelle con Y_0^0 : soluzioni d'onda s e sono le uniche possibili per i superconduttori poiché l'interazione elettrone-elettrone è indipendente dal vettore d'onda del fonone $\mathbf{q}$. Per sistemi di questo tipo, nella rappresentazione delle posizioni, il potenziale di interazione efficace elettrone-elettrone si calcola effettuando la trasformata di Fourier:

$$V_{eff}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} V(\mathbf{q}) e^{i\mathbf{q} \cdot (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)} = -|g_{eff}|^2 \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2). \quad (45)$$

Solo le funzioni armoniche sferiche ad onda s ($l = 0$) permettono una funzione d'onda della coppia finita in $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2$. Infatti per $l \neq 0$, $f_l(r = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|) \sim r^l$ e la funzione d'onda si annulla sempre nel punto di contatto e dunque la probabilità di trovare le due particelle nello stesso punto dello spazio è nulla.

La funzione d'onda BCS descritta può essere scritta nel formalismo di seconda quantizzazione nel modo seguente:

$$\psi_N = \text{cost} \left(\sum_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{k}\uparrow}^\dagger \hat{a}_{-\mathbf{k}\downarrow}^\dagger \right)^{N/2} |0\rangle, \quad (46)$$

con $c_{\mathbf{k}} = c_{-\mathbf{k}}$ i coefficienti di Fourier.

Ricordando che l'hamiltoniano generico per descrivere un superconduttore ha la forma:

$$\hat{H} = \hat{T} + \hat{V} = \sum_{\mathbf{k}} \varepsilon_{\mathbf{k}} \hat{n}_{\mathbf{k},s} + \frac{1}{2} \sum_{i,j} V(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j). \quad (47)$$

Questo hamiltoniano descrive un numero pari fissato N di elettroni in uno spazio vuoto, soggetti ad una debole interazione. Nella trattazione è conveniente sottrarre all'hamiltoniano la quantità fissa μN che equivale a misurare le energie di singola particella a partire dal potenziale chimico μ che nella trattazione equivale all'energia di Fermi ε_F .

Esso può essere riscritto in funzione dei coefficienti $c_{\mathbf{k}}$ e $F_{\mathbf{k}} = \frac{c_{\mathbf{k}}}{1+|c_{\mathbf{k}}|^2}$ che è elemento di matrice dell'operatore $a_{-\mathbf{k}\downarrow} a_{\mathbf{k}\uparrow}$, tra lo stato fondamentale ad $N - 2$ particelle ed N particelle: $F_{\mathbf{k}} = \langle N - 2 | a_{-\mathbf{k}\downarrow} a_{\mathbf{k}\uparrow} | N \rangle$.

In termini di F si ha il seguente risultato:

$$\delta \langle n_{\mathbf{k},s} \rangle = \frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{1 - 4|F_{\mathbf{k}}|^2} \right) \text{sgn}(\varepsilon_{\mathbf{k}}). \quad (48)$$

Questo risultato permette di calcolare il valore di aspettazione della parte cinetica dell'hamiltoniano del sistema. Invece l'espressione generale per il potenziale medio $\langle \hat{V} \rangle$ per un sistema a molti corpi:

$$\frac{1}{2} \sum_{ijmn} V_{ijmn} \langle \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_n \hat{a}_m \rangle, \quad (49)$$

con gli indici si indicano i possibili vettori d'onda $\mathbf{k}$ e spin s che caratterizzano gli stati di singola particella. L'elemento di matrice si scrive

$$V_{ijmn} = V^{-2} \int d\mathbf{r} \int d\mathbf{r}' V(\mathbf{r} - \mathbf{r}') e^{i(\mathbf{k}_i - \mathbf{k}_n) \cdot \mathbf{r}} e^{i(\mathbf{k}_j - \mathbf{k}_m) \cdot \mathbf{r}}. \quad (50)$$

Per una funzione d'onda BCS e per questa trattazione si considerano gli elementi di $\langle \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_n \hat{a}_m \rangle \neq 0$ solo quelli con $i = -j$ e $m = -n$ detti termini di pairing che corrispondono a $\mathbf{k}_i = -\mathbf{k}_j$ e $\mathbf{k}_m = -\mathbf{k}_n$:

$$\langle V \rangle_{\text{pairing}} = \sum_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} V_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \langle \hat{a}_{\mathbf{k}\uparrow}^\dagger \hat{a}_{-\mathbf{k}\downarrow}^\dagger \hat{a}_{-\mathbf{k}'\downarrow} \hat{a}_{\mathbf{k}'\uparrow} \rangle \quad (51)$$

e in termini della funzione $F_{\mathbf{k}}$:

$$\langle V \rangle_{pairing} = V_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} F_{\mathbf{k}} F_{\mathbf{k}'}^* . \quad (52)$$

Il valore di aspettazione dell'hamiltoniano $\hat{H}$ è:

$$\langle \hat{H} \rangle = \sum_{\mathbf{k}} |\varepsilon_{\mathbf{k}}| (1 - \sqrt{1 - 4|F_{\mathbf{k}}|^2}) + \sum_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} V_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} F_{\mathbf{k}} F_{\mathbf{k}'}^* . \quad (53)$$

Imponendo la derivata di $\langle \hat{H} \rangle$ rispetto a $F_{\mathbf{k}}^*$ pari a zero per minimizzare l'energia e ottimizzare il valore di F , si ottiene un'equazione autoconsistente in F :

$$\frac{2|\varepsilon_{\mathbf{k}}|F_{\mathbf{k}}}{\sqrt{1 - 4|F_{\mathbf{k}}|^2}} + \sum_{\mathbf{k}'} V_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} F_{\mathbf{k}'} = 0 . \quad (54)$$

Si rende l'equazione esplicita definendo le seguenti quantità:

$$E_{\mathbf{k}} = \frac{|\varepsilon_{\mathbf{k}}|}{\sqrt{1 - 4|F_{\mathbf{k}}|_{eq}^2}} , \quad (55)$$

$$\Delta_{\mathbf{k}} = \left(\frac{F_{\mathbf{k}}}{|F_{\mathbf{k}}|} \right)_{eq} (E_{\mathbf{k}}^2 - \varepsilon_{\mathbf{k}})^{1/2} \implies (F_{\mathbf{k}})_{eq} = \frac{\Delta_{\mathbf{k}}}{2E_{\mathbf{k}}} . \quad (56)$$

In questo modo l'equazione standard del gap BCS risulta essere:

$$\Delta_k = - \sum_{k'} V_{kk'} \frac{\Delta_{k'}}{2E_{k'}} \quad (57)$$

con $E_k = \sqrt{\varepsilon_k^2 + |\Delta_k|^2}$ e in notazione braket l'elemento di matrice $V_{kk'} = \langle k \uparrow, -k \downarrow | V | k' \uparrow, -k' \downarrow \rangle$.

Si ha la soluzione banale $\Delta = 0 \implies F_k = 0$. Le soluzioni non banali dipendono dalla forma specifica del potenziale di interazione V : nell'articolo originale della teoria BCS si considera l'interazione

$$V_{k,k'} = \begin{cases} -V_0 & \text{per } |\varepsilon_k|, |\varepsilon_{k'}| < \varepsilon_c \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} . \quad (58)$$

In questo modo l'energia non dipende dal vettore d'onda $\mathbf{k}$ e quindi anche il gap Δ risulta essere costante:

$$\Delta_k = \begin{cases} \Delta & \text{per } |\varepsilon_k| < \varepsilon_c \\ 0 & \text{per } |\varepsilon_k| > \varepsilon_c \end{cases} . \quad (59)$$

Con questi risultati si ottiene

$$1 = \frac{1}{2} V_0 \sum_k (\varepsilon_k^2 + |\Delta|^2)^{-1/2} , \quad (60)$$

con $|\varepsilon_k| < \varepsilon_c$.

Per $V_0 < 0$, E_k non ha soluzione e il caso interessante è per interazione attrattiva e quindi $V_0 > 0$, arrivando alla seguente stima:

$$|\Delta| \approx 2 \varepsilon_c e^{-\frac{1}{N(0)V_0}} \ll \varepsilon_c , N(0) V_0 \ll 1 . \quad (61)$$

$N(0)$ rappresenta la densità degli stati a spin singolo, cioè stati per un solo valore di spin fissato e corrisponde al limite in cui la densità degli stati $\rho(\varepsilon) = \sum_k \delta(\varepsilon - \varepsilon_k) \rightarrow cost$, per $\varepsilon \rightarrow 0$, rispetto al livello di Fermi.

Questa trattazione tiene conto delle evidenze sperimentali del gap Δ BCS che si è discusso nella sezione 2.7 e inoltre è il punto di partenza per descrivere le proprietà dell' ^3He liquido, in particolare le coppie di Cooper che si formano tra gli atomi dell' ^3He .

3 Descrizione Classica dell'Elio e Potenziale di Interazione

Facendo riferimento a [2], si descrive il sistema in esame nell'ambito della meccanica classica.

L'elio può essere descritto come un gas monoatomico, in cui gli atomi hanno tutti la stessa massa m e interagiscono tra loro tramite un potenziale di interazione a due corpi $V(r)$, funzione della distanza interatomica r .

Per i gas nobili, il potenziale di interazione presenta una forte repulsione a corto raggio e una debole attrazione a lungo raggio, nota come forza di dispersione o forza di van der Waals. Una forma fenomenologica per descrivere il potenziale di interazione è

$$V(r) = a e^{-br} - \frac{c}{r^6}, \quad (62)$$

dove a , b e c sono costanti determinate empiricamente.

Nel caso dell' ^4He il potenziale presenta un minimo di profondità

$$\varepsilon_0 \simeq 1.03 \text{ meV} \quad (63)$$

che corrisponde a una distanza interatomica di equilibrio

$$d \simeq 0.265 \text{ nm}. \quad (64)$$

In prossimità del minimo, il potenziale di interazione può essere approssimato dal potenziale di Lennard-Jones, dato da

$$V(r) = \varepsilon_0 \left[\left(\frac{d}{r} \right)^{12} - 2 \left(\frac{d}{r} \right)^6 \right]. \quad (65)$$

Questo potenziale riproduce correttamente la repulsione a corto raggio e l'attrazione a lungo raggio ed è ampiamente utilizzato nella descrizione classica e semiclassica delle proprietà termodinamiche dei gas nobili e dei liquidi debolmente interagenti.

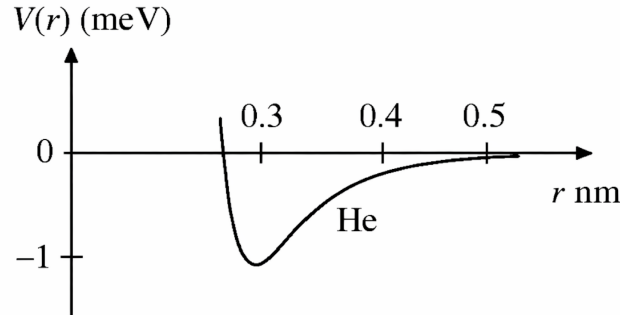


Figura 6: Potenziale di Lennard-Jones per l' ^4He

Rispetto agli altri gas nobili, l'elio esercita poca attrazione ed avendo anche una massa leggera lo rende un liquido quantistico: bisogna introdurre il formalismo della meccanica quantistica per spiegare in modo esauriente tutte le sue proprietà termodinamiche e superfluide.

