

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

DIPARTIMENTO DI FISICA E ASTRONOMIA "GALILEO GALILEI"

Corso di Laurea Magistrale in Fisica

Perturbazioni cosmologiche coarse-grained ed equazione di Schrödinger

Relatore:

Prof. **Sabino Matarrese**

Controrelatore:

Prof. **Nicola Bartolo**

Laureanda:

Sara Busetto

Anno Accademico 2017/2018

Abstract

Sono trascorsi molti anni da quando James Jeans ha enunciato la sua celebre condizione dell'instabilità gravitazionale di un mezzo indefinito ed omogeneo.

Da quel momento il problema dell'instabilità gravitazionale ha acquisito molta importanza in questioni di carattere astrofisico e cosmologico, interessando numerosi scienziati come Chandrasekhar, Fermi, Ledoux, Schatzman, Severny, Spitzer e tanti altri.

Comprendere le proprietà statistiche delle disomogeneità della materia nell'universo a livello percentuale è uno dei punti fondamentali per la cosmologia.

La non linearità può essere affrontata tramite due approcci: il più consolidato è l'utilizzo della simulazione ad N-corpi, l'approccio alternativo è fornito dalla Teoria Perturbativa Euleriana (PT).

È proprio quest'ultimo che utilizzeremo nel corso di questa tesi, il cui scopo è studiare le perturbazioni cosmologiche coarse-grained, attraverso le equazioni di Continuità, Eulero e Poisson, analizzando le stesse a livello perturbativo e scoprendo la presenza di termini extra mancanti nell'equazione di Eulero, il cosiddetto fine-grained.

Indice

1	Introduzione	1
1.1	Teoria Perturbativa Euleriana	1
1.2	Instabilità gravitazionale	2
2	Descrizione microscopica: dalle particelle al fluido	5
2.1	Equazione fondamentale	5
2.1.1	Equazione di Continuità	7
2.1.2	Equazione di Eulero	9
2.2	Dispersione di velocità macroscopica	11
3	Approssimazione di Zel'dovich e derivazione equazione di Schrödinger	19
3.1	Introduzione all'approssimazione di Zel'dovich	19
3.2	Derivazione equazione di Bernoulli	23
3.3	Variabile di Zel'dovich	24
3.4	Derivazione dell'equazione di Schrödinger	27
4	Cumulanti	33
	Conclusioni	39
	Bibliografia	40

Introduzione

1.1 Teoria Perturbativa Euleriana

Uno dei punti fondamentali della Cosmologia, come già accennato nell'Abstract, è il cercare di comprendere le proprietà statistiche della disomogeneità della materia nell'universo a livello percentuale.

I due approcci per poter affrontare la non linearità sono la simulazione ad N-corpi e la Teoria Perturbativa Euleriana (PT).

Con quest'ultima, il sistema di equazioni di Eulero Poisson, il quale descrive il fluido di materia oscura auto gravitante, viene risolto in maniera perturbativa nelle fluttuazioni di densità di materia.

Si cerca di migliorare gli schemi per poter includere più ampie classi di correzioni perturbative che non sono ancora state prese in considerazione.

La limitazione sta nel descrivere la materia come un fluido caratterizzato solo in termini di perturbazione di velocità e densità (vengono considerate solo le equazioni di Continuità ed Eulero, assieme all'equazione di Poisson relativa al campo di densità e al potenziale gravitazionale). Il tensore di dispersione di velocità stesso σ^{ij} viene trascurato; questo è coerente se consideriamo un'approssimazione a flusso singolo lineare.

Per ottenere una descrizione fluida, si devono prendere delle medie nella funzione di distribuzione delle particelle su volumi che contengono molte particelle.

Per quanto riguarda le simulazioni ad N-corpi, ciò può essere ottenuto considerando la griglia in cui vengono interpolate posizione e velocità delle particelle al fine di ottenere densità della materia e campi di velocità in accordo con gli algoritmi.

Nella Teoria Perturbativa invece, l'operazione di mediare comporta un'espansione della teoria stessa, più grande è il volume medio, più fluido è il campo di densità del fluido.

La procedura di calcolo della media introduce una dispersione di velocità diversa da zero anche considerando a livello microscopico il caso di mancanza di incrocio di traiettorie di particelle.

Andremo a considerare in dettaglio il ruolo della media nella Teoria Perturbativa, mantenendo esplicita la lunghezza media e andando a definire un'espansione perturbativa per una funzione di distribuzione coarse-grained e i relativi momenti,

compresi quelli fino al secondo ordine.

Cominciando dalla descrizione microscopica e dall'equazione cinetica standard, le quantità soddisfano l'equazione di Vlasov con un termine sorgente che contiene tutte le informazioni riguardanti il comportamento delle perturbazioni a brevi distanze.

1.2 Instabilità gravitazionale

Considerando l'instabilità gravitazionale nell'universo in espansione [1], prendiamo le coordinate:

$$\vec{r} = a \vec{x} \quad (1.1)$$

le quali avranno le proprietà di essere inerziali in riferimento al background di FRW, con a il fattore di scala dell'universo e \vec{x} la coordinata comovente.

Avremo:

$$\vec{w} \equiv \dot{\vec{r}} = \frac{\dot{a}}{a} \vec{r} + a \frac{d\vec{x}}{dt} \equiv H \vec{r} + \vec{v} \quad (1.2)$$

Dove \vec{v} è la *velocità peculiare* (espressione della partenza del moto della materia dal flusso di Hubble) e H la *costante di Hubble*.

Inoltre:

$$\nabla_{\vec{r}} \equiv \frac{\partial}{\partial \vec{r}} = \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \vec{x}} = \frac{1}{a} \nabla_{\vec{x}} \quad (1.3)$$

Per una generica funzione $f(\vec{r}, t)$, la derivata convettiva può essere scritta come:

$$\frac{Df(\vec{r}, t)}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} \Big|_{\vec{r}} + \frac{\partial f}{\partial \vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}} = \frac{\partial f}{\partial t} \Big|_{\vec{r}} + H(\vec{r} \cdot \nabla_r) f + (\vec{v} \cdot \nabla_r) f \quad (1.4)$$

Pensando a $f(\vec{r}, t)$ come ad una funzione di \vec{x} e t , otteniamo, seguendo gli stessi passaggi di prima:

$$\frac{Df(\vec{x}, t)}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} \Big|_{\vec{x}} + \frac{\partial f}{\partial \vec{x}} \cdot \dot{\vec{x}} = \frac{\partial f}{\partial t} \Big|_{\vec{x}} + \frac{1}{a} (\vec{v} \cdot \nabla_x) f \quad (1.5)$$

Poiché $\frac{Df(\vec{r}, t)}{Dt} = \frac{Df(\vec{x}, t)}{Dt}$, in quanto le due derivate convettive devono essere uguali, avremo che:

$$\frac{\partial f}{\partial t} \Big|_{\vec{x}} = \frac{\partial f}{\partial t} \Big|_{\vec{r}} + H(\vec{r} \cdot \nabla_r) f \quad (1.6)$$

Con una qualsiasi scelta di coordinate \vec{r} , le equazioni del fluido dovrebbero prendere la forma Newtoniana standard.

Consideriamo ora una perturbazione adiabatica, ciò significa avere entropia costante, quindi la dinamica della CDM è descritta da 3 equazioni:

$$\begin{cases} \left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_{\vec{r}} + \nabla_{\vec{r}}(\rho \vec{w}) = 0 \\ \left. \frac{\partial \vec{w}}{\partial t} \right|_{\vec{r}} + (\vec{w} \cdot \nabla_r) \vec{w} = -\frac{1}{\rho} \nabla_r p - \nabla_r \Phi \\ \nabla_r^2 \Phi = 4\pi G \rho \end{cases} \quad (1.7)$$

Esse sono corrispondenti rispettivamente alle equazioni di Continuità, Eulero e Poisson.

Introduciamo ora la perturbazione al campo di densità nel background omogeneo, $\delta\rho$, e il potenziale gravitazionale peculiare $\phi(\vec{x}, t)$, espressione delle fluttuazioni nel potenziale con rispetto al background omogeneo:

$$\rho \equiv \rho_b + \delta\rho \quad (1.8)$$

$$\Phi \equiv \Phi_b + \phi \quad (1.9)$$

Avremo:

$$\nabla_r^2 \Phi_b = 4\pi G \rho_b(t) \implies \Phi_b = \frac{2\pi G}{3} \rho_b(t) r^2 \quad (1.10)$$

E

$$\nabla_r^2 \phi = 4\pi G \delta\rho \implies \nabla_x^2 \phi = 4\pi G a^2 \delta\rho \quad (1.11)$$

Dove la 1.11 non è altro che l'equazione cosmologica di Poisson con ϕ *Potenziale Gravitazionale Peculiare*.

$\delta\rho$ può essere sia positivo che negativo in quanto nel caso standard di distribuzione Gaussiana con fluttuazioni iniziali, quando la varianza di δ è dell'ordine dell'unità, la distribuzione gaussiana assegna una probabilità diversa da zero a regioni con $\delta < 1$ con $\rho < 0$.

Il prossimo passaggio consiste nell'andare ad eliminare tutti i termini di background, esprimendo tutte le quantità in termini della coordinata comovente \vec{x} .

L'equazione di continuità diventerà dunque:

$$\left. \frac{\partial \rho}{\partial t} \right|_{\vec{x}} - H(\vec{r}' \cdot \nabla_r) \rho + \rho \nabla_r(H \vec{r}' + \vec{v}) + H(\vec{r}' \cdot \nabla_r) \rho + (\vec{v} \cdot \nabla_r) \rho = 0 \quad (1.12)$$

Ovvero:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + 3H\rho + \frac{1}{a} \nabla_x(\rho \vec{v}) = 0 \quad (1.13)$$

La 1.13 rappresenta l'equazione di Continuità.

Per quanto riguarda invece l'equazione di Eulero, avremo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \Big|_r + \frac{\partial(H \vec{r}')}{\partial t} \Big|_r + (H \vec{r}' \cdot \nabla_r)(H \vec{r}') + (\vec{v} \cdot \nabla_r)(H \vec{r}') \\ + (H \vec{r}' \cdot \nabla_r) \vec{v} + (\vec{v} \cdot \nabla_r) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla_r p - \nabla_r \Phi_b - \nabla_r \phi \end{aligned} \quad (1.14)$$

Il secondo e il terzo termine a primo membro e il secondo termine a secondo membro della 1.14 si riferiscono al background e quindi saranno trascurati.

Esprimendo poi le quantità in termini della coordinata comovente \vec{x} avremo:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + H \vec{v} + \frac{1}{a} (\vec{v} \cdot \nabla_x) \vec{v} = -\frac{1}{a\rho} \nabla_x p - \frac{1}{a} \nabla_x \phi \quad (1.15)$$

Le tre equazioni richieste sono dunque:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + 3H\rho + \frac{1}{a} \nabla_x (\rho \vec{v}) = 0 \\ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + H \vec{v} + \frac{1}{a} (\vec{v} \cdot \nabla_x) \vec{v} = -\frac{1}{a\rho} \nabla_x p - \frac{1}{a} \nabla_x \phi \\ \nabla_x^2 \phi = 4\pi G a^2 \delta\rho \end{cases} \quad (1.16)$$

Descrizione microscopica: dalle particelle al fluido

2.1 Equazione fondamentale

Il punto di partenza è la funzione di distribuzione microscopica per le particelle elementari, data dalla *densità di Klimontovich* nello spazio delle fasi a una particella [2].

$$f_K(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \tau) = \sum_{\alpha} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_{\alpha}(\tau)) \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}_{\alpha}(\tau)) \quad (2.1)$$

Dove le coordinate e i momenti delle particelle obbediscono alle equazioni Newtoniane del moto.

La conservazione della 2.1, lungo le traiettorie delle particelle nello spazio delle fasi, restituisce la seguente equazione dinamica:

$$\left[\frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{p^i}{ma} \frac{\partial}{\partial x^i} - am \nabla^i \phi(\mathbf{x}, \tau) \frac{\partial}{\partial p^i} \right] f_K(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \tau) = 0 \quad (2.2)$$

Conosciuta come *l'equazione di Klimontovich*.

Poiché in cosmologia ci si interessa a scale maggiori della distanza media tra le particelle, la funzione di distribuzione viene calcolata mediando sul volume rispetto le scale di risoluzione:

$$\bar{f}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \tau) \equiv \frac{1}{V} \int d^3y \mathbf{W} \left[\left| \frac{\mathbf{y}}{L} \right| \right] f_K(\mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{p}, \tau) \quad (2.3)$$

Dove in f_K è stato applicato il filtro $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ e $\mathbf{W} \left[\left| \frac{\mathbf{y}}{L} \right| \right]$ è una funzione normalizzata all'unità:

$$\frac{1}{V} \int d^3y \mathbf{W} \left[\left| \frac{\mathbf{y}}{L} \right| \right] = 1 \quad (2.4)$$

Al fine di ottenere le equazioni di Eulero-Poisson, andiamo ad applicare la 2.3 all'interno della 2.2, inserendo un filtro $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ e suddividendo il potenziale gravitazionale e la funzione di distribuzione come segue:

$$\phi(\mathbf{x} + \mathbf{y}, \tau) = \bar{\phi}(\mathbf{x}, \tau) + \delta\phi(\mathbf{x} + \mathbf{y}, \tau) \quad (2.5)$$

$$f_K(\mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{p}, \tau) = \bar{f}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \tau) + \delta f(\mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{p}, \tau) \quad (2.6)$$

Ottenendo:

$$\left[\frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{p^i}{ma} \frac{\partial}{\partial x^i} - am \nabla_{\mathbf{x}}^i (\bar{\phi}(\mathbf{x}, \tau) + \delta\phi(\mathbf{x} + \mathbf{y}, \tau)) \frac{\partial}{\partial p^i} \right] (\bar{f}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \tau) + \delta f(\mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{p}, \tau)) = 0 \quad (2.7)$$

Proseguendo poi con i calcoli, abbiamo:

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{p^i}{ma} \frac{\partial}{\partial x^i} - am \nabla_{\mathbf{x}}^i \bar{\phi}(\mathbf{x}, \tau) \frac{\partial}{\partial p^i} \right] \bar{f}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \tau) - am \nabla_{\mathbf{x}}^i \delta\phi(\mathbf{x} + \mathbf{y}, \tau) \frac{\partial}{\partial p^i} \bar{f}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \tau) + \\ & \left[\frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{p^i}{ma} \frac{\partial}{\partial x^i} - am \nabla_{\mathbf{x}}^i \bar{\phi}(\mathbf{x}, \tau) \frac{\partial}{\partial p^i} \right] \delta f(\mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{p}, \tau) \\ & - am \nabla_{\mathbf{x}}^i \delta\phi(\mathbf{x} + \mathbf{y}, \tau) \frac{\partial}{\partial p^i} \delta f(\mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{p}, \tau) = 0 \end{aligned} \quad (2.8)$$

