Università degli Studi di Padova

Dipartimento di Matematica "Tullio Levi-Civita"

Corso di Laurea Triennale in Matematica

Sul problema del trasporto ottimo

Relatore:
Prof. Andrea Marson

Laureando: Simone Vecchi
Matricola: 1216915

ANNO ACCADEMICO 2021/2022
23 Settembre 2022

Alla mia famiglia

Introduzione

Il problema del trasporto ottimo venne studiato per la prima volta in Francia nel 1781, con un lavoro di Gaspard Monge intitolato *"Mémoire sur la théorie des déblais et des remblais."* In tale lavoro venne affrontato il problema, prettamente militare,di minimizzare il costo di trasporto di materiale dal luogo di scavo al luogo di utilizzo per la costruzione di fortificazioni.
Successivamente la teoria ebbe un ulteriore sviluppo negli anni '40, grazie ai lavori di L.Kantorovich, nei quali studiò il modo migliore di distribuire beni dai luoghi di produzione a quelli di vendita. Tali lavori ebbero importanti applicazioni economiche, che portarono Kantorovich a vincere il premio Nobel per l'economia nel 1975.
Un ulteriore sviluppo della teoria si verificò negli anni '80 grazie ai lavori di Y. Brenier e L. Rüschendorf. Tali lavori mostrarono un collegamento tra PDE, dinamica dei fluidi, analisi funzionale e la teoria del trasporto ottimo.

La tesi è divisa in tre principali capitoli.
Nel primo capitolo, dopo aver introdotto il problema del trasporto ottimo nelle formulazioni di Monge e Kantorovich, viene studiata l'esistenza di soluzioni per il problema di Kantorovich e successivamente viene presentata la formulazione duale di Kantorovich del problema.

Nel secondo capitolo si studia il problema del trasporto ottimo in $\mathbb{R}^n$ con funzione costo uguale al quadrato della norma Euclidea, fino ad arrivare ai teoremi di Knott-Smith e di Brenier.

Nel terzo ed ultimo capitolo, sempre nelle ipotesi del capitolo precedente, si studia la regolarità della mappa di trasporto ottimo. In particolare si mostra la relazione tra la mappa di trasporto ottimo e l'equazione di Monge-Ampère e grazie ad un teorema di Caffarelli si studia la regolarità delle soluzioni di quest'ultima.

Indice

Notazione

Dato (X, τ) spazio topologico, indichiamo con:

- $\mathcal{P}(X)$ insieme delle misure di probabilità borelliane su X
- $\mathcal{M}(X)$ insieme delle misure borelliane con segno finite su X
- $\mathcal{M}^+(X)$ insieme delle misure borelliane finite e non negative su X
- Data $\mu \in M(X)$ e E insieme misurabile, si definisce la misura $\mu \llcorner E$ come
$$\mu \llcorner E(B) := \mu(E \cap B)$$
- Dato un insieme A indichiamo con $\#A$ la sua cardinalità

Capitolo 1

Teoria generale

1.1 Formulazione di Monge-Kantorovich

La formulazione originale del problema del trasporto ottimo fu presentata da Monge come segue.
Siano (X, μ), (Y, ν) due spazi di probabilità, e sia $c : X \times Y \to \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ funzione misurabile.
Ricordiamo la definizione di Push forward :

Definizione 1 (Push forward)**.** Siano dati due spazi topologici X, Y, $\mu \in \mathcal{M}(X)$ e una funzione borelliana $T : X \to Y$. Il Push forward di μ tramite T è la misura borelliana definita da

$$T_{\#}\mu(E) = \mu(T^{-1}(E)).$$

Sia $\Psi(\mu, \nu)$ l'insieme delle mappe di trasporto ammissibili, ovvero l'insieme delle mappe T : $X \to \ Y$ misurabili e tali che $T\#\mu = \nu$. Il problema di Monge è allora il seguente:

$$\min_{T \in \Psi(\mu,\nu)} \int_X c(x, T(x))\, d\mu(x) \tag{1.1}$$

Tale formulazione richiede l'ipotesi che la massa non venga divisa, ovvero che ad ogni locazione x in X venga associata un'unica destinazione y in Y.

In generale, il problema di Monge non è ben posto. Infatti, come mostra il seguente esempio, indipendentemente dalla funzione costo, si possono trovare misure μ e ν per le quali l'insieme delle mappe ammissibili è vuoto.

Esempio 1. Sia $X = Y = \mathbb{R}^n$, $\nu = \mathcal{L}^n \llcorner [0,1]^n$ e $\mu = \delta_0$. Allora ogni mappa T : $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ misurabile soddisfa $T\#\mu = \delta_{T(0)}$, ovvero $T\#\mu \neq \nu$.
Infatti $T\#\mu$ è atomica, mentre ν è diffusa (i.e. priva di atomi).

E' quindi indispensabile procedere con una visione più generale del problema. La formulazione di Kantorovich in questo senso fornisce una versione debole del problema di Monge.
Siano (X, μ), (Y, ν) e $c : X \times Y \to \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ come sopra. Sia $\Pi(\mu, \nu)$ l'insieme delle misure π di probabilità su $X \times Y$ con misure marginali μ su X e ν su Y ovvero:

$$\pi[A \times Y] = \mu[A], \qquad \pi[X \times B] = \nu[B]$$

per ogni insieme misurabile A di X e B di Y.
Questo è equivalente a chiedere che per ogni coppia di funzioni $(\phi, \psi) \in L^1(d\mu) \times L^1(d\nu)$ o in $L^\infty(d\mu) \times L^\infty(d\nu)$ valga:

$$\int_{X \times Y} [\phi(x) + \psi(y)] d\pi(x, y) = \int_X \phi(x) d\mu(x) + \int_Y \psi(x) d\nu(x)$$

Infatti l'uguaglianza sopra vale per funzioni caratteristiche e quindi per coppie di funzioni in $L^1(d\mu) \times L^1(d\nu)$. Il problema del trasporto ottimo nella formulazione di Kantorovich, assume la seguente forma:

$$\min_{\pi \in \Pi(\mu,\nu)} \int_{X \times Y} c(x, y)\, d\pi(x, y) \tag{1.2}$$

La formulazione di Kantorovich presenta un notevole vantaggio in quanto l'insieme $\Pi(\mu, \nu)$ è sempre non vuoto. Infatti la misura prodotto
$\mu \otimes \nu$ appartiene a $\Pi(\mu, \nu)$.

La formulazione di Kantorovich è più generale della formulazione di Monge. Infatti ad ogni mappa di trasporto $T : X \to Y$ si può associare una misura di probabilità π_T in $P(X, Y)$ come segue:

$$\pi_T = (Id \times T)\#\mu.$$

Per la proposizione 4 in appendice si verifica facilmente, essendo $\nu[Y] = 1$, che

$$\int_{X\times Y} c(x, y) d\pi_T(x, y) = \int_X c(x, T(x)) d\mu(x).$$

A questo punto, resta da vedere sotto quali ipotesi la misura π_T appartiene a $\Pi(\mu, \nu)$. Deve verificarsi, per ogni sottoinsieme misurabile $B \subset Y$

$$\nu[B] = \mu[T^{-1}(B)].$$

Quindi se $\nu = T\#\mu$ si ha $\pi_T \in \Pi(\mu, \nu)$.

Esempio 2. Supponiamo che X e Y siano due spazi discreti e che ogni punto abbia la stessa massa:

$$\mu = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \delta_{x_i}, \qquad \nu = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \delta_{y_i}$$

L'insieme $\pi \in \Pi(\mu, \nu)$ è quindi l'insieme delle matrici bistocastiche $n \times n$ $\pi = (\pi_{ij})$, ovvero delle matrici tali che π_{ij} è non negativo per ogni i, j e tali che

$$\forall j, \quad \sum_{i=1} \pi_{ji} = 1; \quad \forall i, \quad \sum_{j=1} \pi_{ij} = 1$$

In tal caso il problema di Kantorovich è quindi

$$\min_{B_n} \ \frac{1}{n}\sum_{i,j} \pi_{i,j} c(x_i, y_j)$$

ove B_n è l'insieme delle matrici bistocastiche $n \times n$.

Con il problema (1.1) il problema del trasporto ottimo trova quindi una buona formulazione. Inoltre, come vedremo, sotto ragionevoli ipotesi sugli spazi (X, μ), (Y, ν) e su c, tale problema ammette soluzione unica. Scopo del prossimo paragrafo è quello di indagare esistenza e unicità della soluzione del problema (1.1) . Diamo prima la seguente definzione:

Definizione 2. Definiamo il funzionale costo come la funzione $C : \Pi(\mu, \nu) \to [0, +\infty]$ tale che

$$C(\pi) = \int_{X \times Y} c(x, y) d\pi.$$

1.2 Esistenza di piani ottimali

In questa sezione diamo una dimostrazione dell'esistenza di piani di tasporto ottimali. Abbiamo bisogno di alcune definizioni e risultati preliminari.

Lemma 1 (lemma tecnico)**.** Siano (X, d) spazio metrico, $c : X \to [0, +\infty]$ funzione semicontinua inferiormente. Allora esiste una successione $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$ che verifica $\forall k$ le seguenti proprietà

- $c_k : X \to [0, k]$,
- c_k é k-lipschitziana,
- $0 \le c_k(x) \le c_{k+1}(x) \le c(x) \quad \forall x \in X$,
- $\sup_{k\in\mathbb{N}} c_k(x) = c(x) \quad \forall x \in X$

Dimostrazione. Definiamo per $k \in \mathbb{N}^+$ e $x \in X$

$$c_k(x) := \inf_{x' \in X} \{c(x') \wedge k + k d_X(x, x')\}$$

$(c_k)_k$ soddisfa tutte le proprietà richieste. Infatti per $k \in \mathbb{N}$ si verifica che $c_k(x) \in [0, k]$ per ogni $x \in X$. Inoltre la funzione $g_{k,x'}(x) := c(x') \wedge k + k d_X(x, x')$ è k-lipschitziana e quindi c_k è k-lipschitziana per ogni k. Inoltre essendo

$$0 \le g_{k,x'}(x) \le g_{k+1,x'}(x) \le c(x)$$

si ha che $0 \le c_k(x) \le c_{k+1}(x) \le c(x), \quad \forall x \in X$. Inoltre sicuramente vale per $x \in X$

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} c_k(x) \le c(x).$$

Dobbiamo quindi mostrare la disuguaglianza opposta.
Per ogni $k \in \mathbb{N}$ esiste x'_k tale che

$$c(x'_k) \wedge k + kd_X(x, x'_k) \leq c_k(x) + 2^{-k}$$

Essendo $\sup_{k\in\mathbb{N}} c_k(x) < \infty$, deve valere $d(x, x'_k) \to 0$. Sfruttando la semicontinuità inferiore di c si ha quindi

$$c(x) \leq \liminf_{k\to\infty} c(x'_k) = \liminf_{k\to\infty} c(x'_k) \wedge k =\leq \lim_{k\to\infty} c_k(x) + 2^{-k} = \sup_{k\in\mathbb{N}} c_k(x)$$

□

Definizione 3 (Convergenza debole per misure di Radon)**.** Sia X spazio topologico, $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di misure in $\mathcal{M}(X)$ e μ_∞ una misura in $\mathcal{M}(X)$. Si dice che μ_n converge debolmente* a μ_∞, e si indica con $\mu_n \rightharpoonup^* \mu_\infty$, se per ogni funzione test $f \in C_b$ vale

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f d\mu_n = \int_X f d\mu_\infty$$

Si dimostra facilmente che se X, Y sono spazi metrici allora gli spazi $\mathcal{M}^+(X)$ e $\mathcal{P}(X)$ sono chiusi rispetto alla convergenza debole*. Mostriamo che anche $\Pi(\mu, \nu)$ è chiuso rispetto a tale convergenza.

Lemma 2. $\Pi(\mu, \nu)$ è chiuso in $\mathcal{M}(X \times Y)$ rispetto alla convergenza debole*.

Dimostrazione. Sia$(\pi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di misure in $\Pi(\mu, \nu)$ convergente debole* a π_∞ in $\mathcal{M}(X \times Y)$. Per quanto detto sopra sappiamo che $\pi_\infty \in \mathcal{P}(X \times Y)$. Dobbiamo mostrare che $\pi_\infty \in \Pi(\mu, \nu)$. Prese $P_X : X \times Y \to X$, $P_Y : X \times Y \to Y$ proiezioni sulle componenti x e y rispettivamente, dobbiamo mostrare che $P_X\#\pi_\infty = \mu$ e $P_Y\#\pi_\infty = \nu$. Ogni funzione test $f \in C_b(X)$ può essere vista come $\tilde{f} \in C_b(X \times Y)$ scrivendo $\tilde{f} = f \circ P_X$. Vale quindi

$$\begin{aligned}\int_{X\times Y} f \circ P_X d\pi_\infty = \int_{X\times Y} \tilde{f} d\pi_\infty = \lim_{n\to\infty} \int_{X\times Y} \tilde{f} d\pi_n \\ = \lim_{n\to\infty} \nu(Y) \int_X \tilde{f} d\mu = \int_X \tilde{f} d\mu\end{aligned}$$

Dalla formula del cambio di misura (si veda appendice proposizione 4) si ha che $P_X\#\pi_\infty = \mu$. Allo stesso modo si mostra che $P_Y\#\pi_\infty = \nu$.