4 Teoria BCS Generalizzata

4.1 Analogie alla teoria BCS

Gli atomi di ^3He sono fermioni e presentano stati superfluidi apparentemente analoghi alla superconduttività BCS. Tuttavia, nell' ^3He non vi è un evidente analogo dei fononi in grado di fornire un potenziale attrattivo che legni le coppie di Cooper.

Le forze di van der Waals tra gli atomi sono dominate da una forte repulsione e dunque la forza attrattiva è troppo debole per spiegare persino la temperatura di circa 2 mK. L' ^3He non può essere descritto come un

normale superconduttore in cui le coppie di Cooper, in uno stato legato, sono descritte da funzioni d'onda di tipo s , ossia con $l = 0$. Quelle formate nelle fasi anomale dell' ^3He sono caratterizzate da una struttura interna non banale, da un orientamento nello spazio orbitale e di spin che può variare nello spazio e nel tempo. Considerando stati legati con $l = 1$ o $l = 2$, le funzioni d'onda della coppia di Cooper $\phi(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ si annullano per $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$. Dunque le particelle accoppiate non saranno mai nella stessa posizione.

Ciò riflette la forte repulsione a corto raggio tra gli atomi, che impedisce alle particelle accoppiate di occupare la stessa posizione nello spazio.

Per provare a descrivere un accoppiamento di Cooper nell' ^3He , si considera l'effettiva interazione tra le particelle: se deve verificarsi un accoppiamento di Cooper di tipo BCS, la forza attrattiva di legame tra le particelle deve avere origine direttamente dalle stesse particelle di ^3He .

In accordo con la teoria di Landau che verrà sviluppata nella sezione 4.3, i primi livelli eccitati del sistema a molti corpi possono essere descritti dall'eccitazione di quasiparticelle fermioniche che possiedono, come gli atomi reali, un momento $\mathbf{p}$ e uno spin s . L'effetto complessivo delle interazioni atomiche è la modifica dello spettro energetico di singola particella $\varepsilon(\mathbf{p}) = \frac{p^2}{2m}$ a uno spettro di quasiparticella $\varepsilon(\mathbf{p}) \approx \varepsilon_F + p_F \frac{(p-p_F)}{m^*}$ e l'origine di un insieme di "campi molecolari".

4.2 Stato normale del liquido di Fermi dell' ^3He

Si assume che l'interazione di van der Waals tra atomi di ^3He sia uguale a quella tra atomi di ^4He . L'operatore hamiltoniano che descrive gli atomi di tale sistema è

$$\hat{H} = \sum_i \frac{-\hbar^2}{2m} \nabla_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} V(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j). \quad (66)$$

Trascurando inizialmente l'interazione tra le particelle, l'equazione agli autovalori ad N particelle è

$$\hat{H}\Psi_n(\mathbf{r}_1, s_1; \dots; \mathbf{r}_N, s_N) = E_n \Psi_n \quad (67)$$

che deve avere autofunzioni dispari per scambio di coppie di particelle, poiché l'atomo di ^3He ha spin complessivo $\frac{1}{2}$. Dunque, per due particelle deve valere

$$\Psi_n(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = -\Psi_n(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1), \quad (68)$$

e in generale, per N particelle, trascurando l'interazione tra esse, la funzione d'onda è data dal determinante di Slater delle N particelle:

$$\Psi_n^0(\mathbf{r}_1, s_1; \mathbf{r}_2, s_2; \dots; \mathbf{r}_N, s_N) = \frac{1}{\sqrt{N!}} \begin{vmatrix} \Psi_1(\mathbf{r}_1, s_1) & \Psi_2(\mathbf{r}_1, s_1) & \dots & \Psi_n(\mathbf{r}_1, s_1) \\ \Psi_1(\mathbf{r}_2, s_2) & \Psi_2(\mathbf{r}_2, s_2) & \dots & \Psi_n(\mathbf{r}_2, s_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Psi_1(\mathbf{r}_N, s_N) & \Psi_2(\mathbf{r}_N, s_N) & \dots & \Psi_n(\mathbf{r}_N, s_N) \end{vmatrix}. \quad (69)$$

Lo stato di singola particella è un'onda piana,

$$\Psi(\mathbf{r}, s) = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \chi(s), \quad (70)$$

dove V è il volume del sistema e $\chi(s)$ è la parte di spin della funzione d'onda, corrispondente agli autostati dell'operatore S_z , mostrati nell'equazione 9 con $s = \frac{1}{2}$.

Con queste ipotesi, lo stato fondamentale alla temperatura $T = 0 \text{ K}$ è indicato con $\Psi_0^{(0)}$: il pedice indica lo stato $n=0$ e l'indice indica che non si considerano interazioni tra le particelle.

Questo stato si ottiene occupando tutti gli stati di onda piana fino alla superficie di Fermi. Il sistema fisico in esame è isotropo, a differenza dei cristalli: non esiste una direzione privilegiata e la superficie di Fermi è una sfera di raggio

$$k_F = (3\pi^2 n)^{1/3}, \quad (71)$$

come nel modello di Sommerfeld per i metalli.

Conoscendo la densità e la massa dell'atomo di ^3He , si può calcolare la densità numerica n di particelle, il numero d'onda k_F del sistema, l'energia di Fermi e la corrispondente temperatura di Fermi T_F : tutti i valori sono riportati in tabella.

Grandezza	Simbolo	Valore
Densità di massa	ρ	81 kg/m ³
Massa dell'atomo	m	5.008×10^{-27} kg
Densità numerica	n	1.61×10^{28} m ⁻³
Numero di Fermi	k_F	$0.78 \text{ \AA}^{-1}$
Energia di Fermi	ε_F	0.49 meV
Temperatura di Fermi	$T_F = \frac{\varepsilon_F}{k_B}$	4.9 K

Da questi risultati si può notare che le temperature che occorrono per manifestare gli stati superfluidi sono di un fattore 1000 più piccole rispetto all'energia di Fermi ε_F e dunque si ha un gas di Fermi degenere. Da queste considerazioni si può affermare che non è possibile trascurare le interazioni particella-particella che sono molto intense, $V(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)$.

Invece di essere un gas quantistico ideale e non interagente, esso è un liquido di Fermi denso. Questo concetto di liquido di Fermi è stato sviluppato da Landau.

Tuttavia, anche se il sistema è fortemente interagente e possiede una funzione d'onda dello stato fondamentale complicata, le eccitazioni rispetto a questo stato fondamentale si comportano come particelle debolmente interagenti. Queste eccitazioni debolmente interagenti possono essere interpretate come quasiparticelle, come accade nella teoria BCS.

Il primo passo consiste nel considerare la funzione d'onda dello stato fondamentale in un sistema interagente di fermioni, ovvero un sistema in cui l'interazione può essere applicata o eliminata in modo continuo tramite un opportuno operatore hamiltoniano. Si introduce quindi

$$\hat{H}^{(\lambda)} = \sum_i \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_i^2 \right) + \frac{\lambda}{2} \sum_{i \neq j} V(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j), \quad (72)$$

dove il caso $\lambda = 0$ corrisponde a un gas di Fermi non interagente, per il quale è nota la soluzione analitica dello stato fondamentale $\Psi_0^{(0)}$ appena descritta in 69.

4.3 Teoria di Landau

L'ipotesi fondamentale di Landau è l'assunzione di una continuità adiabatica: le funzioni d'onda cambiano in modo continuo man mano che λ viene aumentato lentamente da 0 a 1,

$$\psi_n^{(0)} \rightarrow \psi_n^{(\lambda)} \rightarrow \psi_n^{(1)}. \quad (73)$$

Questa assunzione di continuità resta valida se non avviene un cambiamento improvviso nel carattere della funzione d'onda al variare di λ , come una transizione di fase dallo stato liquido a quello solido oppure da un liquido normale a uno superfluido.

È quindi possibile studiare l'evoluzione delle proprietà fisiche del sistema facendo variare lentamente il parametro λ .

Si assume che gli stati del sistema ideale si trasformino gradualmente negli stati del sistema interagente man mano che aumenta l'interazione. In questo modo si può studiare l'evoluzione temporale di ogni stato mediante un approccio perturbativo.

Tuttavia gli stati del sistema interagente, in generale, sono instabili e sono attenuati dopo un certo tempo τ . Se il processo adiabatico dell'interazione richiede un tempo $t \gtrsim \tau$, allora lo stato decadrà ancora prima che l'interazione sia completamente "accesa". Procedendo troppo velocemente lo stato finale non è più un autostato del sistema: si ipotizza che τ sia molto maggiore del tempo necessario per l'accensione adiabatica dell'interazione.

Queste ipotesi permettono di analizzare solo i primi stati eccitati, quelli più vicini allo stato fondamentale. Assumendo valida la continuità degli stati, lo stato fondamentale non interagente origina lo stato fondamentale interagente. Aggiungendo una particella con $k > k_F$ allo stato fondamentale e accendendo l'interazione, si

ottiene un autostato del sistema interagente ed è equivalente ad aggiungere una quasiparticella di vettore d'onda k allo stato fondamentale interagente.

Si sottolinea che il tempo di vita dello stato così definito è apprezzabile solo vicino alla superficie di Fermi, infatti una quasiparticella è ben definita solo vicino a tale superficie.

Dalla continuità degli stati segue che la distribuzione dei momenti $n(k)$ che indica l'occupazione delle onde piane del sistema, caratterizza anche gli stati del sistema reale, cioè fornisce la distribuzione delle quasiparticelle. Si definisce la variazione

$$\delta n(k) = n(k) - n_0(k), \quad (74)$$

con $n_0(k)$ la distribuzione dei momenti allo stato fondamentale e questa variazione, per definizione di quasiparticella, deve essere apprezzabile solo attorno a $k = k_F$ per costruzione della teoria. Per il sistema non interagente l'energia totale del sistema è la somma delle energie di singola particella:

$$E - E_0 = \sum_{k,s} \varepsilon_k^0 \delta n_{k,s} \quad \delta n_{k,s} = \begin{cases} 1 \vee 0 & \text{per } k > k_F \\ -1 \vee 0, & \text{per } k < k_F \end{cases}. \quad (75)$$

Invece l'energia del sistema interagente non coincide con la somma delle energie delle quasiparticelle. Come è stato appena mostrato variazione $\delta n(k)$ della distribuzione porta ad una variazione dell'energia che al primo ordine è

$$\delta E = \sum_{k,s} \varepsilon_{k,s}^0 \delta n_{k,s}, \quad \varepsilon_k^0 = \frac{\delta E}{\delta n_{k,s}}. \quad (76)$$

Per $k > k_F$, le $\varepsilon_{k,s}^0$ sono le variazioni di energia dovute all'aggiunta al sistema di una quasiparticella di vettore d'onda k e spin s . Per $k = k_F$ si ha che $\varepsilon_{k,s}^0$ è l'energia acquisita aggiungendo una particella alla superficie di Fermi e si ottiene lo stato fondamentale di un sistema ad $N + 1$ particelle:

$$\varepsilon_{k_F} = E_0(N + 1) - E_0(N) = \mu = \left(\frac{\partial E_0}{\partial N} \right)_V, \quad (77)$$

dove μ è il potenziale chimico.

Più propriamente la distribuzione del momento corrisponde all'occupazione media delle particelle in un singolo stato descritto dai numeri quantici $\mathbf{k}$ e s , in modo da indicare anche gli stati di spin delle particelle.