Il terzo termine a primo membro della 2.8 si trascura in quanto è un termine misto (fine-grained e coarse-grained commutano tra loro dando risultato uguale a 0); il quarto termine si elimina poiché presenta due filtri e si sta ragionando considerando uno solo, mentre per quanto riguarda il secondo termine bisogna fare alcuni passaggi:

$$\begin{aligned} -am \nabla_{\mathbf{x}}^i \delta\phi(\mathbf{x} + \mathbf{y}, \tau) \frac{\partial}{\partial p^i} \bar{f}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \tau) &= -\frac{am}{V} \int d^3 \mathbf{y} \mathbf{W} \left[\left[\frac{\mathbf{y}}{L} \right] \right] \nabla_{\mathbf{x}}^i \delta\phi(\mathbf{x} + \mathbf{y}, \tau) \frac{\partial}{\partial p^i} f_K(\mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{p}, \tau) \\ &= -\frac{am}{V} \int d^3 \mathbf{y} \mathbf{W} \left[\left[\frac{\mathbf{y}}{L} \right] \right] \nabla_{\mathbf{x}}^i \delta\phi(\mathbf{x} + \mathbf{y}, \tau) \frac{\partial}{\partial p^i} \bar{f}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \tau) \\ &\quad - \frac{am}{V} \int d^3 \mathbf{y} \mathbf{W} \left[\left[\frac{\mathbf{y}}{L} \right] \right] \nabla_{\mathbf{x}}^i \delta\phi(\mathbf{x} + \mathbf{y}, \tau) \frac{\partial}{\partial p^i} \delta f(\mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{p}, \tau) \end{aligned} \quad (2.9)$$

Considerando che il primo termine a secondo membro della 2.9 viene trascurato

essendo un termine misto, arriviamo alla conclusione che applicando all'interno della 2.2 la 2.3, otteniamo:

$$\left[\frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{p^i}{ma} \frac{\partial}{\partial x^i} - am \nabla_{\mathbf{x}}^i \bar{\phi}(\mathbf{x}, \tau) \frac{\partial}{\partial p^i} \right] \bar{f}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \tau) = \frac{am}{V} \int d^3 \mathbf{y} \mathbf{W} \left[\left| \frac{\mathbf{y}}{L} \right| \right] \nabla_{\mathbf{x}+\mathbf{y}}^i \delta \phi(\mathbf{x} + \mathbf{y}, \tau) \frac{\partial}{\partial p^i} \delta f(\mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{p}, \tau) \quad (2.10)$$

L'equazione così ottenuta è il nostro punto di partenza per calcolare le equazioni di Continuità ed Eulero.

L'equazione 2.10 è quindi un'equazione fondamentale.

Il termine nel membro di destra rappresenta il contributo delle fluttuazioni a corta lunghezza d'onda all'evoluzione di quelle a lunga lunghezza d'onda.

Trascurando questo ultimo termine otteniamo l'equazione di Vlasov, punto di partenza per la teoria della perturbazioni cosmologiche.

All'interno di questa tesi però non verrà trascurato tale termine e si utilizzerà l'equazione completa, discutendo gli effetti di esso nell'evoluzione delle quantità coarse-grained derivate da \bar{f} .

Prendendo i momenti di quest'ultima equazione, otteniamo equazioni per la densità di coarse-grained, velocità di dispersione, etc.

2.1.1 Equazione di Continuità

Al fine di ottenere l'equazione di Continuità, integro in $\int d^3 p$ l'equazione 2.10 ottenuta nel paragrafo precedente.

Prima di cominciare con lo svolgimento, andiamo a definire due quantità che ci serviranno per arrivare al risultato richiesto:

$$\begin{aligned} \bar{n}(\mathbf{x}, \tau) &= \int d^3 p \bar{f}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \tau) \\ &= \frac{1}{V} \sum_{\alpha} \mathbf{W} \left[\left| \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_{\alpha}}{L} \right| \right] \end{aligned} \quad (2.11)$$

La 2.11 rappresenta la *densità numerica di particelle*.

$$\begin{aligned} \bar{v}^i(\mathbf{x}, \tau) &= \frac{1}{\bar{n}(\mathbf{x}, \tau)} \int d^3 p \frac{p^i}{am} \bar{f}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \tau) \\ &= \frac{1}{\bar{n}(\mathbf{x}, \tau)} \frac{1}{V} \sum_{\alpha} \frac{p_{\alpha}^i}{am} \mathbf{W} \left[\left| \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_{\alpha}}{L} \right| \right] \end{aligned} \quad (2.12)$$

Il primo momento della funzione di distribuzione definisce il campo di velocità peculiare: la 2.12.

Avendo definito tali quantità, possiamo ora procedere con il calcolo dell'equazione di Continuità, per farlo riprendiamo la 2.10:

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{p^i}{ma} \frac{\partial}{\partial x^i} - am \nabla_{\mathbf{x}}^i \bar{\phi}(\mathbf{x}, \tau) \frac{\partial}{\partial p^i} \right] \bar{f}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \tau) = \\ & \frac{am}{V} \int d^3 \mathbf{y} \mathbf{W} \left[\left| \frac{\mathbf{y}}{L} \right| \right] \nabla_{\mathbf{x}+\mathbf{y}}^i \delta \phi(\mathbf{x} + \mathbf{y}, \tau) \frac{\partial}{\partial p^i} \delta f(\mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{p}, \tau) \end{aligned} \quad (2.13)$$

Per semplificare i calcoli ragioneremo per parti, ricordando di andare ad integrare ogni termine per $\int d^3 p$:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \int d^3 p \bar{f}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \tau) = \frac{\partial}{\partial \tau} \bar{n}(\mathbf{x}, \tau) \quad (2.14)$$

$$\begin{aligned} \frac{p^i}{am} \frac{\partial}{\partial x^i} \int d^3 p \bar{f}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \tau) &= \frac{\partial}{\partial x^i} \int d^3 p \frac{p^i}{am} \bar{f}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \tau) \\ &= \frac{\partial}{\partial x^i} (\bar{n}(\mathbf{x}, \tau) \bar{v}^i(\mathbf{x}, \tau)) \end{aligned} \quad (2.15)$$

$$\begin{aligned} & - am \int d^3 p \nabla_{\mathbf{x}}^i \bar{\phi}(\mathbf{x}, \tau) \frac{\partial}{\partial p^i} \bar{f}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \tau) = \\ & - am \int d^3 p \nabla_{\mathbf{x}}^i \bar{\phi}(\mathbf{x}, \tau) \frac{\partial}{\partial p^i} \int \frac{1}{V} d^3 \mathbf{y} \mathbf{W} \left[\left| \frac{\mathbf{y}}{L} \right| \right] f_K(\mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{p}, \tau) = \\ & - \frac{am}{V} \int d^3 \mathbf{y} \int d^3 p \mathbf{W} \left[\left| \frac{\mathbf{y}}{L} \right| \right] \nabla_{\mathbf{x}}^i \bar{\phi}(\mathbf{x}, \tau) \frac{\partial}{\partial p^i} f_K(\mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{p}, \tau) = \\ & - \frac{am}{V} \int d^3 \mathbf{y} \int d^3 p \mathbf{W} \left[\left| \frac{\mathbf{y}}{L} \right| \right] \nabla_{\mathbf{x}}^i \bar{\phi}(\mathbf{x}, \tau) \frac{\partial}{\partial p^i} \bar{f}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \tau) \\ & - \frac{am}{V} \int d^3 \mathbf{y} \int d^3 p \mathbf{W} \left[\left| \frac{\mathbf{y}}{L} \right| \right] \nabla_{\mathbf{x}}^i \bar{\phi}(\mathbf{x}, \tau) \frac{\partial}{\partial p^i} \delta f(\mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{p}, \tau) \end{aligned} \quad (2.16)$$

$$\begin{aligned} & \frac{am}{V} \int d^3 \mathbf{y} \int d^3 p \mathbf{W} \left[\left| \frac{\mathbf{y}}{L} \right| \right] \nabla_{\mathbf{x}+\mathbf{y}}^i \delta \phi(\mathbf{x} + \mathbf{y}, \tau) \frac{\partial}{\partial p^i} \delta f(\mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{p}, \tau) = \\ & \frac{am}{V} \int d^3 \mathbf{y} \int d^3 p \mathbf{W} \left[\left| \frac{\mathbf{y}}{L} \right| \right] \nabla_{\mathbf{x}+\mathbf{y}}^i \phi(\mathbf{x} + \mathbf{y}, \tau) \frac{\partial}{\partial p^i} \delta f(\mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{p}, \tau) - \\ & \frac{am}{V} \int d^3 \mathbf{y} \int d^3 p \mathbf{W} \left[\left| \frac{\mathbf{y}}{L} \right| \right] \nabla_{\mathbf{x}}^i \bar{\phi}(\mathbf{x}, \tau) \frac{\partial}{\partial p^i} \delta f(\mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{p}, \tau) \end{aligned} \quad (2.17)$$

Arrivati a questo punto notiamo che l'ultimo termine della 2.16 e l'ultimo termine della 2.17 si eliminano tra loro.

Proseguendo con i calcoli vediamo come si possano semplificare ulteriormente la 2.16 e la 2.17:

$$\begin{aligned}
 & - \frac{am}{V} \int d^3y \int d^3p \mathbf{W} \left[\left| \frac{\mathbf{y}}{L} \right| \right] \nabla_{\mathbf{x}}^i \bar{\phi}(\mathbf{x}, \tau) \frac{\partial}{\partial p^i} \bar{f}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \tau) = \\
 & - \frac{am}{V} \int d^3y \int d^3p \mathbf{W} \left[\left| \frac{\mathbf{y}}{L} \right| \right] \nabla_{\mathbf{x}+\mathbf{y}}^i \phi(\mathbf{x} + \mathbf{y}, \tau) \frac{\partial}{\partial p^i} \bar{f}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \tau) \\
 & + \frac{am}{V} \int d^3y \int d^3p \mathbf{W} \left[\left| \frac{\mathbf{y}}{L} \right| \right] \nabla_{\mathbf{x}+\mathbf{y}}^i \delta\phi(\mathbf{x} + \mathbf{y}, \tau) \frac{\partial}{\partial p^i} \bar{f}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \tau)
 \end{aligned} \tag{2.18}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{am}{V} \int d^3y \int d^3p \mathbf{W} \left[\left| \frac{\mathbf{y}}{L} \right| \right] \nabla_{\mathbf{x}+\mathbf{y}}^i \phi(\mathbf{x} + \mathbf{y}, \tau) \frac{\partial}{\partial p^i} \delta f(\mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{p}, \tau) = \\
 & \frac{am}{V} \int d^3y \int d^3p \mathbf{W} \left[\left| \frac{\mathbf{y}}{L} \right| \right] \nabla_{\mathbf{x}+\mathbf{y}}^i \phi(\mathbf{x} + \mathbf{y}, \tau) \frac{\partial}{\partial p^i} f_K(\mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{p}, \tau) - \\
 & \frac{am}{V} \int d^3y \int d^3p \mathbf{W} \left[\left| \frac{\mathbf{y}}{L} \right| \right] \nabla_{\mathbf{x}+\mathbf{y}}^i \phi(\mathbf{x} + \mathbf{y}, \tau) \frac{\partial}{\partial p^i} \bar{f}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \tau)
 \end{aligned} \tag{2.19}$$

Notiamo dunque come di questi ultimi quattro termini rimasti, due si eliminino tra loro, mentre gli altri due si riducono a zero in quanto, mentre uno presenta un doppio filtro, l'altro è un termine misto.

L'equazione di continuità si riduce quindi ad essere:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \bar{n}(\mathbf{x}, \tau) + \frac{\partial}{\partial x^i} (\bar{n}(\mathbf{x}, \tau) \bar{v}^i(\mathbf{x}, \tau)) = 0 \tag{2.20}$$

Come ci si aspetta, l'equazione di Continuità non viene modificata.

2.1.2 Equazione di Eulero

Al fine di ottenere l'equazione di Eulero [2], dobbiamo integrare in $\int d^3p$ e moltiplicare per p^i l'equazione fondamentale 2.10 utilizzata per calcolare inoltre l'equazione di continuità 2.20.

$$\begin{aligned}
 & \left[\frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{p^i}{ma} \frac{\partial}{\partial x^i} - am \nabla_{\mathbf{x}}^i \bar{\phi}(\mathbf{x}, \tau) \frac{\partial}{\partial p^i} \right] \bar{f}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \tau) = \\
 & \frac{am}{V} \int d^3y \mathbf{W} \left[\left| \frac{\mathbf{y}}{L} \right| \right] \nabla_{\mathbf{x}+\mathbf{y}}^i \delta\phi(\mathbf{x} + \mathbf{y}, \tau) \frac{\partial}{\partial p^i} \delta f(\mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{p}, \tau)
 \end{aligned} \tag{2.21}$$

Anche in questo caso, per agevolare i calcoli ragioneremo per parti.

Prima di cominciare andremo a definire il secondo momento della funzione di distribuzione, il quale definisce il campo di velocità peculiare:

$$\frac{1}{\bar{n}(\mathbf{x}, \tau)} \int d^3p \frac{p^i}{am} \frac{p^j}{am} \bar{f}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \tau) = \bar{v}^i(\mathbf{x}, \tau) \bar{v}^j(\mathbf{x}, \tau) + \bar{\sigma}^{ij}(\mathbf{x}, \tau) \tag{2.22}$$

Dove $\bar{\sigma}^{ij}(\mathbf{x}, \tau)$ è la *dispersione di velocità* delle particelle all'interno del volume V .
Avremo dunque:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} \int d^3 p p^i \bar{f}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \tau) &= m \frac{\partial}{\partial \tau} (a \bar{n}(\mathbf{x}, \tau) \bar{v}^i(\mathbf{x}, \tau)) \\ &= am \bar{v}^i(\mathbf{x}, \tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \bar{n}(\mathbf{x}, \tau) + am \bar{n}(\mathbf{x}, \tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \bar{v}^i(\mathbf{x}, \tau) + \dot{a} m \bar{n}(\mathbf{x}, \tau) \bar{v}^i(\mathbf{x}, \tau) \end{aligned} \quad (2.23)$$

$$\begin{aligned} \int d^3 p \frac{p^i p^j}{am} \frac{\partial}{\partial x^j} \bar{f}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \tau) &= \frac{\partial}{\partial x^j} \int d^3 p \frac{p^i p^j}{am} \bar{f}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \tau) \\ &= am \frac{\partial}{\partial x^j} \left[\bar{n}(\mathbf{x}, \tau) (\bar{v}^i(\mathbf{x}, \tau) \bar{v}^j(\mathbf{x}, \tau) + \bar{\sigma}^{ij}(\mathbf{x}, \tau)) \right] \\ &= am \frac{\partial}{\partial x^j} \left[\bar{n}(\mathbf{x}, \tau) \bar{\sigma}^{ij}(\mathbf{x}, \tau) \right] + am \bar{n}(\mathbf{x}, \tau) \bar{v}^j(\mathbf{x}, \tau) \frac{\partial}{\partial x^j} \bar{v}^i(\mathbf{x}, \tau) \\ &\quad + am \bar{v}^i(\mathbf{x}, \tau) \frac{\partial}{\partial x^j} \left[\bar{n}(\mathbf{x}, \tau) \bar{v}^j(\mathbf{x}, \tau) \right] \end{aligned} \quad (2.24)$$

Già da qui possiamo vedere come il primo termine della 2.23 e l'ultimo termine della 2.24 si eliminino, rappresentando essi l'equazione di continuità stessa.