□

Mostriamo ora che il funzionale costo $\mathcal{C} : \Pi(\mu, \nu) \to [0, \infty]$, sotto certe ipotesi sulla funzione costo, è semicontinuo inferiormente rispetto la convergenza debole*.

Teorema 1 (Semicontinuità inferiore del funzionale costo)**.** Supponiamo che la funzione costo c sia semicontinua inferiormente. Allora il funzionale costo $\mathcal{C} : \Pi(\mu, \nu) \to [0, \infty]$ è semicontinuo inferiormente rispetto la convergenza debole*.

Dimostrazione. Sia $(\pi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di misure in $\Pi(\mu, \nu)$ convergente debole* a π_∞ .Dobbiamo mostrare che

$$\mathcal{C}(\pi_\infty) \leq \liminf_{n\to\infty} \mathcal{C}(\pi_n)$$

Come abbiamo già visto $\pi_\infty \in \Pi(\mu, \nu)$. Per il lemma 1, esiste una successione di funzioni $(c_k)_k$ lipschitziane e limitate tali che $\forall (x, y) \in X \times Y$ vale:

- $0 \leq c_k(x, y) \leq c_{k+1}(x, y) \leq c(x, y)$
- $\sup_{k\in\mathbb{N}} c_k(x, y) = c(x, y)$

Quindi $\forall k \in \mathbb{N}$, essendo le c_k funzioni test ammissibili, dalla convergenza debole* si ha:

$$\liminf_{n\to\infty} \mathcal{C}(\pi_n) \geq \liminf_{n\to\infty} \int_{X\times Y} c_k d\pi_n = \int_{X\times Y} c_k d\pi_\infty$$

Per il teorema di Beppo Levi si ha quindi:

$$\liminf_{n\to\infty} \mathcal{C}(\pi_n) \geq \sup_{k\in\mathbb{N}} \int_{X\times Y} c_k d\pi_\infty = \int_{X\times Y} c d\pi_\infty = \mathcal{C}(\pi_\infty)$$

□

A questo punto per mostrare l'esistenza di piani ottimali, non resta che studiare la compattezza di $\Pi(\mu, \nu)$.
Richiamiamo brevemente alcune definizioni e risultati che ci saranno utili in questo.

Definizione 4 (Spazio Polacco)**.** Uno spazio metrico (X, d) si dice polacco se è completo e separabile.

Definizione 5 (Equi-tightness)**.** Una famiglia di misure positive $F \subset M^+(X)$ si dice equi-tight se $\forall \epsilon > 0$ esiste un compatto $K \subset X$ tale che $\forall \mu \in F$ si ha

$$\mu(X \setminus K) < \epsilon$$

Teorema 2 (Prokhorov)**.** Dato (X, d) spazio polacco e $\mathcal{F}$ famiglia in $\mathcal{P}(X)$ sono equivalenti:

- $\mathcal{F}$ è equi-tigth
- La chiusura di $\mathcal{F}$ è sequezialmente debole* compatta

Per una dimostrazione del teorema di Prokhorov vedere [3].

Lemma 3 (lemma di Ulam)**.** Sia (X, d) spazio polacco e $\mu \in \mathcal{M}^+(X)$. Allora $\forall \epsilon > 0$ esiste un compatto $K \subset X$ tale che $\mu(X \setminus K) < \epsilon$.

Dimostrazione. Sia $D = \{x_i | i \in \mathbb{N}\}$ insieme denso numerabile in X. Per ogni $k \in \mathbb{N}^+$ vale

$$X = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \overline{B}(x_i, 2^{-k}).$$

Essendo μ misura finita, per ogni $k \in \mathbb{N}$ esiste $n(k) \in \mathbb{N}$ tale che

$$\mu\bigg(X \setminus \bigcup_{i \in \leq n(k)} \overline{B}(x_i, 2^{-k})\bigg) < \frac{\epsilon}{2^{k+1}}.$$

Definiamo l'insieme

$$K := \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \bigg(\bigcup_{i \leq n(k)} \overline{B}(x_i, 2^{-k})\bigg).$$

Si vede che K è totalmente limitato ed è chiuso. Essendo (X, d) completo, vale quindi K completo. Quindi K è compatto. Infine

$$\mu(X \setminus K) \leq \sum_{k \in \mathbb{N}} \mu\bigg(X \setminus \bigcup_{i \in \leq n(k)} \overline{B}(x_i, 2^{-k})\bigg) < \epsilon.$$

□

Proposizione 1. Siano X,Y spazi polacchi $\mu \in \mathcal{P}(X)$,$\nu \in \mathcal{P}(Y)$. Allora l'insieme $\Pi(\mu,\nu)$ è sequenzialmente compatto rispetto la convergenza debole*.

Dimostrazione. Come abbiamo già visto $\Pi(\mu,\nu)$ è chiuso rispetto la convergenza debole*. Basta quindi mostrare che è relativamente compatto. Per il lemma di Prokhorov è sufficiente mostrare che $\Pi(\mu,\nu)$ è equi-tigth. Sia $\epsilon > 0$. Per il lemma di Ulam esistono insiemi compatti $K \subset X$,$L \subset Y$, tali che

$$\mu(X \setminus K) < \frac{\epsilon}{2}, \quad \nu(Y \setminus L) < \frac{\epsilon}{2}.$$

$K \times L$ è compatto in $X \times Y$ e quindi presa $\pi \in \Pi(\mu,\nu)$ si ha

$$\pi((X \times Y) \setminus (K \times L)) \leq \pi((X \setminus K) \times Y) + \pi(X \times (Y \setminus L))$$

$$= \mu(X \setminus K) + \nu(Y \setminus L) < \epsilon.$$

□

Si noti che l'ipotesi che X,Y siano spazi polacchi è stata fondamentale per potere usare il lemma di Ulam.
A questo punto siamo in grado di dimostrare l'esistenza del minimo per il problema di Kantorovich.

Teorema 3 (Esistenza del minimo per il problema di Kantorovich)**.** Siano X,Y spazi polacchi $\mu \in \mathcal{P}(X)$,$\nu \in \mathcal{P}(Y)$. Allora il funzionale costo $\mathcal{C}$ ammette minimo su $\Pi(\mu,\nu)$.

Dimostrazione. L'insieme $\Pi(\mu,\nu)$ è sequenzialmente compatto rispetto la convergenza debole*. Il funzionale costo $\mathcal{C}$ è semicontinuo inferiormente rispetto la convergenza debole* e si può quindi concludere. □

1.3 Formulazione duale di Kantorovich

In questa sezione introdurremo la formula di dualità di Kantorovich, seguendo il testo [7]. Per mostrare la generalità di tale formula, resteremo sempre nelle ipotesi di X, Y spazi polacchi.

Teorema 4. [Dualità di Kantorovich] Siano X,Y spazi polacchi $\mu \in \mathcal{P}(X)$,$\nu \in \mathcal{P}(Y)$. Sia $c : X \times Y \to \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ una funzione costo semicontinua inferiormente.
Per $\pi \in \Pi(\mu,\nu)$ e $(\phi,\psi) \in L^1(d\mu) \times L^1(d\nu)$, si definisca

$$I[\pi] = \int_{X\times Y} c(x,y)d\pi(x,y), \quad J(\phi,\psi) = \int_X \phi d\mu(x) + \int_Y \psi d\nu(y).$$

Sia Φ_c l'insieme delle coppie di funzioni $(\phi,\psi) \in L^1(d\mu) \times L^1(d\nu)$ tali che

$$\phi(x) + \psi(y) \leq c(x,y)$$

per $d\mu$ q.o. x e $d\nu$ q.o. y.
Allora

$$\inf_{\Pi(\mu,\nu)} I[\pi] = \sup_{\Phi_c} J(\phi,\psi) \tag{1.3}$$

Inoltre il valore del sup nella (1.3) non cambia se lo si restringe alle funzioni continue limitate.

Una disuguaglianza della (1.3) è semplice da dimostrare. Vale infatti il seguente risultato.

Proposizione 2. Sotto le ipotesi del teorema 4, vale

$$\sup_{\Phi_c \cap C_b} J(\phi,\psi) \leq \sup_{\Phi_c \cap L^1} J(\phi,\psi) \leq \inf_{\Pi(\mu,\nu)} I[\pi].$$

Dimostrazione. La prima disuguaglianza è banale in quanto $C_b \times C_b \subset L^1(d\mu) \times L^1(d\nu)$.
Sia ora $(\phi,\psi) \in \Phi_c \cap L^1$ e sia $\pi \in \Pi(\mu,\nu)$. Per definizione di $\Pi(\mu,\nu)$ si ha

$$J(\phi,\psi) = \int_X \phi d\mu + \int_Y \psi d\nu = \int_{X\times Y} \phi(x) + \psi(y) d\pi(x,y).$$

Ora $\phi(x) + \psi(y) \leq c(x,y)$ π q.o. Infatti siano N_x, N_y insiemi misurabili tali che $\mu[N_x], \nu[N_y] = 0$ e tali che valga la disuguaglianza sopra per ogni $(x,y) \in N_x^c \times N_y^c$. Allora siccome π ha come marginali μ,ν si ha $\pi[N_x \times Y] =$

$\mu[N_x] = 0$,$\pi[X \times N_y] = \nu[N_y] = 0$ e quindi $\pi[(N_x^c \times N_y^c)^c] = 0$.
Di conseguenza

$$\int_{X\times Y} \phi(x) + \psi(y) d\pi(x,y) \leq \int_{X\times Y} c(x,y) d\pi(x,y) = I[\pi].$$

prendendo il sup e l'inf si conclude. □

Prima di dimostrare il teorema 4, richiamiamo alcuni risultati sulle funzioni convesse. L'idea è di sfruttare un principio di min-max per passare da inf a sup in (1.3).

Definizione 6. Sia E spazio normato, Θ funzione convessa su E a valori in $\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$. Si definisce trasformata di Legendre-Frenchel di Θ e si indica con Θ^*, la funzione definita sul duale topologico di E , E^* dalla formula:

$$\Theta^*(z^*) = \sup_{z\in E}[\langle z^*, z\rangle - \Theta(z)].$$

Teorema 5 (dualità di Fenchel-Rockafellar)**.** Sia E spazio normato, E^* il duale topologico, e Θ, Ξ due funzione convesse su E a valori in $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Siano Θ^*, Ξ^* le trasformate di Legendre-Fenchel di Θ, Ξ rispettivamente. Assumiamo che esista $z_0 \in E$ tale che

$$\Theta(z_0) < +\infty, \Xi(z_0) < +\infty$$

$$\Theta \text{ sia continua in } z_0.$$

Allora

$$\inf_E[\Theta + \Xi] = \max_{z^*\in E^*}[-\Theta^*(-z^*) - \Xi^*(z^*)]. \tag{1.4}$$

Dimostrazione. Dobbiamo provare che

$$\sup_{z^*\in E^*} \inf_{x,y\in E} \left\{ \Theta(x) + \Xi(y) + \langle z^*, x-y\rangle \right\} = \inf_E \left\{ \Theta(x) + \Xi(x) \right\}.$$

Scegliendo $x = y$ si vede subito che il membro di sinistra è minore uguale del membro di destra. Quindi basta solo mostrare l'esistenza di una forma lineare $z^* \in E^*$ tale che

$$\forall x, y \in E, \quad \Theta(x) + \Xi(y) + \langle z^*, x-y\rangle \geq m \equiv \inf \left\{ \Theta + \Xi \right\}$$

Siccome $\Theta(z_0) + \Xi(z_0) < +\infty$, m è finito. Sia

$$C = \Big\{(x, \lambda) \in E \times \mathbb{R};\quad \lambda > \Theta(x)\Big\},$$

$$C' = \Big\{(y, \mu) \in E \times \mathbb{R};\quad \mu \leq m - \Xi(y)\Big\}.$$

Siccome Θ, Ξ sono convesse, così sono anche C e C'.Inoltre $(z_0, \Theta(z_0) + 1) \in Int(C)$, e in particolare C ha parte interna non vuota.Questo implica che $\overline{C} = \overline{Int(C)}$. Inoltre C e C' sono disgiunti perché $m = \inf(\Theta+\Xi)$. Quindi per il teorema di Hann-Banach geometrico esiste una forma lineare $l \in (E \times \mathbb{R})^*$ tale che

$$\inf_{c \in C}\langle l, c\rangle = \inf_{c \in Int(C)}\langle l, c\rangle \geq \sup_{c' \in C'}\langle l, c'\rangle.$$

Quindi esiste $w^* \in E^*$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, $(w^*, \alpha) \neq (0, 0)$, tale che

$$\langle w^*, x\rangle + \alpha\lambda \geq \langle w^*, y\rangle + \alpha\mu$$

non appena $\lambda > \Theta(x)$ e $\mu \leq m - \Xi(y)$. Ma questo è possibile solo se $\alpha > 0$; qunidi, se $z^* = \frac{w^*}{\alpha}$ si ha

$$\langle z^*, x\rangle + \lambda \geq \langle z^*, y\rangle + \mu$$

In particolare

$$\langle z^*, x\rangle + \Theta(x) \geq \langle z^*, y\rangle + m - \Xi(y).$$

Siccome questo vale per ogni x e y in E, si conclude. □

Siamo ora pronti per dimostrare il teorema 4

Dimostrazione. L'idea è di usare il principio di dualità di Fenchel-Rockafellar. Dividiamo la dimostrazione in più step di crescente generalità.