Il suo valore medio è

$$\langle \hat{n}_{\mathbf{k},s} \rangle = \langle \psi^{(\lambda)} | \hat{a}_{\mathbf{k},s}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k},s} | \psi^{(\lambda)} \rangle, \quad (78)$$

con

$$\langle \hat{n}_{\mathbf{k},s} \rangle = f_{FD}(\mathbf{k}, s). \quad (79)$$

Nel caso $\lambda = 0$, si ritorna alla distribuzione di Fermi-Dirac alla temperatura $T = 0$ K,

$$\hat{n}_{\mathbf{k},s} = \begin{cases} 1, & \text{se } k < k_F, \\ 0, & \text{se } k > k_F. \end{cases} \quad (80)$$

Poiché l'evoluzione della funzione d'onda al crescere di λ è continua, anche la distribuzione del momento evolve in modo continuo e continua a presentare una discontinuità in corrispondenza di $k = k_F$. L'altezza della discontinuità risulta tuttavia ridotta di un fattore $Z < 1$.

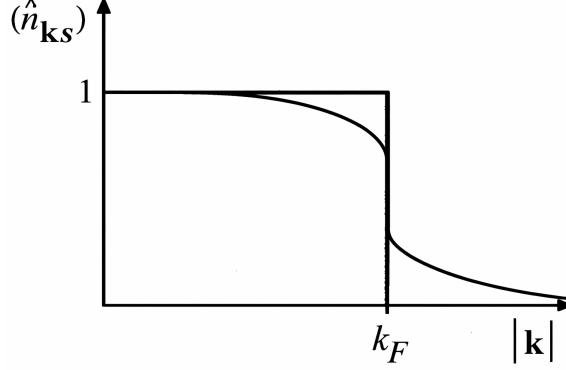


Figura 7: Le due distribuzioni a confronto

La posizione della discontinuità definisce il vettore d'onda $\mathbf{k}_F$ anche per il liquido di Fermi interagente. Il sistema fisico in esame, essendo a simmetria sferica, permette di definire $\mathbf{k}_F$ con l'equazione 71. Per il teorema di Luttinger rimane invariato anche nel sistema di liquido di Fermi fortemente interagente. Infatti per un sistema interagente, la definizione della superficie di Fermi dipende dal punto in cui la funzione di Green di singola particella cambia segno, passando attraverso uno zero o un polo:

$$G(\mathbf{r}t, \mathbf{r}'t') = \frac{i}{\hbar} \langle \phi_0 | T \psi(\mathbf{r}t) \psi^*(\mathbf{r}'t') | \phi_0 \rangle ,$$

con ψ, ψ^* operatori di creazione e distruzione e $|\phi_0\rangle$ lo stato fondamentale del sistema. Inoltre

$$T\{\psi(\mathbf{r}t)\psi^*(\mathbf{r}'t')\} = \begin{cases} \psi(\mathbf{r}t)\psi^*(\mathbf{r}'t') & \text{per } t' < t \\ \pm \psi^*(\mathbf{r}'t')\psi(\mathbf{r}t) & \text{per } t' > t \end{cases}$$

e per $t' > t$ si ha segno + per bosoni e segno - per i fermioni, per rispettare il teorema di spin-statistica. Le funzioni di Green sono dette propagatori e rappresentano l'ampiezza di probabilità di trovare una particella nei punti $(\mathbf{r}'_i, t_i)$, una volta introdotte nel sistema nei punti $(\mathbf{r}_i, t_i)$.

Si può dimostrare l'uguaglianza tra la densità del sistema interagente e quella del sistema di gas ideale: per entrambi vale l'equazione 71. Dunque le quasiparticelle interagenti si comportano in termini spaziali nel dominio di $\mathbf{k}$ come i fermioni ideali. Questo teorema assicura che la geometria della superficie di Fermi è una proprietà "topologica" conservata, legata esclusivamente al numero di elettroni nel sistema e non alla complessità delle loro collisioni interne. Si faccia riferimento in bibliografia [6] per approfondire il formalismo delle funzioni di Green e la relativa applicazione alla teoria di Landau. Si applica lo stesso argomento di continuità adiabatica agli stati eccitati a bassa energia del sistema e dunque si ha continuità negli autovalori di energia e nelle funzioni d'onda degli stati eccitati.

Nel limite non interagente $\lambda = 0$ gli stati eccitati si ottengono aggiungendo o rimuovendo elettroni dagli stati occupati nel determinante di Slater.

Si è assunto che l'energia delle quasiparticelle sia una quantità additiva e avendo considerato variazioni di energia al primo ordine, si hanno termini lineari. Per alcuni sistemi a basse temperature si descrivono i primi stati eccitati con poche quasiparticelle e la probabilità di interazioni tra loro è molto bassa e le loro energie semplicemente si sommano all'energia del sistema senza interazione: si trascurano stati legati tra quasiparticelle. Inoltre essendo le quasiparticelle dei fermioni, seguono anch'esse la distribuzione di Fermi-Dirac. In generale, se il sistema fisico da descrivere non permette di trascurare le interazioni tra le quasiparticelle, come accade nel sistema in esame, si sviluppa $\varepsilon_{k,s}$ al secondo ordine e diventa

$$\varepsilon_{k,s} = \varepsilon_{k,s}^0 + \sum_{k',s'} f(k, s; k', s') \delta n_{k',s'} \quad (81)$$

e rappresenta una quasiparticella interagente con un gas di quasiparticelle di densità $\delta n_{k',s'}$. Così l'energia del sistema è parametrizzata dalla quantità $\varepsilon_{k,s}$ e dalla funzione di interazione di Landau f . Dunque, l'energia, che è un funzionale della distribuzione del momento, sarà al secondo ordine in $n_{k,s}$. Si ottiene così:

$$E = E_0 + \sum_{k,s} \varepsilon_{k,s}^0 \delta n_{k,s} + \frac{1}{2} \sum_{k,s,k',s'} f(k,s;k',s') \delta n_{k,s} \delta n_{k',s'}. \quad (82)$$

Sotto l'ipotesi di sistema isotropo, per ragioni di simmetria, l'energia ε_k non dipende dallo spin s , infatti in assenza di campo magnetico non è possibile distinguere alcuna direzione nello spazio degli spin; invece l'interazione tra due quasiparticelle dipende solo dal relativo orientamento dei loro spin s e s' .

Espandendo attorno alla superficie di Fermi l'energia di quasiparticella in funzione del momento si ottiene:

$$\varepsilon(p) = \left(\frac{d\varepsilon}{dp} \right) (p - p_F) + O(p - p_F)^2 \quad (83)$$

e questa approssimazione è valida per fenomeni a bassa energia: $\varepsilon(p) \ll \varepsilon_F$ e $\left(\frac{d\varepsilon}{dp} \right)_{p_F} = v_F$ e si definisce così la massa efficace della quasiparticella $m^* = \frac{p_F}{v_F}$.

Si considerano quasiparticelle che hanno la proiezione di spin lungo l'asse z bene definita: per simmetria f può dipendere solo da $|\mathbf{p}|, |\mathbf{p}'|, \mathbf{p} \cdot \mathbf{p}'$ e da ss' . A differenza dell'energia di quasiparticella ε_k che varia rapidamente vicino alla superficie di Fermi, f è finita per $p = p_F$. Dunque nello sviluppo in serie di Taylor si considera solo l'ordine zero in $(p - p_F)$, cioè si valuta f per $p = p' = p_F$, gli ordini superiori sono correzioni trascurabili. Essa dipende solo dall'angolo θ tra $\mathbf{p}$ e $\mathbf{p}'$, $\mathbf{p} \cdot \mathbf{p}' = \cos(\theta)$. Le direzioni di spin possono entrare solo tramite il prodotto scalare degli spin, in accordo con l'invarianza rotazionale globale nello spazio degli spin e l'interazione di scambio tra le due particelle contribuisce solo per spin paralleli. Poiché per spin $s = \frac{1}{2}$ qualunque funzione del prodotto ss' può essere scritta come $A + Bss'$:

$$f(\mathbf{p} \cdot \mathbf{p}', ss') = f_s(\cos(\theta)) + f_a(\cos(\theta))ss' \quad (84)$$

che ha le dimensioni di un'energia ed è proporzionale a V^{-1} ed è conveniente moltiplicarla per la densità degli stati ad una quasiparticella che ha le dimensioni di un'energia inversa ed è proporzionale al volume V . In questo modo si ottiene una quantità adimensionale:

$$F_s(\cos(\theta)) = V \frac{dn}{d\varepsilon} f_s(\cos(\theta)), \quad F_a(\cos(\theta)) = V \frac{dn}{d\varepsilon} f_a(\cos(\theta)). \quad (85)$$

Espandendo in polinomi di Legendre $P_\ell(\cos \theta)$, le funzioni f_s ed f_a si ottengono le espressioni:

$$F_s(\cos(\theta)) = \sum_{\ell} F_{\ell}^s P_{\ell}(\cos \theta), \quad (86)$$

$$F_a(\cos(\theta)) = \sum_{\ell} F_{\ell}^a P_{\ell}(\cos \theta). \quad (87)$$

Con F_{ℓ}^s e F_{ℓ}^a i coefficienti di espansione, chiamati parametri di Landau che caratterizzano completamente l'interazione tra quasiparticelle.

Partendo dal limite di non interazione $\lambda = 0$, lo stato eccitato più semplice si ottiene aggiungendo una particella in uno stato vuoto al di sopra di k_F e l'autostato corrispondente sarà

$$|\psi_{k,s}^0\rangle = \hat{a}_{k,s}^{\dagger} |\psi_0^0\rangle \quad (88)$$

e la relativa energia è

$$\varepsilon_k^0 = \frac{\hbar^2(k^2 - k_F^2)}{2m}. \quad (89)$$

Dunque applicando il principio di continuità adiabatica ci si aspetta che l'energia dello stato eccitato nel sistema interagente abbia la stessa forma funzionale ed è

$$\varepsilon_k^{\lambda} = \frac{\hbar^2(k^2 - k_F^2)}{2m^*}, \quad (90)$$

con m^* la massa efficace per il sistema e dipende dal valore di k .

Il sistema in esame è l' ^3He e per questo sistema $m^* \sim 3m$ a basse pressioni e raggiunge $m^* \sim 6m$ vicino alla fase liquido-solido.

Creando una coppia di particelle di momento e spin k, s e k', s' , la funzione d'onda associata per il sistema non interagente è

$$|\psi_{ks,k's'}\rangle = \hat{a}_{ks}^\dagger \hat{a}_{k's'}^\dagger |\psi_0^0\rangle \quad (91)$$

e l'energia corrispondente è

$$E_k = \varepsilon_k^0 + \varepsilon_{k'}^0. \quad (92)$$

Si estende questa costruzione di autostati del sistema interagente con le relative energie a sistemi contenenti molteplici quasiparticelle. Il successo della teoria del liquido di Fermi-Landau per l' ^3He deriva dal fatto che è sufficiente determinare sperimentalmente solo un piccolo numero di parametri numerici: m^* , F_0^a , F_1^a , F_0^s e F_1^s . Tutti i coefficienti di ordine superiore al primo possono essere trascurati.

Una volta effettuato questo adattamento ai dati sperimentali, la teoria fornisce una descrizione completa della termodinamica a basse temperature e delle eccitazioni del fluido nello stato normale.