Proseguendo con i calcoli abbiamo:

$$\begin{aligned} -am \int d^3 p \nabla_{\mathbf{x}}^i \bar{\phi}(\mathbf{x}, \tau) p^i \frac{\partial}{\partial p^j} \bar{f}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \tau) &= am \int d^3 p \nabla_{\mathbf{x}}^i \bar{\phi}(\mathbf{x}, \tau) \bar{f}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \tau) \\ &= am \bar{n}(\mathbf{x}, \tau) \nabla_{\mathbf{x}}^i \bar{\phi}(\mathbf{x}, \tau) \end{aligned} \quad (2.25)$$

$$\begin{aligned} \frac{am}{V} \int d^3 \mathbf{y} \int d^3 p \mathbf{W} \left[\left| \frac{\mathbf{y}}{L} \right| \right] \nabla_{\mathbf{x}+\mathbf{y}}^i \delta \phi(\mathbf{x} + \mathbf{y}, \tau) p^i \frac{\partial}{\partial p^j} \delta f(\mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{p}, \tau) &= \\ - \frac{am}{V} \int d^3 \mathbf{y} \mathbf{W} \left[\left| \frac{\mathbf{y}}{L} \right| \right] \nabla_{\mathbf{x}+\mathbf{y}}^i \delta \phi(\mathbf{x} + \mathbf{y}, \tau) \int d^3 p \delta f(\mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{p}, \tau) &= \\ - \frac{am}{V} n(\mathbf{x} + \mathbf{y}, \tau) \int d^3 \mathbf{y} \mathbf{W} \left[\left| \frac{\mathbf{y}}{L} \right| \right] \nabla_{\mathbf{x}+\mathbf{y}}^i \delta \phi(\mathbf{x} + \mathbf{y}, \tau) \end{aligned} \quad (2.26)$$

Nelle equazioni 2.25 e 2.26 si è usata la seguente relazione:

$$\int d^3 p p^i \frac{\partial f}{\partial p^j} = -\delta_j^i \int d^3 p f \quad (2.27)$$

Avremo dunque:

$$\begin{aligned}
 & am\bar{n}(\mathbf{x}, \tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \bar{v}^i(\mathbf{x}, \tau) + \dot{a}m\bar{n}(\mathbf{x}, \tau) \bar{v}^i(\mathbf{x}, \tau) + am \frac{\partial}{\partial x^j} [\bar{n}(\mathbf{x}, \tau) \bar{\sigma}^{ij}(\mathbf{x}, \tau)] \\
 & + am\bar{n}(\mathbf{x}, \tau) \bar{v}^j(\mathbf{x}, \tau) \frac{\partial}{\partial x^j} \bar{v}^i(\mathbf{x}, \tau) + am\bar{n}(\mathbf{x}, \tau) \nabla_{\mathbf{x}}^i \bar{\phi}(\mathbf{x}, \tau) = \\
 & - \frac{am}{V} n(\mathbf{x} + \mathbf{y}, \tau) \int d^3\mathbf{y} \mathbf{W} \left[\left| \frac{\mathbf{y}}{L} \right| \right] \nabla_{\mathbf{x}+\mathbf{y}}^i \delta\phi(\mathbf{x} + \mathbf{y}, \tau)
 \end{aligned} \tag{2.28}$$

L'ultimo passaggio consiste nel dividere ogni termine per:

$$am\bar{n}(\mathbf{x}, \tau) \tag{2.29}$$

Ottenendo:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial \tau} \bar{v}^i(\mathbf{x}, \tau) + H\bar{v}^i(\mathbf{x}, \tau) + \bar{v}^j(\mathbf{x}, \tau) \frac{\partial}{\partial x^j} \bar{v}^i(\mathbf{x}, \tau) + \frac{1}{\bar{n}(\mathbf{x}, \tau)} \frac{\partial}{\partial x^j} (\bar{n}(\mathbf{x}, \tau) \bar{\sigma}^{ij}(\mathbf{x}, \tau)) \\
 & = -\nabla_{\mathbf{x}}^i \bar{\phi}(\mathbf{x}, \tau) - \frac{1}{V} \int d^3\mathbf{y} \mathbf{W} \left[\left| \frac{\mathbf{y}}{L} \right| \right] \frac{n(\mathbf{x} + \mathbf{y}, \tau)}{\bar{n}(\mathbf{x}, \tau)} \nabla_{\mathbf{x}+\mathbf{y}}^i \delta\phi(\mathbf{x} + \mathbf{y}, \tau)
 \end{aligned} \tag{2.30}$$

Comparata con l'equazione di Eulero, la 2.30 presenta due extra termini.

L'ultimo termine a primo membro descrive l'effetto della dispersione di velocità attorno alla *Mean Velocity*, mentre l'ultimo termine a secondo membro spiega la distribuzione della materia all'interno del volume V di *coarse-graining*.

In altre parole, mentre il primo termine a secondo membro rappresenta la forza gravitazionale generata dal monopolio della distribuzione di massa in V, il secondo termine a secondo membro è il contributo alla forza dei multipoli di massa più elevata.

2.2 Dispersione di velocità macroscopica

Prendendo il secondo momento dell'equazione 2.10, possiamo andare a calcolare l'equazione per la dispersione di velocità macroscopica [2].

Ovvero, partendo da:

$$\begin{aligned}
 & \left[\frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{p^i}{ma} \frac{\partial}{\partial x^i} - am \nabla_{\mathbf{x}}^i \bar{\phi}(\mathbf{x}, \tau) \frac{\partial}{\partial p^i} \right] \bar{f}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \tau) = \\
 & \frac{am}{V} \int d^3\mathbf{y} \mathbf{W} \left[\left| \frac{\mathbf{y}}{L} \right| \right] \nabla_{\mathbf{x}+\mathbf{y}}^i \delta\phi(\mathbf{x} + \mathbf{y}, \tau) \frac{\partial}{\partial p^i} \delta f(\mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{p}, \tau)
 \end{aligned} \tag{2.31}$$

Ed integrando in $\int d^3 p^i p^j$, otteniamo la seguente:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial \tau} \bar{\sigma}^{ij}(\mathbf{x}, \tau) + 2H \bar{\sigma}^{ij}(\mathbf{x}, \tau) + \bar{v}^k(\mathbf{x}, \tau) \frac{\partial}{\partial x^k} \bar{\sigma}^{ij}(\mathbf{x}, \tau) + \bar{\sigma}^{ik}(\mathbf{x}, \tau) \frac{\partial}{\partial x^k} \bar{v}^j(\mathbf{x}, \tau) \\
& + \bar{\sigma}^{jk}(\mathbf{x}, \tau) \frac{\partial}{\partial x^k} \bar{v}^i(\mathbf{x}, \tau) + \frac{1}{\bar{n}(\mathbf{x}, \tau)} \frac{\partial}{\partial x^k} (\bar{n}(\mathbf{x}, \tau) \omega^{ijk}(\mathbf{x}, \tau)) = \\
& - \frac{1}{V} \int d^3 y \mathbf{W} \left[\left\| \frac{\mathbf{y}}{L} \right\| \right] \frac{n(\mathbf{x} + \mathbf{y}, \tau)}{\bar{n}(\mathbf{x}, \tau)} \cdot [\delta v^j(\mathbf{x} + \mathbf{y}, \tau) \nabla_{\mathbf{x}+\mathbf{y}}^i + \delta v^i(\mathbf{x} + \mathbf{y}, \tau) \nabla_{\mathbf{x}+\mathbf{y}}^j] \delta \phi(\mathbf{x} + \mathbf{y}, \tau)
\end{aligned} \tag{2.32}$$

Prima di vedere con attenzione tutti i passaggi svolti al fine di ottenere tale equazione, andiamo a definire il terzo momento $\omega^{ijk}(\mathbf{x}, \tau)$:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\bar{n}(\mathbf{x}, \tau)} \int d^3 p \frac{p^i}{am} \frac{p^j}{am} \frac{p^k}{am} \bar{f}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \tau) = \bar{v}^i(\mathbf{x}, \tau) \bar{v}^j(\mathbf{x}, \tau) \bar{v}^k(\mathbf{x}, \tau) \\
& + \bar{v}^i(\mathbf{x}, \tau) \bar{\sigma}^{jk}(\mathbf{x}, \tau) + \bar{v}^j(\mathbf{x}, \tau) \bar{\sigma}^{ik}(\mathbf{x}, \tau) + \bar{v}^k(\mathbf{x}, \tau) \bar{\sigma}^{ij}(\mathbf{x}, \tau) + \omega^{ijk}(\mathbf{x}, \tau)
\end{aligned} \tag{2.33}$$

Come fatto in precedenza per il calcolo di Continuità e di Eulero, andremo a ragionare per parti, al fine di semplificare il ragionamento e i calcoli stessi.

Ricordiamo dunque che l'equazione per la dispersione di velocità macroscopica, si ottiene andando ad integrare per:

$$\int d^3 p p^i p^j \tag{2.34}$$

l'equazione 2.30.

Procediamo con i calcoli:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial \tau} \int d^3 p p^i p^j \bar{f}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \tau) = \frac{\partial}{\partial \tau} [(am)^2 \bar{n}(\mathbf{x}, \tau) [\bar{v}^i(\mathbf{x}, \tau) \bar{v}^j(\mathbf{x}, \tau) + \bar{\sigma}^{ij}(\mathbf{x}, \tau)]] = \\
& 2H(am)^2 \bar{n}(\mathbf{x}, \tau) \bar{v}^i(\mathbf{x}, \tau) \bar{v}^j(\mathbf{x}, \tau) + (am)^2 \bar{n}(\mathbf{x}, \tau) \bar{v}^i(\mathbf{x}, \tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \bar{v}^j(\mathbf{x}, \tau) + \\
& (am)^2 \bar{n}(\mathbf{x}, \tau) \bar{v}^j(\mathbf{x}, \tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \bar{v}^i(\mathbf{x}, \tau) + (am)^2 \bar{v}^i(\mathbf{x}, \tau) \bar{v}^j(\mathbf{x}, \tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \bar{n}(\mathbf{x}, \tau) + \\
& 2H(am)^2 \bar{n}(\mathbf{x}, \tau) \bar{\sigma}^{ij}(\mathbf{x}, \tau) + (am)^2 \bar{n}(\mathbf{x}, \tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \bar{\sigma}^{ij}(\mathbf{x}, \tau) + \\
& (am)^2 \bar{\sigma}^{ij}(\mathbf{x}, \tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \bar{n}(\mathbf{x}, \tau)
\end{aligned} \tag{2.35}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial x^k} \int d^3 p \frac{p^i p^j p^k}{am} \bar{f}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \tau) &= \frac{\partial}{\partial x^k} [(am)^2 \bar{n}(\mathbf{x}, \tau) [\bar{v}^i(\mathbf{x}, \tau) \bar{v}^j(\mathbf{x}, \tau) \bar{v}^k(\mathbf{x}, \tau) \\
 &+ \bar{v}^i(\mathbf{x}, \tau) \bar{\sigma}^{\bar{j}k}(\mathbf{x}, \tau) + \bar{v}^j(\mathbf{x}, \tau) \bar{\sigma}^{\bar{i}k}(\mathbf{x}, \tau) + \bar{v}^k(\mathbf{x}, \tau) \bar{\sigma}^{\bar{i}j}(\mathbf{x}, \tau) + \omega^{\bar{i}jk}(\mathbf{x}, \tau)]] = \\
 (am)^2 \bar{v}^i(\mathbf{x}, \tau) \bar{v}^j(\mathbf{x}, \tau) \frac{\partial}{\partial x^k} (\bar{v}^k(\mathbf{x}, \tau) \bar{n}(\mathbf{x}, \tau)) &+ (am)^2 \bar{n}(\mathbf{x}, \tau) \bar{v}^i(\mathbf{x}, \tau) \bar{v}^k(\mathbf{x}, \tau) \frac{\partial}{\partial x^k} \bar{v}^j(\mathbf{x}, \tau) \\
 + (am)^2 \bar{n}(\mathbf{x}, \tau) \bar{v}^j(\mathbf{x}, \tau) \bar{v}^k(\mathbf{x}, \tau) \frac{\partial}{\partial x^k} \bar{v}^i(\mathbf{x}, \tau) &+ (am)^2 \bar{n}(\mathbf{x}, \tau) \bar{\sigma}^{\bar{j}k}(\mathbf{x}, \tau) \frac{\partial}{\partial x^k} \bar{v}^i(\mathbf{x}, \tau) \\
 + (am)^2 \bar{v}^i(\mathbf{x}, \tau) \frac{\partial}{\partial x^k} (\bar{n}(\mathbf{x}, \tau) \bar{\sigma}^{\bar{j}k}(\mathbf{x}, \tau)) &+ (am)^2 \bar{n}(\mathbf{x}, \tau) \bar{\sigma}^{\bar{i}k}(\mathbf{x}, \tau) \frac{\partial}{\partial x^k} \bar{v}^j(\mathbf{x}, \tau) \\
 + (am)^2 \bar{v}^j(\mathbf{x}, \tau) \frac{\partial}{\partial x^k} (\bar{n}(\mathbf{x}, \tau) \bar{\sigma}^{\bar{i}k}(\mathbf{x}, \tau)) &+ (am)^2 \bar{n}(\mathbf{x}, \tau) \bar{v}^k(\mathbf{x}, \tau) \frac{\partial}{\partial x^k} \bar{\sigma}^{\bar{i}j}(\mathbf{x}, \tau) \\
 + (am)^2 \bar{\sigma}^{\bar{i}j}(\mathbf{x}, \tau) \frac{\partial}{\partial x^k} (\bar{n}(\mathbf{x}, \tau) \bar{v}^k(\mathbf{x}, \tau)) &+ (am)^2 \frac{\partial}{\partial x^k} (\bar{n}(\mathbf{x}, \tau) \omega^{\bar{i}jk}(\mathbf{x}, \tau))
 \end{aligned} \tag{2.36}$$

Vediamo come vi sia la presenza di termini che si eliminano in quanto compare l'equazione di Continuità, in particolare:

$$(am)^2 \bar{v}^i(\mathbf{x}, \tau) \bar{v}^j(\mathbf{x}, \tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \bar{n}(\mathbf{x}, \tau) + (am)^2 \bar{v}^i(\mathbf{x}, \tau) \bar{v}^j(\mathbf{x}, \tau) \frac{\partial}{\partial x^k} (\bar{v}^k(\mathbf{x}, \tau) \bar{n}(\mathbf{x}, \tau)) = 0 \tag{2.37}$$

e

$$(am)^2 \bar{\sigma}^{\bar{i}j}(\mathbf{x}, \tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \bar{n}(\mathbf{x}, \tau) + (am)^2 \bar{\sigma}^{\bar{i}j}(\mathbf{x}, \tau) \frac{\partial}{\partial x^k} (\bar{n}(\mathbf{x}, \tau) \bar{v}^k(\mathbf{x}, \tau)) = 0 \tag{2.38}$$

