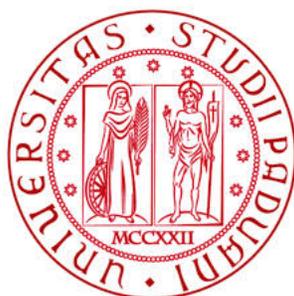


UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA



DIPARTIMENTO DI FISICA ED ASTRONOMIA “GALILEO
GALILEI”
CORSO DI LAUREA IN FISICA

Effetti della dimensionalità nella termodinamica dei gas quantistici

Laureando:
MARCO ROSSIGNOLO

Relatore:
Ch.mo Prof. LUCA
SALASNICH

Anno accademico 2014/2015

Indice

1	Introduzione	1
1.1	Numero di particelle	3
1.2	Densità di energia	4
1.2.1	Funzioni di Fermi e di Bose	5
1.3	Confinamento in un box	5
1.3.1	Densità spaziale	6
1.4	Confinamento in potenziale armonico	7
1.4.1	Densità di energia	7
1.4.2	Densità ed Energia di Fermi	8
1.4.3	Densità e BEC	10
2	Doppia buca quasi-unidimensionale	13
2.1	Introduzione	13
2.2	Densità di stati di energia	14
2.3	Fermioni	16
2.3.1	Densità temperatura finita	16
2.3.2	Densità ed Energia di Fermi	18
2.4	Bosoni	20
2.4.1	Densità a temperatura finita	20
2.4.2	BEC	20
3	Toro quasi-bidimensionale	23
3.1	Introduzione	23
3.2	Densità di energia	24
3.3	Fermioni	25
3.3.1	Densità a temperatura finita	25
3.3.2	Densità ed Energia di Fermi	27
3.4	Bosoni	29
3.4.1	Densità a temperatura finita	29
3.4.2	BEC	29

4 Gas relativistico	31
4.1 Introduzione	31
4.2 Limite non relativistico	31
4.3 Limite ultra relativistico	35
Appendice A Funzioni ipergeometriche	37
Appendice B Risoluzione integrale	39
Appendice C La funzione di Bessel Modificata	41
Appendice D Discussione di una serie	43
Appendice E La funzione degli Errori	45
Appendice F La funzione di Tricomi	47

Capitolo 1

Introduzione

Lo studio teorico della condensazione di Bose Einstein risale al 1924 ad opera dei due citati fisici. Tale teoria afferma che dato un sistema di particelle non interagenti a numero fissato, seguenti la statistica di Bose-Einstein, esiste una temperatura critica di transizione al di sotto della quale, una frazione finita di bosoni si pone in uno stato di particella singola, che può essere descritto da una funzione d'onda macroscopica [2]. Sebbene lo studio teorico risalga agli anni '30, i primi tentativi di riprodurre il condensato si fanno risalire agli anni '80 quando presero in esame l'atomo di idrogeno. Gli scienziati all'epoca furono molto vicini nell'osservare il BEC (condensato di Bose Einstein) ma con la severa limitazione di aver ottenuto una ricombinazione degli atomi in forma molecolare.

Sempre negli anni ottanta lo sviluppo di metodologie basate sull'uso dei laser e sul trapping magnetico si sono rivelate fondamentali poiché una combinazione del loro uso ha permesso finalmente di realizzare condensazione di Bose. Perché ciò avvenisse son stati scelti atomi alcalini: la possibilità di eccitare la loro transizione tramite i laser disponibili ed in particolare la favorevole struttura dei livelli energetici hanno reso possibile avere BEC.

Nel 1995 una pietra miliare è stata posta dagli esperimenti al JILA e, separatamente, al MIT. La scelta degli elementi su cui condurre l'esperimento ricadde sul rubidio e sul sodio: gli atomi venivano confinati in una trappola magnetica e questa veniva successivamente spenta in modo da osservare attraverso misurazioni ottiche l'espansione dei gas oltre il potenziale di confinamento. I risultati descritti dalle misurazioni ottiche rappresentavano un rilevante picco nella velocità di distribuzione sotto una determinata soglia critica. Questi risultati, riscontrati poi anche nei vapori di Litio, sembrano poter essere interpretati come evidenze della condensazione di Bose-Einstein. In quegli anni inoltre sono state iniziate nuove ricerche sui vapori di Cesio, Potassio ed Elio [3].

La sostanziale differenza con analoghe trasformazioni di altri sistemi come ad esempio l'elio superfluido è nella scala in cui si verificano le variazioni di densità: mentre per l'elio superfluido gli effetti della disomogeneità del sistema è misurabile su una scala microscopica fissata dalla distanza interatomica, per il rubidio e il sodio le forze repulsive allargano la dimensione del sistema fino ad una scala quasi macroscopica, tanto da poter essere misurati con metodi ottici.

Una prima importante considerazione che nasce dalla caratteristica disomogeneità di questi gas è che il BEC può essere osservato non soltanto nello spazio dei momenti ma anche in quello delle coordinate. Ciò ha aperto nuove frontiere di analisi del fenomeno sia dal punto di vista sperimentale che teorico e fornisce nuovi metodi per studiare fenomeni di interferenza e frequenza di eccitazione collettive. Altro importante aspetto consequenziale alla disomogeneità di questi sistemi è il ruolo giocato dalle interazioni a due corpi [3]. La natura disomogenea del sistema, se da un lato rende la comprensione di problemi a molti corpi affatto banale, dall'altro permette di descrivere e osservare il fenomeno di bec con singolare chiarezza.

Sempre a partire dalla fine degli anni '90 sempre più studi sono stati condotti sull'argomento, volti sia a nuove sperimentazioni che a interpretazioni di fenomeni di BEC già noti. Di particolare interesse gli studi condotti sulla teoria a molti corpi dei gas di Bose interagenti in presenza di confinamento armonico, analizzabile a partire dalle assunzioni della teoria di Gross-Pitaevskii facendo uso di concetti provenienti da diverse aree della fisica, come la meccanica statistica, la fisica atomica, l'ottica quantistica. In un primo momento le ricerche si concentrarono sull'applicazione della teoria di Gross-Pitaevskii sui gas debolmente interagenti in presenza di condizioni di intrappolamento, permettendo di misurare ad esempio i profili di densità, la struttura dei vortici o ancora le oscillazioni collettive.

Successivamente l'attenzione dei fisici si è concentrata sullo studio dei gas di Fermi [6]. Nonostante l'ordine della temperatura perché avvenga la degenerazione quantica sia lo stesso le differenze nelle conseguenze fisiche sono significative: nel caso dei bosoni ci sono effetti quantistici statistici associati alla transizione verso la fase condensata di Bose Einstein mentre invece nei gas di Fermi vi è fase superfluida solo in presenza di interazioni. Altra notevole differenza tra i gas di Bose e quello di Fermi è nel processo di collisione. Nei gas di Fermi lo s-scattering è inibito a causa del principio di esclusione di Pauli, con conseguenze non trascurabili sul meccanismo di raffreddamento e rendendo difficile ottenere basse temperature nei gas di Fermi. Due modalità hanno permesso di superare il problema del gas di Fermi: usando due differenti componenti di spin di esso oppure combinandolo con una componente di gas di Bose per favorire il raffreddamento. I primi risultati nella degenerazione quantica dei gas di Fermi sono stati ottenuti da De Marco e Jin al JILA nel 1999, grazie all'utilizzo del primo metodo menzionato.

In questo lavoro inizialmente si ripercorrerà inizialmente l'articolo [7] illustrandone i conti essenziali ed i risultati analitici utili nel corso dell'elaborato.

Nel secondo capitolo si affronta il problema di un gas confinato in una doppia buca quasi unidimensionale le cui prove sperimentali si hanno nel lavoro [5], calcolando inizialmente le densità spaziali e densità di momento per i gas di Fermi e di Bose giungendo all'energia di Fermi per i fermioni e dimostrando che in questo non posso avere condensato nel sistema puramente unidimensionale.

Nel terzo capitolo, motivati dai recenti esperimenti [4], si considererà un toro quasi bidimensionale riproducendone come nella seconda i risultati interessanti per la termodinamica dei gas quantistici.

Nell'ultima parte si tratterà un gas relativistico D dimensionale confinato in un potenziale armonico, considerandone il limite non relativistico al secondo ordine ed il limite ultra relativistico. Nel primo caso ritroverò la condizione per avere BEC non relativistica già riportata in [7], nel secondo caso si troverà invece una nuova relazione.

1.1 Numero di particelle

In questa sezione generalizzo lo studio della termodinamica ad un gas D-dimensionale di fermioni o bosoni identici non interagenti confinato tramite un potenziale armonico. Il numero di particelle nello stato α con energia ϵ_α è dato da :

$$N_\alpha = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_\alpha - \mu)} \pm 1}$$

Dove i segni + e - sono legati rispettivamente alla ai fermioni e ai bosoni, μ è il potenziale chimico e $\beta = 1/K_B T$. In generale il numero di particelle del sistema è dato dalla somma del numero su tutti gli stati:

$$N = \sum_{\alpha} N_\alpha$$

Questa condizione fissa il potenziale chimico $\mu(\beta, N)$. Nel caso dei Fermioni esso non ha limitazioni, quindi nel caso di temperatura zero prenderà il valore dell'energia di Fermi E_F . Nel caso bosonico noto che $n(\bar{r}, \bar{p})$ potrebbe assumere anche valori negativi. Per evitare ciò $\mu \leq \epsilon_0$ con ϵ_0 l'energia di dello stato base di particella singola. Nel limite $\mu \rightarrow \epsilon_0$ $n_0 \rightarrow N$ per la conservazione del numero di particelle.

Nel limite semiclassico considero un continuo di stati di energia ϵ_α tali per cui $\epsilon(\bar{r}, \bar{p}) = \sum_{\alpha} \epsilon_\alpha$ dove $\bar{r} = (r_1, \dots, r_D)$ e $\bar{p} = (p_1, \dots, p_D)$.

Nel limite $V \rightarrow \infty$ la sommatoria diventa un integrale

$$\sum_{\bar{n}} \rightarrow \frac{1}{(2\pi\hbar)^D} \int d^D \bar{r} d^D \bar{p}$$

Lo stato di particella singola viene descritto come $n(\bar{r}, \bar{p}) = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_\alpha - \mu)} \pm 1}$ Ho che $N = \int \frac{d^D \bar{r} d^D \bar{p}}{(2\pi\hbar)^D} n(\bar{r}, \bar{p}) = \int d^D \bar{p} \bar{n}(\bar{p}) = \int d^D \bar{r} \bar{n}(\bar{r})$ In generale se conosco gli stati del sistema il numero di particelle lo calcolo come

$$N = \int_0^{+\infty} d\epsilon \rho(\epsilon) \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_\alpha - \mu)} \pm 1}$$

dove $\rho(\epsilon) = \int \frac{d^D \bar{r} d^D \bar{p}}{(2\pi\hbar)^D} \delta(\epsilon - \epsilon(\bar{r}, \bar{p}))$ è la densità di stati di energia. Nella risoluzione degli integrali passerò in coordinate iper sferiche. S_D sarà la superficie unitaria D-dimensionale che risulta uguale a $S_D = \frac{2\pi^{D/2}}{\Gamma(D/2)}$.

1.2 Densità di energia

Come primo step eseguo il calcolo della densità di energia.

Scrivo tale quantità come :

$$\rho(\epsilon) = \int d^D \bar{r} \int \frac{d^D \bar{p}}{(2\pi\hbar)^D} \delta(\epsilon - \epsilon(\bar{r}, \bar{p}))$$

Procedo prima a calcolare:

$$\begin{aligned} A(\epsilon, \bar{r}) &:= \int \frac{d^D \bar{p}}{(2\pi\hbar)^D} \delta(\epsilon - \epsilon(\bar{r}, \bar{p})) \\ &= \frac{S_D}{(2\pi\hbar)^D} \int_0^{+\infty} dp p^{D-1} \delta(\epsilon - \epsilon(\bar{r}, \bar{p})) \\ &= \frac{S_D}{(2\pi\hbar)^D} \int_{-\infty}^{+\infty} dp \Theta(p) p^{D-1} \delta(\epsilon - \frac{p^2}{2m} - U(\bar{r})) \end{aligned}$$

dove ho allargato il dominio di integrazione aggiungendo all'integrando la funzione Theta.