4.4 Campi Molecolari

I parametri di Landau si interpretano come campi molecolari. Si consideri il caso in cui solo $F_0^a \neq 0$. Questo corrisponde al caso in cui tutti i $\delta n_{k,s}$ sono diagonali nella base degli assi di spin assegnati e si considera una perturbazione uniforme, così da non avere dipendenza dalla direzione di $\mathbf{p}$. Allora $\delta n_{k,s} = \delta n_{k,\uparrow} \vee \delta n_{k,\downarrow}$.

Con queste ipotesi si ottiene:

$$f(\mathbf{p} \cdot \mathbf{p}', ss') = V^{-1} \left(\frac{dn}{d\varepsilon} \right)^{-1} F_0^a ss' \implies \delta E^{(2)} = V^{-1} \left(\frac{dn}{d\varepsilon} \right)^{-1} F_0^a \sum_{\mathbf{p}\mathbf{p}', ss'} ss' \delta n_{k,s} \delta n_{k',s'}, \quad (93)$$

ma $\sum_s = s \delta n_{k,s}$ è la componente z dello spin totale $S_z = S$. Dunque la funzione di Landau assume la forma:

$$f(\mathbf{p} \cdot \mathbf{p}', ss') = V^{-1} \left(\frac{dn}{d\varepsilon} \right)^{-1} F_0^a \mathbf{S}^2. \quad (94)$$

In questo modo si può definire l'energia di polarizzazione dello spin totale $\mathbf{S}$ di un gas di fermi in un campo, ossia il contributo energetico al processo di allineamento di spin, data dall'hamiltoniano:

$$H_{mol} = \left(\frac{dn}{d\varepsilon} \right)^{-1} F_0^a \mathbf{S}. \quad (95)$$

Per un campo esterno di vettore d'onda $\mathbf{k}$ e frequenza ω si definisce il set di equazioni:

$$\mathbf{S}(\mathbf{k}, \omega) = \chi_0^{sp}(\mathbf{k}, \omega) H_{tot}(\mathbf{k}, \omega), \quad (96)$$

$$H_{tot}(\mathbf{k}, \omega) = H_{ext}(\mathbf{k}, \omega) + H_{mol}(\mathbf{k}, \omega). \quad (97)$$

Queste equazioni sono le stesse della teoria di campo medio del ferromagnetismo e χ_0^{sp} è la funzione di risposta dello spin di un gas di Fermi non interagente a un campo esterno.

La risposta reale dello spin a un campo esterno è

$$\chi_{true}^{sp}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{\mathbf{S}(\mathbf{k}, \omega)}{H_{ext}} = \frac{\chi_0^{sp}(\mathbf{k}, \omega)}{1 + \left(\frac{dn}{d\varepsilon} \right)^{-1} F_0^a \chi_0^{sp}(\mathbf{k}, \omega)}. \quad (98)$$

Questo risultato è valido nell'approssimazione di considerare solo il parametro F_0^a e $|\mathbf{k}| = \omega = 0$. Altrimenti entra in gioco un'approssimazione implicita: la forma di Landau del funzionale di energia sopra descritta è valida per $k \ll k_F$ e $\omega \ll \varepsilon_F/\hbar$, infatti la teoria di Landau non pretende di descrivere eccitazioni con $k(\omega) \gtrsim k_F(\varepsilon_F/\hbar)$.

La suscettibilità di spin $\chi_{true}(0, 0) = \chi$ in un liquido di Fermi-Landau si calcola ricordando che la suscettibilità di spin statica per particelle reali è data semplicemente dalla densità degli stati all'energia di Fermi: $\chi_0 = \frac{dn}{d\varepsilon}$, così la risposta reale a un campo esterno risulta essere:

$$\chi = \frac{dn/d\varepsilon}{1 + F_0^a}. \quad (99)$$

Una misura della suscettibilità di spin determina il parametro di Landau F_0^a e per l' ^3He liquido vale ≈ -0.7 . In particolare la suscettività χ è circa quattro volte il suo valore nel caso non interagente. Legget afferma che questo è indicativo di una tendenza verso il ferromagnetismo e suggerisce che nello stato liquido normale sono presenti forti fluttuazioni di spin ferromagnetiche: sono queste fluttuazioni di spin a guidare la transizione verso la superfluidità nell' ^3He . Si è fatto riferimento alla bibliografia [5].

Per qualunque perturbazione che non produca una polarizzazione netta di spin, l'effetto dei campi molecolari scompare e il comportamento del sistema è come quello di un gas di Fermi non interagente, ma con la massa efficace m^* .

4.5 Interazioni di coppia nell' ^3He

Le prossime sezioni fanno riferimento alla bibliografia [2] e [5].

Una singola quasiparticella di spin $s = \frac{1}{2}$ nel punto $\mathbf{r}$, al tempo t , produce un campo molecolare $H(\mathbf{r}, t) \propto F_0^a \mathbf{s}$ che produce una polarizzazione collettiva di spin $S(\mathbf{r}', t')$ nei punti vicini:

$$\mathbf{S}(\mathbf{r}', t') \sim \chi(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') H(\mathbf{r}, t) \sim \chi(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') F_0^a \mathbf{s}. \quad (100)$$

Questa polarizzazione collettiva introduce il proprio campo molecolare $H(\mathbf{r}', t') \propto F_0^a \mathbf{S}(\mathbf{r}', t')$ che può essere sentito da una quasiparticella di spin $\mathbf{s}'$ in $(\mathbf{r}', t')$ come un'energia di Zeeman $-\mathbf{s}' H(\mathbf{r}', t')$.

Dunque si genera tra le due quasiparticelle di spin $\mathbf{s}$ e $\mathbf{s}'$ nei punti $\mathbf{r}, t$ e $\mathbf{r}', t'$ un'interazione della forma:

$$V_{eff}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t'; \mathbf{s}, \mathbf{s}') \sim (-F_0^a)^2 \chi(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') \mathbf{s} \cdot \mathbf{s}' \quad (101)$$

e si ha interazione attrattiva per spin paralleli e repulsiva per spin antiparalleli. Le quasiparticelle che si muovono nel liquido mediano l'interazione ed è lo stesso sistema tra il quale tale interazione opera.

L'hamiltoniano a basse energie dell' ^3He liquido si esprime in termini degli operatori di creazione e distruzione di quasiparticelle:

$$\hat{H} = \sum_{\mathbf{p}, s} \varepsilon(p) \hat{a}_{\mathbf{p}s}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{p}s} + (M.F.) + \sum_{ijkl} V_{ijkl} \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_k \hat{a}_l, \quad (102)$$

con $\varepsilon(p) = \varepsilon_F + v_F(p - p_F) = \varepsilon_F + \frac{p_F}{m^*}(p - p_F)$. L'hamiltoniano è in corrispondenza biunivoca con un gas di Fermi debolmente interagente, senza considerare i campi molecolari, con $m \rightarrow m^*$. Gli stati di quasiparticella singola coinvolti nell'accoppiamento di Cooper hanno energie di eccitazione $\sim k_B T_c \ll k_B T_F$ e sono abbastanza vicini alla superficie di Fermi per essere descritti dal liquido di Fermi-Landau.

L'interazione elettromagnetica tra i momenti di dipolo nucleare è molto debole anche alla distanza più vicina possibile tra due atomi ed è dell'ordine $\sim 10^{-7}$ K (in unità $k_B T$) ed è trascurabile. Le energie di interazione tra due quasiparticelle di ^3He nasce a un livello fondamentale dall'interazione tra l'energia coulombiana e cinetica e quindi invariante sotto rotazioni nello spazio orbitale e di spin separatamente.

Si può considerare che le coppie di Cooper che si formano nel liquido hanno un unico comportamento sotto rotazioni, cioè caratterizzate da uno spin totale S ben definito ($S = 0 \vee S = 1$) e da un definito valore del momento angolare relativo ℓ .

Per l' ^3He liquido si considera il problema di due fermioni di spin $s = \frac{1}{2}$ che interagiscono nello spazio vuoto tramite un potenziale centrale e per il principio di esclusione di Pauli si hanno valori di ℓ dispari per stati di tripletto di spin perchè la parte spaziale deve essere antisimmetrica. In assenza esplicita della dipendenza dallo spin da parte del potenziale, lo stato fondamentale corrisponde sempre a $\ell = S = 0$.

Tuttavia il potenziale efficace per un moto radiale relativo contiene sempre il termine centrifugo, per $\ell \neq 0$ $\frac{\hbar^2 \ell(\ell+1)}{mr^2}$ e poiché non ci sono restrizioni sul moto relativo radiale, l'energia più bassa in questo potenziale efficace deve essere per un valore di $\ell > 0$. La conclusione è che lo stato fondamentale del sistema con $S = 0 = \ell$ non può esistere per due ragioni: il processo di transizione da particelle a quasiparticelle introduce

una dipendenza esplicita dallo spin nell'interazione tra quasiparticelle e le coppie di Cooper per un sistema debolmente interagente, come l' ^3He , sono formate da stati vicino alla superficie di Fermi e sono indotte ad avere un momento relativo dell'ordine di $2\hbar k_F$. Inoltre la repulsione tra gli atomi non permette un avvicinamento maggiore di $r_0 \sim 2.5 \text{ \AA}$ e ciò suggerisce che abbiano un momento angolare orbitale relativo dell'ordine di $k_F r_0$ (in unità di $\hbar$).

Una descrizione dell' ^3He liquido nello stato fondamentale è una funzione d'onda BCS della forma:

$$\psi_N = \text{cost} \phi(\mathbf{r}_1 s_1, \mathbf{r}_2 s_2) \cdots \phi(\mathbf{r}_{N-1} s_{N-1}, \mathbf{r}_N s_N) \quad (103)$$

e le quantità $\mathbf{r}_i s_i$ si riferiscono alle quasiparticelle e non agli atomi reali.

Partendo dall'analisi discussa nella sezione 2.9 per calcolare il gap Δ della teoria BCS si considera la funzione d'onda di coppia $F(\mathbf{r})$ la cui trasformata di Fourier è F_k . Si fa riferimento alle stesse equazioni della teoria BCS 56 e 57 e si considera l'elemento di matrice di interazione

$$V_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} = \langle \mathbf{k} \uparrow, -\mathbf{k} \downarrow | \hat{V} | \mathbf{k}' \uparrow, -\mathbf{k}' \downarrow \rangle. \quad (104)$$

Dopo queste considerazioni comuni con la teoria BCS, si considera un termine di interazione di coppia più generale rispetto a quella dell'equazione 58: deve sempre valere l'invarianza per rotazione dei vettori d'onda $\mathbf{k}$ e $\mathbf{k}'$ e può essere scritta con dipendenza solo dall'angolo tra i due vettori d'onda $\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}'$. Si può scrivere il potenziale di interazione di coppia nella forma:

$$V_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} = \sum_{\ell} V_{\ell}(k, k') P_{\ell}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}'), \quad (105)$$

con i polinomi di Legendre già introdotti nella sezione 4.3. Sostituendo questa interazione nell'equazione di gap 57, a patto che la variazione di V_{ℓ} rispetto a ε_k sia grande rispetto alla temperatura critica T_c che è una condizione verificata sperimentalmente per l' ^3He , si può introdurre un valore di soglia ε_c . In questo modo il termine di interazione diventa:

$$V_{kk'} = - \sum_{\ell} \tilde{V}_{\ell} P_{\ell}(\cos \theta_{kk'}), \quad (106)$$

con

$$\tilde{V}_{\ell} = \begin{cases} \text{cost} & \text{per } |\varepsilon_k|, |\varepsilon_{k'}| < \varepsilon_c \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}. \quad (107)$$

Ora sostituendo nell'equazione di gap e considerato un tipico valore del gap $|\Delta| \sim k_B T_c$ e $\varepsilon_c \gg |\Delta|$, si nota che i termini con diversi ℓ si disaccoppiano e prendendo come numero quantico $\ell = \ell_0$ per il quale si massimizza $\tilde{V}_{\ell} = \tilde{V}_{\ell_0}$ e quindi l'energia massima, si ottiene:

$$\Delta(\mathbf{k}) = \sum_m a_m Y_{\ell_0}^m(\theta, \phi) \quad (108)$$

che corrisponde al valore massimo di V_{ℓ} , cioè il termine di interazione più attrattivo.