1. Supponiamo che X,Y siano compatti e che c sia continua su $X \times Y$. Sia

$$E = C_b(X \times Y)$$

l'insieme delle funzioni continue limitate, dotato della norma infinito. Per il teorema di Riesz (si veda l'appendice), il duale topologico di E può essere identificato con lo spazio delle misure di Radon

$$E^* = \mathcal{M}(X \times Y)$$

dotato della norma variazione totale.
Introduciamo

$$\Theta : u \in C_b(X \times Y) \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{se } u(x,y) \geq -c(x,y), \\ +\infty & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$\Xi : u \in C_b(X \times Y) \longmapsto \begin{cases} \int_X \phi d\mu + \int_Y \psi d\nu & \text{se } u(x,y) = \phi(x) + \psi(x), \\ +\infty & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Si noti che Ξ è ben definita. Si noti inoltre che le ipotesi del teorema 5 sono verificate con $z_0 = 1$. Quindi l'equazione (1.4) è verificata. Si ha quindi

$$\inf\left\{\int_X \phi \, d\mu + \int_Y \psi \, d\nu; \quad \phi(x) + \psi(x) \geq -c(x,y)\right\}$$
$$= -\sup\{J(\phi,\psi); \quad (\phi,\psi) \in \Phi_c\}.$$

Ricaviamo ora le trasformate di Legendre-Fenchel di Θ, Ξ.

$$\Theta^*(-\pi) = \sup_{u \in C_b(X \times Y)} \left\{-\int u(x,y) d\pi(x,y); \quad u(x,y) \geq -c(x,y)\right\}$$
$$= \sup_{u \in C_b(X \times Y)} \left\{\int u(x,y) d\pi(x,y); \quad u(x,y) \leq c(x,y)\right\}.$$

- Se π non è una misura non negativa, allora esiste una funzione non positiva $v \in C_b(X \times Y)$ tale che $\int v d\pi > 0$.Allora scegliendo $u = \lambda v$, per $\lambda \to +\infty$ si vede che l'estremo superiore è $+\infty$.

- Se invece π è non negativa, allora l'estremo superiore è chiaramente $\int c d\pi$.

Quindi

$$\Theta^*(-\pi) = \begin{cases} \int c(x,y)d\pi(x,y) & \text{se}\, \pi \in \mathcal{M}^+(X \times Y) \\ +\infty & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Con argomenti simili si vede che

$$\Xi^*(\pi) = \begin{cases} 0 \quad \text{se} \quad \forall(\phi,\psi) \in C_b \times C_b, \quad \int [\phi(x) + \psi(y)] d\pi(x,y) = \int \phi d\mu + \int \psi d\nu, \\ +\infty \quad \text{altrimenti} \end{cases}$$

Mettendo tutto assieme e cambiando segno si ha quindi

$$\inf_{\Pi(\mu,\nu)} I[\pi] = \sup_{\Phi_c \cap C_b} J(\phi,\psi).$$

2.Indeboliamo ora l'ipotesi di compattezza di X e Y. Assumiamo che c sai limitata e uniformemente continua. Definiamo

$$\|c\|_\infty = \sup_{X \times Y} c(x,y)$$

L'idea è di ricondursi al caso compatto tramite troncamento. Sia π^* il piano ottimale per il problema di Kantorovich ovvero

$$I[\pi^*] = \inf_{\pi \in \Pi(\mu,\nu)} I[\pi]$$

Sia $\delta > 0$. $\Pi(\mu,\nu)$ è equi-tigth quindi esistono $X_0 \subset X, Y_0 \subset Y$ compatti e tali che

$$\mu[X \setminus X_0] \leq \delta, \qquad \nu[Y \setminus Y_0] \leq \delta$$

e quindi

$$\pi^*((X \times Y) \setminus (X_0 \times Y_0)) \leq 2\delta.$$

Definiamo

$$\pi_{*0} = \frac{1_{X_0 \times Y_0}}{\pi_*[X_0 \times Y_0]} \pi_*$$

notiamo che è una misura di probabilità su $X_0 \times Y_0$, e siano μ_0, ν_0 le misure marginali su X_0, Y_0 rispettivamente. Definiamo $\Pi_0(\mu,\nu)$ come l'insieme delle misure di probabilità π_0 su $X_0 \times Y_0$ con marginali μ_0, ν_0 e definiamo I_0 su $\Pi_0(\mu, \nu)$ come

$$I_0(\pi_0) = \int_{X_0 \times Y_0} c(x,y) d\pi_0(x,y).$$

Sia $\tilde{\pi}_0 \in \Pi_0(\mu_0, \nu_0)$ che minimizza I_0

$$I_0[\tilde{\pi}_0] = \inf_{\pi_0 \in \Pi_0(\mu_0,\nu_0)} I_0[\pi_0]$$

A partire da $\tilde{\pi}_0$ costruiamo una misura $\tilde{\pi} \in \Pi(\mu, \nu)$ come combinazione di $\tilde{\pi}_0$ e di π_*:

$$\tilde{\pi} = \pi_*[X_0 \times Y_0]\tilde{\pi}_0 + 1_{(X_0 \times Y_0)^c}\pi_*$$

Quindi

$$\begin{aligned} I[\tilde{\pi}] &= \pi_*[X_0 \times Y_0] I_0[\tilde{\pi}_0] + \int_{(X_0 \times Y_0)^c} c(x,y) d\pi_* \\ &\leq I_0[\tilde{\pi}_0] + 2\|c\|_\infty \delta = \inf I_0 + 2\|c\|_\infty \delta \end{aligned}$$

Introduciamo ora il funzionale

$$J_0(\phi_0, \psi_0) = \int_{X_0} \phi_0 d\mu_0 + \int_{Y_0} \psi_0 d\nu_0$$

definito su $L^1(d\mu_0) \times L^1(d\nu_0)$. Per il punto 1, essendo X_0 e Y_0 compatti vale $\inf I_0 = \sup J_0$ ove l'estremo superiore è fatto rispetto alle coppie ammisibili, cioè le coppie $(\phi_0, \psi_0) \in L^1(d\mu_0) \times L^1(d\nu_0)$ tali che $\phi_0 + \psi_0 \leq c(x,y)$ per q.o x, y. In particolare esiste quindi una coppia ammissibile $(\tilde{\phi}_0, \tilde{\psi}_0)$ tale che

$$J_0(\tilde{\phi}_0, \tilde{\psi}_0) \geq \sup J_0 - \delta.$$

A partire da $(\tilde{\phi}_0, \tilde{\psi}_0)$ vorremo costruire una coppia (ϕ, ψ) ammissibile che sia efficiente nella minimizzazione di $J(\phi, \psi)$.
È utile garantire che la disuguaglainza $\tilde{\phi}_0(x) + \tilde{\psi}_0(y) \leq c(x,y)$ valga per ogni x e y e non q.o. Per fare questo possiamo ridefinire $(\tilde{\phi}_0, \tilde{\psi}_0)$ nel modo seguente. Siano N_x, N_y insiemi di misura nulla per cui vale la disuguaglianza per $(x,y) \in \mathbb{N}_x^c \times N_y^c$, e imporre che $(\tilde{\phi}_0, \tilde{\psi}_0)$ valga $-\infty$ su N_x, N_y rispettivamente. Proviamo ora a controllare $(\tilde{\phi}_0, \tilde{\psi}_0)$ da sotto in un punto di $X \times Y$. Sia $\delta \leq 1$. Siccome $J_0(0,0) = 0$, sappiamo che $\sup J_0 \geq 0$ e che quindi

$J_0(\tilde{\phi}_0,\tilde{\psi}_0) \geq -\delta \geq -1$.
Da

$$J_0(\tilde{\phi}_0, \tilde{\psi}_0) = \int_{X\times Y} [\tilde{\phi}_0(x) + \tilde{\psi}_0(y)] d\pi_0(x, y),$$

ove $\pi_0 \in \Pi_0(\mu_0, \nu_0)$, deduciamo che esiste una coppia $(x_0, y_0) \in X_0 \times Y_0$ tale che

$$\tilde{\phi}_0(x_0) + \tilde{\psi}_0(y_0) \geq -1.$$

Se al posto di $(\tilde{\phi}_0, \tilde{\psi}_0)$ usiamo $(\tilde{\phi}_0 + s, \tilde{\psi}_0 - s)$ per qualche $s \in \mathbb{R}$ il valore di $J_0(\tilde{\phi}_0, \tilde{\psi}_0)$ non cambia, Scegliendo bene s possiamo assumere che

$$\tilde{\phi}_0(x_0) \geq -\frac{1}{2}, \qquad \tilde{\psi}_0(y_0) \geq -\frac{1}{2}$$

Quindi $\forall (x, y) \in X_0 \times Y_0$ si ha

$$\tilde{\phi}_0(x) \leq c(x, y_0) - \tilde{\psi}_0(y_0) \leq c(x, y_0) + \frac{1}{2}$$

$$\tilde{\psi}_0(y) \leq c(x_0, y) - \tilde{\phi}_0(x_0) \leq c(x_0, y) + \frac{1}{2}.$$

Definiamo per $x \in X$,

$$\overline{\phi}_0(x) = \inf_{y\in Y_0} [c(x, y) - \tilde{\psi}_0(y)]$$

Si noti che da $\tilde{\phi}_0(x) \leq c(x, y) - \tilde{\psi}_0(y)$ si ha che $\tilde{\phi}_0 \leq \overline{\phi}_0$ su X_0. Questo implica che $J_0(\overline{\phi}_0, \tilde{\psi}_0) \geq J_0(\tilde{\phi}_0, \tilde{\psi}_0)$. Inoltre siamo in grado di controllare $\overline{\phi}_0$ da sopra e da sotto in termini di $c(x, y)$

$$\overline{\phi}_0(x) \geq \inf_{y\in Y_0} [c(x, y) - c(x_0, y)] - \frac{1}{2}$$

$$\overline{\phi}_0(x) \leq c(x, y) - \tilde{\psi}_0(y_0) \leq c(x, y_0) + \frac{1}{2}$$

Allo stesso modo definiamo per $y \in Y$

$$\overline{\psi}_0(y) = \inf_{x\in X} [c(x, y) - \overline{\phi}_0(x)].$$

Si vede che $(\overline{\phi}_0, \overline{\psi}_0) \in \Phi_c$. Inoltre si mostra facilmente che $J_0(\overline{\phi}_0, \overline{\psi}_0) \geq J_0(\overline{\phi}_0, \tilde{\psi}_0) \geq J_0(\tilde{\phi}_0, \tilde{\psi}_0)$. Inoltre per ogni $y \in Y$,

$$\overline{\psi}_0(y) \geq \inf_{x \in X} [c(x, y) - c(x, y_0)] - \frac{1}{2}$$

$$\overline{\psi}_0(y) \leq c(x_0, y) - \overline{\phi}_0(x_0) \leq c(x_0, y) + \frac{1}{2}$$

In particolare

$$\overline{\phi}_0(x) \geq -\|c\|_\infty - \frac{1}{2},$$
$$\overline{\psi}_0(y) \geq -\|c\|_\infty - \frac{1}{2}.$$

A questo punto il gioco è fatto. Infatti

$$J_0(\overline{\phi}_0, \overline{\psi}_0) = \int_X \overline{\phi}_0 d\mu + \int_Y \overline{\psi}_0 d\nu$$

$$= \int_{X \times Y} [\overline{\phi}_0(x) + \overline{\psi}_0(y)] d\pi_* = \pi_*[X_0 \times Y_0] \int_{X_0 \times Y_0} [\overline{\phi}_0(x) + \overline{\psi}_0(y)] d\pi_{*0}(x, y)$$

$$+ \int_{(X_0 \times Y_0)^c} [\overline{\phi}_0(x) + \overline{\psi}_0(y)] d\pi_*(x, y)$$

$$\begin{aligned}
&\geq (1 - 2\delta)\Big(\int_{X_0} \overline{\phi}_0 d\mu_0 + \int_{Y_0} \overline{\psi}_0 d\nu_0\Big) - (2\|c\|_\infty + 1)\pi_*[(X_0 \times Y_0)^c] \\
&\geq (1 - 2\delta) J_0(\overline{\phi}_0, \overline{\psi}_0) - 2(2\|c\|_\infty + 1)\delta \\
&\geq (1 - 2\delta) J_0(\tilde{\phi}_0, \tilde{\psi}_0) - 2(2\|c\|_\infty + 1)\delta \\
&\geq (1 - 2\delta)(\inf I_0 - \delta) - 2(2\|c\|_\infty + 1)\delta \\
&\geq (1 - 2\delta)(\inf I - (2\|c\|_\infty + 1)\delta) - 2(2\|c\|_\infty + 1)\delta.
\end{aligned}$$

Dall'arbitrarietà di δ si conclude che $\sup J(\phi, \psi) \geq \inf I$ come si voleva.