Si nota poi come compaia anche l'equazione di Eulero modificata 2.30. Avremo:

$$\begin{aligned}
 H(am)^2 \bar{n}(\mathbf{x}, \tau) \bar{v}^i(\mathbf{x}, \tau) \bar{v}^j(\mathbf{x}, \tau) &+ (am)^2 \bar{n}(\mathbf{x}, \tau) \bar{v}^j(\mathbf{x}, \tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \bar{v}^i(\mathbf{x}, \tau) + \\
 (am)^2 \bar{n}(\mathbf{x}, \tau) \bar{v}^j(\mathbf{x}, \tau) \bar{v}^k(\mathbf{x}, \tau) \frac{\partial}{\partial x^k} \bar{v}^i(\mathbf{x}, \tau) &+ (am)^2 \bar{v}^j(\mathbf{x}, \tau) \frac{\partial}{\partial x^k} (\bar{n}(\mathbf{x}, \tau) \bar{\sigma}^{\bar{i}k}(\mathbf{x}, \tau)) \\
 = -(am)^2 \bar{n}(\mathbf{x}, \tau) \bar{v}^j(\mathbf{x}, \tau) \nabla_{\mathbf{x}}^i \bar{\phi}(\mathbf{x}, \tau) & \\
 - \frac{(am)^2 \bar{n}(\mathbf{x}, \tau) \bar{v}^j(\mathbf{x}, \tau)}{V} \int d^3 y \mathbf{W} \left[\left| \frac{\mathbf{y}}{L} \right| \right] \frac{n(\mathbf{x} + \mathbf{y}, \tau)}{\bar{n}(\mathbf{x}, \tau)} \nabla_{\mathbf{x} + \mathbf{y}}^i \delta \phi(\mathbf{x} + \mathbf{y}, \tau) &
 \end{aligned} \tag{2.39}$$

e

$$\begin{aligned}
& H(am)^2 \bar{n}(\mathbf{x}, \tau) \bar{v}^i(\mathbf{x}, \tau) \bar{v}^j(\mathbf{x}, \tau) + (am)^2 \bar{n}(\mathbf{x}, \tau) \bar{v}^i(\mathbf{x}, \tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \bar{v}^j(\mathbf{x}, \tau) \\
& + (am)^2 \bar{n}(\mathbf{x}, \tau) \bar{v}^i(\mathbf{x}, \tau) \bar{v}^k(\mathbf{x}, \tau) \frac{\partial}{\partial x^k} \bar{v}^j(\mathbf{x}, \tau) + (am)^2 \bar{v}^i(\mathbf{x}, \tau) \frac{\partial}{\partial x^k} (\bar{n}(\mathbf{x}, \tau) \bar{\sigma}^{jk}(\mathbf{x}, \tau)) \\
& = -(am)^2 \bar{n}(\mathbf{x}, \tau) \bar{v}^i(\mathbf{x}, \tau) \nabla_{\mathbf{x}}^j \bar{\phi}(\mathbf{x}, \tau) \\
& - \frac{(am)^2 \bar{n}(\mathbf{x}, \tau) \bar{v}^i(\mathbf{x}, \tau)}{V} \int d^3 \mathbf{y} \mathbf{W} \left[\left| \frac{\mathbf{y}}{L} \right| \right] \frac{n(\mathbf{x} + \mathbf{y}, \tau)}{\bar{n}(\mathbf{x}, \tau)} \nabla_{\mathbf{x} + \mathbf{y}}^j \delta \phi(\mathbf{x} + \mathbf{y}, \tau)
\end{aligned} \tag{2.40}$$

Proseguendo poi il ragionamento per parti:

$$\begin{aligned}
& -am \int d^3 p \nabla_{\mathbf{x}}^k \bar{\phi}(\mathbf{x}, \tau) p^i p^j \frac{\partial}{\partial p^k} \bar{f}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \tau) = -am \int d^3 p \nabla_{\mathbf{x}}^k \bar{\phi}(\mathbf{x}, \tau) \frac{\partial}{\partial p^k} (p^i p^j \bar{f}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \tau)) \\
& + am \int d^3 p \nabla_{\mathbf{x}}^k \bar{\phi}(\mathbf{x}, \tau) \delta_k^j p^i \bar{f}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \tau) + am \int d^3 p \nabla_{\mathbf{x}}^k \bar{\phi}(\mathbf{x}, \tau) \delta_k^i p^j \bar{f}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \tau) = \\
& + am \int d^3 p \nabla_{\mathbf{x}}^j \bar{\phi}(\mathbf{x}, \tau) p^i \bar{f}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \tau) + am \int d^3 p \nabla_{\mathbf{x}}^i \bar{\phi}(\mathbf{x}, \tau) p^j \bar{f}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \tau) = \\
& + (am)^2 \bar{n}(\mathbf{x}, \tau) \bar{v}^i(\mathbf{x}, \tau) \nabla_{\mathbf{x}}^j \bar{\phi}(\mathbf{x}, \tau) + (am)^2 \bar{n}(\mathbf{x}, \tau) \bar{v}^j(\mathbf{x}, \tau) \nabla_{\mathbf{x}}^i \bar{\phi}(\mathbf{x}, \tau)
\end{aligned} \tag{2.41}$$

Dove il primo dei tre termini a secondo membro si cancella non essendovi dipendenza da k .

I due termini rimanenti vanno ad annullarsi con i termini che compaiono andando a sostituire l'equazione di Eulero modificata 2.30.

$$\begin{aligned}
& \frac{am}{V} \int d^3 \mathbf{y} \mathbf{W} \left[\left| \frac{\mathbf{y}}{L} \right| \right] \int d^3 p \nabla_{\mathbf{x} + \mathbf{y}}^k \delta \phi(\mathbf{x} + \mathbf{y}, \tau) p^i p^j \frac{\partial}{\partial p^k} \delta f(\mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{p}, \tau) = \\
& \frac{am}{V} \int d^3 \mathbf{y} \mathbf{W} \left[\left| \frac{\mathbf{y}}{L} \right| \right] \int d^3 p \nabla_{\mathbf{x} + \mathbf{y}}^k \delta \phi(\mathbf{x} + \mathbf{y}, \tau) \frac{\partial}{\partial p^k} (p^i p^j \delta f(\mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{p}, \tau)) \\
& - \frac{am}{V} \int d^3 \mathbf{y} \mathbf{W} \left[\left| \frac{\mathbf{y}}{L} \right| \right] \int d^3 p \nabla_{\mathbf{x} + \mathbf{y}}^k \delta \phi(\mathbf{x} + \mathbf{y}, \tau) \delta_k^i p^j \delta f(\mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{p}, \tau) \\
& - \frac{am}{V} \int d^3 \mathbf{y} \mathbf{W} \left[\left| \frac{\mathbf{y}}{L} \right| \right] \int d^3 p \nabla_{\mathbf{x} + \mathbf{y}}^k \delta \phi(\mathbf{x} + \mathbf{y}, \tau) \delta_k^j p^i \delta f(\mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{p}, \tau) = \\
& - \frac{am}{V} \int d^3 \mathbf{y} \mathbf{W} \left[\left| \frac{\mathbf{y}}{L} \right| \right] \int d^3 p \nabla_{\mathbf{x} + \mathbf{y}}^i \delta \phi(\mathbf{x} + \mathbf{y}, \tau) p^j \delta f(\mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{p}, \tau) \\
& - \frac{am}{V} \int d^3 \mathbf{y} \mathbf{W} \left[\left| \frac{\mathbf{y}}{L} \right| \right] \int d^3 p \nabla_{\mathbf{x} + \mathbf{y}}^j \delta \phi(\mathbf{x} + \mathbf{y}, \tau) p^i \delta f(\mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{p}, \tau) = \\
& - \frac{(am)^2}{V} \int d^3 \mathbf{y} \mathbf{W} \left[\left| \frac{\mathbf{y}}{L} \right| \right] \nabla_{\mathbf{x} + \mathbf{y}}^i \delta \phi(\mathbf{x} + \mathbf{y}, \tau) n(\mathbf{x} + \mathbf{y}, \tau) v^j(\mathbf{x} + \mathbf{y}, \tau) \\
& - \frac{(am)^2}{V} \int d^3 \mathbf{y} \mathbf{W} \left[\left| \frac{\mathbf{y}}{L} \right| \right] \nabla_{\mathbf{x} + \mathbf{y}}^j \delta \phi(\mathbf{x} + \mathbf{y}, \tau) n(\mathbf{x} + \mathbf{y}, \tau) v^i(\mathbf{x} + \mathbf{y}, \tau)
\end{aligned} \tag{2.42}$$

Dove, anche qui, il primo dei tre termini a secondo membro si cancella in quanto non vi è dipendenza da K .

Possiamo ora continuare con il calcolo della nostra equazione, andando a riscrivere i termini rimasti:

$$\begin{aligned}
 & 2H(am)^2\bar{n}(\mathbf{x}, \tau)\bar{\sigma}^{ij}(\mathbf{x}, \tau) + (am)^2\bar{n}(\mathbf{x}, \tau)\frac{\partial}{\partial\tau}\bar{\sigma}^{ij}(\mathbf{x}, \tau) \\
 & + (am)^2\bar{n}(\mathbf{x}, \tau)\bar{\sigma}^{jk}(\mathbf{x}, \tau)\frac{\partial}{\partial x^k}\bar{v}^i(\mathbf{x}, \tau) + (am)^2\bar{n}(\mathbf{x}, \tau)\bar{\sigma}^{ik}(\mathbf{x}, \tau)\frac{\partial}{\partial x^k}\bar{v}^j(\mathbf{x}, \tau) \\
 & + (am)^2\bar{n}(\mathbf{x}, \tau)\bar{v}^k(\mathbf{x}, \tau)\frac{\partial}{\partial x^k}\bar{\sigma}^{ij}(\mathbf{x}, \tau) + (am)^2\frac{\partial}{\partial x^k}(\bar{n}(\mathbf{x}, \tau)\omega^{\bar{i}jk}(\mathbf{x}, \tau)) = \\
 & \frac{(am)^2\bar{v}^j(\mathbf{x}, \tau)}{V} \int d^3y\mathbf{W} \left[\left| \frac{\mathbf{y}}{L} \right| \right] n(\mathbf{x} + \mathbf{y}, \tau)\nabla_{\mathbf{x}+\mathbf{y}}^i\delta\phi(\mathbf{x} + \mathbf{y}, \tau) + \\
 & \frac{(am)^2\bar{v}^i(\mathbf{x}, \tau)}{V} \int d^3y\mathbf{W} \left[\left| \frac{\mathbf{y}}{L} \right| \right] n(\mathbf{x} + \mathbf{y}, \tau)\nabla_{\mathbf{x}+\mathbf{y}}^j\delta\phi(\mathbf{x} + \mathbf{y}, \tau) + \\
 & - \frac{(am)^2}{V} \int d^3y\mathbf{W} \left[\left| \frac{\mathbf{y}}{L} \right| \right] \nabla_{\mathbf{x}+\mathbf{y}}^i\delta\phi(\mathbf{x} + \mathbf{y}, \tau)n(\mathbf{x} + \mathbf{y}, \tau)v^j(\mathbf{x} + \mathbf{y}, \tau) + \\
 & - \frac{(am)^2}{V} \int d^3y\mathbf{W} \left[\left| \frac{\mathbf{y}}{L} \right| \right] \nabla_{\mathbf{x}+\mathbf{y}}^j\delta\phi(\mathbf{x} + \mathbf{y}, \tau)n(\mathbf{x} + \mathbf{y}, \tau)v^i(\mathbf{x} + \mathbf{y}, \tau)
 \end{aligned} \tag{2.43}$$

Ora, ricordando che:

$$\bar{v}(\mathbf{x}, \tau) = v(\mathbf{x} + \mathbf{y}, \tau) - \delta v(\mathbf{x} + \mathbf{y}, \tau) \tag{2.44}$$

vediamo come gli ultimi quattro termini a secondo membro si semplifichino ulteriormente riducendosi a due, i quali possono essere riscritti come:

$$-\frac{(am)^2}{V} \int d^3y\mathbf{W} \left[\left| \frac{\mathbf{y}}{L} \right| \right] n(\mathbf{x} + \mathbf{y}, \tau) \cdot [\delta v^j(\mathbf{x} + \mathbf{y}, \tau)\nabla_{\mathbf{x}+\mathbf{y}}^i + \delta v^i(\mathbf{x} + \mathbf{y}, \tau)\nabla_{\mathbf{x}+\mathbf{y}}^j]\delta\phi(\mathbf{x} + \mathbf{y}, \tau) \tag{2.45}$$

Andando a dividere tutti i termini rimasti per:

$$(am)^2\bar{n}(\mathbf{x}, \tau) \tag{2.46}$$

otteniamo l'equazione richiesta, ovvero l'equazione per la dispersione di velocità macroscopica.

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial \tau} \bar{\sigma}^{ij}(\mathbf{x}, \tau) + 2H \bar{\sigma}^{ij}(\mathbf{x}, \tau) + \bar{v}^k(\mathbf{x}, \tau) \frac{\partial}{\partial x^k} \bar{\sigma}^{ij}(\mathbf{x}, \tau) + \bar{\sigma}^{ik}(\mathbf{x}, \tau) \frac{\partial}{\partial x^k} \bar{v}^j(\mathbf{x}, \tau) \\
& + \bar{\sigma}^{jk}(\mathbf{x}, \tau) \frac{\partial}{\partial x^k} \bar{v}^i(\mathbf{x}, \tau) + \frac{1}{\bar{n}(\mathbf{x}, \tau)} \frac{\partial}{\partial x^k} (\bar{n}(\mathbf{x}, \tau) \omega^{ijk}(\mathbf{x}, \tau)) = \\
& - \frac{1}{V} \int d^3 y \mathbf{W} \left[\left| \frac{\mathbf{y}}{L} \right| \right] \frac{n(\mathbf{x} + \mathbf{y}, \tau)}{\bar{n}(\mathbf{x}, \tau)} \cdot [\delta v^j(\mathbf{x} + \mathbf{y}, \tau) \nabla_{\mathbf{x}+\mathbf{y}}^i + \delta v^i(\mathbf{x} + \mathbf{y}, \tau) \nabla_{\mathbf{x}+\mathbf{y}}^j] \delta \phi(\mathbf{x} + \mathbf{y}, \tau)
\end{aligned} \tag{2.47}$$

Il termine nel membro a destra dell'equazione 2.47 fornisce una sorgente per la dispersione di velocità, esso ne è privo se si parte dall'equazione di Vlasov anziché dall'equazione 2.10.