Un'importante conseguenza del fatto che $V_{kk'}$ sia invariante sotto rotazione è che se $\Delta(\mathbf{k})$ è soluzione, lo è anche $\Delta(\mathbf{R}\mathbf{k})$, dove $\mathbf{R}$ rappresenta una rotazione e lo stesso vale per F_k : l'orientamento della funzione d'onda di coppia $F(\mathbf{r})$ è arbitrario e le coppie di Cooper hanno un grado di libertà orbitale non banale. Dunque una nuova caratteristica delle coppie di Cooper nell' ^3He superfluido è la necessaria estensione ai gradi di libertà di spin.

La scelta più semplice è quella di scegliere lo stato di tripletto di spin e prendere l'asse di spin in modo che gli elementi fuori diagonale delle quantità $\phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ della funzione d'onda 103 siano zero e così si ottiene una funzione d'onda a molti corpi analoga a quella BCS:

$$\psi_N = \text{cost} \left(\sum_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}\uparrow} \hat{a}_{\mathbf{k}\uparrow}^{\dagger} \hat{a}_{-\mathbf{k}\downarrow}^{\dagger} c_{\mathbf{k}\downarrow} \hat{a}_{\mathbf{k}\downarrow}^{\dagger} \hat{a}_{-\mathbf{k}\uparrow}^{\dagger} \right)^{N/2} |0\rangle, \quad (109)$$

con $c_{\mathbf{k}s} = -c_{-\mathbf{k}s}$. Essa descrive uno stato coerente chiamato Equal-Spin-Pairing (ESP). Per stato coerente si intende uno stato descritto da una funzione d'onda che è una combinazione lineare di stati di oscillatore armonico 1-dimensionale:

$$|\alpha\rangle = C(|0\rangle + \frac{\alpha}{\sqrt{1!}} |1\rangle + \dots + \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle + \dots), \quad (110)$$

con $\alpha \in \mathbb{C}$ e C costante di normalizzazione che è pari a $C = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}}$.

Questo stato andrà a descrivere la fase A dell' ^3He superfluido che sarà trattata nella prossima sezione.

Essendo che appare il grado di libertà di spin assieme al vettore d'onda $\mathbf{k}$, le semplici equazioni della teoria BCS diventano più generali: al posto della semplice ampiezza $F_{\mathbf{k}}$ si introducono le ampiezze

$$F_{\mathbf{k}s} = \frac{c_{\mathbf{k}s}}{1 + |c_{\mathbf{k}s}|^2}, \quad (111)$$

per $s = \uparrow \vee s = \downarrow$ e anche i gap diventano

$$\Delta_{\mathbf{k}s} = 2 E_{\mathbf{k}s} F_{\mathbf{k}s} \quad (112)$$

e l'energia corrispondente sarà

$$E_{\mathbf{k}s} = (\varepsilon_{\mathbf{k}}^2 + |\Delta_{\mathbf{k}s}|^2)^{1/2}. \quad (113)$$

Le funzioni d'onda di coppia, le cui componenti di Fourier sono $F_{\mathbf{k}}$, possono essere riscritte con il grado di libertà di spin nella seguente forma:

$$F(\mathbf{r}) = F_{\uparrow}(\mathbf{r}) |\uparrow\uparrow\rangle + F_{\downarrow}(\mathbf{r}) |\downarrow\downarrow\rangle. \quad (114)$$

Per rendere l'hamiltoniano invariante sotto rotazione nello spazio di spin bisogna porre a zero gli elementi di matrice

$$\langle \mathbf{k} \uparrow, -\mathbf{k} \uparrow | V | \mathbf{k}' \downarrow, -\mathbf{k}' \downarrow \rangle, \quad (115)$$

in modo da disaccoppiare i gap $\Delta_{\mathbf{k}\uparrow}$ e $\Delta_{\mathbf{k}\downarrow}$ e ognuno separatamente soddisfa l'equazione 57, indipendentemente dallo spin s .

Si noti che in questo semplice modello basato su una generalizzazione della teoria BCS, lo stato fondamentale del sistema possiede un alto grado di degenerazione che verrà eliminato una volta generalizzato il modello. Si considera lo stato fondamentale in una forma più generale:

$$\psi_N = \text{cost} \left(\sum_{\mathbf{k}\alpha\beta} c_{\mathbf{k}\alpha\beta} \hat{a}_{\mathbf{k}\alpha}^{\dagger} \hat{a}_{-\mathbf{k}\beta}^{\dagger} \right)^{N/2} |0\rangle, \quad (116)$$

dove i coefficienti $c_{\mathbf{k}\alpha\beta}$ sono dispari in $\mathbf{k}$ e simmetrici rispetto allo scambio degli indici $\alpha \rightarrow \beta$ che indicano gli stati di spin. L'obiettivo è quello di scegliere un asse di spin in modo che gli elementi fuori diagonale $c_{\mathbf{k}\alpha\beta} = c_{\alpha\beta}(\mathbf{k})$ siano nulli per ogni valore di $\mathbf{k}$. Per un dato valore di $\mathbf{k}$, poiché la matrice $c_{\alpha\beta}(\mathbf{k})$ è simmetrica, è sempre possibile trovare una scelta dell'asse di spin che la diagonalizza: in questa base le quantità $F_{\mathbf{k}s}$ e $\Delta_{\mathbf{k}s}$ diventano delle matrici nello spazio di spin

$$F_{\mathbf{k}\alpha\beta} = \frac{\Delta_{\mathbf{k}\alpha\beta}}{2E_{\mathbf{k}}} \quad , \quad \Delta_{\mathbf{k}\alpha\beta} = \sum_m a_{m,\alpha\beta} Y_{\ell_0}^m(\mathbf{k}) \quad (117)$$

e si ricorda che ℓ_0 è il numero quantico ℓ tale per cui si ha la maggiore componente attrattiva del potenziale di interazione di coppia $V_{kk'}$.

Considerando la trasformata di Fourier della funzione d'onda di coppia $F_{\alpha\beta}(\mathbf{k})$, la si valuta per un dato valore di $\mathbf{k}$ e si trova un asse di spin per il quale la matrice $F_{\mathbf{k}}$ è diagonale. Essendo che $F_{\alpha\beta}(\mathbf{k}) = F_{\uparrow}(\mathbf{k}) |\uparrow\uparrow\rangle + F_{\downarrow}(\mathbf{k}) |\downarrow\downarrow\rangle$ deve essere uno stato unitario per fare in modo che sia invariante rispetto alla rotazione dello spin, cioè nessuna direzione di spin deve essere favorita: deve valere $|F_{\uparrow}| = |F_{\downarrow}| = |F_{\mathbf{k}}|$ e così $|F_{\mathbf{k}}|^2 \propto I$.

Una tale funzione d'onda a due particelle di spin $s = \frac{1}{2}$ in stato di tripletto di spin è equivalente ad uno stato con spin totale $S = 1$ e $\mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{d}} = 0$, dove $\hat{\mathbf{d}}$ è un vettore reale unitario nel piano perpendicolare alla scelta dell'asse z .

Dunque ogni stato di questo tipo può essere parametrizzato da un vettore $\mathbf{d}(\mathbf{k})$ che è reale a meno di una fase complessiva, cioè $\mathbf{d}(\mathbf{k}) \times \mathbf{d}^*(\mathbf{k}) = 0$ con direzione lungo $\hat{\mathbf{d}}$ e modulo pari a $|F_{\mathbf{k}}|$. Poiché $\Delta_{\mathbf{k}\alpha\beta}$ per uno stato unitario è proporzionale ad $F_{\mathbf{k}\alpha\beta}$ può essere parametrizzato allo stesso modo.

5 Fasi Superfluide nell' ^3He

L'identificazione usuale della fase A dell' ^3He liquido è con lo stato con $\ell = 1$, noto come stato ABM, avente un vettore $\mathbf{d}(\mathbf{k})$ dato da

$$\hat{\mathbf{d}}(\hat{\mathbf{k}}) = \hat{\mathbf{d}} f(\hat{\mathbf{k}}), \quad f(\hat{\mathbf{k}}) = \sin \theta e^{i\phi} \quad (118)$$

affinchè sia uno stato ESP della forma 109; mentre la fase B è identificata con lo stato BW

$$\mathbf{d}(\hat{\mathbf{k}}) = \cos \theta \cdot \hat{\mathbf{k}}. \quad (119)$$

Inoltre si nota che la fase BW ha un gap $|\Delta(\hat{\mathbf{k}})|$ che è indipendente da $\hat{\mathbf{k}}$, cioè isotropo, mentre il gap dello stato ABM è proporzionale a $|\sin \theta|$ e quindi possiede due nodi, a $\theta = 0, \pi$.

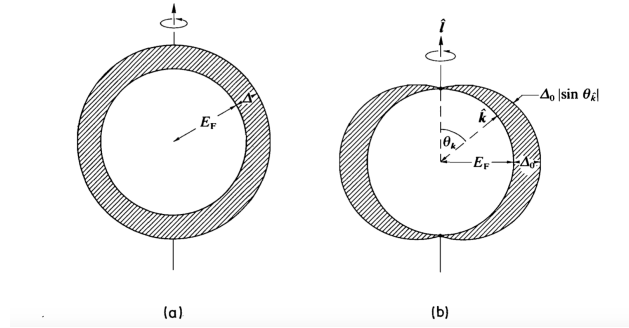


Figura 8: Fasi dell' ^3He

Per il caso di $\ell = 1$ la teoria sull' ^3He superfluido mostra che la soluzione BW è sempre la più stabile fornita dall'equazione di gap 117, indipendentemente dalla temperatura e dalla pressione del sistema, mentre le evidenze sperimentali descritte nel diagramma di fase in figura 3, anche in assenza di campi esterni, mostrano la presenza di due fasi anomale A e B.

Considerando uno spazio uniforme, $F = F(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$, la sua trasformata di Fourier rispetto alla variabile relativa è

$$F_{\alpha\beta}(\mathbf{k}) = \langle \hat{a}_{\mathbf{k}\alpha}^\dagger \hat{a}_{-\mathbf{k}\beta}^\dagger \rangle \quad (120)$$

e si definisce il versore $\hat{\mathbf{n}} = \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|}$ e la dipendenza di F dal versore si trova integrando nello spazio dei vettori d'onda

$$F_{\alpha\beta}(\mathbf{k}) = \int d|\mathbf{k}| F_{\alpha\beta}(\mathbf{k}). \quad (121)$$

Nello spazio degli spin si può scrivere il vettore $\hat{\mathbf{d}}(\hat{\mathbf{n}})$ come

$$\hat{\mathbf{d}}(\hat{\mathbf{n}}) = -i \sum_{i=1}^3 \sum_{\alpha\beta} (\sigma_2 \sigma_i)_{\alpha\beta} F_{\alpha\beta}(\hat{\mathbf{n}}) \quad (122)$$

che fornisce una descrizione della struttura delle coppie di Cooper: è una generalizzazione del parametro d'ordine ψ nel caso di accoppiamento $\ell = 0$ nella teoria di Ginzburg-landau.