Pongo

$$y(p) = \epsilon - \frac{p^2}{2m} - U(\bar{r})$$

dove $p_1 = \sqrt{2m(\epsilon - U(\bar{r}))}$ e $p_2 = -\sqrt{2m(\epsilon - U(\bar{r}))}$ valide se $\epsilon - U(\bar{r}) > 0$, inoltre

$$y'(p) = -\frac{p}{m}$$

Dunque applico la proprietà della δ

$$\begin{aligned} A(\epsilon, \bar{r}) &= \frac{S_D}{(2\pi\hbar)^D} \int_{-\infty}^{+\infty} dp \Theta(p) p^{D-1} \sum_{i=1}^2 \frac{\delta(p - p_i)}{y'(p_i)} \Theta(\epsilon - U(\bar{r})) \\ &= \frac{S_D}{(2\pi\hbar)^D} \frac{m}{\sqrt{2m} \sqrt{\epsilon - U(\bar{r})}} \left[\Theta(p_1) p_1^{D-1} + \Theta(p_2) p_2^{D-1} \right] \Theta(\epsilon - U(\bar{r})) \\ &= \frac{2\pi^{D/2}}{\Gamma(D)} \frac{1}{(2\pi\hbar)^{D/2}} m^{D/2} 2^{\frac{D-2}{2}} \bar{r} (\epsilon - U(\bar{r}))^{\frac{D-2}{2}} \Theta(\epsilon - U(\bar{r})) \end{aligned}$$

Il risultato dell'integrale dunque porge

$$A(\epsilon, \bar{r}) = \left(\frac{m}{2\pi\hbar^2} \right)^{D/2} \frac{1}{\Gamma(D/2)} (\epsilon - U(\bar{r}))^{\frac{D-2}{2}} \Theta(\epsilon - U(\bar{r})) \quad (1.1)$$

La densità di stati di energia risulta dunque essere:

$$\boxed{\rho(\epsilon) = \left(\frac{m}{2\pi\hbar^2} \right)^{D/2} \frac{1}{\Gamma(D/2)} \int d^D \bar{r} (\epsilon - U(\bar{r}))^{\frac{D-2}{2}} \Theta(\epsilon - U(\bar{r}))} \quad (1.2)$$

1.2.1 Funzioni di Fermi e di Bose

Definizione 1.2.1. Le funzioni di Fermi e di Bose si scrivono rispettivamente come:

$$f_n(z) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^{+\infty} dy \frac{ze^{-y}y^{n-1}}{1+ze^{-y}} \quad (1.3)$$

$$g_n(z) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^{+\infty} dy \frac{ze^{-y}y^{n-1}}{1-ze^{-y}} \quad (1.4)$$

Tuttavia mi risulterà in seguito utile esprimerle in termini di sommatoria. Dalla rappresentazione integrale della funzione di Fermi noto che il denominatore può essere riscritto come una serie geometrica, ovvero:

$$f_n(z) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^{+\infty} dy \sum_{i=0}^{\infty} ze^{-y}y^{n-1}(-ze^{-y})^i$$

Quindi riscaldando l'indice di sommatoria ed effettuando il cambio di variabile $t = iy$ ottengo:

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^{+\infty} dy \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^{i+2} z^{i+1} e^{-y(i+1)} y^{n-1} \\ &= \frac{1}{\Gamma(n)} \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i+1} \int_0^{+\infty} dy z^i e^{-iy} y^{n-1} \\ &= \frac{1}{\Gamma(n)} \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i+1} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{i} z^i e^{-t} \frac{t^{n-1}}{i^{n-1}} \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i+1} \frac{z^i}{i^n} \end{aligned}$$

Allora la funzione di Fermi in termini di sommatoria si scrive come:

$$f_n(z) = \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^i}{i^n} \quad (1.5)$$

In modo analogo si trova la funzione di Bose in termini di sommatoria:

$$g_n(z) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{z^i}{i^n} \quad (1.6)$$

1.3 Confinamento in un box

In questo paragrafo andrò a calcolare le densità per i gas di Fermi e di Bose rinchiusi idealmente in un box di volume V . Ricaverò inoltre l'energia di Fermi e temperatura di transizione per la fase di condensato.

1.3.1 Densità spaziale

La densità spaziale per un gas di Fermi a temperatura finita si calcola integrando sullo spazio dei momenti la distribuzione di particella singola. Dunque passando in coordinate sferiche ho che:

$$\begin{aligned} n(\bar{r}) &= \int \frac{d^D \bar{p}}{(2\pi\hbar)^D} \frac{1}{e^{\beta(p^2/2m + U(\bar{r}) - \mu)} + 1} \\ &= \frac{S_D}{(2\pi\hbar)^D} \int_0^\infty dp p^{D-1} \frac{e^{\beta(\mu - U(\bar{r}))} e^{\beta p^2/2m}}{1 + e^{\beta(\mu - U(\bar{r}))} e^{\beta p^2/2m}} \end{aligned}$$

Risolvo ora l'integrale:

$$\begin{aligned} A_1(\bar{r}) &:= \int_0^\infty dp p^{D-1} \frac{e^{\beta(\mu - U(\bar{r}))} e^{-\beta p^2/2m}}{1 + e^{\beta(\mu - U(\bar{r}))} e^{-\beta p^2/2m}} \\ &= \int_0^\infty dy \left(\frac{m}{\beta}\right) \left(\frac{2m}{\beta}\right)^{D/2-1} y^{D/2-1} \frac{z(\bar{r})e^{-y}}{1 + z(\bar{r})e^{-y}} \end{aligned}$$

dove ho effettuato il cambio di variabile $y = \beta \frac{p^2}{2m}$ e posto $z(\bar{r}) = e^{\beta(\mu - U(\bar{r}))}$. Ricordando la rappresentazione integrale della funzione di Fermi (1.3) ottengo :

$$A_1(\bar{r}) = 2^{D/2-1} \left(\frac{m}{\beta}\right) \Gamma(D/2) f_{D/2}(z(\bar{r}))$$

Dunque la densità spaziale a temperatura finita si scriverà come

$$\boxed{n(\bar{r}) = \left(\frac{m}{2\pi\hbar^2\beta}\right)^{D/2} f_{D/2}(e^{\beta(\mu - U(\bar{r}))})} \quad (1.7)$$

Nel limite di temperatura zero la densità spaziale per un gas di Fermi si calcola da

$$\begin{aligned} n(\bar{r}) &= \int \frac{d^D \bar{p}}{(2\pi\hbar)^D} \Theta(E_F - p^2/2m - U(\bar{r})) \\ &= \frac{S_D}{(2\pi\hbar)^D} \int_0^\infty dp p^{D-1} \Theta(E_F - p^2/2m - U(\bar{r})) \end{aligned}$$

dove nell'ultimo passaggio sono passato in coordinate sferiche. Vado dunque a risolvere l'integrale:

$$\begin{aligned} A_2(\bar{r}) &:= \int_0^\infty dp p^{D-1} \Theta(E_F - p^2/2m - U(\bar{r})) \\ &= \Theta(E_F - U(\bar{r})) \int_0^{\sqrt{2m(E_F - U(\bar{r}))}} dp p^{D-1} \\ &= \frac{1}{D} [2m(E_F - U(\bar{r}))]^{D/2} \Theta(E_F - U(\bar{r})) \end{aligned}$$

in cui ho applicato la condizione data dalla Theta ovvero $|p| \leq \sqrt{2m(E_F - U(\bar{r}))}$. La densità spaziale nel limite di temperatura zero è allora:

$$n(\bar{r}) = \left(\frac{m}{2\pi\hbar^2} \right)^{D/2} \frac{1}{\Gamma(D/2 + 1)} (E_F - U(\bar{r}))^{D/2} \Theta(E_F - U(\bar{r}))^{D/2} \quad (1.8)$$

La densità spaziale a temperatura finita per un gas di Bose Einstein si può ricavare in modo analogo a quanto fatto per il gas di Fermi ottenendo:

$$n(\bar{r}) = \left(\frac{m}{2\pi\hbar^2\beta} \right)^{D/2} g_{D/2}(e^{\beta(\mu - U(\bar{r}))}) \quad (1.9)$$

1.4 Confinamento in potenziale armonico

In generale si confina il gas tramite un potenziale di confinamento. Considero pertanto un potenziale armonico $U(\bar{r}) = Ar^n$.

1.4.1 Densità di energia

Comincio con il calcolo della densità di stati di energia integrando sullo spazio delle coordinate, ovvero risolvendo (1.2)

$$\rho(\epsilon) = \left(\frac{m}{2\pi\hbar^2} \right)^{D/2} \frac{1}{\Gamma(D/2)} \int d^D \bar{r} (\epsilon - Ar^n)^{\frac{D-2}{2}} \Theta(\epsilon - Ar^n)$$

vado dunque a risolvere l'integrale

$$\begin{aligned} B_1 &:= \int d^D \bar{r} (\epsilon - Ar^n)^{\frac{D-2}{2}} \Theta(\epsilon - Ar^n) \\ &= S_D \int_0^\infty dr r^{D-1} (\epsilon - Ar^n)^{D/2-1} \Theta(\epsilon - Ar^n) \\ &= S_D \int_0^{(\frac{\epsilon}{A})^{1/n}} dr r^{D-1} (\epsilon - Ar^n)^{D/2-1} \end{aligned}$$

dove sono passato in coordinate sferiche ed imposto la condizione della Theta ovvero $r \leq (\frac{\epsilon}{A})^{1/n}$. Ora effettuo il cambio di variabile $y = Ar^n$ e dal fatto che:

$$\int_0^\epsilon dy y^{D/n-1} (\epsilon - y)^{D/2-1} = \frac{\Gamma(D/2)\Gamma(D/n)}{\Gamma(D/2 + D/n)} \epsilon^{D/2+D/n-1} \quad (1.10)$$

ho che

$$B_1 = \frac{S_D}{n} \left(\frac{1}{A^{D/n}} \right) \frac{\Gamma(D/2)\Gamma(D/n)}{\Gamma(D/2 + D/n)} \epsilon^{D/2+D/n-1}$$

Dunque la densità di stati di energia è:

$$\rho(\epsilon) = \left(\frac{m}{2\hbar^2}\right)^{D/2} \left(\frac{1}{A}\right)^{D/n} \frac{\Gamma(D/n+1)}{\Gamma(D/2+D/n)\Gamma(D/2+1)} \epsilon^{D/2+D/n-1} \quad (1.11)$$

1.4.2 Densità ed Energia di Fermi

Procedo con il calcolo della densità nello spazio dei momenti a temperatura finita per un gas di Fermioni integrando nelle coordinate la distribuzione di particella singola:

$$\begin{aligned} n(\bar{p}) &= \int \frac{d^D \bar{r}}{(2\pi\hbar)^D} \frac{1}{e^{\beta(p^2/2m+Ar^n-\mu)+1}} \\ &= \frac{S_D}{(2\pi\hbar)^D} \int_0^\infty dr r^{D-1} \frac{z(\bar{p})e^{-\beta Ar^n}}{1+z(\bar{p})e^{-\beta Ar^n}} \end{aligned}$$

dove sono passato in coordinate sferiche e posto $z(\bar{p}) = e^{\beta(\mu-p^2/2m)}$. Ora risolvo l'integrale:

$$\begin{aligned} B_2 &:= \int_0^\infty dr r^{D-1} \frac{z(\bar{p})e^{-\beta Ar^n}}{1+z(\bar{p})e^{-\beta Ar^n}} \\ &= \frac{1}{n\beta A} \left(\frac{1}{\beta A}\right)^{D/n-1} \int_0^\infty dy y^{D/n-1} \frac{ze^{-y}}{1+ze^{-y}} \end{aligned}$$

dove ho effettuato il cambio di variabile $y = \beta Ar^n$. Ora ricordando la rappresentazione integrale della funzione di Fermi (1.3) ho che

$$B_2 = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{\beta A}\right)^{D/n} f_{D/n}(z)\Gamma(D/n)$$

Dunque la densità di momento si scrive come

$$n(\bar{p}) = \frac{1}{(2\hbar\sqrt{\pi})^D} \frac{\Gamma(D/n+1)}{\Gamma(D/2+1)} \left(\frac{1}{\beta A}\right)^{D/n} f_{D/n}(e^{\beta(\mu-p^2/2m)}) \quad (1.12)$$

Nel limite di temperatura zero devo invece risolvere:

$$n(\bar{p}) = \int \frac{d^D \bar{r}}{(2\pi\hbar)^D} \Theta(E_F - p^2/2m - Ar^n)$$

Andando dunque in coordinate sferiche e applicando la condizione imposta dalla Theta ovvero che $r \leq \left(\frac{E_f - p^2/2m}{A}\right)^{1/n} = r_f$ ottengo

$$\begin{aligned}
n(\bar{p}) &= \frac{S_D}{(2\pi\hbar)^D} \int_0^\infty dr r^{D-1} \Theta(E_F - p^2/2m - Ar^n) \\
&= \frac{S_D}{(2\pi\hbar)^D} \Theta(E_F - p^2/2m) \int_0^{r_f} dr r^{D-1} \Big|_{r_f = \left(\frac{E_F - p^2/2m}{A}\right)^{1/n}} \\
&= \frac{\pi^{D/2}}{(2\hbar\pi)^D} \frac{D}{\Gamma(D/2 + 1)} \Theta(E_F - p^2/2m) \frac{1}{D} \left(\frac{E_F - p^2/2m}{A}\right)^{D/n}
\end{aligned}$$

Dunque

$$\boxed{n(\bar{p}) = \frac{1}{(2\hbar\sqrt{\pi})^D} \frac{1}{\Gamma(D/2 + 1)} \left(\frac{1}{A}\right)^{D/n} (E_F - p^2/2m)^{D/n} \Theta(E_F - p^2/2m)} \quad (1.13)$$

Integrando ora sullo spazio dei momenti trovo il numero di particelle in funzione dell'energia di Fermi.

$$\begin{aligned}
N &= \int d^D \bar{p} n(\bar{p}) \\
&= \int d^D \bar{p} \frac{1}{(2\hbar\sqrt{\pi})^D} \frac{1}{\Gamma(D/2 + 1)} \frac{1}{A^{D/n}} (E_F - p^2/2m)^{D/n} \Theta(E_F - p^2/2m) \\
&= \frac{S_D}{(2\hbar\sqrt{\pi})^D} \frac{1}{\Gamma(D/2 + 1)} \frac{1}{A^{D/n}} \int_0^\infty dp p^{D-1} (E_F - p^2/2m)^{D/n} \Theta(E_F - p^2/2m)
\end{aligned}$$

dove sono passato in coordinate sferiche. Risolvo allora il seguente integrale

$$\begin{aligned}
B_2 &:= \int_0^\infty dp p^{D-1} (E_F - p^2/2m)^{D/n} \Theta(E_F - p^2/2m) \\
&= m(2m)^{D/2-1} \int_0^{E_F} dx x^{D/2-1} (E_F - x)^{D/n}
\end{aligned}$$

in questo passaggio ho cambiato variabile $x = \frac{p^2}{2m}$ ed applicato la condizione della Theta. Come ultimo passaggio è sufficiente ricordare (1.10) ho

$$B_2 = m^{D/2} 2^{D/2-1} \frac{\Gamma(D/2)\Gamma(D/n + 1)}{\Gamma(D/2 + D/n + 1)} E_F^{D/2+D/n}$$

ed infine

$$N = \left(\frac{m}{2\hbar^2}\right)^{D/2} \frac{1}{A^{D/n}} \frac{\Gamma(D/n + 1)}{\Gamma(D/2 + 1)\Gamma(D/2 + D/n + 1)} E_F^{D/2 + D/n}$$