Esso chiarisce l'origine "microscopica" delle dispersioni di velocità, le quali, come anticipato, sono generate dal prodotto di forze interne e dalle fluttuazioni di velocità all'interno del volume medio V .

Si noti inoltre che il potenziale gravitazionale $\bar{\phi}(\mathbf{x}, \tau)$ è correlato alla fluttuazione di densità coarse-grained.

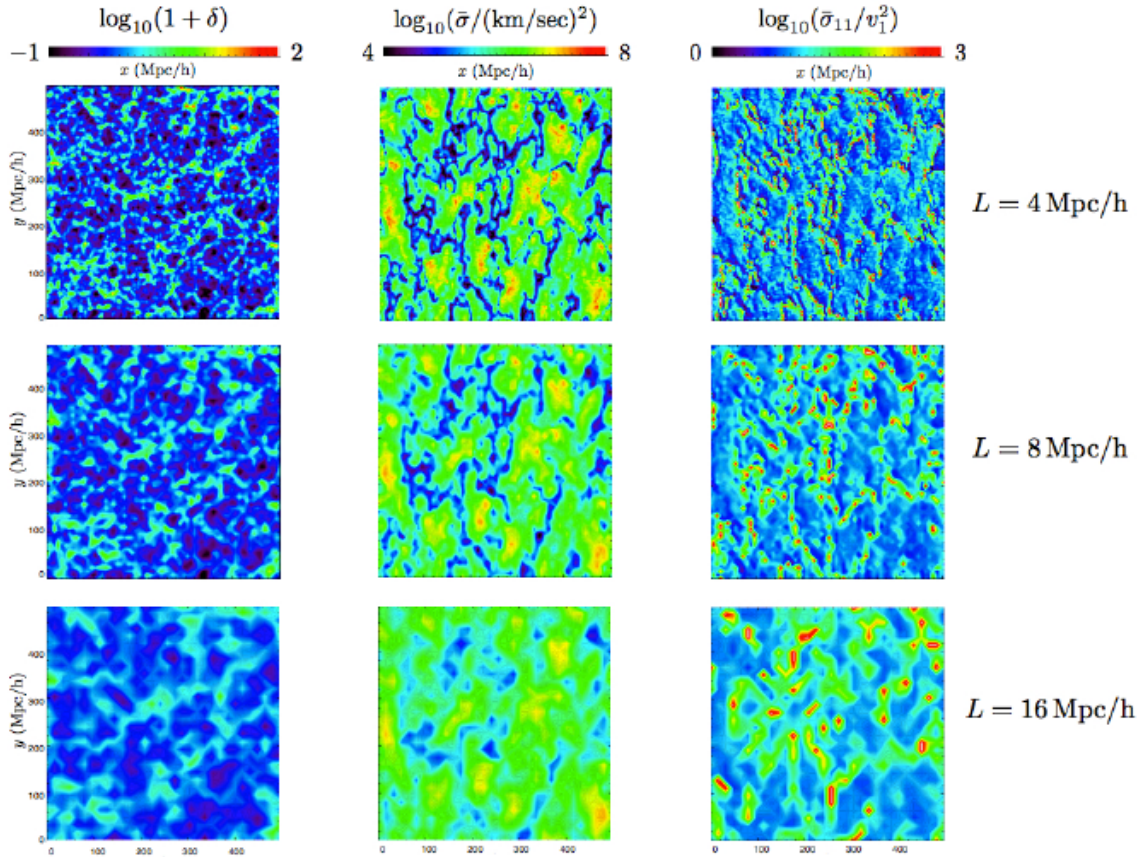


Figura 2.1: Immagine presa da [2]

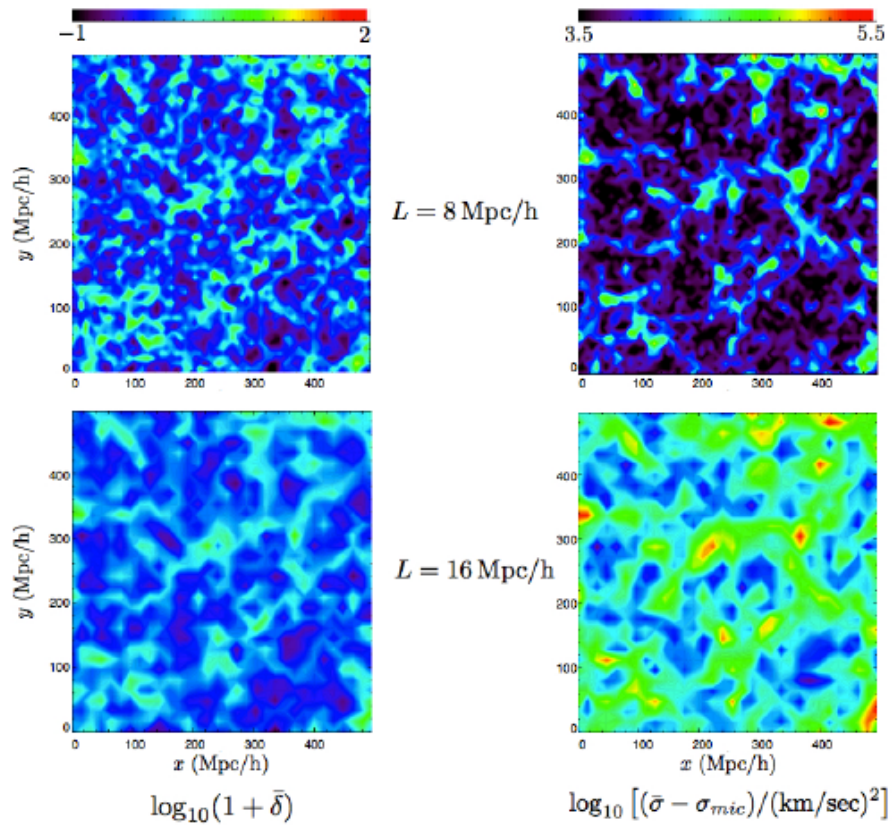


Figura 2.2: Immagine presa da [2]

La prima figura rappresenta istantanee di quantità ottenute da alcune simulazioni. La colonna di sinistra rappresenta il campo di densità, quella centrale è la traccia del tensore di dispersione di velocità e la colonna di destra rappresenta il rapporto $\frac{\bar{\sigma}}{\bar{\sigma}^2}$. Le differenti linee sono ottenute prendendo griglie di spaziatura rispettivamente a $L = 4, 8 e 16 Mpc/h$.

Nella seconda figura, la colonna di sinistra rappresenta lo stesso campo di densità dell'immagine precedente, mentre la colonna di destra rappresenta il contributo macroscopico alla dispersione di velocità.

Approssimazione di Zel'dovich e derivazione equazione di Schrödinger

3.1 Introduzione all'approssimazione di Zel'dovich

L'approssimazione di Zel'dovich dà una spiegazione approssimata della dinamica non lineare della "polvere" auto gravitante: le particelle non collisionali. Quello di Zel'dovich è un approccio di tipo Lagrangiano, ovvero un approccio alternativo a quello di Eulero atto a discutere la dinamica di un fluido non collisionale, andando a considerare il moto di una singola particella, classificata come elemento di fluido infinitesimale, invece di considerare i campi che descrivono le proprietà del sistema (velocità, densità, etc.) [3].

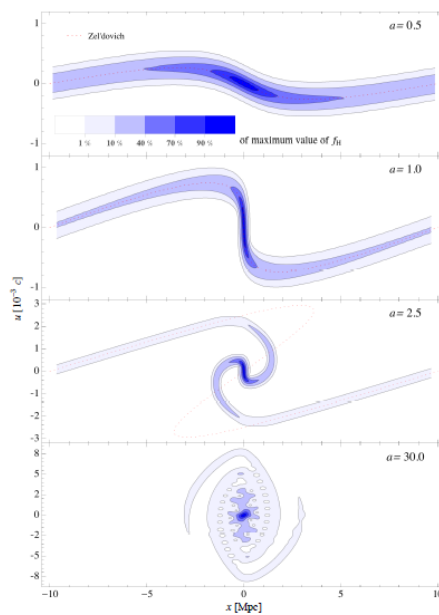


Figura 3.1: Immagine presa da [4]

Si nota come il collasso prosegua preferenzialmente lungo un asse, portando ad ellissoidi oblati ("pancakes"), come forma preferenziale di elementi di fluido locali. La figura rappresenta il collasso del profilo di densità di un pancake nel background di Einstein-De Sitter.

I contorni blu rappresentano la densità nello spazio delle fasi, mentre le linee tratteggiate rosse la soluzione di Zel'dovich.

In cosa consiste sostanzialmente l'approssimazione di Zel'dovich?

In un cambiamento di variabile: la nuova variabile temporale diventa $a(t) \propto t^{\frac{2}{3}}$, dove $a(t)$ è il fattore di scala dell'universo all'istante t .

Consideriamo le equazioni di Eulero-Poisson:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial \tau} + 3H\rho + \frac{1}{a}\nabla(\rho\vec{v}) = 0 \\ \frac{\partial \vec{v}}{\partial \tau} + H\vec{v} + \frac{1}{a}(\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} = -\frac{1}{a}\nabla\phi \\ \nabla^2\phi = 4\pi G a^2 \delta\rho \end{cases} \quad (3.1)$$

Con il cambiamento di variabile sopra citato e considerando altri cambiamenti come:

$$\rho \longrightarrow \eta \equiv \frac{\rho}{\rho_b} = 1 + \delta \quad (3.2)$$

$$\vec{v} \longrightarrow \vec{u} \equiv \frac{d\vec{x}}{da} = \frac{\vec{v}}{a\dot{a}} \quad (3.3)$$

$$\phi \longrightarrow \varphi \equiv \frac{3t_*^2}{2a_*^3}\phi \quad (3.4)$$

Dove $a(t) = a_* \left(\frac{t}{t_*}\right)^{\frac{2}{3}}$.

Le equazioni del fluido prendono la nuova e corretta forma:

$$\begin{cases} \frac{D\vec{u}}{Da} + \frac{3}{2a}\vec{u} = -\frac{3}{2a}\nabla\varphi \\ \frac{D\eta}{Da} + \eta\nabla \cdot \vec{u} = 0 \\ \nabla^2\varphi = \frac{\delta}{a} \end{cases} \quad (3.5)$$

Considerando la teoria lineare, \vec{u} è circa costante, quindi avremo:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial a} = 0 \implies \frac{D\vec{u}}{Da} = 0 \quad (3.6)$$

Ovvero:

$$\vec{u} = -\nabla\varphi \quad (3.7)$$

Dove la 3.7 corrisponde alla relazione tra il campo di velocità e il potenziale gravitazionale peculiare, essa è conseguenza del teorema di circolazione di Kelvin, dove \vec{u} è un campo di velocità irrotazionale.

La soluzione di Zel'dovich ci dice che anche oltre la teoria lineare si ha: $\frac{D\vec{u}}{Da} = 0$. La giustificazione si basa sul fatto che, nella teoria lineare, passando allo spazio di Fourier, la velocità peculiare \vec{u} mantiene un livello lineare su scale più piccole (e/o per lunghi tempi) rispetto al campo di fluttuazione della densità.

Abbiamo dunque un nuovo set di equazioni "formalmente esatte", chiamate *Equazioni di Zel'dovich*:

$$\frac{D\vec{u}}{Da} = 0 \quad (3.8)$$

$$\frac{D\eta}{Da} + \eta\nabla \cdot \vec{u} = 0 \quad (3.9)$$

L'equazione di Poisson è completamente distaccata dalle altre, essa verrà utilizzata solo per le condizioni iniziali.

Il set di equazioni di Zel'dovich descrive le dinamiche di un set di particelle non collisionali che si muovono sotto l'effetto della loro inerzia (in senso Newtoniano); ciò si capisce dall'equazione 3.8.

Il fatto che vi sia conservazione della massa lo si capisce dall'equazione 3.9.

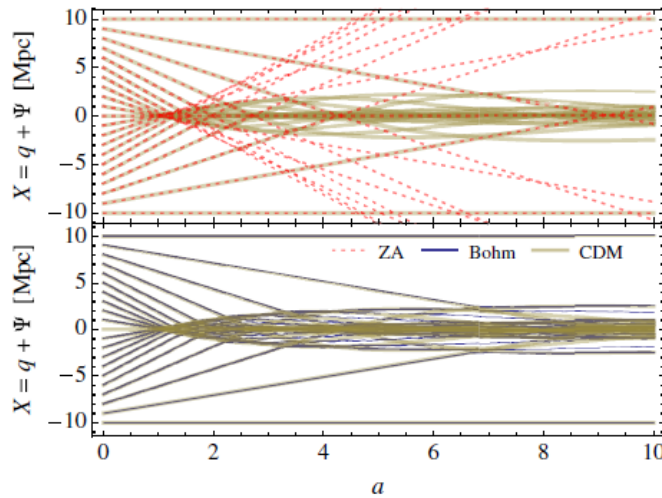


Figura 3.2: Immagine presa da [5]

In figura, con il tratteggio rosso sono rappresentate le traiettorie di Zel'dovich e in giallo le traiettorie della CDM.

Mentre la teoria perturbativa Euleriana al primo ordine permette di esaminare il regime lineare nella formazione di strutture su larga scala, l'approssimazione di Zel'dovich dà una soluzione esatta al sistema in una dimensione.

Vi sono però per entrambe le teorie degli ostacoli:

- La teoria perturbativa Euleriana non garantisce un valore positivo del campo di densità ovunque.
- L'approssimazione di Zel'dovich predice una singolarità dove la densità diventa infinita.

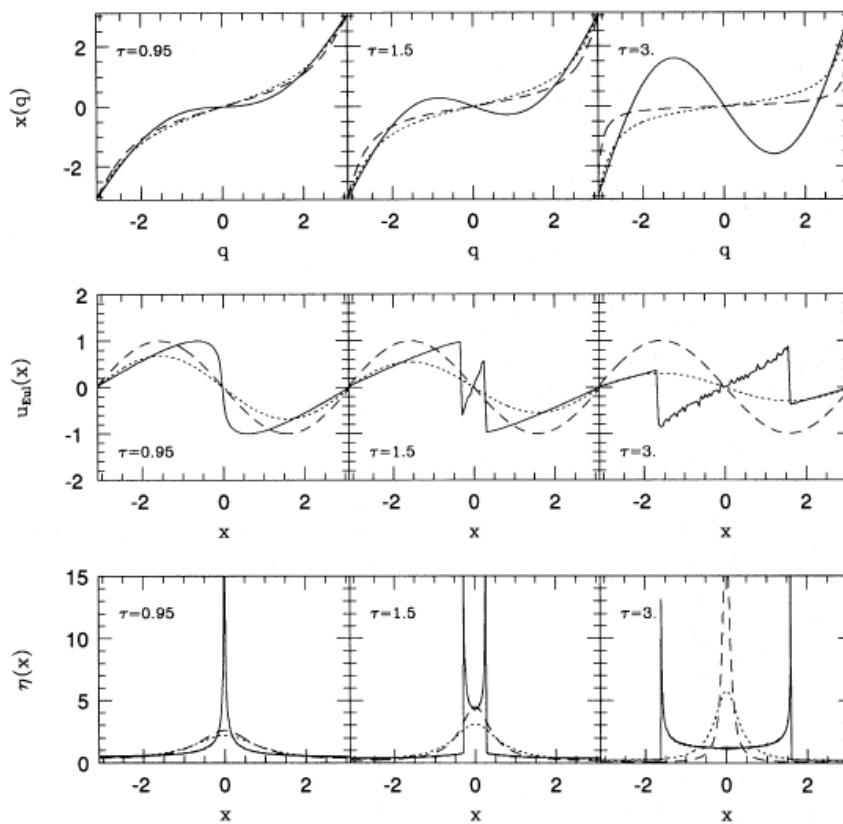


Figura 3.3: Immagine presa da [6]

In una dimensione sappiamo che l'approssimazione di Zel'dovich restituisce risultati corretti prima dello shell-crossing.