3. Torniamo ora al caso generale. Sia c_n successione crescente di funzioni non negative , uniformemente continue, tai che $c = \sup c_n$. Assumiamo c_n limitata (a meno di prendere $\inf(c_n, n)$).

Definiamo

$$I_n[\pi] = \int_{X \times Y} c_n d\pi.$$

Dal passo 2 sappiamo che vale

$$\inf_{\pi \in \Pi(\mu,\nu)} I_n[\pi] = \sup_{(\phi,\psi) \in \Phi_{cn}} J(\phi, \psi) \tag{1.5}$$

Vorremo mostare che

$$\inf_{\pi \in \Pi(\mu,\nu)} I[\pi] = \sup_n \inf_{\pi \in \Pi(\mu,\nu)} I_n[\pi] \tag{1.6}$$

e che

$$\sup_{(\phi,\psi) \in \Phi_{cn}} J(\phi, \psi) \leq \sup_{(\phi,\psi) \in \Phi_c} J(\phi, \psi) \tag{1.7}$$

Infatti la combinazione delle tre equazioni sopra implica che

$$\inf_{\pi \in \Pi(\mu,\nu)} I[\pi] \leq \sup_{(\phi,\psi) \in \Phi_c} J(\phi, \psi)$$

Ma la (1.7) è banale in quanto $\Phi_{c_n} \subset \Phi_c$, mentra la (1.6) è una conseguenza della continuità del funzionale costo rispetto la convergenza debole* e dalla compattezza di $\Pi(\mu, \nu)$ rispetto tale convergenza come visto del paragrafo precedente. $\square$

Capitolo 2

Funzione costo quadratico

In questo capitolo analizzeremo il problema del trasporto ottimo utilizzando come funzione costo la distanza al quadrato.
In particolare avremo $X = Y = \mathbb{R}^n$ e $c(x,y) = \frac{|x-y|^2}{2}$. Il problema sarà quindi minimizzare

$$I[\pi] = \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} \frac{|x-y|^2}{2} d\pi(x,y).$$

Considereremo misure di probabilità μ, ν su $\mathbb{R}^n$ con momento secondo finito, ovvero

$$M_2 := \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|x|^2}{2} d\mu(x) + \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|y|^2}{2} d\nu(y) < +\infty$$

Tale ipotesi garantisce che $I[\pi]$ sia finito su $\Pi(\mu,\nu)$.
Come visto nel capitolo precedente, il principio di dualità di Kantorovich garantisce che

$$\inf_{\pi \in \Pi(\mu,\nu)} I[\pi] = \sup_{(\phi,\psi) \in \Phi_c} J(\phi,\psi).$$

In questo capitolo vedremo come la scelta della funzione costo, offrirà più spunti nello studio del problema duale.

2.1 Problema duale

Iniziamo con il ricordare che $(\phi,\psi)\in\Phi_c \iff \phi(x)+\psi(y)\leq\frac{|x-y|^2}{2}$ per $d\mu$ quasi ogni x,$d\nu$ quasi ogni y. Riordinando i termini si ottiene:

$$x\cdot y\leq\left[\frac{|x|^2}{2}-\phi(x)\right]+\left[\frac{|y|^2}{2}-\psi(y)\right]$$

Definiamo $\tilde{\phi}(x)=\frac{|x|^2}{2}-\phi(x),\tilde{\psi}(y)=\frac{|y|^2}{2}-\psi(y)$. Nel seguito non indicheremo il simbolo $\tilde{}$. La dualità di Kantorovich assume quindi la seguente forma

$$\inf_{\pi\in\Pi(\mu,\nu)}I[\pi]=M_2-\sup\left\{\int(x\cdot y)d\pi(x,y);\qquad\pi\in\Pi(\mu,\nu)\right\},$$

e

$$\sup_{\Phi_c}J=M_2-\inf\left\{J(\phi,\psi);\qquad(\phi,\psi)\in\tilde{\Phi}\right\}$$

ove $\tilde{\Phi}$ è l'insieme delle coppie $(\phi,\psi)\in L^1(d\mu)\times L^1(d\nu)$ tali che per quasi ogni x,y

$$x\cdot y\leq\phi(x)+\psi(y).\tag{2.1}$$

Di conseguenza si ha

$$\sup\left\{\int(x\cdot y)d\pi(x,y);\qquad\pi\in\Pi(\mu,\nu)\right\}=\inf\left\{J(\phi,\psi);\,(\phi,\psi)\in\tilde{\Phi}\right\}.\tag{2.2}$$

Introduciamo ora una processo di doppia convessificazione. Siano $(\phi,\psi)\in\tilde{\Phi}$. per $d\nu$ quasi ogni $y\in Y$ definiamo la convessa coniugata

$$\phi^*(y):=\sup_x[x\cdot y-\phi(x)]\leq\psi(y)$$

Osservazione 1. L'estremo superiore nella precedente definizione va inteso nel seguente senso: Da $(\phi,\psi)\in\tilde{\Phi}$ sappiamo che esistono insiemi N_x,N_y con $\mu(N_x)=0,\nu(N_y)=0$ tali che 2.1 vale per ogni $(x,y)\in N_x\times N_y$. Ridefinendo $\phi=+\infty$ su N_x e $\psi=+\infty$ su N_y, allora possiamo definire l'estremo superiore che definisce ϕ^*.

Si noti che $\forall x,y\in\mathbb{R}^n$, $x\cdot y\leq\phi(x)+\phi^*(y)$. Di conseguenza $J(\phi,\psi)\geq J(\phi,\phi^*)$.

Allo stesso modo possiamo definire per $d\mu$ quasi ogni $x \in X$

$$\phi^{**}(x) := \sup_y [x \cdot y - \phi^*(y)] \leq \phi(x).$$

Come prima si ha ancora che $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$, $x \cdot y \leq \phi^{**}(x) + \phi^*(y)$ e $J(\phi, \phi^*) \geq J(\phi^{**}, \phi^*)$.
Di conseguenza

$$\inf_{(\phi,\psi)\in\tilde{\Phi}} J(\phi, \psi) \geq \inf_{\phi\in \ L^1(d\mu)} J(\phi^{**}, \phi^*).$$

Ipotizzando quindi che $(\phi^{**}, \phi^*) \in L^1(d\mu) \times L^1(d\nu)$ si ha chiaramente $(\phi^{**}, \phi^*) \in \tilde{\Phi}$ e si può quindi passare dall'inf sull'insieme $\tilde{\Phi}$ a l'inf sull'insieme delle coppie (ϕ^{**}, ϕ^*). Si noti inoltre che le funzioni ϕ^{**}, ϕ^* sono convesse e semicontinue inferiormente.
Il nostro obbiettivo è quello di mostrare il seguente teorema:

Teorema 6. Siano μ, ν misure si probabilità su $\mathbb{R}^n$, con momento secondo finito. Sia $\tilde{\Phi}$ definito come sopra. Allora, esiste una coppia (ϕ, ϕ^*) di funzioni coniugate, convesse e semicontinue inferiormente, tale che

$$\inf_{\tilde{\Phi}} J = J(\phi, \phi^*).$$

Per dimostrare tale teorema abbiamo bisogno del seguente importante lemma:

Lemma 4 (Lemma di doppia convessificazione)**.** Siano μ, ν misure di probabilità con supporto nei sottoinsiemi X, Y di $\mathbb{R}^n$, che soddisfano

$$M_2 = \int_X \frac{|x|^2}{2} d\mu(x) + \int_Y \frac{|y|^2}{2} d\nu(y) < +\infty.$$

Date ϕ, ψ funzioni misurabili a valori in $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ definiamo

$$\phi^*(y) = \sup_{x\in X} [x \cdot y - \phi(x)],$$

$$\psi^*(x) = \sup_{y\in Y} [x \cdot y - \psi(y)].$$

Sia $(\phi_k, \psi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ successione minimizzante J in $\tilde{\Phi}$. Allora

1. La successione (ϕ_k, ψ_k) può essere modificata su insiemi di misura nulla in modo che la disuguaglianza (2.1) valga per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, senza modificare il valore di $J(\phi_k, \psi_k)$.

2. Esiste una successione di numeri reali $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tale che

$$(\overline{\phi_k}, \overline{\psi_k}) = (\phi_k^{**} - a_k, \phi_k^{*} + a_k)$$

sia ancora una successione minimizzante J su $\tilde{\Phi}$, e che soddisfi

$$\forall x \in X,\, \forall y \in Y, \qquad \overline{\phi_k}(x) \geq -\frac{|x|^2}{2} \qquad \overline{\psi_k}(y) \geq -\frac{|y|^2}{2},$$

$$\liminf_{k\to\infty} \inf_{x\in X} \left(\overline{\phi_k}(x) + \frac{|x|^2}{2} \right) \leq \inf_{\tilde{\Phi}} J + M_2,$$

$$\liminf_{k\to\infty} \inf_{y\in Y} \left(\overline{\psi_k}(y) + \frac{|y|^2}{2} \right) \leq \inf_{\tilde{\Phi}} J + M_2.$$

3. In particolare scegliendo $X = Y = \mathbb{R}^n$, l'operazione $*$ coincide con l'usuale trasformata di Legendre e quindi

$$\inf_{\tilde{\Phi}} J = \inf_{\phi\in L^1(d\mu)} J(\phi^{**}, \phi^{*}).$$

Quindi l'estremo inferiore non cambia se ci si restringe al sottoinsieme di $\tilde{\Phi}$ formato dalle coppie di funzioni convesse coniugate e proprie.

Dimostrazione. Il punto 1 è già stato dimostrato nell'osservazione 1. Inoltre il punto 3 è una conseguenza diretta del punto 2. Resta quindi da mostrare il punto 2.
Sia (ϕ_k, ψ_k) una successione minimizzante J. Per il punto 1 possiamo assumere che per ogni x, y valga $\phi_k(x) \geq x \cdot y - \psi_k(y)$. Dato che ψ_k non è identicamente $+\infty$ deduciamo che ϕ_k è limitata da sotto da una affinità del tipo $x \cdot y_0 + b_0$, per qualche $y_0 \in Y$. Segue che

$$\phi_k^{*}(y_0) = \sup_{x\in X}[x \cdot y_0 - \phi_k(x)] \leq -b_0.$$

In particolare ϕ_k^* non è identicamente $+\infty$.
Allo stesso modo ϕ_k^* è limitata da sotto da una funzione affine. Questo implica che

$$a_k = \inf_{y \in Y} \left(\phi_k^*(y) + \frac{|y|^2}{2} \right)$$

è finito. Scegliamo

$$(\overline{\phi}_k, \overline{\psi}_k) = (\phi_k^{**} + a_k, \phi_k^* - a_k).$$

Si noti che $\overline{\phi}_k = (\overline{\psi}_k)^*$. Per costruzione

$$\inf_{y \in Y} \left(\overline{\psi}_k(y) + \frac{|y|^2}{2} \right) = 0.$$

Inoltre

$$\overline{\phi}_k(x) + \frac{|x|^2}{2} = (\overline{\psi}_k)^*(x) + \frac{|x|^2}{2} = \sup_{y \in Y} \left[x \cdot y - \overline{\psi}_k(y) + \frac{|x|^2}{2} \right]$$

$$\geq \sup_{y \in Y} \left[-\frac{|y|^2}{2} - \overline{\psi}_k(y) \right] = -\inf_{y \in Y} \left[\frac{|y|^2}{2} + \overline{\psi}_k(y) \right] = 0.$$

Mostriamo ora che $\overline{\phi}_k, \overline{\psi}_k$ sono integrabili. Sappiamo che

$$J(\overline{\phi}_k, \overline{\psi}_k) = J(\phi_k^{**}, \phi_k^*) \leq J(\phi_k, \psi_k) < +\infty$$

ovvero

$$\int_X \left(\frac{|x|^2}{2} + \overline{\phi}_k(x) \right) d\mu(x) + \int_Y \left(\frac{|y|^2}{2} + \overline{\psi}_k(y) \right) d\nu(y) < +\infty.$$

Siccome le due integrande sono non negative si conclude che sono integrabili. Inoltre avendo ipotizzato μ, ν con momento secondo finito, si ha che $\overline{\phi}_k \in L^1(d\mu), \overline{\psi}_k \in L^1(d\nu)$ e quindi $(\overline{\phi}_k, \overline{\psi}_k) \in \tilde{\Phi}$. Inoltre dalla precedente disuguaglianza segue che $(\overline{\phi}_k, \overline{\psi}_k)$ è una successione minimizzante. Da

$$J(\phi_k, \psi_k) + M_2 = \int_X \left(\phi_k(x) + \frac{|x|^2}{2} \right) d\mu(x) + \int_Y \left(\phi_k(y) + \frac{|y|^2}{2} \right) d\nu(y)$$

$$\geq \inf_{x \in X} \left(\phi_k(x) + \frac{|x|^2}{2} \right) + \inf_{y \in Y} \left(\phi_k(y) + \frac{|y|^2}{2} \right).$$

Si ha quindi

$$\liminf_{k\to\infty} \inf_{x\in X} \left(\phi_k(x) + \frac{|x|^2}{2} \right) \leq \liminf_{k\to\infty} \inf J(\phi_k, \psi_k) + M_2 = \inf_{\tilde{\Phi}} J + M_2.$$

Allo stesso modo, quanto visto sopra vale per ψ e la dimostrazione è conclusa.