Invertendo ottengo l'energia di Fermi:

$$E_F = \left[\left(\frac{2\hbar^2}{m}\right)^{D/2} A^{D/n} \frac{\Gamma(D/2 + 1)}{\Gamma(D/n + 1)} \Gamma(D/2 + D/n + 1) N \right]^{\frac{1}{D/2 + D/n}} \quad (1.14)$$

1.4.3 Densità e BEC

La densità di momento per un gas di bosoni a temperatura finita si ricava in modo analogo a quanto visto per i fermioni ottenendo:

$$n(\vec{p}) = \frac{1}{(2\hbar\sqrt{\pi})^D} \frac{\Gamma(D/n + 1)}{\Gamma(D/2 + 1)} \left(\frac{1}{\beta A}\right)^{D/n} g_{D/n}(e^{\beta(\mu - p^2/2m)}) \quad (1.15)$$

Per trovare la temperatura di transizione in funzione del numero di particelle integro la densità appena trovata nello spazio dei momenti e porre il potenziale chimico μ uguale a zero, ovvero:

$$\begin{aligned} N &= \int d^D \vec{p} n(\vec{p}) \\ &= \int d^D \vec{p} \frac{1}{(2\hbar\sqrt{\pi})^D} \frac{\Gamma(D/n + 1)}{\Gamma(D/2 + 1)} \left(\frac{1}{\beta A}\right)^{D/n} g_{D/n}(e^{\beta(\mu - p^2/2m)}) \\ &= \frac{1}{(2\hbar\sqrt{\pi})^D} \frac{\Gamma(D/n + 1)}{\Gamma(D/2 + 1)} \left(\frac{1}{\beta A}\right)^{D/n} S_D \int_0^\infty dp \sum_{i=1}^\infty \frac{1}{i^{D/n}} p^{D-1} e^{-i\beta p^2/2m} \end{aligned}$$

dove sono passato in coordinate sferiche ed espresso la funzione di Bose in termini della sommatoria (1.6). Risolvo ora il seguente integrale:

$$\begin{aligned} B_3 &:= \int_0^\infty dp \sum_{i=1}^\infty \frac{1}{i^{D/n}} p^{D-1} e^{-i\beta p^2/2m} \\ &= \sum_{i=1}^\infty \frac{1}{i^{D/n}} \frac{m}{i\beta} \left(\frac{2m}{i\beta}\right)^{D/2-1} \int_0^\infty dx x^{D/2-1} e^{-x} \\ &= \sum_{i=1}^\infty \frac{1}{i^{D/n + D/2}} 2^{D/2-1} \left(\frac{m}{\beta}\right)^{D/2} \Gamma(D/2) \end{aligned}$$

dove ho effettuato il cambio di variabile $x = i\beta \frac{p^2}{2m}$ e ricordato che

$$\int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} = \Gamma(z).$$

All'interno della sommatoria riconosco la ζ di Riemann:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^p} = \zeta(p)$$

con $p > 1$. Dunque:

$$B_3 = \zeta(D/2 + D/n) 2^{D/2-1} \left(\frac{m}{\beta}\right)^{D/2} \Gamma(D/2)$$

Infine

$$N = \left(\frac{m}{2\hbar^2}\right)^{D/2} \frac{\Gamma(D/n + 1)}{\Gamma(D/2 + 1)} \left(\frac{1}{A}\right)^{D/n} \zeta(D/2 + D/n) \left(\frac{1}{\beta}\right)^{D/n+D/2}$$

e la temperatura di transizione, ottenuta invertendo tale relazione,

$$\boxed{KT_B = \left[\left(\frac{2\hbar^2}{m}\right)^{D/2} A^{D/n} \frac{\Gamma(D/2 + 1)}{\Gamma(D/n + 1)} \frac{1}{\zeta(D/2 + D/n)} N \right]^{\frac{1}{D/2+D/n}}} \quad (1.16)$$

Al di sopra della temperatura di T_B la frazione di condensato è nulla e le particelle si distribuiscono equamente al di fuori dei livelli con $\bar{p} = 0$. Al di sotto della temperatura di transizione avrà un numero non nullo di particelle che occupano lo stato base. Ciò viene riassunto dal sistema:

$$\begin{aligned} N &= N(T_B) \\ N &= N_0 + N_T \end{aligned}$$

dove $T \leq T_B$. Quindi

$$\frac{N_0}{N} = 1 - \left(\frac{T}{T_B}\right)^{D/2+D/n}$$

Affinché la temperatura non sia zero l'argomento della funzione ζ deve essere maggiore di 1. Ciò implica la seguente condizione per avere condensato di Bose Einstein per un gas di bosoni confinato in un potenziale armonico:

$$\boxed{\frac{D}{2} + \frac{D}{n} > 1} \quad (1.17)$$

Tale condizione è valida nel regime non relativistico. Nell'ultimo paragrafo si dimostrerà che essa non sarà più valida nel regime ultrarelativistico.

Capitolo 2

Doppia buca quasi-unidimensionale

2.1 Introduzione

Considero un gas quantistico confinato in un potenziale armonico lungo le direzioni x, y e in una doppia buca lungo la direzione z . Esso avrà dunque un potenziale totale del tipo

$$W(z) = V(x, y) + W(z)$$

dove $V(x, y)$ è il potenziale armonico del tipo

$$V(x, y) = \frac{1}{2}m\omega_x^2x^2 + \frac{1}{2}m\omega_y^2y^2 \quad (2.1)$$

$$= \frac{1}{2}m\omega_\perp^2(x^2 + y^2) \quad (2.2)$$

dove ho supposto che $\omega_x = \omega_y = \omega_\perp$, e $W(z)$ è il potenziale della doppia buca

$$W(z) = \frac{\lambda}{z_0^4}(z^2 - z_0^2)^2 \quad (2.3)$$

con λ l'altezza della buca e $\pm z_0$ la posizione dei minimi.

L'energia totale è data da

$$E_{n_x n_y n_z} = E_{n_x n_y} + \epsilon_{n_z} \quad (2.4)$$

dove

$$E_{n_x n_y} = \hbar\omega_\perp(n_x + n_y + 1) \quad (2.5)$$

L'energia alla stato base sarà allora:

$$\begin{aligned} E_{00n_z} &= E_{00} + \epsilon_{n_z} \\ &= \hbar\omega_\perp + p_z^2/2m + W(z) \end{aligned}$$

Nell'ipotesi $\hbar\omega_{\perp} \gg K_B T$ escludo l'energia di singola particella lungo gli assi x,y. Inoltre nel limite semi classico posso sostituire la sommatoria con l'integrale. Queste considerazioni portano a scrivere il numero di particelle come:

$$\begin{aligned}
N &= \sum_{\alpha} N_{\alpha} \\
&= \sum_{n_z n_y n_x} N_{n_z n_y n_x} \\
&\simeq \sum_{n_z} N_{00n_z} \\
&= \sum_{n_z} \frac{1}{e^{\beta(\hbar\omega_{\perp} + p_z^2/2m + W(z) - \mu)} \pm 1} \\
&= \int dn_z \frac{1}{e^{\beta(\hbar\omega_{\perp} + p_z^2/2m + W(z) - \mu)} \pm 1} \\
&= \int \frac{dp_z dz}{2\pi\hbar} \frac{1}{e^{\beta(\hbar\omega_{\perp} + p_z^2/2m + W(z) - \mu)} \pm 1}
\end{aligned}$$

2.2 Densità di stati di energia

La densità di stati di energia si calcola come:

$$\rho(\epsilon) = \int \frac{dp_z dz}{2\pi\hbar} \delta(\epsilon - \epsilon(\bar{r}, \bar{p}))$$

Suddivido la formula nel modo seguente

$$\rho(\epsilon) = \frac{1}{2\pi\hbar} A_2(A_1(z))$$

dove

$$A_1(z) := \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp_z}{2\pi\hbar} \delta(\epsilon - \epsilon(\bar{r}, \bar{p}))$$

e

$$A_2 := \int_{-\infty}^{+\infty} dz A_1(z)$$

Dalla formula generale (1.1), con D=1, ho che:

$$A_1 = \left(\frac{m}{2\pi^2\hbar^2}\right)^{1/2} (\epsilon - \hbar\omega_{\perp} - W(z))^{-1/2} \Theta(\epsilon - \hbar\omega_{\perp} - W(z))$$

dunque per il secondo integrale vado a risolvere:

$$\begin{aligned}
A_2 &= \left(\frac{m}{2\pi^2 \hbar^2} \right)^{1/2} \int dz (\epsilon - \hbar\omega_{\perp} - W(z))^{-1/2} \Theta(\epsilon - \hbar\omega_{\perp} - W(z)) \\
&= \left(\frac{m}{2\pi^2 \hbar^2} \right)^{1/2} B
\end{aligned}$$

dove ho posto

$$B := \int_{-\infty}^{+\infty} dz (\alpha - W(z))^{-1/2} \Theta(\alpha - W(z))$$

e $\alpha = \epsilon - \hbar\omega_{\perp}$.

Risolvero allora l'integrale:

$$\begin{aligned}
B &= \int_{-\infty}^{+\infty} dz \left(\alpha - \frac{\lambda}{z_0^4} (z^2 - z_0^2)^2 \right)^{-1/2} \Theta \left(\alpha - \frac{\lambda}{z_0^4} (z^2 - z_0^2)^2 \right) \\
&= 2 \int_0^{\infty} dz \left(\alpha - \frac{\lambda}{z_0^4} (z^2 - z_0^2)^2 \right)^{-1/2} \Theta \left(\alpha - \frac{\lambda}{z_0^4} (z^2 - z_0^2)^2 \right) \\
&= \frac{z_0}{\lambda^{1/4}} \int_{-\sqrt{\lambda}}^{\infty} dt \frac{(\alpha - t^2)^{-1/2}}{(t + \sqrt{\lambda})^{1/2}} \Theta(\alpha - t^2)
\end{aligned}$$

Dove ho sfruttato la parità dell'integrando ed effettuato il cambio di variabile $t = \frac{\sqrt{\lambda}}{z_0^2} (z^2 - z_0^2)$.

La condizione della Theta impone $\alpha - t^2 \geq 0$ ovvero $|t| \leq \sqrt{\alpha} =: t_0$

Questo porta infine a scrivere

$$B = \frac{z_0}{\lambda^{1/4}} [C_1 - \Theta(t_0 - \sqrt{\lambda}) C_2] \Theta(t_0)$$

dove

$$C_1 := \int_{-t_0}^{+t_0} dt \sqrt{\frac{1}{(\alpha - t^2)(\sqrt{\lambda} + t)}}$$

e

$$C_2 := \int_{-t_0}^{-\sqrt{\lambda}} dt \sqrt{\frac{1}{(\alpha - t^2)(\sqrt{\lambda} + t)}}$$

Ricordo che avevo posto

$$\rho(\epsilon) = \frac{\sqrt{2m}}{2\pi\hbar} B$$

allora sostituendo ottengo la densità di stati di energia:

$$\boxed{\rho(\epsilon) = \left(\frac{m}{2\pi^2 \hbar^2} \right)^{1/2} \frac{z_0}{\lambda^{1/4}} [C_1 - \Theta(\epsilon - \hbar\omega_{\perp} - \lambda) C_2] \Theta(\epsilon - \hbar\omega_{\perp})} \quad (2.6)$$

2.3 Fermioni

In questo paragrafo vado a calcolare le densità a temperatura finita e a temperatura zero trovando infine una relazione tra il numero di particelle e l'energia di Fermi.