In questa figura vengono rispettivamente comparati i risultati per l'approssimazione di Zel'dovich (linea continua), l'approssimazione frozen-flow (linea tratteggiata) e l'approssimazione viscid-flow (linea puntinata) con $\nu = 0.4$ in un modello a onda sinusoidale singola, a tre differenti espansioni temporali: $\tau = 0.95$, $\tau = 1.5$ e $\tau = 3$. Nel primo grafico la coordinata Euleriana x è espressa in funzione della coordinata Lagrangiana q , nel secondo grafico la velocità peculiare Euleriana è espressa in funzione della coordinata Euleriana x , mentre nel terzo grafico il profilo di densità η è

espresso in funzione di x .

3.2 Derivazione equazione di Bernoulli

Partiamo considerando l'equazione di Eulero modificata 2.30.

Andiamo ad identificare i due extra termini che non compaiono nell'equazione di Eulero originale con J :

$$J = -\frac{1}{\bar{n}(\mathbf{x}, \tau)} \frac{\partial}{\partial x^j} (\bar{n}(\mathbf{x}, \tau) \bar{\sigma}^{ij}(\mathbf{x}, \tau)) - \frac{1}{V} \int d^3y \mathbf{W} \left[\left| \frac{\mathbf{y}}{L} \right| \right] \frac{n(\mathbf{x} + \mathbf{y}, \tau)}{\bar{n}(\mathbf{x}, \tau)} \nabla_{\mathbf{x}+\mathbf{y}}^i \delta\phi(\mathbf{x} + \mathbf{y}, \tau) \quad (3.10)$$

E contemporaneamente consideriamo:

$$\begin{cases} J = \nabla j + L \\ \nabla \cdot L = 0 \end{cases} \quad (3.11)$$

$$\begin{cases} \bar{v} = \nabla\phi_v + t \\ \nabla \cdot t = 0 \end{cases} \quad (3.12)$$

Specificando che al momento non sono conosciuti L e t .

Procediamo applicando la divergenza all'equazione di Eulero, la 2.30, al fine di ottenere un'equazione che possa essere ricondotta a quella di Bernoulli.

Riprendiamo l'equazione calcolata nel paragrafo 2.1.2:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} \bar{v}^i(\mathbf{x}, \tau) + H\bar{v}^i(\mathbf{x}, \tau) + \bar{v}^j(\mathbf{x}, \tau) \frac{\partial}{\partial x^j} \bar{v}^i(\mathbf{x}, \tau) + \frac{1}{\bar{n}(\mathbf{x}, \tau)} \frac{\partial}{\partial x^j} (\bar{n}(\mathbf{x}, \tau) \bar{\sigma}^{ij}(\mathbf{x}, \tau)) = \\ - \nabla_{\mathbf{x}}^i \bar{\phi}(\mathbf{x}, \tau) - \frac{1}{V} \int d^3y \mathbf{W} \left[\left| \frac{\mathbf{y}}{L} \right| \right] \frac{n(\mathbf{x} + \mathbf{y}, \tau)}{\bar{n}(\mathbf{x}, \tau)} \nabla_{\mathbf{x}+\mathbf{y}}^i \delta\phi(\mathbf{x} + \mathbf{y}, \tau) \end{aligned} \quad (3.13)$$

Introduciamo ora il termine J definito nella 3.10 e riscriviamo l'equazione:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \bar{v}^i(\mathbf{x}, \tau) + H\bar{v}^i(\mathbf{x}, \tau) + \bar{v}^j(\mathbf{x}, \tau) \frac{\partial}{\partial x^j} \bar{v}^i(\mathbf{x}, \tau) = J - \nabla_{\mathbf{x}}^i \bar{\phi}(\mathbf{x}, \tau) \quad (3.14)$$

A questo punto possiamo inserire nella 3.14 quanto definito nelle equazioni 3.11 e 3.12 ottenendo:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \nabla\phi_v + \frac{\partial}{\partial \tau} t + H\nabla\phi_v + Ht + (\nabla\phi_v + t) \frac{\partial}{\partial x^j} (\nabla\phi_v + t) = \nabla j + L - \nabla_{\mathbf{x}}^i \bar{\phi}(\mathbf{x}, \tau) \quad (3.15)$$

Una volta ridefinita l'equazione, possiamo procedere applicando la divergenza a tutti i termini della 3.15.

Per agevolare i calcoli anche in questo caso ragioneremo per parti:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \nabla \phi_v + \frac{\partial}{\partial \tau} t \longrightarrow \nabla^2 \frac{\partial}{\partial \tau} \phi_v + \frac{\partial}{\partial \tau} \nabla \cdot t \quad (3.16)$$

$$H \nabla \phi_v + H t \longrightarrow \nabla^2 (H \phi_v) + H \nabla \cdot t \quad (3.17)$$

$$\begin{aligned} (\nabla \phi_v + t) \frac{\partial}{\partial x^j} (\nabla \phi_v + t) &= \nabla \phi_v \frac{\partial}{\partial x^j} \nabla \phi_v + \nabla \phi_v \frac{\partial}{\partial x^j} t + t \frac{\partial}{\partial x^j} \nabla \phi_v + t \frac{\partial}{\partial x^j} t = \\ \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^j} (\nabla \phi_v)^2 + \frac{\partial}{\partial x^j} (\nabla \phi_v \cdot t) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^j} t^2 &\longrightarrow \nabla^2 \left(\frac{1}{2} (\nabla \phi_v)^2 \right) + \nabla^2 (\nabla \phi_v \cdot t) + \nabla^2 \left(\frac{1}{2} t^2 \right) \end{aligned} \quad (3.18)$$

$$\nabla j + L \longrightarrow \nabla^2 j + \nabla \cdot L \quad (3.19)$$

$$\nabla_{\mathbf{x}}^i \bar{\phi}(\mathbf{x}, \tau) \longrightarrow \nabla^2 \bar{\phi}(\mathbf{x}, \tau) \quad (3.20)$$

Ricordando ora che $\nabla \cdot L = 0$ e che $\nabla \cdot t = 0$, abbiamo:

$$\nabla^2 \left(\frac{\partial}{\partial \tau} \phi_v + H \phi_v + \frac{1}{2} (\nabla \phi_v)^2 + \nabla \phi_v \cdot t + \frac{1}{2} t^2 \right) = \nabla^2 (j - \bar{\phi}(\mathbf{x}, \tau)) \quad (3.21)$$

Eliminando il Laplaciano otteniamo:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \phi_v + H \phi_v + \frac{1}{2} (\nabla \phi_v)^2 + \nabla \phi_v \cdot t + \frac{1}{2} t^2 = j - \bar{\phi}(\mathbf{x}, \tau) \quad (3.22)$$

La 3.22 rappresenta l'equazione di Bernoulli con dei termini extra dovuti alla presenza della vorticità e del coarse-grained.

3.3 Variabile di Zel'dovich

L'obiettivo di questo paragrafo consiste nel riscrivere l'equazione 3.22 calcolata nel paragrafo precedente, andando ad utilizzare le coordinate di Zel'dovich, attuando un cambiamento di coordinate passando dal tempo conforme τ al fattore di scala $a(t)$.

Il nostro punto di partenza è dunque:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \phi_v + H \phi_v + \frac{1}{2} (\nabla \phi_v)^2 + \nabla \phi_v \cdot \mathbf{t} + \frac{1}{2} t^2 = j - \bar{\phi}(\mathbf{x}, \tau) \quad (3.23)$$

Anche in questo caso procederemo per parti per semplificare i calcoli. Prima di fare ciò consideriamo:

$$\vec{u} = \frac{d\vec{x}}{da} = \frac{d\vec{x}}{dt} \frac{dt}{da} = \frac{d\vec{x}}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} \frac{dt}{da} = u \frac{d\tau}{dt} \frac{dt}{da} \quad (3.24)$$

Che nel nostro caso significa:

$$\phi_{zd} = \phi_v \frac{d\tau}{dt} \frac{dt}{da} \quad (3.25)$$

Andiamo ora a calcolare il valore di $\frac{d\tau}{dt} \frac{dt}{da}$ ricordando che:

$$a(t) = kt^{\frac{2}{3}} \quad (3.26)$$

$$d\tau = \frac{dt}{a(t)} \implies \tau = \int_0^t \frac{d\hat{t}}{a(\hat{t})} = \frac{1}{k} \int_0^t d\hat{t} \hat{t}^{-\frac{2}{3}} = \frac{3}{k} t^{\frac{1}{3}} = \frac{3}{k} \left(\frac{a}{k}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{k^{\frac{3}{2}}} a^{\frac{1}{2}} \quad (3.27)$$

Avremo:

$$\begin{aligned} \frac{d\tau}{dt} \frac{dt}{da} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{3}{k} t^{\frac{1}{3}} \right) \frac{d}{da} \left(\left(\frac{a}{k} \right)^{\frac{3}{2}} \right) \\ &= \frac{3}{k} \frac{1}{3} t^{-\frac{2}{3}} \frac{1}{k^{\frac{3}{2}}} \frac{3}{2} a^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{k^{\frac{5}{2}}} \frac{1}{t^{\frac{2}{3}}} \frac{3}{2} a^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{k^{\frac{5}{2}}} \frac{k^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}} \frac{3}{2} \sqrt{a} = \frac{3}{2} \frac{1}{k^{\frac{3}{2}} \sqrt{a}} \end{aligned} \quad (3.28)$$

Ovvero:

$$\phi_v = \phi_{zd} \frac{1}{\frac{d\tau}{dt} \frac{dt}{da}} = \phi_{zd} \frac{2}{3} k^{\frac{3}{2}} \sqrt{a} \quad (3.29)$$

Possiamo ora iniziare i calcoli per attuare il cambiamento di variabile, ragionando anche in questo caso per parti:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial \tau} \phi_v &= \frac{\partial}{\partial a} \frac{\partial a}{\partial \tau} \phi_{zd} \frac{2}{3} k^{\frac{3}{2}} \sqrt{a} = \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{k^3 \tau^2}{9} \right) \frac{\partial}{\partial a} \left[\phi_{zd} \frac{2}{3} k^{\frac{3}{2}} \sqrt{a} \right] \\
 &= \frac{k^3}{9} 2\tau \frac{2}{3} k^{\frac{3}{2}} \frac{\partial}{\partial a} [\phi_{zd} \sqrt{a}] \\
 &= \frac{4}{27} k^{\frac{9}{2}} \frac{3}{k^{\frac{3}{2}}} \sqrt{a} \left[\sqrt{a} \frac{\partial \phi_{zd}}{\partial a} + \phi_{zd} \frac{1}{2\sqrt{a}} \right] \quad (3.30) \\
 &= \frac{4}{9} k^3 a \frac{\partial \phi_{zd}}{\partial a} + \frac{4}{9} k^3 \frac{1}{2} \phi_{zd} \\
 &= \frac{4}{9} k^3 a \frac{\partial \phi_{zd}}{\partial a} + \frac{2}{9} k^3 \phi_{zd}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 H\phi_v &= \frac{1}{a} \frac{\partial a}{\partial \tau} \phi_v = \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{k^3 \tau^2}{9} \right) \phi_{zd} \frac{2}{3} k^{\frac{3}{2}} \sqrt{a} \\
 &= \frac{k^3}{9} 2\tau \frac{1}{\sqrt{a}} \phi_{zd} \frac{2}{3} k^{\frac{3}{2}} \\
 &= \frac{4}{27} k^{\frac{9}{2}} \phi_{zd} \frac{1}{\sqrt{a}} \frac{3}{k^{\frac{3}{2}}} \sqrt{a} \\
 &= \frac{4}{9} k^3 \phi_{zd} \quad (3.31)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} (\nabla \phi_v)^2 &= \frac{1}{2} \left[\nabla \left(\phi_{zd} \frac{2}{3} k^{\frac{3}{2}} \sqrt{a} \right) \right]^2 \\
 &= \frac{1}{2} \frac{4}{9} k^3 a (\nabla \phi_{zd})^2 \quad (3.32) \\
 &= \frac{2}{9} k^3 a (\nabla \phi_{zd})^2
 \end{aligned}$$

$$\nabla \phi_v \cdot t = \nabla \left(\phi_{zd} \frac{2}{3} k^{\frac{3}{2}} \sqrt{a} \right) \cdot t = \frac{2}{3} k^{\frac{3}{2}} \sqrt{a} \nabla \phi_{zd} \cdot t \quad (3.33)$$

$$\bar{\phi}(\mathbf{x}, \tau) = \frac{2a^3}{3t^2} \varphi = \frac{2}{3} \frac{a^3}{a^3} k^3 \varphi = \frac{2}{3} k^3 \varphi \quad (3.34)$$

Unendo tutti i termini avremo:

$$\frac{4}{9} k^3 a \frac{\partial \phi_{zd}}{\partial a} + \frac{2}{9} k^3 \phi_{zd} + \frac{4}{9} k^3 \phi_{zd} + \frac{2}{9} k^3 a (\nabla \phi_{zd})^2 + \frac{2}{3} k^{\frac{3}{2}} \sqrt{a} \nabla \phi_{zd} \cdot \mathbf{t} + \frac{1}{2} t^2 = j - \frac{2}{3} k^3 \varphi \quad (3.35)$$

Semplificando e dividendo ora la 3.35 per $\frac{4}{9} k^3 a$ otteniamo l'equazione richiesta con le coordinate di Zel'dovich:

$$\frac{\partial \phi_{zd}}{\partial a} + \frac{3}{2} \frac{\phi_{zd}}{a} + \frac{1}{2} (\nabla \phi_{zd})^2 + \frac{3}{2} \frac{\nabla \phi_{zd} \cdot \mathbf{t}}{k^{\frac{3}{2}} \sqrt{a}} + \frac{9}{8} \frac{t^2}{k^3 a} = \frac{9}{4} \frac{j}{k^3 a} - \frac{3}{2} \frac{\varphi}{a} \quad (3.36)$$

Vediamo come l'equazione 3.36 riprenda l'equazione del fluido e assomigli all'equazione di Eulero 3.1.

Rispetto all'equazione di Eulero, qui, nella 3.36 vi sono dei termini aggiuntivi dovuti al processo di coarse-graining e alla vorticità.