$\square$

Siamo ora in grado di dimostare il teorema 6.

Dimostrazione. Dividiamo la dimostrazione in cinque passi.
Passo 1. Rimpiazziamo $x \cdot y$ con $\frac{|x+y|^2}{2}$; per fare ciò sommiamo delle funzioni integrabili nel seguente modo:

$$(\phi, \psi) \in \tilde{\Phi} \iff \left[\phi(x) + \frac{|x|^2}{2}\right] + \left[\psi(y) + \frac{|y|^2}{2}\right] \geq \frac{|x|^2}{2} + \frac{|y|^2}{2} + x \cdot y = \frac{|x+y|^2}{2}.$$

Sia (ϕ_k, ψ_k) successione minimizzante J. Per il lemma precedente possiamo supporre:

$$0 \leq \phi_k(x) + \frac{|x|^2}{2}, \qquad \psi_k(y) + \frac{|y|^2}{2},$$

$$\left[\phi_k(x) + \frac{|x|^2}{2}\right] + \left[\psi_k(y) + \frac{|y|^2}{2}\right] \geq \frac{|x+y|^2}{2} \geq 0.$$

Si osservi che è quindi tutto non negativo.

Passo 2. L'idea ora è quella di estrarre da $\phi_k(x) + \frac{|x|^2}{2}$ e $\psi_k(y) + \frac{|y|^2}{2}$, sottosuccessioni debolmente convergenti in L^1. Tuttavia tali successioni sono solamente limitate in L^1 e questo non ci permette di concludere. Procediamo con il troncare le due successioni: $\forall l \in \mathbb{N}$, definiamo ϕ_k^l, ψ_k^l nel seguente modo:

$$\phi_k^l(x) + \frac{|x|^2}{2} = \min\left(\phi_k(x) + \frac{|x|^2}{2}, l\right),$$

$$\psi_k^l(y) + \frac{|y|^2}{2} = \min\left(\psi_k(y) + \frac{|y|^2}{2}, l\right).$$

Si vede facilmente che :

$$\begin{cases} 0 \leq \phi_k^l(x) + \frac{|x|^2}{2} \leq l, \\ 0 \leq \psi_k^l(y) + \frac{|y|^2}{2} \leq l, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \phi_k^1 \leq \phi_k^2 \leq ... \leq \phi_k^l \leq ..., \\ \psi_k^1 \leq \psi_k^2 \leq ... \leq \psi_k^l \leq ..., \end{cases}$$

$$J(\phi_k^l, \psi_k^l) \leq J(\phi_k, \psi_k)$$

$$\phi_k^l(x) + \psi_k^l(y) \geq \min\left[\frac{|x+y|^2}{2}, l\right] - \left(\frac{|x|^2}{2} + \frac{|y|^2}{2}\right).$$

Passo 3. Per il passo precedente vale

$$\phi_k^l(x) = -\frac{|x|^2}{2} + O(l)$$

La successione ϕ_k^l è quindi limitata in L^1, equiintegrabile e quindi per il teorema di Dunford-Pettis (si veda appendice teorema (15)), a meno di estrarre sottosuccessioni

$$\phi_k^l \rightharpoonup \phi^l, \qquad k \to \infty.$$

Allo stesso modo di può trovare una sottosuccessione di $(\psi_k^l)_k$ che converge debolmente ad una certa ψ^l in $L^1(d\nu)$.
Con un procedimento di estrazione diagonale, si può estrarre usa successione in k tale che la convergenza valga per ogni l. Si ha quindi:

$$\begin{cases} \phi^1 \leq \phi^2 \leq ... \leq \phi^l \leq ..., \\ \psi^1 \leq \psi^2 \leq ... \leq \psi^l \leq ..., \end{cases}$$

$$J(\phi^l, \psi^l) = \lim_{k\to\infty} J(\phi_k^l, \psi_k^l) \leq \liminf_{k\to\infty} J(\phi_k, \psi_k) = \inf_{\tilde{\Phi}} J,$$

$$\phi^l(x) + \psi^l(y) \geq \min\left[\frac{|x+y|^2}{2}, l\right] - \left(\frac{|x|^2}{2} + \frac{|y|^2}{2}\right).$$

Passo 4. Per quanto visto nel punto precedente, possiamo applicare il teroema di convergenza monotona e dedurre l'esistenza di limiti ϕ, ψ in L^1 definiti q.o da

$$\phi = \lim_{l\to\infty} \phi^l, \qquad \psi = \lim_{l\to\infty} \psi^l,$$

tali che

$$J(\phi, \psi) = \lim_{l \to \infty} J(\phi^l, \psi^l) \leq \inf_{\tilde{\Phi}} J.$$

Passando al limite in

$$\phi^l(x) + \psi^l(y) \geq \min\left[\frac{|x+y|^2}{2}, l\right] - \left(\frac{|x|^2}{2} + \frac{|y|^2}{2}\right)$$

si vede che $(\phi, \psi) \in \tilde{\Phi}$ e che quindi è una coppia ottimale.

Passo 5. Effettuando una doppia convessificazione di (ϕ, ψ), si ottiene una coppia ottima composta da funzioni convesse coniugate e proprie. □

2.2 Teorema di Brenier

Siamo ora in grado di enunciare e dimostrare il seguente teorema che ci darà una caratterizzazione della mappa di trasporto ottimo.

Teorema 7. Siano μ, ν misure di probabilità su $\mathbb{R}^n$, con momento di ordine secondo finito. Consideriamo il problema di Monge-Kantorovich con funzione costo quadratico $c(x, y) = \frac{|x-y|^2}{2}$. Allora

1. (**Criterio ottimale di Knott-Smith**) $\pi \in \Pi(\mu, \nu)$ è ottimale se, e solo se, esiste una funzione convessa semicontinua inferiormente ϕ tale che

   $$Supp(\pi) \subset Graph(\phi), \tag{2.3}$$

   o equivalentemente per dπ-q.o. (x, y), $y \in \partial\phi(x)$.

   Inoltre, in questo caso, la coppia (ϕ, ϕ^*) minimizza il problema

   $$\inf\left\{\int_{\mathbb{R}^n} \phi d\mu + \int_{\mathbb{R}^n} \psi d\nu; \quad \forall (x, y), \quad x \cdot y \leq \phi(x) + \psi(y)\right\}.$$

2. (**Teorema di Brenier**) Se $\mu \ll \mathcal{L}^n$, allora esiste un unico piano ottimo π, definito da

   $$d\pi(x, y) = d\mu(x)\delta[y = \nabla\phi(x)]$$

   o equivalentemente

   $$\pi = (Id \times \nabla\phi)\#\mu$$

ove $\nabla\phi$ è il gradiente (definito dμ quasi ovunque) di una funzione convessa ϕ tale che $\nabla\phi\#\mu = \nu$.

3. Sotto le stesse ipotesi del punto 2, $\nabla\phi$ è l'unica soluzione del problema di Monge :

$$\int_{\mathbb{R}^n} |x - \nabla\phi(x)|^2 d\mu(x) = \inf_{T\#\mu=\nu} \int_{\mathbb{R}^n} |x - T(x)|^2 d\mu(x),$$

o equivalentemente

$$\int_{\mathbb{R}^n} x \cdot \nabla\phi(x) d\mu(x) = \inf_{T\#\mu=\nu} \int_{\mathbb{R}^n} x \cdot T(x) d\mu(x).$$

4. Infine, se anche $\nu \ll \mathcal{L}^n$, allora per $d\mu$ quasi ogni x e $d\nu$ quasi ogni y,

$$\nabla\phi^* \circ \nabla\phi(x) = x, \qquad \nabla\phi \circ \nabla\phi^*(y) = y,$$

e $\nabla\phi^*$ è il gradiente (definito $d\nu - q.o$) di una funzione convessa tale che $\nabla\phi^*\#\nu = \mu$, ed è anche soluzione del problema di Monge di trasporto di ν su μ.

Dimostrazione.

- L'equivalenza nel teorema di Brenier è già stata dimostrata nei primi capitoli (si veda pagina 2). Infatti se $\Pi \in \Pi(\mu, \nu)$ e $T\#\mu = \nu$ allora

$$[d\pi - q.o.\,, y = T(x)] \iff [\pi = (Id \times T)\#\mu].$$

Inoltre essendo $Graph(\partial\phi)$ chiuso, il supporto di π è interamente contenuto in $Graph(\partial\phi)$.

- Sappiamo che sotto le ipotesi del teorema esiste un piano di trasporto ottimo π. Inoltre per il teorema 6 esistono una coppia di funzioni convesse coniugate (ϕ, ϕ^*), che sono ottimali per il problema duale. Dalla definizione di $\Pi(\mu, \nu)$ e dalla dualità di Kantorovich si ha quindi:

$$\int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} (x \cdot y) d\pi(x, y) = \int_{\mathbb{R}^n} \phi d\mu + \int_{\mathbb{R}^n} \phi^* d\nu$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} [\phi(x) + \phi^*(y)] d\pi(x, y)$$

ovvero

$$\int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} [\phi(x) + \phi^*(y) - x \cdot y] d\pi(x, y) = 0.$$

Essendo l'integranda non negativa, deve quindi essere nulla $d\pi$ q.o. Per la caratterizzazione del sotto-differenziale (si veda appendice proposizione 6) questo implica

$$y \in \partial\phi(x)\,, d\pi\, q.o.\, (x, y).$$

- Viceversa supponiamo che $\pi \in \Pi(\mu, \nu)$ soddisfi $y \in \partial\phi(x)\,, d\pi\, q.o.\, (x, y)$.. Allora

$$\int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} (x \cdot y) d\pi(x, y) = \int_{\mathbb{R}^n} \phi d\mu + \int_{\mathbb{R}^n} \phi^* d\nu.$$

  Quindi π e (ϕ, ϕ^*) sono ottime e la dimostrazione del punto 1. è conclusa.

- supponiamo ora che $\mu \ll \mathcal{L}^n$ e sia ϕ come nei punti precedenti. Sia $Dom(\phi)$ l'insieme in cui ϕ è finita. Siccome $\phi \in L^1(d\mu)$ essa è finita q.o, ovvero $\mu[Dom(\phi)] = 1$. Inoltre $\partial Dom(\phi)$ ha misura nulla rispetto la misura di Lebesgue essendo il bordo di un insieme convesso. Quindi $\mu[Int(Dom(\phi))] = 1$. In $Int(Dom(\phi))$ l'insieme dei punti di non differenziabilità ha misura nulla. Quindi ϕ è differenziabile per $d\mu$ q.o. x. Questo implica che il sottodifferenziale di ϕ è per $d\mu$ q.o. x, $\{\nabla\phi(x)\}$. In conclusione otteniamo che $y = \nabla\phi(x)$ per $d\pi$-q.o. (x, y).