2.3.1 Densità temperatura finita

La densità spaziale per un gas di Fermi a temperatura finita si ottiene utilizzando la formula (1.7) nel caso $D = 1$. Dunque

$$n(z) = \left(\frac{m}{2\pi\hbar^2\beta} \right)^{1/2} f_{1/2}(e^{\beta(\mu - \hbar\omega_\perp - W(z))}) \quad (2.7)$$

La densità di momento si trova integrando sullo spazio delle coordinate lo stato di particella singola, ovvero

$$n(p_z) = \int dz \frac{1}{e^{\beta\left(\frac{p_z^2}{2m} + \hbar\omega_\perp + W(z) - \mu\right)} + 1}$$

Definisco le seguenti funzioni:

$$f(z) := e^{-\beta \frac{\lambda}{z_0^4} (z^4 - 2z_0^2 z^2)}$$

$$k(p_z) := e^{-\beta\left(\frac{p_z^2}{2m} + \hbar\omega_\perp + \lambda - \mu\right)}$$

Posso dunque scrivere la mia densità di momento come

$$n(p_z) = \int dz \frac{k(p_z)f(z)}{1 + k(p_z)f(z)} \quad (2.8)$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \int dz (-1)^i k(p_z)^i f(z)^i k(p_z)f(z) \quad (2.9)$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i+1} \int dz k(p_z)^i f(z)^i \quad (2.10)$$

dove nell'ultimo passaggio ho utilizzato l'espressione della serie geometrica. Poiché quest'ultima converge assolutamente posso portarla fuori dall'integrale insieme alla funzione $k(p_z)$ poiché non dipende dalle variabili di integrazione. Inoltre posso anche separare le variabili. Ottengo dunque un'espressione compatta del tipo:

$$n(p_z) = \sum_{i=1}^{\infty} k(p_z)^i \int dz f(z)^i$$

Calcolo dunque il primo integrale:

$$\begin{aligned}
A &:= \int dz f(z)^i \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} dz e^{-i\beta \frac{\lambda}{z_0^4} (z^4 - 2z_0^2 z^2)} \\
&= 2 \int_0^{\infty} dz e^{-i\beta \frac{\lambda}{z_0^4} (z^4 - 2z_0^2 z^2)} \\
&= 2 \int_0^{\infty} dy y^{-1/2} \left(\frac{\sqrt{2i\beta\lambda}}{z_0} \right) e^{-ay^2 + y \frac{z_0^2}{4i\beta\lambda}} \\
&= \frac{z_0}{\sqrt{2i\beta\lambda}} \int_0^{\infty} dy y^{-1/2} e^{-ay^2 + y}
\end{aligned}$$

dove ho sfruttato la partita dell'integrando, successivamente ho effettuato il cambio di variabile $y = 2 \frac{i\beta\lambda}{z_0^2} z^2$ e ho posto $a = \frac{1}{4i\beta\lambda}$. Inoltre nell'appendice (C.1) risolvo l'integrale

$$\int_0^{\infty} dy y^{-1/2} e^{-ay^2 + y} = \frac{e^{1/8a} \sqrt{\pi}}{2^{3/2} \sqrt{a}} \left(I_{-1/4}(1/8a) + I_{1/4}(1/8a) \right)$$

Quindi

$$A = \frac{\sqrt{\pi}}{2} z_0 e^{i\frac{\beta\lambda}{2}} \left(I_{-1/4}\left(i\frac{\beta\lambda}{2}\right) + I_{1/4}\left(i\frac{\beta\lambda}{2}\right) \right)$$

Sostituendo ottengo:

$$\boxed{n(p_z) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} z_0 \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i+1} \frac{k(p_z)^i}{i} e^{i\frac{\beta\lambda}{2}} \left(I_{-1/4}\left(i\frac{\beta\lambda}{2}\right) + I_{1/4}\left(i\frac{\beta\lambda}{2}\right) \right)} \quad (2.11)$$

La densità di momento per i fermioni nel limite di temperatura zero è data da

$$\begin{aligned}
n(p_z) &= \int dz \Theta \left(E_F - \hbar\omega_{\perp} - \frac{p_z^2}{2m} - W(z) \right) \\
&= \int dz \Theta \left(\alpha - \frac{p_z^2}{2m} - W(z) \right)
\end{aligned}$$

dove ho posto $\alpha = E_F - \hbar\omega_{\perp}$. Calcolo l'integrale:

$$\begin{aligned}
A &:= \int_{-\infty}^{+\infty} dz \Theta \left(\alpha - k(p_z) - \frac{\lambda}{z_0^4} (z^2 - z_0^2)^2 \right) \\
&= 2 \int_0^{\infty} dz \Theta \left(\alpha - k(p_z) - \frac{\lambda}{z_0^4} (z^2 - z_0^2)^2 \right)
\end{aligned}$$

dove ho posto $k(p_z = \frac{p_z^2}{2m})$ ed ho utilizzato la parità dell'integrando. Ora effettuo il cambio di variabile $t = \frac{\sqrt{\lambda}}{z_0^2}(z^2 - z_0^2)$. Questo porta a scrivere:

$$A = \frac{z_0}{\lambda^{1/4}} \int_{-\sqrt{\lambda}}^{\infty} \frac{1}{(t + \sqrt{\lambda})^{1/2}} \Theta(\alpha - k(p_z) - t^2)$$

La condizione della Theta comporta

$$t^2 \leq \alpha - k(p_z)$$

ovvero $|t| \leq \sqrt{\alpha - k(p_z)} =: t_0$ quindi:

$$A = \frac{z_0}{\lambda^{1/4}} \left(C_1 - \Theta(t_0 - \sqrt{\lambda}) C_2 \right) \Theta(\alpha - k(p_z))$$

Dove ho posto:

$$\begin{aligned} C_1 &:= \int_{-t_0}^{t_0} dt \frac{1}{(t + \sqrt{\lambda})^{1/2}} \\ &= 2 \left[(\sqrt{\alpha - k(p_z)} - \sqrt{\lambda})^{1/2} - (\sqrt{\lambda} - \sqrt{\alpha - k(p_z)})^{1/2} \right] \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} C_2 &:= \int_{-t_0}^{-\sqrt{\lambda}} dt \frac{1}{(t + \sqrt{\lambda})^{1/2}} \\ &= -2(\sqrt{\lambda} - \sqrt{\alpha - k(p_z)})^{1/2} \end{aligned}$$

Dunque il risultato finale è

$$\boxed{n(p_z) = \frac{z_0}{\lambda^{1/4}} \left[C_1 + \Theta(\alpha - k(p_z) - \lambda) C_2 \right] \Theta(\alpha - k(p_z))} \quad (2.12)$$

2.3.2 Densità ed Energia di Fermi

La densità spaziale a temperatura zero per i fermioni si trova dalla formula generale (1.8) con $D=1$, ovvero

$$n(z) = \left(\frac{m}{2\pi\hbar^2} \right)^{1/2} \frac{1}{\Gamma(3/2)} \sqrt{E_F - \hbar\omega_{\perp} - W(z)} \Theta(E_F - \hbar\omega_{\perp} - W(z))$$

Quindi

$$\boxed{n(z) = \frac{\sqrt{2m}}{\pi\hbar} \sqrt{E_F - \hbar\omega_\perp - W(z)} \Theta(E_F - \hbar\omega_\perp - W(z))} \quad (2.13)$$

Per trovare l'energia di Fermi in funzione del numero di particelle integro la densità spaziale sulle coordinate ovvero:

$$\begin{aligned} N &= \int dz n(z) \\ &= \frac{\sqrt{2m}}{\pi\hbar} \int dz \sqrt{E_F - \hbar\omega_\perp - W(z)} \Theta(E_F - \hbar\omega_\perp - W(z)) \end{aligned}$$

Pongo $\alpha = E_F - \hbar\omega_\perp$.

Risolve dunque l'integrale:

$$\begin{aligned} A &:= \int_{-\infty}^{+\infty} dz \sqrt{E_F - \hbar\omega_\perp - W(z)} \Theta(E_F - \hbar\omega_\perp - W(z)) \\ &= 2 \int_0^\infty dz \sqrt{\alpha - \frac{\lambda}{z_0^4} (z^2 - z_0^2)^2} \Theta\left(\alpha - \frac{\lambda}{z_0^4} (z^2 - z_0^2)^2\right) \end{aligned}$$

dove nel secondo passaggio ho sfruttato la parità dell'integrando. Effettuando il cambio di variabile $t = \frac{\sqrt{\lambda}}{z_0^2} (z^2 - z_0^2)$ ottengo:

$$A = \frac{z_0}{\lambda^{1/4}} \int_{-\sqrt{\lambda}}^\infty dt \sqrt{\frac{\alpha - t^2}{t + \sqrt{\lambda}}} \Theta(E_F - \hbar\omega_\perp - t^2)$$

La Theta impone che $|t| \leq \sqrt{\alpha} =: t_0$ quindi

$$A_2 = \frac{z_0}{\lambda^{1/4}} \left[C_1 - \Theta(t_0 - \sqrt{\lambda}) C_2 \right]$$

dove

$$C_1 = \int_{-t_0}^{t_0} dt \sqrt{\frac{\alpha - t^2}{t + \sqrt{\lambda}}}$$

e

$$C_2 = \int_{-t_0}^{-\sqrt{\lambda}} dt \sqrt{\frac{\alpha - t^2}{t + \sqrt{\lambda}}}$$

Infine ottengo:

$$\boxed{N = \frac{\sqrt{2m}}{\pi\hbar} \frac{z_0}{\lambda^{1/4}} \left[C_1 - \Theta(E_F - \hbar\omega_\perp - \lambda) C_2 \right] \Theta(E_F - \hbar\omega_\perp)} \quad (2.14)$$

2.4 Bosoni

In questo paragrafo vado a calcolare le densità per un gas di Bosoni, la relazione tra il numero di particelle e la temperatura di transizione dimostrando infine di non poter avere condensazione di Bose-Einstein nel limite termodinamico.

2.4.1 Densità a temperatura finita

La densità spaziale per un gas di bosoni si calcola utilizzando la formula generale (??) con $D = 1$ ovvero:

$$n(z) = \left(\frac{m}{2\pi\hbar^2\beta} \right)^{1/2} g_{1/2}(e^{\beta(\mu - \hbar\omega_\perp - W(z))}) \quad (2.15)$$

La densità di momento si trova integrando sullo spazio delle coordinate lo stato di particella singola, ovvero

$$n(p_z) = \int dz \frac{1}{e^{\beta\left(\frac{p_z^2}{2m} + \hbar\omega_\perp + W(z) - \mu\right)} - 1}$$

In modo analogo a quanto visto per i fermioni in (2.8) ottengo:

$$n(p_z) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} z_0 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{k(p_z)^i}{i} e^{i\frac{\beta\lambda}{2}} \left(I_{-1/4}\left(i\frac{\beta\lambda}{2}\right) + I_{1/4}\left(i\frac{\beta\lambda}{2}\right) \right) \quad (2.16)$$

2.4.2 BEC

Ponendo $\mu = \hbar\omega_\perp$ ed integrando sullo spazio dei momenti calcolo il numero di bosoni in funzione della temperatura:

$$\begin{aligned} N &= \int \frac{dp_z}{2\pi\hbar} n(p_z) \\ &= \frac{z_0}{(16\pi\hbar^2)^{1/2}} \sum_{i=1}^{\infty} e^{i\frac{\beta\lambda}{2}} \left(I_{-1/4}\left(i\frac{\beta\lambda}{2}\right) + I_{1/4}\left(i\frac{\beta\lambda}{2}\right) \right) \int_{-\infty}^{+\infty} dp_z k(p_z)^i \\ &= \frac{z_0}{(16\pi\hbar^2)^{1/2}} \sum_{i=1}^{\infty} e^{i\frac{\beta\lambda}{2}} \left(I_{-1/4}\left(i\frac{\beta\lambda}{2}\right) + I_{1/4}\left(i\frac{\beta\lambda}{2}\right) \right) \int_{-\infty}^{+\infty} dp_z e^{-i\beta\left(\frac{p_z^2}{2m} + \hbar\omega_\perp + \lambda - \mu\right)} \\ &= \frac{z_0}{(16\pi\hbar^2)^{1/2}} \sum_{i=1}^{\infty} e^{i\frac{\beta\lambda}{2}} \left(I_{-1/4}\left(i\frac{\beta\lambda}{2}\right) + I_{1/4}\left(i\frac{\beta\lambda}{2}\right) \right) 2 \int_0^{\infty} dp_z e^{-i\beta\frac{p_z^2}{2m}} \end{aligned}$$

dove ho sfruttato la parità dell'integrando. L'integrale gaussiano si risolve

$$\int_0^{\infty} dp_z e^{-i\beta\frac{p_z^2}{2m}} = \sqrt{\frac{m\pi}{2i\beta}}$$

sostituendo allora ottengo:

$$N = \sqrt{\frac{z_0}{8\beta\hbar^2}} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{e^{-i\frac{\beta\lambda}{2}}}{i^{1/2}} \left(I_{-1/4}\left(i\frac{\beta\lambda}{2}\right) + I_{1/4}\left(i\frac{\beta\lambda}{2}\right) \right) \quad (2.17)$$

La serie

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{e^{-i\frac{\beta\lambda}{2}}}{i^{1/2}} \left(I_{-1/4}\left(i\frac{\beta\lambda}{2}\right) + I_{1/4}\left(i\frac{\beta\lambda}{2}\right) \right)$$

corrisponde alla serie (D.1), discussa nell'appendice, con $m = 1/2$ dunque la serie diverge e non posso avere condensazione di Bose - Einstein nel limite termodinamico. Questo risultato è consistente con (1.17) poiché nel mio caso ho $D = 1$ e $n = 4$ dunque $1/2 + 1/4 < 1$.

Capitolo 3

Toro quasi-bidimensionale

3.1 Introduzione

Considero un gas quantistico confinato in un potenziale armonico lungo la direzione x e in un toro 2-dimensionale lungo la direzione y, z . Esso avrà un potenziale totale del tipo

$$U(x, y, z) = \frac{1}{2}m\omega_x^2 x^2 + W(y, z)$$

dove $W(y, z)$ è il potenziale della doppia buca

$$W(y, z) = \frac{\lambda}{\rho_0^4} (y^2 + z^2 - \rho_0^2)^2 \quad (3.1)$$

con λ l'altezza della buca e $\pm\rho_0 = \pm(x_0^2 + y_0^2)$ la posizione dei minimi.