3.4 Derivazione dell'equazione di Schrödinger

Per calcolare l'equazione di Schrödinger a partire dalle dinamiche del fluido, partiamo considerando l'equazione di Continuità, ovvero l'equazione 2.20 e l'equazione di Bernoulli, la 3.22.

Assumiamo che il fluido sia privo di pressione.

Avremo:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \tau} \bar{n}(\mathbf{x}, \tau) + \frac{\partial}{\partial x^i} (\bar{n}(\mathbf{x}, \tau) \bar{v}^i(\mathbf{x}, \tau)) \\ \frac{\partial}{\partial \tau} \phi_v + H \phi_v + \frac{1}{2} (\nabla \phi_v)^2 + \nabla \phi_v \cdot \mathbf{t} + \frac{1}{2} t^2 = j - \bar{\phi}(\mathbf{x}, \tau) \end{cases} \quad (3.37)$$

Prendendo in considerazione l'equazione di Continuità possiamo riscriverla come:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \bar{n}(\mathbf{x}, \tau) + \bar{v}^i(\mathbf{x}, \tau) \frac{\partial}{\partial x^i} \bar{n}(\mathbf{x}, \tau) + \bar{n}(\mathbf{x}, \tau) \frac{\partial}{\partial x^i} \bar{v}^i(\mathbf{x}, \tau) \quad (3.38)$$

Nell'equazione di Bernoulli consideriamo un generico potenziale V , quindi avremo $V = \bar{\phi}(\mathbf{x}, \tau)$

Definiamo ora la *trasformata di Madelung* [5]:

$$\begin{cases} \psi(\mathbf{x}, \tau) = R(\mathbf{x}, \tau) \exp\left(\frac{i\phi_v}{\nu}\right) \\ \bar{n}(\mathbf{x}, \tau) = \psi^* \psi = R^2 \end{cases} \quad (3.39)$$

dove ν è un nuovo parametro con dimensioni $\frac{L^2}{T}$.

Madelung ha osservato esserci un'equivalenza formale tra le equazioni del fluido e le equazioni della meccanica quantistica. La sua applicazione in contesto cosmologico non è stata subito chiara, infatti questa equivalenza inizialmente era usata per trovare un'interpretazione agli effetti della meccanica quantistica.

Il lavoro di Madelung parte dall'equazione di Schrödinger:

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x)\right) \psi(\mathbf{x}, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\mathbf{x}, t) \quad (3.40)$$

al fine di ottenere le equazioni del fluido.

Scriva la funzione d'onda in forma polare: $\psi = A + iB$ separando parte reale e parte immaginaria.

Dalla parte reale si ottiene l'equazione di Bohm, simile all'equazione di Bernoulli, mentre dalla parte immaginaria si ottiene l'equazione di Continuità.

Deriviamo ora l'equazione di $\psi(\mathbf{x}, \tau)$ per x ottenendo le seguenti relazioni:

$$\nabla \psi = \left(\nabla R + i \frac{R}{\nu} \nabla \phi_v\right) \exp\left(\frac{i\phi_v}{\nu}\right) \quad (3.41)$$

$$\nabla^2 \psi = \left[\nabla^2 R + \frac{i}{\nu} \left(R \nabla^2 \phi_v + 2 \nabla R \cdot \nabla \phi_v\right) - \frac{R}{\nu^2} (\nabla \phi_v)^2\right] \exp\left(\frac{i\phi_v}{\nu}\right) \quad (3.42)$$

dove la relazione 3.42 può essere semplificata utilizzando l'equazione di Continuità:

$$\begin{aligned} \frac{\partial R^2}{\partial \tau} + \nabla(R^2 \nabla \phi_v) = -t \nabla R^2 &\implies 2R \frac{\partial R}{\partial \tau} + 2R(\nabla R \cdot \nabla_v) + R^2 \nabla^2 \phi_v = -t \nabla R^2 \\ &\implies 2 \frac{\partial R}{\partial \tau} + \frac{t \nabla R^2}{R} = -(2 \nabla R \cdot \nabla \phi_v + R \nabla^2 \phi_v) \end{aligned} \quad (3.43)$$

Ottenendo:

$$\nabla^2 \psi = \left[\nabla^2 R - \frac{2i}{\nu} \frac{\partial R}{\partial \tau} - \frac{it \nabla R^2}{\nu R} - \frac{R}{\nu^2} (\nabla \phi_v)^2\right] \exp\left(\frac{i\phi_v}{\nu}\right) \quad (3.44)$$

Dalle equazioni 3.41 e 3.42 possiamo calcolare rispettivamente $\nabla \phi_v$ e $(\nabla \phi_v)^2$.
Avremo quindi:

$$\nabla\phi_v = -\frac{iv}{R}\nabla\psi \exp\left(-\frac{i\phi_v}{v}\right) + \frac{iv}{R}\nabla R \quad (3.45)$$

$$(\nabla\phi_v)^2 = -\frac{v^2}{R}\nabla^2\psi \exp\left(-\frac{i\phi_v}{v}\right) + \frac{v^2}{R}\nabla^2R - \frac{2iv}{R}\frac{\partial R}{\partial\tau} - \frac{itv\nabla R^2}{R^2} \quad (3.46)$$

Dalla definizione di ψ possiamo invece ricavare ϕ_v :

$$\phi_v = -iv \ln\left(\frac{\psi}{R}\right) \quad (3.47)$$

Considerando ora la derivata temporale di ψ :

$$\frac{\partial\psi}{\partial\tau} = \left(\frac{\partial R}{\partial\tau} + \frac{iR}{v}\frac{\partial\phi_v}{\partial\tau}\right) \exp\left(\frac{i\phi_v}{v}\right) \quad (3.48)$$

Possiamo calcolare $\frac{\partial\phi_v}{\partial\tau}$:

$$\frac{\partial\phi_v}{\partial\tau} = \frac{iv}{R} \left(\frac{\partial R}{\partial\tau} - \exp\left(-\frac{i\phi_v}{v}\right)\frac{\partial\psi}{\partial\tau}\right) \quad (3.49)$$

Le equazioni 3.45, 3.46, 3.47 e 3.49 andremo ad inserirle all'interno dell'equazione di Bernoulli nella 3.37, ottenendo:

$$\begin{aligned} & \frac{iv}{R}\frac{\partial R}{\partial\tau} - \frac{iv}{R}\exp\left(-\frac{i\phi_v}{v}\right)\frac{\partial\psi}{\partial\tau} - iHv \ln\left(\frac{\psi}{R}\right) - \frac{v^2}{2R}\nabla^2\psi \exp\left(-\frac{i\phi_v}{v}\right) + \frac{v^2}{2R}\nabla^2R \\ & - \frac{iv}{R}\frac{\partial R}{\partial\tau} - \frac{itv\nabla R^2}{2R^2} - \frac{iv}{R}\nabla\psi \cdot t \exp\left(-\frac{i\phi_v}{v}\right) + \frac{iv}{R}\nabla R \cdot t + \frac{1}{2}t^2 = j - V \end{aligned} \quad (3.50)$$

Otteniamo l'equazione di Schrödinger richiesta andando a cambiare di segno la 3.50 e moltiplicandola poi per $R \exp\left(\frac{i\phi_v}{v}\right)$:

$$\begin{aligned} iv\frac{\partial\psi}{\partial\tau} &= -\frac{v^2}{2}\nabla^2\psi - iv\nabla\psi \cdot t + \\ & \left(V - j - iHv \ln\left(\frac{\psi}{R}\right) + \frac{v^2}{2R}\nabla^2R + \frac{itv\nabla R^2}{2R^2} + \frac{iv}{R}\nabla R \cdot t + \frac{1}{2}t^2\right) \psi \end{aligned} \quad (3.51)$$

Il termine $-iHv \ln\left(\frac{\psi}{R}\right)$ può essere inglobato in V .

Comparando l'equazione con quella della meccanica quantistica notiamo dei nuovi termini:

$$P = \frac{v^2}{2} \frac{\nabla^2 R}{R} \quad (3.52)$$

Esso corrisponde alla pressione quantistica. Questo termine somiglia al gradiente di pressione nell'interpretazione dei fenomeni quantistici in termini di comportamento di fluido classico e rappresenta una sorgente di non linearità.

L'equazione di Schrödinger è un modo elegante per includere sia la densità che il campo di velocità in una sola funzione complessa.

Essa richiede opportune tecniche di risoluzione e presenta termini legati alla vorticità (t), termini che trascureremo.

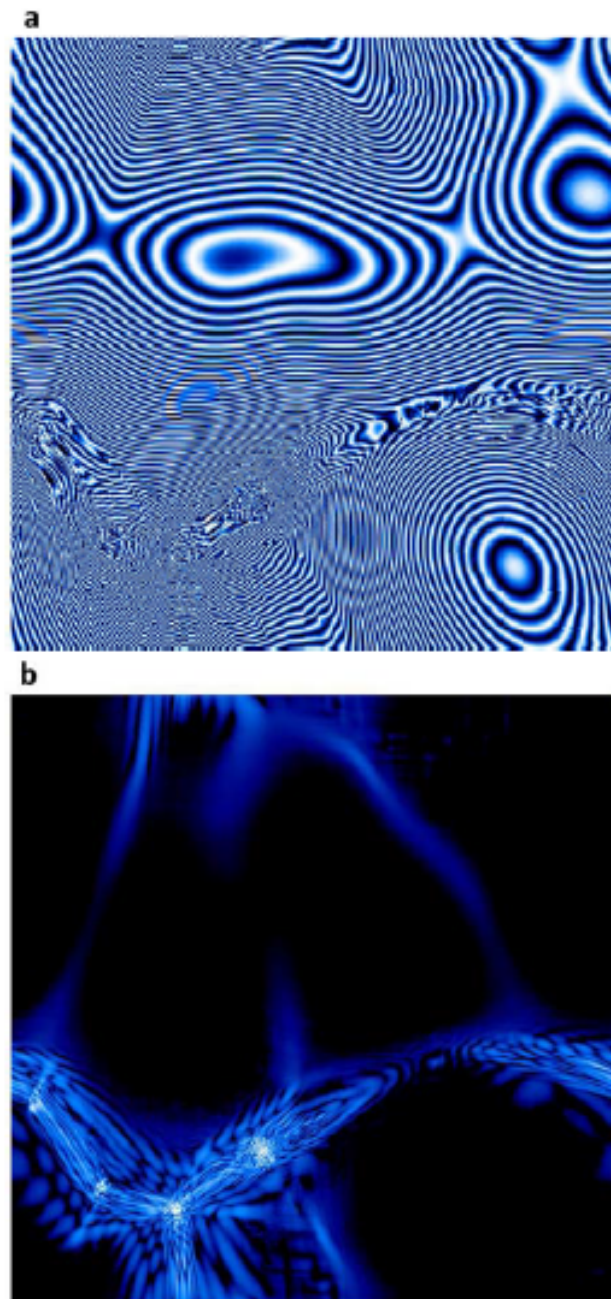


Figura 3.4: Immagine presa da [7]

La figura rappresenta la funzione d'onda quadra ψ^2 nella simulazione della DM. I pannelli *a* e *b* mostrano fase e ampiezza della funzione d'onda a $z = 3.1$. La sfida della simulazione nasce dalla complessità della funzione d'onda. Forti e rapide oscillazioni di fase sono comuni ovunque (anche nel background a bassa densità mostrato dalle regioni scure nel plot della densità), dove risoluzioni spaziali e temporali sono necessarie per risolvere ciascuna lunghezza d'onda.

In questa immagine gli effetti di interferenza sono molto marcati in quanto è stata presa in considerazione materia oscura con massa super leggera. Nel nostro caso non sono così evidenti.

Cumulanti

Dedichiamo questo capitolo alla discussione sulla generalizzazione delle equazioni 2.30 e 2.47 a momenti di ordine arbitrariamente alto [2] [4]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} \bar{v}^i(\mathbf{x}, \tau) + H\bar{v}^i(\mathbf{x}, \tau) + \bar{v}^j(\mathbf{x}, \tau) \frac{\partial}{\partial x^j} \bar{v}^i(\mathbf{x}, \tau) + \frac{1}{\bar{n}(\mathbf{x}, \tau)} \frac{\partial}{\partial x^j} (\bar{n}(\mathbf{x}, \tau) \bar{\sigma}^{ij}(\mathbf{x}, \tau)) = \\ - \nabla_{\mathbf{x}}^i \bar{\phi}(\mathbf{x}, \tau) - \frac{1}{V} \int d^3 y \mathbf{W} \left[\left| \frac{\mathbf{y}}{L} \right| \right] \frac{n(\mathbf{x} + \mathbf{y}, \tau)}{\bar{n}(\mathbf{x}, \tau)} \nabla_{\mathbf{x} + \mathbf{y}}^i \delta \phi(\mathbf{x} + \mathbf{y}, \tau) \end{aligned} \quad (4.1)$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} \bar{\sigma}^{ij}(\mathbf{x}, \tau) + 2H\bar{\sigma}^{ij}(\mathbf{x}, \tau) + \bar{v}^k(\mathbf{x}, \tau) \frac{\partial}{\partial x^k} \bar{\sigma}^{ij}(\mathbf{x}, \tau) + \bar{\sigma}^{ik}(\mathbf{x}, \tau) \frac{\partial}{\partial x^k} \bar{v}^j(\mathbf{x}, \tau) \\ + \bar{\sigma}^{jk}(\mathbf{x}, \tau) \frac{\partial}{\partial x^i} \bar{v}^i(\mathbf{x}, \tau) + \frac{1}{\bar{n}(\mathbf{x}, \tau)} \frac{\partial}{\partial x^k} (\bar{n}(\mathbf{x}, \tau) \bar{\omega}^{ijk}(\mathbf{x}, \tau)) = \\ - \frac{1}{V} \int d^3 y \mathbf{W} \left[\left| \frac{\mathbf{y}}{L} \right| \right] \frac{n(\mathbf{x} + \mathbf{y}, \tau)}{\bar{n}(\mathbf{x}, \tau)} \cdot [\delta v^j(\mathbf{x} + \mathbf{y}, \tau) \nabla_{\mathbf{x} + \mathbf{y}}^i + \delta v^i(\mathbf{x} + \mathbf{y}, \tau) \nabla_{\mathbf{x} + \mathbf{y}}^j] \delta \phi(\mathbf{x} + \mathbf{y}, \tau) \end{aligned} \quad (4.2)$$

È utile considerare la trasformata di Fourier per il momento delle funzioni di distribuzione:

$$M(\mathbf{x}, \mathbf{l}, \tau) = \int d^3 p e^{i \frac{\mathbf{l} \cdot \mathbf{p}}{m a}} f(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \tau) \quad (4.3)$$

La funzione di distribuzione microscopica può essere pensata come la funzione di Klimontovich:

$$f_K(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \tau) = \sum_{\alpha} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_{\alpha}(\tau)) \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}_{\alpha}(\tau)) \quad (4.4)$$

In tutto ciò stiamo assumendo che la nostra funzione soddisfi l'equazione di Vlasov, ovvero l'equazione 2.10 calcolata considerando i termini a secondo membro nulli.