- Mostriamo ora l'unicità del piano di trasporto ottimo. Sia $\overline{\phi}$ un'altra funzione convessa tale che $\nabla\overline{\phi}\#\mu = \nu$. Mostriamo che $\nabla\overline{\phi} = \nabla\phi$ a meno di insiemi di misura nulla. Per il punto 1 del teorema, sappiamo che $(Id \times \nabla\overline{\phi})\#\mu$ è un piano di trasporto ottimo, e che $(\overline{\phi}, \overline{\phi^*})$ è ottima per il problema duale. Quindi

$$\int_{\mathbb{R}^n} \overline{\phi} d\mu + \int_{\mathbb{R}^n} \overline{\phi^*} d\nu = \int_{\mathbb{R}^n} \phi d\mu + \int_{\mathbb{R}^n} \phi^* d\nu.$$

Sia π piano di trasporto associato a ϕ. Dalla precedente uguaglianza segue che

$$\int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n}[\overline{\phi}(x)+\overline{\phi^*}(y)]d\pi(x,y)=\int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n}[\phi(x)+\phi^*(y)]d\pi(x,y)$$

$$=\int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n}(x\cdot y)d\pi(x,y).$$

Ma $\pi=(Id\times\nabla\phi)\#\mu$ e quindi si può scrivere

$$\int_{\mathbb{R}^n}[\phi(x)+\overline{\phi^*}(\nabla\phi(x))]d\mu(x)=\int_{\mathbb{R}^n}x\cdot\nabla\phi(x)d\mu(x)$$

ovvero

$$\int_{\mathbb{R}^n}[\phi(x)+\overline{\phi^*}(\nabla\phi(x))-x\cdot\nabla\phi(x)]d\mu(x)=0.$$

Siccome l'integranda è non negativa, deve annullarsi q.o.. Quindi per la caratterizzazione del sotto-differenziale si ha che $\nabla\phi(x)\in\partial\overline{\phi}(x)$ per $d\mu$ q.o. x, ed essendo $\overline{\phi}$ differenziabile q.o. si conclude che $\nabla\phi(x)=\nabla\overline{\phi}(x)$ per $d\mu$ q.o. x.

- Il punto 3. è una consegueza dei precedenti e della equivalenza tra problema di Monge e di Kantorovich.

- Siccome π è ottimale, sappiamo che $d\pi$-q.o. (x,y), $y=\nabla\phi(x)$, che equivale a $x\in\partial\phi^*(y)$;ma siccome ϕ^* è differenziabile $d\nu$ q.o. y, dπ-q.o. (x,y) si ha $x=\nabla\phi^*(y)=\nabla\phi^*(\nabla\phi(x))$. Passando alle marginali, si ha che questo vale $d\mu(x)-$q.o. Per simmetria vale anche l'altra asserzione.

$\square$

Capitolo 3

Regolarità della mappa di trasporto

3.1 Legame tra la mappa di trasporto ottimo e l'equazione di Monge-Ampère

Assumiamo che μ, ν siano misure assolutamente continue rispetto la misura di lebesgue $\mathcal{L}^n$:

$$\mu = \rho_1 \mathcal{L}^n, \qquad \nu = \rho_2 \mathcal{L}^n$$

e che

$$supp \rho_1 = \overline{\Omega_1} \qquad supp \rho_2 = \overline{\Omega_2}$$

con $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{R}^n$ limitati e tali che $\mathcal{L}^n(\partial\Omega_1) = \mathcal{L}^n(\partial\Omega_2) = 0$. Assumiamo inoltre che esista un $\lambda \in \mathbb{R}^+$

$$\lambda \leq \rho_1, \rho_2 \leq \frac{1}{\lambda}$$

Come abbiamo visto nel capitolo 2, sotto tali ipotesi si ha esistenza di una mappa di trasporto ottimo T e tale mappa è data dal gradiente di una funzione convessa u. Ogni regolarità di u influirà quindi sulla regolarità della mappa T.

Mostriamo che la condizione $\nabla u \# \mu = \nu$ implica che u soddisfa una particolare equazione di Monge-Ampère.
Prima di mostrare tale relazione, richiamiamo alcuni risultati.

Teorema 8 (Formula di Area)**.** Sia T mappa differenziabile q.o. Posto $\Sigma = Dom(\nabla T)$ si ha per ogni funzione ϕ misurabile e limitata

$$\int_{\Sigma} \phi(x)|det\nabla T|(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} \Bigg(\sum_{x \in \Sigma \cap T^{-1}(y)} \phi(x) \Bigg) dy \tag{3.1}$$

Essendo $\nabla u \# \mu = \nu$ si ha per la formula di cambio di misura (si veda appendice proposizione 4) che per ogni $\phi \in C_b(\mathbb{R}^n)$ vale

$$\int \phi(y)\rho_2 dy = \int \phi(\nabla u(x))\rho_1(x)dx$$

Inoltre per il teorema di Aleksandrov (si veda Appendice teorema 18), essendo u convessa, ∇u è differenziabile q.o.
Possiamo quindi applicare a ∇u la formula (3.1) e ottenere che per ogni ϕ limitata, borel misurabile vale

$$\int \phi(y)\rho_2 dy = \int \phi(\nabla u(x))\rho_2(\nabla u(x))detD^2u(x)dx$$

Dalla arbitrarietà di ϕ si ottiene la seguente equazione di Monge-Ampère

$$detD^2u(x) = \frac{\rho_1}{\rho_2 \circ \nabla u} \tag{3.2}$$

con la condizione $\nabla u(\Omega_1) \subset \Omega_2$. Chiameremo soluzione di Brenier dell'equazione 3.2 ogni funzione convessa che risolve tale equazione e la condizione $\nabla u(\Omega_1) \subset \Omega_2$.
A questo punto dalla regolarità della soluzione dell'equazione di Monge-Ampère, possiamo ricavare informazioni sulla regolarità della mappa ottimale $T = \nabla u$.

Osservazione 2. In generale una soluzione dell'equazione di Monge-Ampère non è regolare. Infatti, come mostra il seguente esempio, pur ipotizzando che le densità ρ_1, ρ_2 siano lisce, la soluzione non è nemmeno continua.

Esempio 3. Siano $\rho_1 = \frac{1_B}{|B|}$, $\rho_2 = \frac{1_{B^+}+1_{B^-}}{|B|}$ ove $B = \{|x| < 1\}$ e B^+, B^- le due semisfere traslate:

$$B^+ = e_1 + B \cap \{x_1 > 0\}, \quad B^+ = -e_1 + B \cap \{x_1 < 0\}.$$

ρ_1, ρ_2 sono liscie sul loro supporto ma per ragioni topologiche non esiste una mappa continua che soddisfa $\nabla u \# \mu = \nu$.
(Si mostra che la soluzione è $u(x) = \frac{|x|^2}{2} + |x_1|$ il qui gradiente è discontinuo).

Il precedente esempio ci fa capire che la stretegia scelta per dimostrare la regolarità di u non va in generale bene. Tuttavia, come vedremo nei prossimi capitoli, richiedendo che il supporto delle due densità sia convesso, allora si può dimostrare, sotto dovute ipotesi, l'esistenza di soluzioni regolari dell'equazione.

3.2 Soluzione di Aleksandrov

In questa sezione introduciamo il concetto di soluzione di Aleksandrov per l'equazione di Monge-Ampère e mostriamo sotto quali ipotesi una soluzione di Brenier è soluzione di Aleksandrov. Ricordiamo che dato Ω sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}^n$ e $u : \Omega \to \mathbb{R}$, si definisce iperpiano di supporto per u nel punto $(x_0, u(x_0))$, una funzione affine $l(x) = u(x_0) + p \cdot (x - x_0)$ tale che $u(x) \geq l(x)$ per ogni $x \in \Omega$. Inoltre si definisce sottodifferenziale di u la mappa $\partial u : \Omega \to P(\Omega)$ definita da:

$$\partial u(x_0) = \{p : u(x) \geq u(x_0) + p \cdot (x - x_0), \quad \forall x \in \Omega\}$$

Inoltre dato $E \subset \Omega$ si definisce $\partial u(E) = \bigcup_{x \in E} \partial u(x)$.
D'ora in poi dato $A \subset \mathbb{R}^n$ misurabile indicheremo con $|A|$ la sua misura di Lebesgue.

Teorema 9. Dato Ω insieme aperto e $u \in C(\Omega)$, allora la classe

$$\mathcal{M} = \{E \subset \Omega : \partial u(E) \quad \textit{è Lebesgue misurabile}\}$$

è una σ-algebra di Borel. Inoltre la funzione $Mu : S \to \overline{\mathbb{R}}$ definita da

$$Mu(E) = |\partial u(E)|$$

è una misura, finita sui compatti.
Inoltre la densità della parte assolutamente continua di Mu rispetto alla misura di Lebesgue $\mathcal{L}^n$ è

$$\frac{dMu}{d\mathcal{L}^n} = detD^2u.$$

Definizione 7 (Misura di Monge-Ampère)**.** Chiamiamo la misura $Mu : \mathcal{M} \to \overline{\mathbb{R}}$ definita sopra, misura di Monge-Ampère associata a u.

Prima di dimostrare il teorema 9, dimostriamo i seguenti lemmi.

Lemma 5. Se $\Omega \in \mathbb{R}^n$ è aperto, $u \in C(\Omega)$ e K è compatto, allora $\partial u(K)$ è compatto.

Per una dimostrazione vedere [5].

Lemma 6. Sia Ω insieme aperto e u continua su Ω, allora l'insieme

$$S = \{p \in \mathbb{R}^n : \textit{ esistono } x, y \in \Omega, x \neq y \;\textit{ e }\; p \in \partial u(x) \cap \partial u(y)\}$$

ha misura di Lebesgue nulla.

Dimostrazione. Assumiamo che Ω sia limitato, altrimenti possiamo scrivere $\Omega = \bigcup_k \Omega_k$, ove $\Omega_k \subset \Omega_{k+1}$sono insiemi aperti con $\overline{\Omega_k}$ compatti. Se $p \in S$, allora esistono $x, y \in \Omega$, $x \neq y$ tali che

$$u(z) \geq u(x) + p \cdot (z - x)$$

$$u(z) \geq u(y) + p \cdot (z - y)$$

per ogni $z \in \Omega$. Siccome che Ω_k sono crescenti $x, y \in \Omega_m$ per qualche m e le disuguglianze sopra valgono per ogni $z \in \Omega$. Quindi se

$$S_m = \{p \in \mathbb{R}^n : \textit{ esistono } x, y \in \Omega, x \neq y \;\textit{ e }\; p \in \partial(u|\Omega_m)(x) \cap \partial(u|\Omega_m)(y)\}$$

si ha che $p \in S_m$ e $S \subset \bigcup_m S_m$ e per ipotesi S_m ha misura nulla.
Ipotizziamo quindi Ω limitato. Sia u^* la trasformata di Legendre di u cioè

$$u^*(p) = \sup_{x \in \Omega}(x \cdot p - u(x)).$$

Essendo u^* finita e convessa, essa è differenziabile q.o. Sia

$$E = \{p : u^* \textit{ non è differenziabile in } p\}.$$

Mostriamo che

$$S = \{p \in \mathbb{R}^n : \textit{ esistono } x, y \in \Omega, x \neq y \textit{ e } p \in \partial u(x) \cap \partial u(y)\} \subset E$$

Ora, $p \in \partial u(x)$ se e solo se $x \in \partial u^*(p)$. Quindi

$$S \subset \{p : \#\partial u^*(p) > 1\} = E$$

e si conclude essendo $|E| = 0$. □

Siamo ora pronti a dimostrare il teorema 9

Dimostrazione. Dobbiamo mostrare che

$$\mathcal{M} = \{E \in \Omega : \partial u(E) \quad \textit{è Lebesgue misurabile}\}$$

è una $\sigma-$algebra. Ovviamente $\mathcal{M}$ è chiusa rispetto alle unioni numerabili essendo $\partial u(\bigcup E_k) = \bigcup \partial u(E_k)$, inoltre $\Omega \in \mathcal{M}$ essendo unione numerabile di insiemi convessi. Mostriamo che S è chiusa rispetto complementazione. Sia $E \in \mathcal{M}$ allora

$$\partial u(\Omega \setminus E) = (\partial u(\Omega) \setminus \partial u(E)) \cup (\partial u(\Omega \setminus E) \cap \partial u(E))$$

Per il lemma precedente $(\partial u(\Omega \setminus E) \cap \partial u(E))$ ha misura nulla e quindi $(\Omega \setminus E) \in \mathcal{M}$. Per mostrare che Mu è una misura, è sufficiente mostrare che è $\sigma-$additiva (in quanto è banalmente misura esterna). Sia $(E_j)_{j \in \mathbb{N}}$ successione numerabile di insiemi disgiunti misurabili in $\mathcal{M}$ e indichiamo con $H_i = \partial u(E_i)$. Dobbiamo mostrare che

$$|(\partial u(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i)| = \sum_{i=1}^{\infty} |H_i|$$