L'energia totale é

$$E_{n_x n_y n_z} = E_{n_x} + \epsilon_{n_y n_z} \quad (3.2)$$

dove

$$E_{n_x} = \hbar\omega_x(n_x + 1/2) \quad (3.3)$$

L'energia alla stato base sará allora:

$$\begin{aligned} E_{0n_y n_z} &= E_0 + \epsilon_{n_y n_z} \\ &= \hbar\frac{\omega_x}{2} + \frac{p_y^2 + p_z^2}{2m} + W(y, z) \end{aligned}$$

Nell'ipotesi $\hbar\frac{\omega_x}{2} \gg K_B T$ escludo l'energia di singola particella lungo l'asse z . Inoltre nel limite semi classico posso sostituire la sommatoria con l'integrale. Queste considerazioni

portano a scrivere il numero di particelle come:

$$\begin{aligned}
N &= \sum_{\alpha} N_{\alpha} \\
&= \sum_{n_x n_y n_z} N_{n_x n_y n_z} \\
&\simeq \sum_{n_y n_z} N_{0 n_y n_z} \\
&= \sum_{n_y n_z} \frac{1}{e^{\beta(\hbar \frac{\omega_x}{2} + \frac{p_y^2 + p_z^2}{2m} + W(y,z) - \mu)} \pm 1} \\
&= \int dn_y dn_z \frac{1}{e^{\beta(\hbar \frac{\omega_x}{2} + \frac{p_y^2 + p_z^2}{2m} + W(y,z) - \mu)} \pm 1} \\
&= \int \frac{dp_y dp_z dy dz}{(2\pi \hbar)^2} \frac{1}{e^{\beta(\frac{\omega_x}{2} + \frac{p_y^2 + p_z^2}{2m} + W(y,z) - \mu)} \pm 1}
\end{aligned}$$

3.2 Densità di energia

Calcolo la densità di stati di energia ovvero:

$$\rho(\epsilon) = \int \frac{d^2 \bar{p} d^2 \bar{r}}{(2\pi \hbar)^2} \delta(\epsilon - \epsilon(\bar{r}, \bar{p}))$$

dove $d^2 \bar{r} = dy dz$ e $d^2 \bar{p} = dp_y dp_z$

Dalla formula generale (1.1), con D=2, ho che:

$$\begin{aligned}
\rho(\epsilon) &= \frac{m}{2\pi \hbar^2} \int d^2 \bar{r} \Theta(\epsilon - \hbar \frac{\omega_x}{2} - W(y, z)) \\
&= \frac{m}{2\pi \hbar^2} \int dy dz \Theta(\epsilon - \hbar \frac{\omega_x}{2} - W(y, z))
\end{aligned}$$

Pongo $\alpha = \epsilon - \hbar \frac{\omega_x}{2}$. Risolvo allora l'integrale:

$$\begin{aligned}
A &:= \int dy dz \Theta(\alpha - W(y, z)) \\
&= 2\pi \int_0^{\infty} d\rho \rho \Theta(\alpha - \frac{\lambda}{\rho_0^4} (\rho^2 - \rho_0^2)^2)
\end{aligned}$$

Dove sono passato in coordinate polari. Pongo allora $\frac{\sqrt{\lambda}}{\rho_0^2} (\rho^2 - \rho_0^2) = t$.

$$A = \frac{\pi \rho_0^2}{\lambda^{1/2}} \int_{-\sqrt{\lambda}}^{\infty} dt \Theta(\alpha - t^2)$$

La funzione di Heaviside impone che:

$$|t| \leq \sqrt{\alpha} =: t_0$$

quindi

$$A = \frac{\pi\rho_0^2}{\lambda^{1/2}} \left[\int_{-t_0}^{t_0} dt - \Theta(t_0 - \sqrt{\lambda}) \int_{-t_0}^{-\sqrt{\lambda}} dt \right] = \frac{\pi\rho_0^2}{\lambda^{1/2}} \left[2\sqrt{\alpha} + \Theta(\alpha - \lambda) (\sqrt{\lambda} - \sqrt{\alpha}) \right] \Theta(\alpha)$$

Infine la densità di energia si esprime come:

$$\rho(\epsilon) = \frac{m}{2\hbar^2} \frac{\pi\rho_0^2}{\lambda^{1/2}} \left[2\sqrt{\alpha} + \Theta(\alpha - \lambda) (\sqrt{\lambda} - \sqrt{\alpha}) \right] \Theta(\alpha) \quad (3.4)$$

3.3 Fermioni

In questo paragrafo vado a calcolare le densità per un gas di Fermioni e il numero di particelle in funzione dell'energia di Fermi.

3.3.1 Densità a temperatura finita

La densità spaziale per un gas di fermioni si calcola utilizzando la formula generale (1.7) con $D = 2$ ovvero:

$$n(\bar{r}) = \frac{m}{2\pi\hbar^2\beta} f_1(e^{\beta(\mu - \hbar\frac{\omega_x}{2} - W(y,z))}) \quad (3.5)$$

La densità di momento si trova integrando sullo spazio delle coordinate lo stato di particella singola, ovvero

$$n(p_y, p_z) = \int dy dz \frac{1}{e^{\beta\left(\frac{p_y^2 + p_z^2}{2m} + \hbar\frac{\omega_x}{2} + W(y,z) - \mu\right)} + 1}$$

Definisco le seguenti funzioni:

$$f(y, z) := e^{-\beta\frac{\lambda}{\rho_0^2}[(y^2+z^2)^2 - 2\rho_0^2(y^2+z^2)]}$$

$$k(p_y, p_z) := e^{\beta\left(\frac{p_y^2 + p_z^2}{2m} + \hbar\frac{\omega_x}{2} + \lambda - \mu\right)}$$

Posso dunque scrivere la mia densità di momento come

$$n(p_y, p_z) = \int dy dz \frac{k(p_y, p_z) f(y, z)}{1 + k(p_y, p_z) f(y, z)} \quad (3.6)$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \int dy dz (-1)^i k(p_y, p_z)^i f(y, z)^i k(p_y, p_z) f(y, z) \quad (3.7)$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i+1} \int dy dz k(p_y, p_z)^i f(y, z)^i \quad (3.8)$$

$$(3.9)$$

dove nell'ultimo passaggio utilizzato l'espressione della serie geometrica. Poiché quest'ultima converge assolutamente posso portarla fuori dall'integrale insieme alla funzione $k(p_y, p_z)$ poiché non dipende dalle variabili di integrazione. Inoltre posso anche separare le variabili. Ottengo dunque un'espressione compatta del tipo:

$$n(p_y, p_z) = \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i+1} k(p_y, p_z)^i \int dy dz f(y, z)^i$$

Calcolo dunque l'integrale:

$$\begin{aligned} A_1 &:= \int dy dz f(y, z)^i \\ &= 2\pi \int_0^{\infty} d\rho \rho e^{-i\frac{\beta\lambda}{\rho_0^4}(\rho^4 - 2\rho_0\rho^2)} \\ &= 2\pi \frac{\rho_0^2}{4i\beta\lambda} \int_0^{\infty} dt e^{-at^2+t} \end{aligned}$$

dove sono passato prima in coordinate polari, successivamente ho effettuato il cambio di variabile $t = 2\frac{i\beta\lambda}{\rho_0^2}\rho^2$ e ho posto $a = \frac{1}{4i\beta\lambda}$. Inoltre nell'appendice risolvo l'integrale

$$\int_0^{\infty} dt e^{-at^2+t} = \frac{e^{1/4a}\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a}} \left[1 + \operatorname{erf}\left(\frac{1}{2\sqrt{a}}\right) \right]$$

Quindi

$$A = \frac{\pi^{3/2}\rho_0^2}{2\sqrt{i\beta\lambda}} e^{i\beta\lambda} \left[1 + \operatorname{erf}\left(\sqrt{i\beta\lambda}\right) \right]$$

Unendo i due pezzi ottengo dunque la densità di momento:

$$\boxed{n(p_y, p_z) = \frac{\pi^{3/2}}{2} \frac{\rho_0^2}{\sqrt{\beta\lambda}} \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i+1} k(p_y, p_z)^i \frac{e^{i\beta\lambda}}{i^{1/2}} \left[1 + \operatorname{erf}\left(\sqrt{i\beta\lambda}\right) \right]} \quad (3.10)$$

3.3.2 Densità ed Energia di Fermi

La densità di momento per i fermioni nel limite di temperatura zero è data da

$$\begin{aligned} n(p_y, p_z) &= \int d^2\bar{r} \Theta\left(E_F - \hbar\frac{\omega_x}{2} - \frac{p_y^2 + p_z^2}{2m} - W(y, z)\right) \\ &= \int dx dy \Theta\left(E_F - \hbar\frac{\omega_x}{2} - \frac{p_y^2 + p_z^2}{2m} - W(y, z)\right) \end{aligned}$$

Pongo $\alpha = E_F - \hbar\frac{\omega_x}{2}$ e $k(p_y, p_z) = \frac{p_y^2 + p_z^2}{2m}$.

Risolve l'integrale:

$$\begin{aligned} A &:= \int dy dz \Theta\left(\alpha - k(p_y, p_z) - W(y, z)\right) \\ &= 2\pi \int_0^\infty d\rho \rho \Theta\left(\alpha - k(p_y, p_z) - \frac{\lambda}{\rho_0^4}(\rho^2 - \rho_0^2)^2\right) \end{aligned}$$

dove sono passato in coordinate polari. Quindi pongo $t = \frac{\sqrt{\lambda}}{\rho_0^2}(\rho^2 - \rho_0^2)$ e ottengo:

$$A = \frac{\pi\rho^2}{\lambda^{1/2}} \int_{-\sqrt{\lambda}}^\infty dt \Theta(\alpha - k(p_y, p_z) - t^2)$$

La Theta porge la condizione $|t| \leq \sqrt{\alpha - k(p_y, p_z)} =: t_0$ quindi:

$$A = \frac{\pi\rho^2}{\lambda^{1/2}} \left(C_1 - \Theta(t_0 - \sqrt{\lambda}) C_2 \right) \Theta(\alpha - k(p_y, p_z))$$

dove

$$\begin{aligned} C_1 &:= \int_{-t_0}^{t_0} dt \\ &= 2\sqrt{\alpha - k(p_y, p_z)} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} C_2 &:= \int_{-t_0}^{-\sqrt{\lambda}} dt \\ &= -\sqrt{\lambda} + \sqrt{\alpha - k(p_y, p_z)} \end{aligned}$$

Quindi la densità di momento è

$$\boxed{n(p_y, p_z) = \frac{\pi\rho^2}{\lambda^{1/2}} \left(C_1 - \Theta(\alpha - k(p_y, p_z) - \lambda) C_2 \right) \Theta(\alpha - k(p_y, p_z))} \quad (3.11)$$

La densità spaziale per un gas di fermioni a temperatura zero si scrive come

$$n(\bar{r}) = \int \frac{d^2\bar{p}}{(2\pi\hbar)^2} \Theta\left(E_F - \hbar\frac{\omega_x}{2} - W(y, z) - \frac{p_y^2 + p_z^2}{2m}\right)$$

Utilizzo dunque la formula generale (1.8) con D=2 che porta a scrivere:

$$n(\bar{r}) = \frac{m}{2\pi\hbar^2} \frac{1}{\Gamma(2)} \left(E_F - \hbar\frac{\omega_x}{2} - W(y, z)\right) \Theta\left(E_F - \hbar\frac{\omega_x}{2} - W(y, z)\right)$$

ovvero:

$$\boxed{n(\bar{r}) = \frac{m}{2\pi\hbar^2} \left(E_F - \hbar\frac{\omega_x}{2} - W(y, z)\right) \Theta\left(E_F - \hbar\frac{\omega_x}{2} - W(y, z)\right)} \quad (3.12)$$

Il numero delle particelle in funzione dell'Energia di Fermi si ottiene integrando la densità spaziale sulle coordinate ovvero:

$$\begin{aligned} N &= \int d^2\bar{r} n(\bar{r}) \\ &= \frac{m}{2\pi\hbar^2} \int dy dz \left(E_F - \hbar\frac{\omega_x}{2} - W(y, z)\right) \Theta\left(E_F - \hbar\frac{\omega_x}{2} - W(y, z)\right) \end{aligned}$$

Pongo $\alpha = E_F - \hbar\frac{\omega_x}{2}$ Risolvo allora l'integrale:

$$\begin{aligned} A &:= \int dy dz (\alpha - W(y, z)) \Theta(\alpha - W(y, z)) \\ &= 2\pi \int_0^\infty d\rho \rho \left(\alpha - \frac{\lambda}{\rho_0^4}(\rho^2 - \rho_0^2)^2\right) \Theta\left(\alpha - \frac{\lambda}{\rho_0^4}(\rho^2 - \rho_0^2)^2\right) \end{aligned}$$

Dove sono passato in coordinate polari. Ora effettuo il cambio di variabile $t = \frac{\sqrt{\lambda}}{\rho_0^2}(\rho^2 - \rho_0^2)$, inoltre la condizione della Theta impone che $|t| \leq \sqrt{\alpha} =: t_0$

$$\begin{aligned} A &= \frac{\pi\rho_0^2}{2\lambda^{1/2}} \int_{-\sqrt{\lambda}}^{+\infty} dt (\alpha - t^2) \Theta(\alpha - t^2) \\ &= \frac{\pi\rho_0^2}{2\lambda^{1/2}} \left[C_1 - \Theta(t_0 - \sqrt{\lambda})\right] \Theta(\alpha) \end{aligned}$$

dove

$$C_1 := \int_{-t_0}^{t_0} dt (\alpha - t^2) = \frac{4}{3}\alpha^{3/2}$$

e

$$C_2 := \int_{-t_0}^{-\sqrt{\lambda}} dt (\alpha - t^2) = \frac{4}{3}\alpha^{3/2} - \sqrt{\lambda}\left(\alpha - \frac{\lambda}{3}\right)$$

Dunque infine ho che :

$$\boxed{N = \frac{m}{2\hbar^2} \frac{\pi\rho_0^2}{\lambda^{1/2}} \left[C_1 - \Theta(\alpha - \lambda)C_2\right] \Theta(\alpha)} \quad (3.13)$$

3.4 Bosoni

In questo paragrafo vado a calcolare le densità per un gas di bosoni, la relazione tra il numero di particelle e la temperatura di transizione ed infine la frazione di condensato in funzione della temperatura.