$M(\mathbf{x}, \mathbf{l}, \tau)$ è il momento che genera funzionale, le cui derivate rispetto ad \mathbf{l} sono valutate in $\mathbf{l} = 0$:

$$M(\mathbf{x}, \mathbf{l} = 0, \tau) = n(\mathbf{x}, \tau) \quad (4.5)$$

$$-i \frac{\partial M(\mathbf{x}, \mathbf{l}, \tau)}{\partial l_j} \Big|_{\mathbf{l}=0} = n(\mathbf{x}, \tau) v^j(\mathbf{x}, \tau) \quad (4.6)$$

$$(-i)^2 \frac{\partial^2 M(\mathbf{x}, \mathbf{l}, \tau)}{\partial l_j \partial l_k} \Big|_{\mathbf{l}=0} = n(\mathbf{x}, \tau) (v^j(\mathbf{x}, \tau) v^k(\mathbf{x}, \tau) + \sigma^{jk}(\mathbf{x}, \tau)) \quad (4.7)$$

E così via.

Considerando il logaritmo di $M(\mathbf{x}, \mathbf{l}, \tau)$ otteniamo il cumulante che genera funzionale:

$$C(\mathbf{x}, \mathbf{l}, \tau) = \log(M(\mathbf{x}, \mathbf{l}, \tau)) \quad (4.8)$$

Le cui derivate rispetto ad \mathbf{l} danno i momenti irriducibili:

$$C(\mathbf{x}, \mathbf{l} = 0, \tau) = \log[n(\mathbf{x}, \tau)] \quad (4.9)$$

$$-i \frac{\partial C(\mathbf{x}, \mathbf{l}, \tau)}{\partial l_j} \Big|_{\mathbf{l}=0} = v^j(\mathbf{x}, \tau) \quad (4.10)$$

$$(-i)^2 \frac{\partial^2 C(\mathbf{x}, \mathbf{l}, \tau)}{\partial l_j \partial l_k} \Big|_{\mathbf{l}=0} = \sigma^{jk}(\mathbf{x}, \tau) \quad (4.11)$$

E così via.

Per il regime a flusso singolo si considera il fatto che la quantità di moto del fluido venga valutata in ciascun punto dello spazio, in modo singolare, ovvero le traiettorie delle particelle non si incrociano.

In questo regime abbiamo:

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{k}, \tau) = g(\mathbf{x}, \tau) \delta_D(\mathbf{k} - \mathbf{P}(\mathbf{x}, \tau)) \quad (4.12)$$

Inserendo la 4.12 all'interno della 4.3, siamo in grado di calcolare l'espressione per $M(\mathbf{x}, \mathbf{l}, \tau)$ e poi di $C(\mathbf{x}, \mathbf{l}, \tau)$ nel regime a flusso singolo.

$$C(\mathbf{x}, \mathbf{l}, \tau) = i \frac{\mathbf{l} \cdot \mathbf{P}(\mathbf{x}, \tau)}{am} + \log g(\mathbf{x}, \tau) \quad (4.13)$$

Da qui possiamo vedere come, essendo $C(\mathbf{x}, \mathbf{l}, \tau)$ lineare in \mathbf{l} , tutti i cumulanti di ordine superiore a uno svaniscono.

Assumendo che la teoria microscopica soddisfi l'equazione di Vlasov, possiamo elaborare le equazioni corrispondenti per $M(\mathbf{x}, \mathbf{l}, \tau)$ e per $C(\mathbf{x}, \mathbf{l}, \tau)$.

L'equazione per $C(\mathbf{x}, \mathbf{l}, \tau)$ è data da:

$$\left[\frac{\partial}{\partial \tau} + \mathbf{H}l^j \frac{\partial}{\partial l^j} - i \frac{\partial^2}{\partial l^j \partial x^j} \right] C(\mathbf{x}, \mathbf{l}, \tau) - i \frac{\partial C(\mathbf{x}, \mathbf{l}, \tau)}{\partial l^j} \frac{\partial C(\mathbf{x}, \mathbf{l}, \tau)}{\partial x^j} = -il^j \nabla^j \phi(\mathbf{x}, \tau) \quad (4.14)$$

L'ultimo termine a primo membro rappresenta il termine responsabile degli accoppiamenti non lineari mentre il termine a secondo membro è il termine sorgente, il quale compare solo nell'equazione per la velocità, ovvero nell'equazione di Eulero, essendo lineare in \mathbf{l} .

La struttura dell'equazione e in particolar modo il termine non lineare, fanno sì che l'equazione per $C(\mathbf{x}, \mathbf{l}, \tau)$ sia un punto fisso.

Cosa significa tutto ciò? I termini non lineari in \mathbf{l} , corrispondenti alla dispersione di velocità e ai momenti di ordine superiore, non vengono generati a meno che non siano presenti inizialmente.

Partendo dalla funzione di distribuzione coarse-grained:

$$\bar{f}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \tau) \equiv \frac{1}{V} \int d^3 y \mathbf{W} \left[\left| \frac{\mathbf{y}}{L} \right| \right] f_K(\mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{p}, \tau) \quad (4.15)$$

Possiamo definire il momento coarse-grained che genera il funzionale:

$$\bar{M}(\mathbf{x}, \mathbf{l}, \tau) = \int d^3 p e^{i \frac{\mathbf{l} \cdot \mathbf{p}}{ma}} \bar{f}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \tau) = \frac{1}{V} \int d^3 y \mathbf{W} \left[\left| \frac{\mathbf{y}}{L} \right| \right] M(\mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{l}, \tau) \quad (4.16)$$

La relazione tra i cumulanti è dunque:

$$\bar{C}(\mathbf{x}, \mathbf{l}, \tau) = \log \left[\frac{1}{V} \int d^3 y \mathbf{W} \left[\left| \frac{\mathbf{y}}{L} \right| \right] \exp [C(\mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{l}, \tau)] \right] \quad (4.17)$$

Dalle cui derivate avremo i cumulanti mediati:

$$\bar{C}(\mathbf{x}, \mathbf{l} = 0, \tau) = \log[\bar{n}(\mathbf{x}, \tau)] \quad (4.18)$$

$$-i \left. \frac{\partial \bar{C}(\mathbf{x}, \mathbf{l}, \tau)}{\partial l_j} \right|_{l=0} = \bar{v}^j(\mathbf{x}, \tau) \quad (4.19)$$

$$(-i)^2 \left. \frac{\partial^2 \bar{C}(\mathbf{x}, \mathbf{l}, \tau)}{\partial l_j \partial l_k} \right|_{l=0} = \sigma^{jk}(\mathbf{x}, \tau) \quad (4.20)$$

E così via.

Dalle equazioni per $C(\mathbf{x}, \mathbf{l}, \tau)$ e per $\bar{C}(\mathbf{x}, \mathbf{l}, \tau)$, possiamo determinare l'espressione per i cumulanti coarse-grained che generano funzionale quando la teoria microscopica è nel regime a flusso singolo.

$$\bar{C}(\mathbf{x}, \mathbf{l}, \tau) = \log \left[\frac{1}{V} \int d^3 y \mathbf{W} \left[\left| \frac{\mathbf{y}}{L} \right| \right] g(\mathbf{x} + \mathbf{y}, \tau) \exp \left[i \frac{\mathbf{l} \cdot \mathbf{P}(\mathbf{x} + \mathbf{y}, \tau)}{ma} \right] \right] \quad (4.21)$$

Si nota che, se il momento della particella non è uniforme all'interno del volume di coarse-graining, tutti gli ordini in \mathbf{l} sono presenti in $\bar{C}(\mathbf{x}, \mathbf{l}, \tau)$ e quindi tutti i cumulanti coarse-grained non svaniscono, nonostante la teoria microscopica sia nel regime a flusso singolo.

L'equazione di evoluzione per $\bar{C}(\mathbf{x}, \mathbf{l}, \tau)$ può essere derivata utilizzando l'equazione di $C(\mathbf{x}, \mathbf{l}, \tau)$:

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial}{\partial \tau} + \mathbf{H} l^j \frac{\partial}{\partial l^j} - i \frac{\partial^2}{\partial l^j \partial x^j} \right] \bar{C}(\mathbf{x}, \mathbf{l}, \tau) - i \frac{\partial \bar{C}(\mathbf{x}, \mathbf{l}, \tau)}{\partial l^j} \frac{\partial \bar{C}(\mathbf{x}, \mathbf{l}, \tau)}{\partial x^j} = \\ - i l^j \nabla^j \bar{\phi}(\mathbf{x}, \tau) + \frac{1}{V} \int d^3 y \mathbf{W} \left[\left| \frac{\mathbf{y}}{L} \right| \right] e^{\delta C(\mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{l}, \tau)} \nabla_{\mathbf{x} + \mathbf{y}}^j \delta \phi(\mathbf{x} + \mathbf{y}, \tau) \end{aligned} \quad (4.22)$$

Prendendo le derivate di tale equazione rispetto ad \mathbf{l} troviamo le equazioni di Continuità, della velocità e della dispersione di velocità calcolate nel capitolo 2.

Il secondo termine del membro di destra della 4.22 contiene tutti gli ordini in \mathbf{l} fino a quando la teoria microscopica si trova in regime a flusso singolo, a condizione che $g(\mathbf{x}, \tau)$ e $\mathbf{P}(\mathbf{x}, \tau)$ non siano costanti nel volume V di coarse-graining, e perciò esso rappresenta un termine sorgente per tutti i cumulanti di ordine maggiore o uguale a uno.

Si noti che l'equazione per $\bar{C}(\mathbf{x}, \mathbf{l}, \tau)$, a differenza di quella per $C(\mathbf{x}, \mathbf{l}, \tau)$, non è chiusa poiché richiede input dalle dinamiche microscopiche codificate in δC e $\delta \phi$, le quali appaiono nel termine sorgente.

Abbiamo inoltre che:

$$\delta C(\mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{l}, \tau) \equiv C(\mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{l}, \tau) - \bar{C}(\mathbf{x}, \mathbf{l}, \tau) \quad (4.23)$$

Da qui possiamo dunque capire come l'equazione per δC possa essere ottenuta sottraendo l'equazione 4.22 dall'equazione 4.14:

$$\begin{aligned}
& \left[\frac{\partial}{\partial \tau} + \mathbf{H}l^j \frac{\partial}{\partial l^j} - i \frac{\partial^2}{\partial l^j \partial x^j} \right] \delta C(\mathbf{x}, \mathbf{l}, \tau) - i \frac{\partial \delta C(\mathbf{x}, \mathbf{l}, \tau)}{\partial l^j} \frac{\partial \delta C(\mathbf{x}, \mathbf{l}, \tau)}{\partial x^j} + \\
& - i \frac{\partial \delta C(\mathbf{x}, \mathbf{l}, \tau)}{\partial l^j} \frac{\partial \bar{C}(\mathbf{x}, \mathbf{l}, \tau)}{\partial x^j} - i \frac{\partial \bar{C}(\mathbf{x}, \mathbf{l}, \tau)}{\partial l^j} \frac{\partial \delta C(\mathbf{x}, \mathbf{l}, \tau)}{\partial x^j} = \\
& - il^j \left(\nabla^j \delta \phi(\mathbf{x}, \tau) - \frac{1}{V} \int d^3 y \mathbf{W} \left[\left| \frac{\mathbf{y}}{L} \right| \right] e^{\delta C(\mathbf{x}+\mathbf{y}, \mathbf{l}, \tau)} \nabla_{\mathbf{x}+\mathbf{y}}^j \delta \phi(\mathbf{x} + \mathbf{y}, \tau) \right)
\end{aligned} \tag{4.24}$$

L'equazione 4.24, assieme all'equazione 4.22 e unita anche a quella di Poisson per $\bar{\phi}$ e $\delta\phi$, formano un sistema chiuso che descrive la stessa fisica dell'equazione per $C(\mathbf{x}, \mathbf{l}, \tau)$.

Tuttavia la scissione di $C(\mathbf{x}, \mathbf{l}, \tau)$ in una parte coarse-grained, $\bar{C}(\mathbf{x}, \mathbf{l}, \tau)$, e una fluttuazione δC , suggerisce di trattarli in modo differente, usando la teoria perturbativa per la prima e misurando l'ultima con le simulazioni ad N-corpi.

Conclusioni

All'interno di questa Tesi sono state studiate le perturbazioni cosmologiche coarse-grained, attraverso le equazioni di Continuità, Eulero e Poisson, analizzando le stesse a livello perturbativo e scoprendo la presenza di termini extra non presenti nell'equazione di Eulero, dovuti al processo di fine-graining.

E' stato utilizzato un metodo perturbativo partendo dalle equazioni del fluido per giungere infine all'equazione di Schrodinger.

Per arrivare all'equazione di Schrodinger è stata utilizzata la trasformata di Madelung, il quale attua il ragionamento contrario, ovvero partire dall'equazione di Schrödinger per giungere infine alle equazioni del fluido.

Le equazioni di Madelung e di Schrödinger non sono necessariamente equivalenti, si consiglia infatti di non utilizzare l'equazione di Madelung in sostituzione a quella di Schrödinger, in quanto l'equazione di Madelung non fornisce tutte le soluzioni, o in alternativa, restituisce soluzioni sbagliate.

Tramite l'approssimazione di Zel'dovich si è giunti all'equazione di Bernoulli, la quale presenta termini extra rispetto alla classica equazione in quanto vi è la presenza del termine vorticoso t .

Mentre la Teoria Perturbativa Euleriana al primo ordine permette di esaminare il regime lineare nella formazione di strutture su grande scala, l'approssimazione di Zel'dovich dà una soluzione esatta al sistema in una dimensione.

Per entrambe le teorie vi sono però degli ostacoli:

- La Teoria Perturbativa Euleriana non garantisce un valore positivo del campo di densità ovunque.
- L'approssimazione di Zel'dovich predice una singolarità dove la densità diventa infinita.

Bibliografia

- [1] S. Matarrese. Notes on gravitational instability, 2006.
- [2] M. Pietroni, G. Mangano, N. Saviano, and M. Viel. Coarse-grained cosmological perturbation theory, 2012.
- [3] A. Kalaja. Gravitational instability via schrödinger equation, 2015/2016.
- [4] Cora Uhlemann, Michael Kopp, and Thomas Haugg. Schrödinger method as n-body double and uv completion of dust, 2014.
- [5] Michael Kopp, Kyriakos Vattis, and Constantinos Skordis. Solving the vlasov equation in two spatial dimensions with the schrödinger method, 2017.
- [6] Sabino Matarrese, Francesco Lucchin, Lauro Moscardini, and Diego Saez. A frozen-flow approximation to the evolution of large-scale structures in the universe, 1992.
- [7] Hsi-Yu Schive, Tzihong Chiueh, and Tom Broadhurst. Cosmic structure as the quantum interference of a coherent dark wave, 2014.
- [8] Cora Uhlemann and Michael Kopp. Coarse-grained cosmological perturbation theory: Stirring up the dust model, 2015.