Tale teoria fu sviluppata prima della teoria microscopica BCS: sostanzialmente la teoria GL introduce un parametro d'ordine $\eta(\mathbf{r})$ che vale 0 per $T = T_c$ e assume un valore finito per $T < T_c$ e mediante le simmetrie del sistema descritto dal relativo hamiltoniano H, si cerca di restringere i valori di energia alla dipendenza da η come funzionale. Con l'avvento della teoria BCS si è appurato che nel caso dei superconduttori $\eta(\mathbf{r}) \rightarrow \psi(\mathbf{r})$, funzione d'onda macroscopica che equivale alla funzione d'onda dipendente dal centro di massa $\mathbf{r} = \frac{\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2}{2}$ delle coppie di Cooper $F(\mathbf{r}_1 s_1, \mathbf{r}_2 s_2)$ per $s_1 = -s_2$.

Dunque considerando l'accoppiamento $\ell = 0$ si esprime l'energia libera F del sistema come un funzionale di $\hat{\mathbf{d}}(\hat{\mathbf{n}})$ e si arriva al seguente risultato:

$$F(\hat{\mathbf{d}}(\hat{\mathbf{n}}) : T) = \alpha_0 (T - T_c) \langle |\mathbf{d}|^2 \rangle + \frac{1}{2} \beta \langle |\mathbf{d}|^4 \rangle + O(d^6), \quad (123)$$

con $\beta > 0$ e $\alpha_0(T - T_c)$ il coefficiente che determina se il sistema sia energeticamente favorevole al passaggio da stato normale a stato di superfluido e la temperatura critica T_c fa cambiare segno a questo coefficiente. Per la derivazione analitica si faccia riferimento in bibliografia [5], sezione 5.7 e sezione 6.3. Date le possibili scelte di $\mathbf{d}(\mathbf{n})$ della forma

$$d_i(\mathbf{n}) = \sum_m a_m^{(i)} Y_{\ell_0}^m, \quad (124)$$

la scelta fisica è quella che minimizza il valore del termine quartico dell'equazione 123, fissato il termine quadratico, cioè quella che minimizza le fluttuazioni di $|\mathbf{d}|^2$ sopra la superficie di Fermi. Nel caso di $\ell_0 = 1$ è chiaro che la scelta migliore è quella dello stato BW 119, poiché in questo caso $|\mathbf{d}|^2$ è costante. In questo modo si è dimostrato che uno stato BW è sempre stabile, come è stato evidenziato sperimentalmente.

Come si è visto nella sezione 4.5 c'è un contributo dovuto all'interazione efficace tra quasiparticelle che è attrattiva per spin paralleli ed è proporzionale alla suscettibilità di spin $\chi(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t')$. In particolare la formazione di coppie di Cooper modifica la suscettibilità di spin, quindi modifica la stessa interazione che ha contribuito a formarle: il cosiddetto 'meccanismo di feedback delle fluttuazioni di spin'.

5.1 Interazione dipolo-dipolo nell' ^3He

La conseguenza più evidente dell'insorgere dell'accoppiamento di Cooper nell'elio liquido ^3He è quella che fu più manifesta nei primi esperimenti: la capacità di amplificare effetti estremamente deboli nello stato normale, in particolare quelli dell'interazione dipolo-dipolo nucleare. Questa amplificazione porta a un comportamento straordinariamente ricco negli esperimenti di risonanza magnetica nucleare (NMR).

L'interazione diretta tra i momenti dipolari nucleari di due atomi vicini di ^3He è di origine puramente elettromagnetica e ha la forma

$$\hat{H}_D = \frac{1}{2} \frac{\mu_0 \mu_n^2}{4\pi} \sum_{ij} r_{ij}^{-3} \{ \sigma_i \cdot \sigma_j - 3 \sigma_i \cdot \hat{r}_{ij} \sigma_j \cdot \hat{r}_{ij} \}, \quad \left(\hat{r}_{ij} \equiv \frac{\mathbf{r}_{ij}}{|\mathbf{r}_{ij}|} \right) \quad (6.4.1)$$

dove μ_n è il momento nucleare (~ 2.1 magnetoni nucleari: $2.1 \cdot \frac{e\hbar}{2m_p}$).

Anche alla distanza di massimo avvicinamento di due atomi di ^3He (il raggio di hard-core, $\sim 2 \text{ \AA}$): questa interazione è solo dell'ordine di 10^{-7} K (in $k_B T$), cioè diversi ordini di grandezza più piccola dell'energia termica alle temperature alle quali compaiono le fasi superfluide ($\sim 10^{-3} \text{ K}$).

Tuttavia, essa possiede una proprietà cruciale che la distingue dalle forze molto più intense (van der Waals): mentre è naturalmente invariante rispetto alla rotazione simultanea dei sistemi di coordinate di spin e orbitali, non è invariante rispetto alla rotazione di uno solo dei due. Di conseguenza, se le coordinate orbitali sono fissate, l'interazione dipolare può esercitare un "momento torcente" sullo spin totale del sistema. Tuttavia, nel liquido normale di ^3He questo momento, pur non essendo identicamente nullo, è molto piccolo.

5.2 Prime Evidenze Sperimentali della fase A Superfluida

L'esperimento di NMR (Risonanza Magnetica Nucleare) consiste nell'applicare un campo magnetico statico B_0 , in modo che i momenti magnetici nucleari tendono ad allinearsi al campo. Si applica un impulso a radiofrequenza in modo da osservare la precessione dei nuclei dovuta al campo esterno.

Nel caso normale la frequenza di risonanza è la frequenza di Larmor: $\omega_L = \gamma B_0$, dove: ω_L è la frequenza di Larmor; $\gamma = \frac{g\mu_n}{\hbar}$ è il rapporto giromagnetico e B_0 è il campo magnetico applicato.

Fu una grande sorpresa quando i primi esperimenti di NMR sulla fase A trovarono che la frequenza di risonanza, pur rimanendo ben definita, si spostava nettamente verso valori maggiori rispetto al suo valore nello stato normale che indica l'esistenza in quel sistema di una forte coppia addizionale oltre a quella fornita dal campo magnetico esterno H_{ext} .

Un semplice argomento di regola di somma indica che se la frequenza di risonanza ω_{res} è unica, allora il suo valore dovrebbe essere dato dalla formula

$$\omega_{\text{res}}^2 = -\chi_0^{-1} \langle [\hat{S}_x, [\hat{S}_x, \hat{H}]] \rangle = \chi_0^{-1} \frac{\partial^2 \langle H \rangle}{\partial \theta_x^2}, \quad (125)$$

dove $\hat{S}_x$ è l'operatore della componente totale lungo x dello spin; χ_0 è la suscettività di spin statica e θ_x è l'angolo di rotazione degli spin attorno all'asse x .

Poiché la maggior parte dei termini dell'hamiltoniana è invariante sotto questa rotazione, contribuiscono solo: il termine di Zeeman: $-\gamma S_z H_{ext}$ che contribuisce con la frequenza ω_L^2 e l'interazione dipolare $\hat{H}_D$. Si ottiene quindi

$$\omega_{\text{res}}^2 - \omega_L^2 = \chi_0^{-1} \frac{\partial^2 \langle H_D \rangle}{\partial \theta_x^2}. \quad (126)$$

La deviazione della frequenza di risonanza dal valore di Larmor è quindi una misura diretta dell'energia media dell'interazione dipolare nucleare.

Sperimentalmente come è stato detto è praticamente impossibile da misurare nella fase normale, ma nella fase A si trova:

$$\langle H_D \rangle \sim 10^{-3} \text{ erg/cm}^3, \text{ con } 1 \text{ erg/cm}^3 = 0.1 \text{ J/m}^3. \quad (127)$$

5.3 Dinamica dello Spin e Evidenze Sperimentali delle fasi A e B

Gli effetti dinamici dello spin (NMR) portano a una deviazione del sistema dall'equilibrio.

Il primo effetto che si descrive è la risonanza longitudinale della fase ABM: si prende un campo magnetico esterno lungo l'asse z e il vettore $\mathbf{d}$ lungo l'asse x in modo che si abbia uno stato iniziale della forma ESP. Così la componente di spin della funzione d'onda può essere espressa nella forma

$$\psi(t) = \left(e^{i(\Delta\phi/2)} |\uparrow\uparrow\rangle + e^{-i(\Delta\phi/2)} |\downarrow\downarrow\rangle \right)^{N/2}. \quad (128)$$

Nella notazione di $\mathbf{d}$ -vettore ciò corrisponde a una configurazione sul piano x - y . Nella convenzione usata la fase relativa $\hat{\Delta}\phi$ delle coppie è la variabile coniugata alla componente totale dello spin lungo z , S_z e vale $[\hat{S}_z, \hat{\Delta}\phi] = 2i$. L'energia di dipolo, a meno di una costante, ha la forma

$$H_D = -\frac{1}{4} g_D \cos \hat{\Delta}\phi. \quad (129)$$

Un calcolo diretto indica che la forma dell'energia di dipolo è, a meno di una costante,

$$H_D = -\frac{1}{4} g_D \cos \hat{\Delta}\phi, \quad (130)$$

dove g_D è una costante che in generale dipende da come viene trattato il comportamento a corto raggio. La configurazione di equilibrio corrisponde a $\Delta\phi = 0$, oppure, nella notazione del vettore $\mathbf{d}$, $\mathbf{d} \parallel \mathbf{l}$, con $\mathbf{l}$ la direzione del momento angolare orbitale delle coppie. Il termine dipendente da S_z , oltre al semplice termine di Zeeman $-\gamma S_z H_{ext}$, deve averne un altro che deriva dal fatto che la produzione di un S_z finito richiede un'energia cinetica aggiuntiva al sistema. Un'importante considerazione è che nell' $^3\text{He-A}$ reale a temperature non troppo piccole rispetto a T_c , sia i tempi caratteristici di collisione delle quasiparticelle sia il tempo caratteristico $\sim \hbar/\Delta$, associato al processo di accoppiamento, sono brevi rispetto alla frequenza associata alle forze di dipolo. Di conseguenza, è ragionevole assumere che il sistema sia in equilibrio, soggetto ai valori assegnati delle variabili macroscopiche S_z e $\Delta\phi$.

In tal caso, l'energia intrinseca associata alla polarizzazione di spin è per definizione $S_z^2/2\chi$, dove χ è la suscettibilità di spin sperimentale (così che la minimizzazione di questo termine più quello di Zeeman restituisce $S_z = \chi H$).