3.4.1 Densità a temperatura finita

La densità spaziale per un gas di bosoni si calcola utilizzando la formula generale (??) con $D = 2$ ovvero:

$$n(\vec{r}) = \frac{m}{2\pi\hbar^2\beta} g_1(e^{\beta(\mu - \hbar\frac{\omega_x}{2} - U(x,y,z))})$$

La densità di momento a temperatura finita si trova integrando sullo spazio delle coordinate lo stato di particella singola, ovvero

$$n(p_y, p_z) = \int dy dz \frac{1}{e^{\beta\left(\frac{p_y^2+p_z^2}{2m} + \hbar\frac{\omega_x}{2} + W(y,z) - \mu\right)} - 1}$$

In modo analogo alla densità di momento dei fermioni a temperatura finita (3.6) trovo che

$$n(p_y, p_z) = \frac{\pi^{3/2}}{2} \frac{\rho_0^2}{\sqrt{\beta\lambda}} \sum_{i=1}^{\infty} k(p_y, p_z)^i \frac{e^{i\beta\lambda}}{i^{1/2}} \left[1 + \operatorname{erf}\left(\sqrt{i\beta\lambda}\right)\right] \quad (3.14)$$

3.4.2 BEC

Nel limite termodinamico $\mu = \hbar\frac{\omega_x}{2}$ ed integrando sullo spazio dei momenti calcolo il numero di bosoni in funzione della temperatura:

$$\begin{aligned} N &= \int \frac{dp_y dp_z}{(2\pi\hbar)^2} n(p_y, p_z) \\ &= \frac{1}{8\pi^{1/2}\hbar^2\beta^{1/2}} \frac{\rho_0^2}{\lambda^{1/2}} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{e^{i\beta\lambda}}{i^{1/2}} \left(1 + \operatorname{erf}\left(\sqrt{i\beta\lambda}\right)\right) e^{-i\beta(\lambda - \mu + \hbar\frac{\omega_x}{2})} \int dp_y dp_z e^{-i\beta\frac{(p_y^2+p_z^2)}{2m}} \end{aligned}$$

l'integrale si risolve passando in coordinate polari ovvero:

$$\int dp_y dp_z e^{-i\beta\frac{(p_y^2+p_z^2)}{2m}} = 2\pi \int_0^{\infty} d\rho \rho e^{-i\beta\frac{\rho^2}{2m}} = \frac{2\pi m}{i\beta}$$

sostituendo allora ottengo:

$$N = \frac{m\pi^{1/2}}{4\hbar^2\beta^{3/2}} \frac{\rho_0^2}{\lambda^{1/2}} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^{3/2}} \left(1 + \operatorname{erf}\left(\sqrt{i\beta\lambda}\right)\right) \quad (3.15)$$

Discuto la convergenza della serie

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^{3/2}} \left(1 + \operatorname{erf}(\sqrt{i\beta\lambda})\right)$$

1. Noto subito che il primo termine corrisponde a $\zeta(3/2)$, inoltre per definizione $\operatorname{erf}(\sqrt{i\beta\lambda}) \leq 1$.

Quindi la sommatoria converge e posso avere condensazione di Bose Einstein nel limite termodinamico.

La frazione di condensato è data da

$$\boxed{\frac{N_0}{N} = 1 - \left(\frac{T}{T_B}\right)^{3/2} \frac{\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^{3/2}} \left(1 + \operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{i\lambda}{K_B T}}\right)\right)}{\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^{3/2}} \left(1 + \operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{i\lambda}{K_B T_B}}\right)\right)}} \quad (3.16)$$

Capitolo 4

Gas relativistico

4.1 Introduzione

L'energia di particella singola secondo la teoria relativistica è data da

$$\epsilon(\vec{r}, \vec{p}) = \sqrt{c^2 p^2 + m_0^2 c^4}$$

dove c è la velocità della luce e m_0 la massa a riposo.

Descrivo il sistema nell'ensemble Gran Canonico quindi il numero di stati eccitati totale è dato da

$$\begin{aligned} N &= \sum_{\alpha} N_{\alpha} \\ &= \sum_{\alpha} \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_{\alpha} - \mu)} - 1} \end{aligned}$$

poiché gli N_{α} devono essere positivi allora $\mu \leq m_0 c^2$. Se il numero di particelle è sufficientemente grande allora vale il limite semi classico ovvero

$$N = \frac{1}{(2\pi\hbar)^D} \int d^D \vec{r} d^D \vec{p} \frac{1}{e^{\beta(\epsilon(\vec{r}, \vec{p}) - \mu)} - 1}$$

Come nel secondo capitolo per $T > T_C$ ho che $\mu < m_0 c^2$ mentre per $T \leq T_C$ $\mu = m_0 c^2$.

4.2 Limite non relativistico

Considero l'energia di particella singola data da

$\epsilon(\vec{r}, \vec{p}) = \alpha p^4 + 2\gamma p^2 + m_0 + V(\vec{r})$ dove $\alpha = \frac{3}{8m_0^3 c^2}$ e $\gamma = \frac{1}{4m}$. La densità di stati di energia è data da

$$\begin{aligned}
\rho(\epsilon) &= \int \frac{d^D \bar{r} d^D \bar{p}}{(2\pi\hbar)^D} \delta(\epsilon - \epsilon(\bar{r}, \bar{p})) \\
&= \frac{S_D}{(2\pi\hbar)^D} \int d^D \bar{r} \int_0^\infty dp p^{D-1} \delta(\epsilon - \epsilon(\bar{r}, \bar{p})) \\
&= \frac{S_D}{(2\pi\hbar)^D} \frac{1}{2\alpha} \int d^D \bar{r} \int_0^\infty dt p^{D-4} \Big|_{p=\frac{t^{1/2}}{\alpha^{1/4}}} \delta(\epsilon - \epsilon(\bar{r}, \bar{t})) \\
&= \frac{S_D}{(2\pi\hbar)^D} \frac{1}{2\alpha} \frac{1}{\alpha^{D/4-1}} \int d^D \bar{r} \int_0^\infty dt t^{D/2-1} \delta(\epsilon - \epsilon(\bar{r}, \bar{t}))
\end{aligned}$$

Dove ho posto $t = \alpha^{1/2} p^2$ Cerco allora le soluzioni di $y(t) = \epsilon - \epsilon(\bar{r}, t) = \epsilon - t^2 - 2\frac{\gamma}{\alpha^{1/2}}t - m_0 - V(\bar{r})$ ovvero

$$t_{1,2} = -\frac{\gamma}{\alpha^{1/2}} \pm \sqrt{\frac{\gamma^2}{\alpha} + \epsilon - V(\bar{r}) - m_0} \text{ quindi ho}$$

pongo

$$\Delta = \frac{\gamma^2}{\alpha} + \epsilon - V(\bar{r}) - m_0$$

$$y(t) = -(t - t_1)(t - t_2)$$

$$y'(t) = -(t - t_1) - (t - t_2)$$

Applicando la proprietà della δ allora ho che:

$$\begin{aligned}
\rho(\epsilon) &= \frac{S_D}{(2\pi\hbar)^D} \frac{1}{2\alpha^{D/4}} \int d^D \bar{r} \int_{-\infty}^{+\infty} dt \Theta(t) \Theta(\Delta) t^{D/2-1} \sum_{i=1}^2 \frac{\delta(t - t_i)}{y'(t_i)} \\
&= \frac{S_D}{(2\pi\hbar)^D} \frac{1}{2\alpha^{D/4}} \int d^D \bar{r} \frac{1}{2\sqrt{\Delta}} \left[\Theta(t_1) t_1^{D/2-1} + \Theta(t_2) t_2^{D/2-1} \right] \Theta(\Delta) \\
&= \frac{1}{(4\pi\hbar^2)} \frac{1}{\alpha^{D/4} \Gamma(D/2)} \int d^D \bar{r} \frac{1}{2\sqrt{\Delta}} \Theta(t_1) \left(-\frac{\gamma}{\alpha^{1/2}} + \sqrt{\Delta} \right)^{D/2-1} \Theta(\Delta)
\end{aligned}$$

Ora noto che la condizione sulla $\Theta(t_1)$ è più forte della condizione $\Theta(\Delta)$ quindi la densità di stati di energia si scriverà come:

$$\boxed{\rho(\epsilon) = \frac{1}{(4\pi\hbar^2)} \frac{1}{2\alpha^{D/4} \Gamma(D/2)} \int d^D \bar{r} \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \left(-\frac{\gamma}{\alpha^{1/2}} + \sqrt{\Delta} \right)^{D/2-1} \Theta(\epsilon - U(\bar{r}) - m_0)} \quad (4.1)$$

In modo analogo a quanto fatto in [7] confino il gas di bosoni in un potenziale armonico del tipo $V(\bar{r}) = Ar^n$ e vado a calcolare la densità spaziale per un gas di bosoni non condensato.

$$\begin{aligned} n(\bar{r}) &= \int \frac{d^D \bar{p}}{(2\pi\hbar)^D} \frac{1}{e^{\beta(\alpha p^4 + 2\gamma p^2 + m_0 + V(\bar{r}) - \mu)} - 1} \\ &= \frac{S_D}{(2\pi\hbar)^D} \int_0^\infty dp p^{D-1} \frac{z(\bar{r}) e^{-\beta(\alpha p^4 + 2\gamma p^2)}}{1 - z(\bar{r}) e^{-\beta(\alpha p^4 + 2\gamma p^2)}} \end{aligned}$$

dove sono passato in coordinate sferiche e posto $z(\bar{r}) = e^{-\beta(V(\bar{r}) - \mu)}$. Risolvo dunque l'integrale:

$$\begin{aligned} D_1(\bar{r}) &:= \int_0^\infty dp p^{D-1} \frac{z(\bar{r}) e^{-\beta(\alpha p^4 + 2\gamma p^2)}}{1 - z(\bar{r}) e^{-\beta(\alpha p^4 + 2\gamma p^2)}} \\ &= \sum_{i=1}^\infty z(\bar{r})^i \int_0^\infty dp p^{D-1} e^{-i\beta(\alpha p^4 + 2\gamma p^2)} \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{(2\beta\gamma)^{D/2}} \sum_{i=1}^\infty \frac{z(\bar{r})}{i^{D/2}} \int_0^\infty dy y^{D/2-1} e^{-ay^2 - y} \end{aligned}$$

dove ho espresso il denominatore in forma di serie geometrica, effettuato il cambio di variabile $y = 2i\beta\gamma p^2$ e posto $a = \frac{\alpha}{4i\beta\gamma^2}$. Nell'appendice risolvo il seguente integrale:

$$\int_0^\infty dy y^{D/2-1} e^{-ay^2 - y} = 2^{-D/2} a^{-D/4} \Gamma(D/2) U(D/4, 1/2, 1/4a)$$

dove $U(a, b, c)$ è la funzione di Tricomi. Allora

$$D_1(\bar{r}) = \frac{1}{2} \frac{1}{(4\beta\gamma)^{D/4}} \Gamma(D/2) \sum_{i=1}^\infty \frac{z(\bar{r})}{i^{D/4}} U(D/4, 1/2, i \frac{\beta\gamma^2}{\alpha})$$

e la densità spaziale risulta.

$$\boxed{n(\bar{r}) = \frac{1}{(2\sqrt{\pi}\hbar)^D} \frac{1}{(4\beta\gamma)^{D/4}} \sum_{i=1}^\infty \frac{z(\bar{r})}{i^{D/4}} U(D/4, 1/2, i \frac{\beta\gamma^2}{\alpha})} \quad (4.2)$$

Posso verificare che nel limite $\alpha \rightarrow 0$ la densità spaziale si riduce al caso trovato nel secondo capitolo.

Si può dimostrare, si veda ad esempio [9], che vale il seguente fatto:

$$\lim_{c \rightarrow \infty} U(a, b, c) = c^{-a}$$

Dunque ho che:

$$\begin{aligned}
\lim_{\alpha \rightarrow 0} n(\bar{r}) &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{(2\sqrt{\pi\hbar})^D} \frac{1}{(4\beta\gamma)^{D/4}} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{z(\bar{r})}{i^{D/4}} U(D/4, 1/2, i \frac{\beta\gamma^2}{\alpha}) \\
&= \frac{1}{(2\sqrt{\pi\hbar})^D} \frac{1}{(4\beta\gamma)^{D/4}} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{z(\bar{r})}{i^{D/4}} \left(\frac{\beta\gamma^2}{\alpha}\right)^{-D/4} \\
&= \frac{1}{(2\sqrt{\pi\hbar})^D} \frac{1}{(4\beta^2\gamma)^{D/4}} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{z(\bar{r})}{i^{D/2}}
\end{aligned}$$

Poiché $\gamma = \frac{1}{4m}$ e ricordando la (1.6) ottengo infine:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} n(\bar{r}) = \left(\frac{m}{2\pi\beta\hbar^2}\right)^{D/2} g_{D/2}(z(\bar{r}))$$

Torno dunque al calcolo del condensato:

$$\begin{aligned}
N &= \int d^D \bar{r} n(\bar{r}) \\
&= \frac{1}{(2\sqrt{\pi\hbar})^D} \frac{1}{(4\beta\gamma)^{D/4}} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{U(D/4, 1/2, i \frac{\beta\gamma^2}{\alpha})}{i^{D/4}} S_D \int_0^{\infty} r^{D-1} e^{-i\beta A r^n}
\end{aligned}$$

dove nel secondo passaggio sono passato in coordinate sferiche. Risolvo allora l'integrale:

$$\begin{aligned}
D_2 &:= \int_0^{\infty} r^{D-1} e^{-i\beta A r^n} \\
&= \frac{1}{i\beta A n} \int_0^{\infty} dy y^{D/n-1} \left(\frac{1}{i\beta A}\right)^{D/n-1} e^{-y} \\
&= \left(\frac{1}{i\beta A}\right)^{D/n} \frac{1}{n} \Gamma(D/n)
\end{aligned}$$