Siccome $\partial u(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) = \bigcup_{i=1}^{\infty} H_i$ basta mostrare che

$$|\bigcup_{i=1}^{\infty} H_i| = \sum_{i=1}^{\infty} |H_i|$$

Abbiamo $E_i \cap E_j = \emptyset$ per $i \neq j$. Quindi per il lemma precedente $|H_i \cap H_j| = 0$ per $i \neq j$. Riscriviamo

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} H_i = H_1 \cup (H_2 \setminus H_1) \cup (H_3 \setminus (H_2 \cup H_1)) \cup (H_4 \setminus (H_3 \cup H_2 \cup H_1) \cup ..$$

ove gli insiemi al secondo membro sono tutti disgiunti. Ora

$$H_n = [H_n \cap (H_{n-1} \cup H_{n-2} ... \cup H_1)] \cup [H_n \setminus (H_{n-1} \cup H_{n-2} \cup ... \cup H_1)].$$

Ancora una volta per il lemma precedente si ha $|H_n \cap (H_{n-1} \cup H_{n-2} ... \cup H_1)| = 0$ e quindi

$$|H_n| = |H_n \setminus (H_{n-1} \cup H_{n-2} \cup ... \cup H_1)|$$

Di conseguenza Mu è $\sigma-$additiva. Sia ora

$$S = \{x \in \Omega : \nabla u(x) \, e \, D^2 u(x) \, esistono\}.$$

Chiaramente S ha misura di Lebesgue piena in Ω. Inoltre indicando con Mu^a la parte assolutamente continua di Mu si ha

$$Mu^a = Mu^a \llcorner S$$

Sia $E \subset S$,dalla formula di Area si ha

$$\int_E det D^2 u(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \#\{x \in E : \nabla u(x) = y\} dy.$$

Per il lemma 6 l'insieme degli y tali che $\#\{x \in E : \nabla u(x) = y\} > 1$ ha misura nulla e quindi

$$\int_E det D^2 u(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} 1_{\nabla u(E)} dy = |\nabla u(E)| = |\partial u(E)| = Mu(E).$$

Quindi $Mu \llcorner S = det D^2 u dx$ e quindi si conclude. $\square$

Siamo ora in grado di dare la definizone di soluzione di Aleksandrov

Definizione 8 (Soluzione di Aleksandrov)**.** Dato Ω aperto convesso, μ misura di Borel su Ω. Una funzione convessa $u \in C(\Omega)$ si dice soluzione generalizzata o di Aleksandrov dell'equazione di Monge-Ampère

$$detD^2u = \mu$$

se la misura di Monge-Ampère Mu associata a u coincide con μ.

Proposizione 3. Assumiamo che

$$\mu = \rho_1 \mathcal{L}^n, \qquad \nu = \rho_2 \mathcal{L}^n$$

soddisfano le stesse condizioni poste ad inizio di questa sezione, e che Ω_2 sia convesso. Se $T = \nabla u$ è la mappa di trasporto ottimale tra μ e ν, allora u coincide su Ω_1 con una soluzione di Aleksandrov dell'equazione

$$detD^2u(x) = \frac{\rho_1}{\rho_2 \circ \nabla u}$$

ove poniamo $\rho_1 = 0$ fuori da Ω_1.

Dimostrazione. Definiamo $\overline{u}(x) = \sup_{\overline{\Omega}_2}(x \cdot y - u^*(y))$.
Ricordando che $u(x) = \sup_{\mathbb{R}^n}(x \cdot y - u^*(y))$, si vede subito che $\overline{u} \leq u$.
Essendo $\overline{\Omega}_2$ compatto e u^* semicontinua inferiormente, si ha che il sup nella prima uguaglianza sopra è in realtà un massimo e quindi $\overline{u}$ è localmente limitata e quindi continua.
Sia $x \in Dom(\nabla u(x))$, allora vale

$$u(x) = x \cdot \nabla u(x) - u^*(\nabla u(x))$$

allora per tutti gli x tale che $\nabla u(x) \in \Omega_2$ si ha $u(x) \leq \overline{u(x)}$. Essendo tale insieme denso in $\overline{\Omega}_1$ otteniamo che $u = \overline{u}$ su Ω_1. Di conseguenza, nei punti in cui u è differenziabile, $\nabla \overline{u}$ esiste coinicide con ∇u e quindi $\nabla \overline{u} \# \mu = \nu$.
Mostriamo ora che $\overline{u}$ è soluzione di Aleksandrov per l'equazione di Monge-Ampère. Abbiamo visto che $M\overline{u}^a = detD^2\overline{u}$ e quindi la disuguaglianza

$$M\overline{u} \geq \frac{\rho_1}{\rho_2 \circ \nabla \overline{u}} \mathcal{L}^n$$

è verificata, senza ipotesi su Ω_2. Basta quindi mostrare che

$$M\overline{u}(\mathbb{R}^n) \leq \int_{\Omega_1} \frac{\rho_1(x)}{\rho_2(\nabla\overline{u}(x))} dx$$

Dalla convessità di $\partial\overline{u}(x)$ e dal fatto che ogni suo punto interno p può essere approssimato da una successione di punti $p_k = \nabla\overline{u}(x_k)$ con $x_k \to x$ (si veda Appendice), si ha, grazie alla convessità di Ω_2

$$\partial\overline{u}(\mathbb{R}^n) \subset co[\overline{\nabla\overline{u}(\mathbb{R}^n)}] \subset \overline{\Omega}_2.$$

In conclusione

$$M\overline{u}(\mathbb{R}^n) \leq |\Omega_2| = \int_{\Omega_2} \frac{\rho_2(y)}{\rho_2(y)} dy = \int_{\Omega_1} \frac{\rho_1(x)}{\rho_2(\nabla\overline{u}(x))} dx$$

□

3.3 Regolarità $C^{1,\alpha}_{loc}$

A questo punto sappiamo che se $T = \nabla u$ e sono verificate le ipotesi del paragrafo precedente, u coincide su Ω_1 con una soluzione di Aleksandrov. Appoggiandosi ad un risultato di Caffarelli, mostriamo ora che $u \in C^{1,\alpha}_{loc}$. In particolare siamo interessati alla soluzione di Aleksandrov di:

$$\lambda \leq detD^2u \leq \frac{1}{\lambda} \tag{3.3}$$

su Ω ove $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ convesso limitato, nel senso di soluzione di Aleksandrov dell'equazione

$$detD^2u = f \tag{3.4}$$

con $0 < \lambda \leq f \leq \frac{1}{\lambda}$.

Teorema 10 (Caffarelli)**.** Sia $u : \Omega \to \mathbb{R}$ soluzione strettamente convessa di (3.3). Allora $u \in C^{1,\alpha}_{loc}(\Omega)$ per α fissato. Più precisamente per ogni $\Omega' \subset \Omega$,con $\overline{\Omega}' \subset \Omega$, esiste una costante C che dipende solo da λ, Ω' e dal modulo di convessità di u tale che

$$\sup_{x,y\in\Omega'} \frac{|\nabla u(x) - \nabla u(y)|}{|x-y|^\alpha} \leq C$$

per $x \neq y$.

Per una dimostrazione consultare [2].
Dobbiamo quindi mostrare che la funzione u che definisce la mappa di trasporto ottimale $T = \nabla u$ è strettamente convessa. Vale infatti:

Teorema 11. Siano $\mu = \rho_1 \mathcal{L}^n, \nu = \rho_2 \mathcal{L}^n$ come nel primo paragrafo e supponiamo Ω_2 convesso. Se $T = \nabla u$ è la mappa di trasporto ottimo, allora u è strettamente convessa su Ω_1.

Per dimostrare il teorema 11 abbiamo bisogno di alcune nozioni preliminari.

Lemma 7. Siano u, v funzioni convesse su $\mathbb{R}^n$. Se A è un insieme aperto e limitato tale che $u = v$ su ∂A e $u \geq v$ su A, allora

$$\partial u(A) \geq \partial v(A).$$

In particolare quindi $Mu(A) \geq Mv(A)$.

Dimostrazione. Sia $p \in \partial v(\Omega)$. Allora esiste $x_0 \in A$ tale che $\forall x \in \Omega$

$$v(x) \geq v(x_0) + p \cdot (x - x_0)$$

Sia

$$a = \sup_{x \in \Omega} \{v(x_0) + p \cdot (x - x_0) - u(x)\}.$$

Da $v(x_0) \geq u(x_0)$ segue che $a \geq 0$.Vogliamo mostrare che $v(x_0)+p\cdot(x-x_0)-a$ è un iperpiano di supporto per u in un certo punto in A. Siccome A è limitato, esiste $x_1 \in \overline{A}$ tale che $a = v(x_0) + p \cdot (x_1 - x_0) - u(x_1)$ e quindi

$$u(x) \geq v(x_0) + p \cdot (x - x_0) - a = u(x_1) + p \cdot (x - x_1) \qquad \forall x \in A$$

Si ha quindi

$$v(x_1) \geq v(x_0) + p \cdot (x_1 - x_0) = u(x_1) + a$$

Quindi, se $a > 0$ allora $x_1 \notin \partial A$ e quindi si conclude. Se invece $a = 0$ allora $u(x_0) + p \cdot (x - x_0)$ è un iperpiano di supporto per u in x_0. □

Una conseguenza del precedente lemma è il seguente teorema

Teorema 12 (Principio di massimo di Aleksandrov)**.** Sia $\Omega \in \mathbb{R}^n$ aperto convesso e limitato e $u : \Omega \to \mathbb{R}$ convessa. Se $u = 0$ su $\partial\Omega$ allora

$$|u(x_0)| \leq C_n(diam\Omega)^{n-1}dist(x_0, \partial\Omega)|\partial u(\Omega)|$$

per ogni $x_0 \in \Omega$, ove la costante dipende solo da n.

Dimostrazione. Consultare [5]. □

Lemma 8. Siano u, v funzioni convesse definite su un insieme aperto, convesso e limitato Ω. Se $u \geq v$ su $\partial\Omega$ e $detD^2u \leq detD^2v$ in Ω, allora $u \geq v$ in Ω.

Per una dimostrazione consultare [5].
Diamo ora la definizione e alcuni risultati riguardo la sezione di una funzione.

Definizione 9. Sia $u : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione convessa. Per ogni punto $x \in \Omega, p \in \partial u(x)$ e $t \geq 0$ definiamo la sezione centrata in x con altezza t ripetto a p come

$$S(x, p, t) := \{y \in \Omega : u(y) \leq u(x) + p \cdot (y - x) + t\}$$

Un insieme $Z \subset \mathbb{R}^n$ si dice normalizzato se

$$B(0, 1) \subset Z \subset B(0, m).$$

Inoltre dato un insieme convesso aperto e limitato $S \subset \mathbb{R}^n$ esiste un elissoide E tale che $E \subset S \subset mE$. Esiste inoltre una affintà T tale che $T(E) = B(0, 1)$ e quindi

$$B(0, 1) \subset T(S) \subset B(0, m).$$

Chiamiamo $T(S)$ normalizzato di S. Inoltre integrando rispetto la misura di Lebesgue sopra si ottiene che

$$\frac{|B_1|}{|S|} \leq |detT| \leq \frac{n^n|B_1|}{|S|}$$

Data $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ trasformazione affine invertibile con $Tx = Ax + b$ e $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $\lambda > 0$, definiamo $\psi_\lambda(y) = \frac{1}{\lambda}\phi(T^{-1}y)$. Vogliamo vedere che

relazione consiste tra gli iperpiani di supporto di ϕ e di ψ_λ e quindi tra le relative misure di Monge-Ampère. Vale infatti: $l(x) = \phi(x_0) + p \cdot (x - x_0)$ è iperpiano di supporto di ϕ in $(x_0, \phi(x_0))$ se, e solo se, $\bar{l}(y) = \psi(Tx_0) + \frac{1}{\lambda}(A^{-1})^t p \cdot (y - Tx_0)$ è iperpiano di supporto di ψ_λ in $(Tx_0, \psi_\lambda(Tx_0))$.
Siano μ,$\overline{\mu}$ le misure di Monge-Ampère associate a ϕ, ψ_λ rispettivamente. Si noti che

$$\frac{1}{\lambda}(A^{-1})^t(\partial\phi(E)) = \partial\psi_\lambda(TE)$$

Di conseguenza

$$\overline{\mu}(TE) = \frac{1}{\lambda^n}|detA^{-1}|\mu(E)|$$

Siamo ora in grado di dare la definizione di soluzione normalizzata.