Pertanto, l'Hamiltoniana efficace completa per la NMR longitudinale assume una forma dipendente dal tempo

$$\hat{H}_{\text{eff}} = \frac{\hat{S}_z^2}{2\chi} - \gamma \hat{S}_z H_{ext} - \frac{1}{4} g_D \cos \hat{\Delta}\phi, \quad (131)$$

con $\hat{S}_z$ e $\hat{\Delta}\phi$ che soddisfano la relazione di commutazione canonica sopra menzionata. Implicitamente si è già assunto che nella funzione d'onda coerente 128 che per il caso reale della NMR longitudinale in $^3\text{He-A}$, si

è quasi sempre nel limite semiclassico. Per vedere ciò, si assume che per calcolare lo stato fondamentale ci si pone nell' approssimare $\hat{H}_{\text{eff}}$ con $\cos \hat{\Delta\phi} \rightarrow 1 - \frac{(\hat{\Delta\phi})^2}{2}$.

Il valore medio $(\Delta\phi)_0$ di $\Delta\phi$ nello stato fondamentale è pari a $(g_D\chi)^{-1/4}$. Per un campione macroscopico (diciamo $\sim 1 \text{ cm}^3$) di ^3He liquido questo numero è molto piccolo ($\sim 10^{-4}$), cosicché, sulla scala di 2π , la quantità $\Delta\phi$ può essere considerata avere un valore ben definito.

Più precisamente, quando si calcolano le equazioni del moto di S_z e $\Delta\phi$ da 128, considerando i valori medi, la quantità $\langle \sin \hat{\Delta\phi}(t) \rangle$ può essere sostituita con grande accuratezza da $\sin \langle \hat{\Delta\phi}(t) \rangle$, dopodiché, scrivendo $\langle \hat{\Delta\phi}(t) \rangle \equiv \Delta\phi(t)$, si trovano le equazioni del moto:

$$\frac{dS_z}{dt} = -\frac{1}{2}g_D \sin \Delta\phi, \quad \frac{d}{dt}(\Delta\phi) = 2 \left(\frac{S_z}{\chi} - H(t) \right). \quad (132)$$

In particolare, per piccole deviazioni dall'equilibrio il moto è armonico con frequenza $\omega_0 = (g_D/\chi)^{1/2}$. Per ampiezze maggiori la frequenza diminuisce e si annulla nel punto in cui l'energia totale è pari a $2g_D$.

Tutti questi effetti sono stati osservati negli esperimenti sulla NMR longitudinale del $^3\text{He-A}$.

L'ipotesi che $\Delta\phi$ sia essenzialmente una variabile classica (cioè che si possano ignorare le sue piccole fluttuazioni quantistiche) è giustificata dal fatto che il parametro adimensionale $\lambda = (g_D\chi)^{-1/4}$ è molto piccolo per campioni macroscopici.

Una volta discussa la fisica della risonanza longitudinale nel $^3\text{He-A}$, è possibile generalizzare la teoria per discutere la dinamica dello spin in una fase arbitraria con accoppiamento di Cooper. Si introduce per lo stato ABM ($^3\text{He-A}$), invece della differenza di fase $\Delta\phi$ tra le coppie $\uparrow\uparrow$ e $\downarrow\downarrow$, l'angolo θ_z di rotazione del vettore $\mathbf{d}$ attorno all'asse z , che è semplicemente metà di $\Delta\phi$: vale quindi la relazione di commutazione

$$[S_z, \theta_z] = i. \quad (133)$$

Tuttavia, dal punto di vista cinematico non vi è nulla di speciale nell'asse z ; quindi, se $i = 1, 2, 3$ denota un sistema cartesiano arbitrario e si definisce l'angolo di rotazione θ_i del sistema di coordinate di spin (cioè del vettore $d(\mathbf{n})$ ruotato uniformemente attorno all'asse i rispetto a una configurazione iniziale), e S_i indica la proiezione dello spin totale S su tale asse, si ha

$$[S_i, \theta_j] = i\delta_{ij}. \quad (134)$$

Le equazioni del moto semiclassiche assumono quindi la forma

$$\frac{d\mathbf{S}}{dt} = \mathbf{S} \times \mathbf{H}(t) - \frac{\partial E_D}{\partial \boldsymbol{\theta}}, \quad \frac{d\boldsymbol{\theta}}{dt} = \boldsymbol{\theta} \times \left(\mathbf{H}(t) - \frac{\mathbf{S}}{\chi} \right). \quad (135)$$

Una volta che l'energia di dipolo $E_D(\boldsymbol{\theta})$ è esplicitamente assegnata come funzione di una rotazione generale $\boldsymbol{\theta}$, si possono risolvere le equazioni per un moto generale di $\mathbf{S}$.

Il comportamento lineare (cioè le piccole oscillazioni attorno alla configurazione di equilibrio) è di particolare interesse, per le due fasi (ABM e BW), che sono convenzionalmente identificate con le fasi A e B dell' ^3He superfluido. Nella fase ABM esiste una risonanza longitudinale alla frequenza

$$\omega_{\parallel} = \omega_0 = (g_D/\chi)^{1/2} \quad (136)$$

e risulta che è proprio questa stessa quantità a determinare lo spostamento della frequenza di risonanza trasversa:

$$\omega_{\text{res}}^2 = \omega_L^2 + \omega_0^2 = \omega_{\perp}^2. \quad (137)$$

La relazione $\omega_{\perp}^2 - \omega_L^2 = \omega_{\parallel}^2$ è ben verificata sperimentalmente nel $^3\text{He-A}$.

Il caso della fase BW è più complicato.

L'energia di dipolo può dipendere, nel caso macroscopico e in assenza di campo esterno, solo dall'angolo di rotazione spin-orbita θ , non dall'asse ω della rotazione. Una volta che θ si è stabilizzato sul suo valore di equilibrio $\theta_0 \equiv \cos^{-1}(-\frac{1}{4})$, qualsiasi ulteriore torsione perpendicolare a $\hat{\omega}$ è, al primo ordine, equivalente a un cambiamento in $\hat{\omega}$ con θ fisso, quindi non può dare origine a una coppia dipolare. D'altra parte, una torsione parallela a $\hat{\omega}$ sposta θ dal valore di equilibrio θ_0 e attiva così una coppia dipolare. In un

campione sufficientemente grande, in un campo magnetico statico esterno debole H_{ext} , c'è un piccolissimo effetto di depairing che, pur lasciando lo stato pseudo-isotropico originale sostanzialmente invariato, tende a orientare $\hat{\omega}$ parallelamente a H_{ext} . In un esperimento NMR standard (trasversale), in cui il campo RF (campo elettromagnetico oscillante) tende a far ruotare il sistema di coordinate di spin attorno a un asse perpendicolare ad H_{ext} , le forze di dipolo non entrano in gioco e si dovrebbe osservare la consueta risonanza alla frequenza di Larmor dello stato normale, come in effetti accade. D'altra parte, in un esperimento NMR longitudinale, in cui il campo RF è parallelo a H_{ext} , tende a far ruotare il sistema di spin attorno a $\hat{\omega}$: le forze di dipolo dovrebbero entrare in gioco e si dovrebbe ottenere una risonanza ben definita proprio come nella fase ABM. Tale risonanza è effettivamente visibile nell' ^3He -B, e infatti la sua osservazione è stata storicamente ciò che ha definitivamente confermato la sua già prevista identificazione con la fase BW. In questo modo mediante gli esperimenti è stato possibile individuare e descrivere le due fasi superfluide dell' ^3He come previsto dal modello teorico.

6 Frazioni Superfluide nell' ^3He

In riferimento a [9] e [5] si delineano le principali caratteristiche della densità superfluida nell' ^3He . Nel modello a due fluidi di Landau, un superfluido viene descritto come la sovrapposizione di due componenti:

$$\rho = \rho_n + \rho_s, \quad (138)$$

con ρ la densità totale del fluido, ρ_n la densità della componente normale e ρ_s la densità della componente superfluida.

Fase B. Lo spettro energetico della fase B è

$$E_p = \sqrt{\varepsilon_p^2 + \Delta^2}, \quad (139)$$

infatti il gap è isotropo. Vicino alla superficie di Fermi ε_p assume la forma dell'equazione 83. Dunque si ottengono i seguenti valori di energia:

$$E_p \approx \sqrt{v_F^2(p - p_F)^2 + \Delta^2} \quad (140)$$

e per piccole variazioni del momento p si ha che $|v_F(p - p_F)| \ll \Delta \implies E_p \approx \Delta + \frac{v_F^2}{2\Delta}(p - p_F)^2$.

Nel regime di basse temperature dove $k_B T \ll \Delta$ la derivata negativa della distribuzione di Fermi-Dirac assume la forma

$$\frac{\partial f(E_p)}{\partial E_p} \approx \beta e^{-\beta E_p}, \quad (141)$$

considerando che

$$-\frac{\partial f(E_p)}{\partial E_p} = \frac{\beta e^{\beta E_p}}{(1 + e^{\beta E_p})^2}. \quad (142)$$

La densità del fluido nello stato normale è in generale un tensore di rango 2 che tiene conto dell'energia di quasiparticella anisotropia e assunta attorno alla superficie di fermi, si ottiene:

$$\rho_{n,ij} = 3\rho \langle \hat{p}_i \hat{p}_j Y_0(p, T) \rangle_{\hat{\mathbf{p}}} = \delta_{ij} \frac{3\rho}{p_F^2} \int \frac{d\varepsilon_p d\Omega_{\hat{\mathbf{p}}}}{4\pi} \frac{p_F^2}{3} \beta e^{-\beta E_p}, \quad (143)$$

con Y_0 funzione definita come l'equazione 142. Questa uguaglianza vale per la fase B: essendo che il gap risulta isotropo, la media angolare è $\frac{1}{3}\delta_{ij}$ e la formula seguente rappresenta la media angolare su tutte le direzioni del momento:

$$\langle A(\hat{p}) \rangle_{\hat{p}} = \frac{1}{4\pi} \int d\Omega_{\hat{p}} A(\hat{p}). \quad (144)$$

Infatti per il caso della fase B si assume l'isotropia in tutte le direzioni della sfera, così da ottenere

$$\langle \hat{p}_i \hat{p}_j \rangle \approx \frac{p_F^2}{3p_F^2} \delta_{ij}.$$

Nel regime di basse temperature appena discusso, la densità normale per la fase B assume la forma

$$\rho_{n,ij} = \rho \delta_{ij} \int_0^{+\infty} d\varepsilon_p e^{-\beta E_p} \quad (145)$$

ed è in rappresentazione matriciale una matrice diagonale con tutte e tre le componenti uguali. Assumendo che la gaussiana sia molto piccata attorno al valore $p = p_F$, si può estendere il dominio di integrazione a tutto l'asse reale: si esegue un cambio di variabile e si definisce $x = v_F(p - p_F)$ e si definisce la variabile $\alpha = \frac{\beta v_F^2}{\Delta}$. Così si ottiene, andando a sostituire E_p , data dall'equazione 140:

$$\rho_n(T) = \rho \beta e^{-\beta \Delta} \int_{-\infty}^{+\infty} d\varepsilon_p e^{-[\frac{\beta v_F^2}{\Delta}(p-p_F)^2]} = \rho v_F \beta e^{-\beta \Delta} \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-\alpha x^2} = \rho v_F \beta e^{-\beta \Delta} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}. \quad (146)$$

Dalla relazione $\rho = \rho_n + \rho_s$ la frazione superfluida risulta pari a

$$\frac{\rho_s(T)}{\rho} = 1 - \sqrt{\frac{\pi \Delta}{k_B T}} e^{-\Delta/k_B T}. \quad (147)$$

Dunque nel regime di basse temperature e in particolare per $T \rightarrow 0$ il fluido è quasi totalmente superfluido e $\frac{\rho_s}{\rho} \approx 1$.