In questi passaggi ho effettuato il cambio di variabile $y = i\beta A r^n$ ed utilizzato la rappresentazione integrale della funzione Gamma. Quindi ottengo la relazione che lega il numero di particelle alla temperatura di transizione:

$$\boxed{N = \frac{2}{(2\hbar)^D} \left(\frac{1}{4\alpha}\right)^{D/4} \left(\frac{1}{A}\right)^{D/n} \frac{\Gamma(D/n)}{\Gamma(D/2)} \frac{1}{n} \frac{1}{\beta^{D/4+D/n}} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{U(D/4, 1/2, i \frac{\beta\gamma^2}{\alpha})}{i^{D/4+D/n}}} \quad (4.3)$$

Per la convergenza della serie applico allora il criterio dell'integrale sull'indice i , quindi la sommatoria converge se e solo se converge l'integrale:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{i^{D/4+D/n}} U(D/4, 1/2, \frac{\beta\gamma^2}{4\alpha} i) di$$

La singolarità è presente a ∞ e come mostrato precedente la funzione di Tricomi in tale limite è asintotica a $i^{-D/4}$

dunque l'integrando è asintotico a

$$\frac{1}{i^{D/2+D/n}}$$

Ritrovo dunque la condizione

$$\frac{D}{2} + \frac{D}{n} > 1$$

La frazione di condensato in questo caso è

$$\boxed{\frac{N_0}{N} = 1 - \left(\frac{T}{T_B}\right)^{D/4+D/n} \frac{\sum_{i=1}^{\infty} \frac{U(D/4, 1/2, i \frac{\gamma^2}{K_B T \alpha})}{i^{D/4+D/n}}}{\sum_{i=1}^{\infty} \frac{U(D/4, 1/2, i \frac{\gamma^2}{K_B T_B \alpha})}{i^{D/4+D/n}}} \quad (4.4)}$$

4.3 Limite ultra relativistico

In questo paragrafo vado ad indagare il caso limite in cui posso avere condensazione di Bose Einstein. Tale situazione non è applicabile sperimentalmente ma può avere un qualche interesse nel campo dell'Astrofisica. Considero l'energia di particella singola data da

$\epsilon(\bar{r}, \bar{p}) = c\bar{p} + V(\bar{r})$ dove $V(\bar{r}) = Ar^n$ In questo caso poiché $K_B T \gg mc^2$ avrò produzione di bosoni e anti bosoni come osservato anche nel lavoro [1]. Il numero totale, detto in questo caso anche carica [8], sarà la somma algebrica del numero di bosoni, ovvero la carica positiva, ed il numero di anti bosoni, ovvero la carica negativa, che indicherò rispettivamente con Q^+ e Q^- .

La densità di momento è data dalla formula del secondo capitolo ovvero

$$q^+(\bar{p}) = \frac{1}{(2\hbar\sqrt{\pi})^D} \frac{\Gamma(D/n + 1)}{\Gamma(D/2 + 1)} \left(\frac{1}{\beta A}\right)^{D/n} g_{D/n}(e^{\beta(\mu - c\bar{p})})$$

Dunque il numero di bosoni si troverà integrando sullo spazio delle coordinate tale densità.

$$\begin{aligned}
Q^+ &= \int d^D \bar{p} q^+(\bar{p}) \\
&= \frac{1}{(2\hbar\sqrt{\pi})^D} \frac{\Gamma(D/n+1)}{\Gamma(D/2+1)} \left(\frac{1}{\beta A}\right)^{D/n} \int d^D \bar{p} g_{D/n}(e^{\beta(\mu-c\bar{p})}) \\
&= \frac{1}{(2\hbar\sqrt{\pi})^D} \frac{\Gamma(D/n+1)}{\Gamma(D/2+1)} \left(\frac{1}{\beta A}\right)^{D/n} \int d^D \bar{p} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{e^{i\beta\mu} e^{-i\beta c\bar{p}}}{i^{D/n}} \\
&= \frac{1}{(2\hbar\sqrt{\pi})^D} \frac{\Gamma(D/n+1)}{\Gamma(D/2+1)} \left(\frac{1}{\beta A}\right)^{D/n} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{e^{i\beta\mu}}{i^{D/n}} S_D \int dp p^{D-1} e^{-i\beta c p} \\
&= \frac{2}{(2\hbar)^D} \frac{\Gamma(D/n+1)}{\Gamma(D/2+1)} \left(\frac{1}{\beta A}\right)^{D/n} \frac{1}{\Gamma(D/2)} \frac{1}{(\beta c)^D} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{e^{i\beta\mu}}{i^{D/n+D}} \int_0^{\infty} dy y^{D-1} e^{-y} \\
&= \frac{2}{(2\hbar)^D} \frac{\Gamma(D/n+1)}{\Gamma(D/2+1)} \left(\frac{1}{\beta A}\right)^{D/n} \frac{1}{\Gamma(D/2)} \frac{1}{(\beta c)^D} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{e^{i\beta\mu}}{i^{D/n+D}} \Gamma(D) \\
&= \frac{\Gamma(D/n+1)}{\hbar^D} \left(\frac{1}{\beta A}\right)^{D/n} \frac{1}{(\beta c)^D} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{e^{i\beta\mu}}{i^{D/n+D}}
\end{aligned}$$

Uguualmente per gli anti bosoni ottengo:

$$Q^- = \frac{\Gamma(D/n+1)}{\hbar^D} \left(\frac{1}{\beta A}\right)^{D/n} \frac{1}{(\beta c)^D} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{e^{-i\beta\mu}}{i^{D/n+D}}$$

Essendo $K_B T \gg mc^2$ allora $\mu\beta$ è infinitesimo. Dunque per calcolare la carica totale sono autorizzato a sviluppare la funzione $\sinh(x)$ in serie di Taylor e considerare il primo termine significativo.

$$\begin{aligned}
Q &= \lim_{\mu\beta \rightarrow 0} Q^+ - Q^- \\
&= \lim_{\mu\beta \rightarrow 0} \frac{\Gamma(D/n+1)}{\hbar^D} \left(\frac{1}{\beta A}\right)^{D/n} \frac{1}{(\beta c)^D} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{e^{i\beta\mu} - e^{-i\beta\mu}}{i^{D/n+D}} \\
&= \lim_{\mu\beta \rightarrow 0} \frac{\Gamma(D/n+1)}{\hbar^D} \left(\frac{1}{\beta A}\right)^{D/n} \frac{1}{(\beta c)^D} \sum_{i=1}^{\infty} 2 \frac{\sinh i\beta\mu}{i^{D/n+D}} \\
&= 2\beta\mu \frac{\Gamma(D/n+1)}{\hbar^D} \left(\frac{1}{\beta A}\right)^{D/n} \frac{1}{(\beta c)^D} \zeta(D/n+D-1)
\end{aligned}$$

Dunque ho dimostrato che posso avere BEC nel caso ultrarelativistico se il sistema rispetta la seguente condizione:

$$\boxed{\frac{D}{2} + \frac{D}{2n} > 1} \quad (4.5)$$

Appendice A

Funzioni ipergeometriche

Definisco la funzione ipergeometrica come

$$F(\alpha, \beta, \gamma, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n (\beta)_n}{n! (\gamma)_n} z^n \quad (\text{A.1})$$

con $|z| < 1$. Dove $(x)_n$ sono detti simboli di Pochhammer e sono definiti come

$$(x)_n = \frac{\Gamma(x+n)}{\Gamma(x)}$$

Essa soddisfa la seguente equazione differenziale

$$z(1-z) \frac{d^2 y}{dz^2} + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)z] \frac{dy}{dz} - \alpha \beta y(z) = 0 \quad (\text{A.2})$$

Quando γ non è intero si dimostra che tale equazione ammette anche una seconda soluzione linearmente indipendente:

$$z^{1-\gamma} F(\alpha - \gamma + 1, \beta - \gamma, 2 - \gamma, z) \quad (\text{A.3})$$

la funzione ipergeometrica ammette la seguente rappresentazione integrale

$$F(\alpha, \beta, \gamma, z) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)} \int_0^1 t^{\beta-1} (1-t)^{\gamma-\beta-1} (1-zt)^{-\alpha} \quad (\text{A.4})$$

Considero l'equazione ipergeometrica e sostituisco z con z/b allora ottengo

$$z\left(1 - \frac{z}{b}\right) \frac{d^2 y}{dz^2} + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)\frac{z}{b}] \frac{dy}{dz} - \alpha \frac{\beta}{b} y(z) = 0 \quad (\text{A.5})$$

quindi ponendo $b = \beta \rightarrow \infty$ ottengo:

$$z \frac{d^2 y}{dz^2} + (\gamma - z) \frac{dy}{dz} - \alpha y(z) = 0$$

chiama equazione di Kummer.

Si dimostra che quando $1 - \gamma$ non è intero si hanno due soluzioni linearmente indipendenti:

$$y_1 = F(\alpha, \gamma, z) \quad (\text{A.6})$$

$$y_2 = z^{1-\gamma} F(\alpha - \gamma - 1, 2 - \gamma, z) \quad (\text{A.7})$$

dove

$$F(\alpha, \gamma, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n}{n!(\gamma)_n} z^n \quad (\text{A.8})$$

è detta funzione di Kummer o funzione ipergeometrica confluyente.

Essa soddisfa alle importanti proprietà:

$$F(\alpha, \gamma, z) = e^z F(\gamma - \alpha, \gamma, -z) \quad (\text{A.9})$$

e

$$e^{-z} F(\alpha, 2\alpha, z) = {}_0F_1\left(\frac{1}{2} + \alpha, \frac{z^2}{16}\right) \quad (\text{A.10})$$

chiamate rispettivamente prima e seconda formula di Kummer.

La funzione di Kummer ammette rappresentazione integrale data da:

$$F(\alpha, \gamma, z) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma - \alpha)} \int_0^1 e^{zt} t^{\alpha-1} (1-t)^{\gamma-\alpha-1} dt \quad (\text{A.11})$$

Appendice B

Risoluzione integrale

Risoluzione analitica Integrale

$$\int_0^{\infty} t^{D/2-1} e^{-\mu t - at^2} dt$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} t^{D/2-1} e^{-\mu t} e^{-at^2} dt &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} dy \frac{y^{D/4-1}}{a^{D/4}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-\mu}{a^{1/2}}\right)^n \frac{1}{n!} y^{n/2} e^{-y} \\ &= \frac{1}{2} a^{-D/4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{\mu}{a^{1/2}}\right)^n \int_0^{\infty} dy y^{D/4+n/2-1} e^{-y} \\ &= \frac{1}{2} a^{-D/4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{\mu}{a^{1/2}}\right)^n \Gamma(D/4 + n/2) \end{aligned}$$

Divido la sommatoria in due pezzi

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(2j)!} \left(\frac{\mu}{a^{1/2}}\right)^{2j} \Gamma(D/4 + j) \quad (\text{B.1})$$

$$\sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{(2l+1)!} \left(\frac{\mu}{a^{1/2}}\right)^{2l+1} \Gamma(D/4 + l + 1/2) \quad (\text{B.2})$$

Per il primo pezzo ho che

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(2j)!} \left(\frac{\mu}{a^{1/2}}\right)^{2j} \Gamma(D/4 + j) &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \left(\frac{\mu^2}{4a}\right)^j \frac{\Gamma(D/4 + j)}{\Gamma(j + 1/2)} \Gamma(1/2) \\ &= \Gamma(D/4) {}_1F_1(D/4, 1/2, \mu^2/4a) \end{aligned}$$

Dove ho utilizzato la formula di duplicazione

$$\Gamma(2z) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(z + 1/2)}{\Gamma(1/2)2^{1-2z}}$$

quindi

$$\Gamma(2j) = \frac{\Gamma(j)\Gamma(j + 1/2)}{\Gamma(1/2)2^{1-2j}}$$

mentre per il secondo pezzo

$$\sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{(2l+1)!} \left(\frac{\mu}{a^{1/2}}\right)^{2l+1} \Gamma(D/4 + l + 1/2) = \mu \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} \frac{1}{2a^{1/2}} \left(\frac{\mu^2}{4a}\right)^l \frac{\Gamma(D/4 + l + 1/2)}{\Gamma(l + 3/2)} \Gamma(1/2)$$

ovvero

$$\mu \frac{1}{2a^{1/2}} \frac{\Gamma(1/2)}{\Gamma(3/2)} \Gamma(D/4 + 1/2) {}_1F_1(D/4 + 1/2, 3/2, \mu^2/4a)$$

ma

$$\frac{\Gamma(1/2)}{\Gamma(3/2)} = 2$$

il secondo pezzo si riscrive allora come:

$$\mu \frac{1}{a^{1/2}} \Gamma(D/4 + 1/2) {}_1F_1(D/4 + 1/2, 3/2, \mu^2/4a)$$

Riunendo i due pezzi allora avrò :

$$\int_0^{\infty} t^{D/2-1} e^{-\mu t - at^2} dt = \frac{1}{2} a^{-\frac{D}{4}} \left[\Gamma\left(\frac{D}{4}\right) {}_1F_1\left(\frac{D}{4}, \frac{1}{2}, \frac{\mu^2}{4a}\right) - \mu \frac{1}{a^{1/2}} \Gamma\left(\frac{D+2}{4}\right) {}_1F_1\left(\frac{D+2}{4}, \frac{3}{2}, \frac{\mu^2}{4a}\right) \right]$$

Appendice C

La funzione di Bessel Modificata

La funzione di Bessel Modificata del primo tipo è definita come:

$$I_\nu(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k! \Gamma(\nu + k + 1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k}$$

che soddisfa all'equazione differenziale:

$$\frac{d^2y}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{dy}{dz} - \left(1 + \frac{\nu^2}{z^2}\right)y = 0$$

essa è esprimibile tramite la funzione ipergeometrica confluyente:

$$I_{\nu-1/2}(z/2) = e^{-z/2} \left(\frac{z}{4}\right)^{\nu-1/2} \frac{1}{\Gamma(\nu + 1/2)} {}_1F_1(\nu, 2\nu, z)$$

Considero dunque l'integrale studiato con $\mu = -1$ e $D = 1$ ovvero

$$\int_0^\infty t^{-1/2} e^{t-at^2} dt$$

essa avrà primitiva

$$\frac{1}{2} a^{-1/4} \left[\Gamma\left(\frac{1}{4}\right) {}_1F_1\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4a}\right) + \frac{1}{a^{1/2}} \Gamma\left(\frac{3}{4}\right) {}_1F_1\left(\frac{3}{4}, \frac{3}{2}, \frac{1}{4a}\right) \right]$$

Utilizzando la relazione precedente ho che

$${}_1F_1\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4a}\right) = e^{1/8a} \left(\frac{1}{16a}\right)^{1/4} \Gamma\left(\frac{3}{4}\right) I_{-1/4}\left(\frac{1}{8a}\right)$$

$${}_1F_1\left(\frac{3}{4}, \frac{3}{2}, \frac{1}{4a}\right) = e^{1/8a} \left(\frac{1}{16a}\right)^{-1/4} \Gamma\left(\frac{5}{4}\right) I_{1/4}\left(\frac{1}{8a}\right)$$

Sostituendo ottengo la primitiva cercata:

$$\int_0^\infty dy y^{-1/2} e^{-ay^2+y} = \frac{e^{1/8a} \sqrt{\pi}}{2^{3/2} \sqrt{a}} \left(I_{-1/4}(1/8a) + I_{1/4}(1/8a) \right) \quad (\text{C.1})$$

Appendice D

Discussione di una serie

Discuto la convergenza della seguente serie:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{e^{-ia}}{i^m} I_n(ia) \quad (\text{D.1})$$

Riscrivo utilizzando la rappresentazione della funzione modificata di Bessel in forma di sommatoria e sommando in intervalli compatti:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \lim_{s \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^r \frac{e^{-ia}}{i^m} \left[\left(\frac{a}{2} \right)^n \sum_{k=0}^s \frac{1}{k! \Gamma(n+k+1)} \left(\frac{a}{2} \right)^{2k} \right] \quad (\text{D.2})$$

Applico il criterio dell'integrale sull'indice i ottengo dunque che:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \lim_{s \rightarrow \infty} \int_1^r di \frac{e^{-ia}}{i^m} \left[\left(\frac{a}{2} \right)^n \sum_{k=0}^s \frac{1}{k! \Gamma(n+k+1)} \left(\frac{a}{2} \right)^{2k} \right]$$

Riconosco dunque:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \lim_{s \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^s \frac{1}{k! \Gamma(n+k+1)} \int_1^r di e^{-ia} \left(\frac{a}{2} \right)^{2k+n} i^{2k+n-m}$$

pongo $ia = t$ allora la serie si riduce a

$$\frac{a^{m-1}}{2^n} \lim_{r \rightarrow \infty} \lim_{s \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^s \frac{1}{k! \Gamma(n+k+1)} \frac{1}{2^{2k}} \int_{r_0}^{r r_0} dt e^{-t} t^{2k+1/4-m}$$

dove $r_0 := a$

Introduco la funzione Gamma incompleta che è definita come:

$$\gamma(n, x) = \int_0^x t^{n-1} e^{-t} dt$$

Nel mio caso avrò che

$$\int_{r_0}^{r r_0} t^{n-1} e^{-t} dt = \Gamma(n) - \gamma(n, r_0) - \int_{r r_0}^{\infty} t^{n-1} e^{-t} dt$$

che porge come risultato

$$\Gamma(2k + n - m + 1) - \gamma(2k + n - m + 1, r_0) - \int_{r r_0}^{\infty} t^{2k+n-m} e^{-t} dt$$

Per $r \rightarrow \infty$ l'ultimo termine è nullo mentre trascuro la gamma incompleta poiché non è rilevante nello studio del carattere della serie.

Dunque

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^s \frac{1}{k!} \frac{1}{\Gamma(n+k+1)} \frac{1}{2^{2k}} \Gamma(2k+n-m+1)$$

utilizzando la formula di duplicazione per Gamma

$$\Gamma(2k+n-m+1) = \frac{\Gamma(k+n/2-m/2+1/2)\Gamma(k+n/2-m/2+1)}{\Gamma(1/2)2^{1-2k-n+m-1}}$$

a meno di costanti ottengo

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^s \frac{\Gamma(k+n/2-m/2+1/2)\Gamma(k+n/2-m/2+1)}{k!\Gamma(k+n+1)2^{2k}} \frac{1}{2^{-2k}}$$

Rimane dunque da discutere la convergenza di

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^s \frac{\Gamma(k+n/2-m/2+1/2)\Gamma(k+n/2-m/2+1)}{k!\Gamma(k+n+1)}$$

In essa riconosco la funzione ipergeometrica del tipo

$$F(a, b, c, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{n! (c)_n} z^n$$

Essa ammette rappresentazione integrale

$$F(a, b, c, z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 t^{b-1} (1-t)^{c-b-1} (1-zt)^{-a} dt$$

Con $z=1$ ho dunque

$$\begin{aligned} F(a, b, c, 1) &= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 t^{b-1} (1-t)^{c-b-1} (1-t)^{-a} dt \\ &= \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} \end{aligned}$$

Essa avrà risultato finito se $c-a-b > 0$ cioè se $(n+1) - (n/2 - m/2 + 1/2) - (n/2 - m/2 + 1) > 0$, ovvero per $m > 1/2$.

Appendice E

La funzione degli Errori

La funzione degli errori si definisce come

$$\operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt \quad (\text{E.1})$$

Essa è un caso particolare della funzione di Kummer.

Considero infatti la rappresentazione integrale di ${}_1F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -x^2\right)$

$$\begin{aligned} {}_1F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -x^2\right) &= \frac{\Gamma(3/2)}{\Gamma(1/2)\Gamma(3/2 - 1/2)} \int_0^1 e^{-x^2 t} t^{1/2-1} (1-t)^{3/2-1/2-1} dt \\ &= \frac{\Gamma(3/2)}{\Gamma(1/2)} \int_0^1 e^{-x^2 t} t^{1/2-1} dt \\ &= \frac{1}{2} \frac{2}{x} \int_0^x e^{-y^2} dy \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2x} \operatorname{erf} x \end{aligned}$$

dove ho utilizzato il cambiamento di variabile $y^2 = x^2 t$ e la definizione di $\operatorname{erf} x$ nell'ultimo passaggio.

Posso allora risolvere l'integrale con $D = 2$ e $\mu = -1$ ovvero:

$$\int_0^\infty e^{t-at^2} dt = \frac{1}{2} a^{-\frac{1}{2}} \left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) {}_1F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4a}\right) + \frac{1}{a^{1/2}} \Gamma(1) {}_1F_1\left(1, \frac{3}{2}, \frac{1}{4a}\right) \right]$$

Utilizzando la prima formula di Kummer e la relazione appena dimostrata ho che:

$$\begin{aligned} {}_1F_1\left(1, \frac{3}{2}, \frac{1}{4a}\right) &= e^{\frac{1}{4a}} {}_1F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{1}{4a}\right) \\ &= e^{\frac{1}{4a}} \sqrt{\pi} \sqrt{a} \operatorname{erf} \frac{1}{2\sqrt{a}} \end{aligned}$$

inoltre è facile vedere che

$${}_1F_1\left(1/2, \frac{1}{2}, \frac{1}{4a}\right) = e^{\frac{1}{4a}}$$

Sostituendo ottengo allora che

$$\int_0^\infty e^{t-at^2} dt = \frac{\sqrt{\pi} e^{\frac{1}{4a}}}{2\sqrt{a}} \left(1 + \operatorname{erf} \frac{1}{2\sqrt{a}}\right)$$

Appendice F

La funzione di Tricomi

La funzione di Tricomi è definita come

$$U(\alpha, \gamma, z) = \frac{\Gamma(1-\gamma)}{\Gamma(\alpha-\gamma+1)} {}_1F_1(\alpha, \gamma, z) + \frac{\Gamma(\gamma-1)}{\Gamma(\alpha)} z^{1-\gamma} {}_1F_1(\alpha-\gamma+1, 2-\gamma, z) \quad (\text{F.1})$$

essa soddisfa all'equazione differenziale di Kummer:

$$z \frac{d^2 y}{dz^2} + (\gamma - z) \frac{dy}{dz} - \alpha y = 0$$

Considero l'integrale con $\mu = 1$

$$\int_0^\infty t^{D/2-1} e^{-t-at^2} dt$$

esso ammette primitiva

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} a^{-D/4} \left[\Gamma\left(\frac{D}{4}\right) {}_1F_1\left(\frac{D}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4a}\right) - \frac{1}{a^{1/2}} \Gamma\left(\frac{D+2}{4}\right) {}_1F_1\left(\frac{D+2}{4}, \frac{3}{2}, \frac{1}{4a}\right) \right] \\ & \int_0^\infty t^{D/2-1} e^{-t} e^{-at^2} dt = \frac{1}{2} \int_0^\infty dy \frac{y^{D/4-1}}{a^{D/4}} \sum_{n=0}^\infty \left(\frac{-1}{a^{1/2}}\right)^n \frac{1}{n!} y^{n/2} e^{-y} \\ & = \frac{1}{2} a^{-D/4} \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{1}{a^{1/2}}\right)^n \int_0^\infty dy y^{D/4+n/2-1} e^{-y} \\ & = \frac{1}{2} a^{-D/4} \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{1}{a^{1/2}}\right)^n \Gamma(D/4 + n/2) \end{aligned}$$

L'integrale é allora uguale a

$$\frac{1}{2} a^{-D/4} \left[\sum_{j=0}^\infty \frac{1}{(2j)!} \left(\frac{1}{a^{1/2}}\right)^{2j} \Gamma(D/4 + j) - \sum_{l=0}^\infty \frac{1}{(2l+1)!} \left(\frac{1}{a^{1/2}}\right)^{2l+1} \Gamma(D/4 + l + 1/2) \right]$$

Divido allora la sommatoria in due pezzi

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(2j)!} \left(\frac{1}{a^{1/2}}\right)^{2j} \Gamma(D/4 + j) \quad (\text{F.2})$$

$$\sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{(2l+1)!} \left(\frac{1}{a^{1/2}}\right)^{2l+1} \Gamma(D/4 + l + 1/2) \quad (\text{F.3})$$

Per il primo pezzo ho che

$$\Gamma(D/4)_1F_1(D/4, 1/2, 1/4a) = \frac{\Gamma(D/2)\Gamma(1/2)}{\Gamma(D/4 + 1/2)} 2^{1-D/2} {}_1F_1(D/4, 1/2, 1/4a)$$

Dove ho utilizzato la formula di duplicazione

$$\Gamma(2z) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(z + 1/2)}{\Gamma(1/2)2^{1-2z}}$$

quindi

$$\Gamma(D/4) = \frac{\Gamma(D/2)\Gamma(1/2)2^{1-D/2}}{\Gamma(D/4 + 1/2)}$$

$$\Gamma(D/4 + 1/2) = \frac{\Gamma(D/2)\Gamma(1/2)2^{1-D/2}}{\Gamma(D/4)}$$

mentre per il secondo pezzo

$$\frac{1}{2a^{1/2}} \frac{\Gamma(1/2)}{\Gamma(3/2)} \Gamma(D/4 + 1/2) {}_1F_1(D/4 + 1/2, 3/2, 1/4a)$$

Sostituendo l'espressione di $\Gamma(D/4 + 1/2)$ trovata precedentemente e notando che

$$\frac{\Gamma(1/2)\Gamma(1/2)}{\Gamma(3/2)} = 2\Gamma(1/2) = -\Gamma(1 - 1/2)$$

il secondo pezzo si riscrive come

$$-\frac{1}{2a^{1/2}} \Gamma(1 - 1/2) \frac{\Gamma(D/2)}{\Gamma(D/4)} {}_1F_1(D/4 + 1/2, 3/2, 1/4a)$$

Sommando i due pezzi e ricordandosi del fattore moltiplicativo antecedente alle due sommatorie, ottengo che:

$$\int_0^{\infty} dt t^{D/2-1} e^{-t} e^{-at^2} = 2^{-D/2} a^{-D/4} \Gamma(D/2) U(D/4, 1/2, 1/4a)$$

Bibliografia

- [1] A. Einstein, Sitzungsger. Kgl. Preuss. Akad. Wiss. , 1924,**261** , (1924)
- [2] L. Salasnich, J. Math. Phys. , **41**, 8016, (2000)
- [3] F. Dalfovo, S. Giorgini, L. P. Pitaevskii, S. Stringari, Rev. Mod. Phys., **71**, 463, (1999)
- [4] S. Giorgini, L. P. Pitaevskii, S. Stringari, Rev. Mod. Phys., **80** , 1215, (2008)
- [5] L. Salasnich, Nuovo Cim. , **B117**, 637-646, (2002)
- [6] K. C. Wright, R. B. Blakestad, C. J. Lobb, W. D. Phillips, G. K. Campbell, Phys. Rev. Lett., 025302, (2013)
- [7] M. Albiez, R. Gati, J. Fölling, S. Hunsmann, M. Cristiani M. K. Oberthaler, Phys. Rev. Lett. , 010402, (2005)
- [8] C.-F. Du, X.-M. Kong, Physica B: Condensed Matter, **407**, 12, (2012)
- [9] Z. X. Wang, D. R. Guo, Special Functions, World Scientific Publishing, (1989)