Fase A. Lo spettro energetico della fase A è pari a

$$E_p = \sqrt{\varepsilon_p^2 + \Delta_0^2 \sin^2 \theta}. \quad (148)$$

Come mostrato nella sezione 5, in questo caso il gap ha questa dipendenza angolare poichè le coppie di Cooper nella fase A sono in stato di onda p e quindi proporzionali alle armoniche sferiche con numeri quantici $\ell = 1$ e $m = \pm 1$. Considerando l'anisotropia di questa fase, l'angolo θ rappresenta la direzione tra l'asse di quantizzazione del momento angolare orbitale delle coppie $\hat{\mathbf{l}}$ e il momento $\mathbf{p}$. Il gap presenta, come già visto, due nodi puntuali per $\theta = 0, \pi$. In questo caso la quantità tensoriale della densità, essendo che dipende solo dall'angolo rispetto a $\hat{\mathbf{l}}$, presenta simmetria assiale e assume la forma:

$$\rho_{n,ij} = \rho_{n,\perp}(\delta_{ij} - \hat{l}_i \hat{l}_j) + \rho_{n,\parallel} \hat{l}_i \hat{l}_j. \quad (149)$$

Se si considera per semplicità che l'asse orbitale coincide con l'asse z si ottiene

$$\hat{l}_i \hat{l}_j = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \delta_{ij} - \hat{l}_i \hat{l}_j = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho_{n,ij} = \begin{pmatrix} \rho_{n,\perp} & 0 & 0 \\ 0 & \rho_{n,\perp} & 0 \\ 0 & 0 & \rho_{n,\parallel} \end{pmatrix}. \quad (150)$$

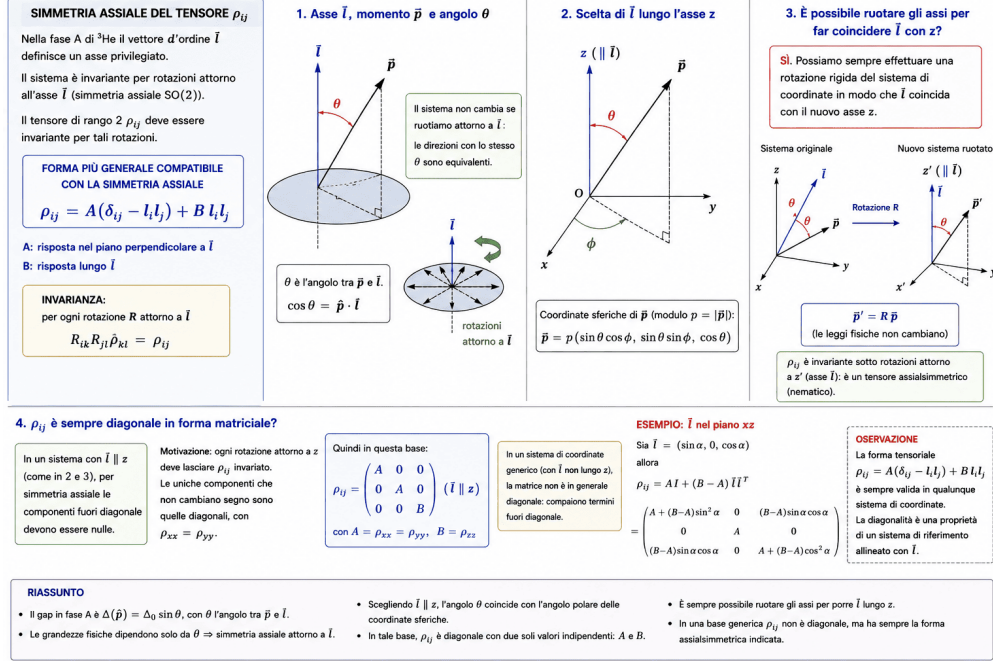


Figura 9: Tensore $\rho_{n,ij}$

Come nel caso della fase B, si lavora vicino alla superficie di Fermi. Le componenti parallela e perpendicolare derivano dal fattore $\hat{p}_i \hat{p}_j$. Per $i = j = z$: $p_z = p_F \cos \theta$, quindi $p_z^2 = p_F^2 \cos^2 \theta$. Dunque per la componente parallela si ottiene

$$\rho_{n,\parallel} = \frac{\rho p_F^2}{p_F^2} \int \frac{d\Omega_{\vec{p}}}{4\pi} \cos^2 \theta \int d\varepsilon_p \left(-\frac{\partial f}{\partial E_p} \right). \quad (151)$$

Per $i = j = x$: $p_x = p_F \sin \theta \cos \phi$, allora risulta $p_x^2 = p_F^2 \sin^2 \theta \cos^2 \phi$. Integrando su ϕ :

$$\int_0^{2\pi} d\phi \cos^2 \phi = \pi. \quad (152)$$

Infine

$$\rho_{n,\perp} = \frac{\rho p_F^2}{p_F^2} \int \frac{d\Omega_{\vec{p}}}{4\pi} \sin^2 \theta \int d\varepsilon_p \left(-\frac{\partial f}{\partial E_p} \right). \quad (153)$$

Nel regime di basse temperature si assume come nel caso della fase B, $k_B T \ll \Delta_0$. Il contributo dominante proviene dai nodi: $\theta = 0, \pi$ e per piccoli angoli vicino ai nodi: $\sin \theta \simeq \theta$ e $\cos \theta \simeq 1 - \frac{\theta^2}{2}$, così

$$E_p \simeq \sqrt{\varepsilon_p^2 + \Delta_0^2 \theta^2}. \quad (154)$$

Vicino ai nodi la misura angolare diventa $d\Omega \simeq \theta d\theta d\phi \simeq 2\pi \theta d\theta$. In questo caso non si può assumere $|v_F(p - p_F)| \ll \Delta_0 \theta$, poichè gli angoli θ rispetto ai nodi che si considerano sono piccoli. Allora derivando la distribuzione di Fermi-Dirac si ottiene:

$$\frac{\partial f}{\partial E_p} = -\frac{1}{4k_B T} \text{sech}^2 \left(\frac{E_p}{2k_B T} \right). \quad (155)$$

Si introducono le seguenti variabili:

$$\varepsilon_p = k_B T x, \quad \theta = \frac{k_B T}{\Delta_0} y, \quad E_p = k_B T \sqrt{x^2 + y^2}$$

e in questo modo il differenziale risulta

$$d\varepsilon_p d\Omega = 2\pi \frac{(k_B T)^3}{\Delta_0^2} y dx dy.$$

Vicino ai nodi $\cos^2 \theta \simeq 1$, quindi:

$$\rho_{n,\parallel} = \rho \cdot \frac{1}{4k_B T} \cdot 2\pi \frac{(k_B T)^3}{\Delta_0^2} \int_0^\infty dx \int_0^\infty dy y \operatorname{sech}^2\left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{2}\right). \quad (156)$$

L'integrale da risolvere

$$C_{\parallel} = \int_0^\infty dx \int_0^\infty dy y \operatorname{sech}^2\left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{2}\right) = \frac{2\pi^2}{3}. \quad (157)$$

Per $\sin^2 \theta \simeq \theta^2 = \left(\frac{k_B T}{\Delta_0}\right)^2 y^2$:

$$\rho_{n,\perp} = \rho \cdot \frac{1}{4k_B T} \cdot 2\pi \frac{(k_B T)^3}{\Delta_0^2} \cdot \left(\frac{k_B T}{\Delta_0}\right)^2 \int_0^\infty dx \int_0^\infty dy y^3 \operatorname{sech}^2\left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{2}\right). \quad (158)$$

L'integrale fornisce il valore:

$$C_{\perp} = \int_0^\infty dx \int_0^\infty dy y^3 \operatorname{sech}^2\left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{2}\right) = \frac{16\pi^4}{45}. \quad (159)$$

Dalla risoluzione degli integrali si trova che l'andamento atteso in accordo con i dati empirici è:

$$\rho_{n,\parallel} = \frac{\pi^3 k_B^2}{3\Delta_0^2} \rho T^2, \quad \rho_{n,\perp} = \frac{8\pi^5 k_B^4}{45\Delta_0^4} \rho T^4. \quad (160)$$

Si conclude che nel limite $T \ll \Delta_0$ il tensore assume la forma:

$$\rho_n = \begin{pmatrix} \frac{8\pi^5 k_B^4}{45\Delta_0^4} \rho T^4 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{8\pi^5 k_B^4}{45\Delta_0^4} \rho T^4 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\pi^3 k_B^2}{3\Delta_0^2} \rho T^2 \end{pmatrix}. \quad (161)$$

Dunque la frazione superfluida scala con la temperatura come:

$$\frac{\rho_{s\parallel}}{\rho} = 1 - \frac{\pi^3 k_B^2}{3\Delta_0^2} T^2, \quad \frac{\rho_{s\perp}}{\rho} = 1 - \frac{8\pi^5 k_B^4}{45\Delta_0^4} T^4. \quad (162)$$

L'anisotropia nasce interamente dal fattore tensoriale $\hat{p}_i \hat{p}_j$ e dalla presenza dei nodi lungo l'asse orbitale $\hat{l}$.

7 Conclusioni

In questa tesi sono state analizzate le proprietà superfluide dell' ^3He , mettendo in evidenza come la descrizione teorica del sistema permetta di interpretare in modo consistente le principali evidenze sperimentali osservate a basse temperature. A partire dalla teoria BCS della superconduttività è stato possibile comprendere il meccanismo di formazione delle coppie di Cooper anche nel caso di questo sistema, dove gli atomi fermionici danno origine a stati accoppiati. La generalizzazione della teoria BCS, insieme alla teoria del liquido di Fermi di Landau, ha fornito il quadro teorico necessario per descrivere le quasiparticelle, le interazioni efficaci e la comparsa delle diverse fasi superfluide A e B.

In particolare, il confronto tra teoria ed esperimenti mostra come le proprietà magnetiche, termodinamiche e dinamiche osservate nell' ^3He superfluido possano essere spiegate in modo qualitativo e quantitativo attraverso il formalismo sviluppato.

Le evidenze sperimentali delle transizioni di fase, della struttura del gap e della dinamica di spin trovano infatti una naturale interpretazione nel quadro della teoria BCS generalizzata e della teoria di Landau.

Riferimenti bibliografici

- [1] A.A. Abrikosov, L.P. Gorkov, I.E. Dzyaloshinski, Methods of Quantum Field Theory in Statistical Physics (Dover Edition, 1975).
- [2] J.F. Annett, Superconductivity, Superfluids and Condensates (Oxford Univ. Press, 2004).
- [3] N.W. Ashcroft and N. Mermin, Solid State Physics (Cengage Learning, 2021).
- [4] H.R. Glyde, Excitations in Liquid and Solid Helium (Oxford Univ. Press, 1995).
- [5] A.J. Leggett, Quantum Liquids (Oxford University Press, 2006).
- [6] P. Nozieres, Theory of Interacting Fermi Systems (Perseus, 1997).
- [7] L. Salasnich, Quantum Physics of Light and Matter. Quantum Field Theory for Photons, Atoms and Strongly-Correlated Systems (Springer, 2014).
- [8] C. Timm, Theory of Superconductivity (Istituto di Fisica Teorica della TU Dresden, 2020).
- [9] D. Vollhardt, P. Wölfle, The superfluid phases of helium 3 (Taylor & Francis, 1990).