Definizione 10. Sia u soluzione strettamente convessa di (3.3). Per ogni $x \in \Omega'$ con $\Omega' \subset \Omega$ e $\overline{\Omega}' \subset \Omega$, eiste t_0 abbastanza piccolo tale che $\overline{S(x,p,t)} \subset \Omega$ per ogni $t < t_0$. Allora se T è l'affinità che normalizza $S(x,p,t)$, la funzione

$$v(z) := (detT)^{\frac{2}{n}}[u(T^{-1}z) - p \cdot (T^{-1}z - x) - t] \quad\quad p \in \partial u(x)$$

risolve

$$\begin{cases} \lambda \leq detD^2 v \leq \frac{1}{\lambda} & in\, Z \\ v = 0 \quad in\, \partial Z \end{cases}$$

ove $Z = T(S(x,p,t))$. Chiameremo v soluzione normalizzata.

La soluzione normalizzata soddisfa il seguente lemma:

Lemma 9. Sia v soluzione normalizzata, allora esistono costanti c_1,c_2 tali che

$$0 < c_1 \leq |\inf_Z v| \leq c_2$$

Dimostrazione. Si applichi il lemma (8) alle funzioni $w_1 = \lambda(|x|^2 - 1)/2$, $w_2 = (|x|^2 - n^2)/2\lambda$ per ottenere $w_2 \leq v \leq w_1$. Infatti $w_1 < 0$ su ∂Z,$w_2 > 0$ su ∂Z. Inoltre per come sono definite le due e funzioni si ha

$$Mw_1 \leq \lambda, \quad\quad Mw_2 \geq \frac{1}{\lambda}$$

e si conclude. □

Diamo ora alcuni risultati riguardo gli iperpiani di supporto di una funzione convessa.

Lemma 10. Sia $\Omega \in \mathbb{R}^n$ insieme convesso aperto e limitato e ϕ funzione convessa in Ω tale che $\phi \leq 0$ su $\partial\Omega$. Se $x \in \Omega$ e $l(y) = \phi(x) + p \cdot (y - x)$ è un iperpiano di supporto di ϕ in $(x, \phi(x))$ allora

$$|p| \leq \frac{-\phi(x)}{dist(x, \partial\Omega)}$$

più in generale, se $\overline{\Omega}' \subset \Omega$, allora

$$\partial\phi(\Omega') \subset B\left(0, \frac{max_{\Omega'}(-\phi)}{dist(\Omega', \partial\Omega)}\right)$$

Dimostrazione. Asssumiamo $p \neq 0$. Abbiamo allora $\phi(y) \geq \phi(x) + p \cdot (y - x)$ per ogni $y \in \Omega$. Se $0 < r < dist(x, \partial\Omega)$, allora $y_0 = x + r\frac{p}{|p|} \in \Omega$ e $0 \geq \phi(y_0) \geq \phi(x) + r|p|$. □

Lemma 11. Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ insieme aperto convesso e limitato, ϕ funzione convessa su Ω con $\phi = 0$ su $\partial\Omega$. Sia μ la misura di Monge-Ampère associata a ϕ e assumiamo che $\mu(\Omega) < \infty$. Sia $\lambda > 0$, e $\lambda\Omega$ la dilatazione (omotetia) di Ω rispetto al suo centro di massa. Allora esiste un costante positiva c_n che dipende solo da n tale che

$$B\left(0, \frac{|min_\Omega \phi|}{2diam(\Omega)}\right) \subset \partial\phi(\lambda\Omega)$$

per $\lambda_n < \lambda < 1$ con

$$\lambda_n = \max\left\{\frac{1}{2}, 1 - \frac{1}{c_n\mu(\Omega)}\left(\frac{|min_\Omega \phi|}{diam(\Omega)}\right)^n\right\}.$$

Lemma 12. Sia Ω sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ con centro di massa uguale a 0, Ω normalizzato e ϕ funzione convessa su Ω con $\phi = 0$ su $\partial\Omega$. Sia μ la misura di Monge-Ampère associata a ϕ e assumiamo che esista $C > 0$ e $0 < \alpha < 1$ tale che $\mu(\Omega) \leq C\mu(\alpha\Omega)$. Allora

$$C_1 |\min_\Omega \phi|^n \leq \mu(\Omega) \leq C_2 |\min_\Omega \phi|^n$$

ove C_1, C_2 sono positive e dipendono solo da C, α, n.

Per una dimostrazione dei precedenti lemmi consultare [5]. Mostriamo ora che se la soluzione di 3.3 non è strettamente convessa allora l'insieme in cui essa coincide con uno dei suoi iperpiani di supporto deve intersecare l'insieme in cui è definita. Diamo prima la seguente definizione:

Definizione 11. Dato un insieme convesso C, un punto $x \in \partial C$ si dice punto estremale se non può essere espresso come combinazione convessa non banale di due punti di $\overline{C}$.

Diamo inoltre la seguente caratterizzazione dei punti estremali:

Lemma 13. Sia x_0 un punto estremale di Ω. Allora dato $\delta > 0$ esiste un iperpiano di supporto $l(x)$ in un certo punto di $\partial\Omega$, e un $\epsilon_0 > 0$ tale che :

- $\Omega \subset \{x : l(x) \geq 0\}$,
- $diam\{x \in \overline{\Omega} : 0 \leq l(x) \leq \epsilon_0\} < \delta$,
- $0 \leq l(x_0) \leq \epsilon_0$

Per una dimostrazione consultare [5].

Teorema 13. Sia Ω un sottoinsieme aperto, convesso e limitato di $\mathbb{R}^n$, u funzione convessa su Ω tale che

$$0 < \lambda \leq detD^2u \leq \Lambda$$

come soluzione di Aleksandrov. Assumiamo che $u \geq 0$ in Ω e sia

$$\Gamma = \{x \in \Omega : u(x) = 0\}.$$

Se Γ è non vuoto e contiene più di un punto, allora Γ non ha punti estremali all'interno di Ω.

Dimostrazione. Per assurdo supponiamo esista un punto estremale x_0 in Ω. Siccome u è convessa e $u \geq 0$ si ha che Γ è convesso. Inoltre per il lemma precedente, dato $\delta < \frac{1}{2}dist(x_0, \partial\Omega)$, esistono $\epsilon_0 > 0$ e un iperpiano di supporto $l(x)$ in un certo punto $x_1 \in \partial\Gamma$ tale che $\Gamma \subset \{x : l(x) \geq 0\}, diam\{x \in \overline{\Gamma} : 0 \leq l(x) \leq \epsilon_0\} < \delta$ e $0 \leq l(x_0) < \epsilon_0$. Definiamo

$$S = \{x \in \overline{\Gamma} : 0 \leq l(x) \leq \epsilon_0\}$$

$$\Pi_1 = \{x : l(x) = \epsilon_0\}$$

$$\Pi_2 = \{x : l(x) = 0\}$$

$$\Gamma_\epsilon = \{x \in \Omega : l(x) \leq \epsilon_0, u(x) \leq \epsilon(\epsilon_0 - l(x))\},$$

per $\epsilon > 0$. Si ha $S \subset \Gamma_\epsilon$ per ogni $\epsilon > 0$ e $\bigcap_{\epsilon>0} \Gamma_\epsilon = S \subset Int(\Omega)$. Quindi per ϵ sufficientemente piccolo $\Gamma_\epsilon \subset Int(\Omega)$.
Definiamo $\Pi_3 = \{x : l(x) = -\delta_\epsilon\}$, $\quad x_\epsilon \in \Pi_3$, $\quad \Gamma_\epsilon \subset \{x : l(x) \geq -\delta_\epsilon$, con $\delta_\epsilon > 0$.
In altre parole Π_3 è il piano parallelo a Π_2 che tocca $\partial\Gamma_\epsilon$ in un certo punto x_ϵ.
Definiamo $u_\epsilon(x) = u(x) - \epsilon(\epsilon_0 - l(x))$. Si vede che u_ϵ è convessa e che $\inf_{\Pi_\epsilon} u_\epsilon < 0$ (basta sostituire x_1 in u_ϵ). Si ha inoltre che

$$dist(\Pi_2, \Pi_3) = \delta_\epsilon, \qquad dist(\Pi_1, \Pi_2) = \epsilon_0$$

e quindi $\frac{dist(\Pi_2,\Pi_3)}{dist(\Pi_1,\Pi_2)} = \frac{\delta_\epsilon}{\epsilon_0}$ e $\delta_\epsilon \to 0$ per $\epsilon \to 0$.
Volgiamo ora studiare $\frac{u_\epsilon(x_1)}{\inf_{\Gamma_\epsilon} u_\epsilon}$.
Siccome $u = 0$ su $\Pi_1 \cap \Gamma$ si ha che $\inf_{\Gamma_\epsilon} u = 0$. Inoltre $u_\epsilon(x) = u(x) - \epsilon(\epsilon_0 - l(x)) \geq \inf_{\Gamma_\epsilon} u - \epsilon(\epsilon_0 - l(x))$ per $x \in \Gamma_\epsilon$. Quindi

$$\frac{|u_\epsilon(x_1)|}{|\inf_{\Gamma_\epsilon} u_\epsilon|} \geq \frac{\epsilon_0}{\epsilon_0 + \delta_\epsilon}$$

e quindi

$$\liminf_{\epsilon \to 0} \frac{|u_\epsilon(x_1)|}{|\inf_{\Gamma_\epsilon} u_\epsilon|} = 1$$

Sia T_ϵ l'affinità che normalizza Γ_ϵ. La funzione $u_\epsilon^*(x) = |detT_\epsilon|^{2/n} u_\epsilon(T_\epsilon^{-1}x)$, risolve $\lambda \leq detD^2 u_\epsilon^* \leq \Lambda$ e $u_\epsilon^* = 0$ su $\partial\Gamma_\epsilon^*$, con $\Gamma_\epsilon^* = T(\Gamma_\epsilon)$. Per quanto detto precedentemente vale

$$\frac{|u_\epsilon^*(T_\epsilon x_1)|}{|\inf_{\Gamma_\epsilon^*} u_\epsilon^*|} \geq C_1 > 0.$$

Per il lemma 12, $|\inf_{\Gamma^*_\epsilon} u^*_\epsilon| \approx Mu^*_\epsilon(\Gamma^*_\epsilon))^{1/n}$ e quindi $|u^*_\epsilon(T_\epsilon x_1)| \geq CMu^*_\epsilon(\Gamma^*_\epsilon))^{1/n}$. Mostriamo ora che $dist(T_\epsilon x_1, \partial\Gamma^*_\epsilon) \to 0$ per $\epsilon \to 0$. Infatti siano $\Pi^*_i = T_\epsilon \Pi_i$ per $i = 1, 2, 3$.
$\frac{dist(\Pi^*_2,\Pi^*_3)}{dist(\Pi^*_1,\Pi^*_2)} = \frac{dist(\Pi_2,\Pi_3)}{dist(\Pi_1,\Pi_2)} \to 0$ e quindi $dist(\Pi^*_2, \Pi^*_3) \to 0$ essendo $dist(\Pi^*_1, \Pi^*_2) \leq C$ per una certa C.
Sia ora $\partial\Gamma^*_2$ la parte di bordo di Γ^* contenuta tra Π^*_2 e Π^*_3 e p_ϵ il punto su $\partial\Gamma^*_2$ tale che la linea tra Tx_1 e p_ϵ sia perpendicolare a Π^*_2. Allora

$$dist(T_\epsilon x_1, \partial\Gamma^*_\epsilon) \leq dist(T_\epsilon x_1, \partial\Gamma^*_2) \leq |T_\epsilon x_1 - p_\epsilon| \leq dist(\Pi^*_2, \Pi^*_3),$$

che implica $dist(T_\epsilon x_1, \partial\Gamma^*_\epsilon) \to 0$ per $\epsilon \to 0$. Tuttavia per il principio di massimo di Aleksandrov:

$$|u^*_\epsilon(Tx_1)|^n \leq C_n dist(T_\epsilon x_1, \partial\Gamma^*_\epsilon) Mu^*_\epsilon(\Gamma^*_\epsilon)$$

ottenendo una contraddizione essendo

$$dist(T_\epsilon x_1, \partial\Gamma^*_\epsilon) \geq C'_n$$

per quanto visto precedentemente. □

Osservazione 3. A meno di sommare funzioni lineari, si vede facilmente che il precedente teorema vale sostituendo a Γ l'insieme $\Gamma' = \{x \in \Omega : u(x) = l(x)\}$ ove $l(x)$ è un piano di supporto. Vale pertanto solo una delle seguenti possibilità: u è strettamente convessa, oppure l'insieme dei punti in cui coincide con uno degli iperpiani di supporto, deve intersecare Ω.

Definizione 12. Un punto $x \in \overline{\Omega}$ si dice esposto se esiste un semispazio chiuso H tale che $\Omega \subset H$ e $\overline{\Omega} \cup \partial H = \{x\}$.

Siamo finalmente in grado di dimostrare il teorema 11.

Dimostrazione. Per la proposizione 3 sappiamo che u risolve

$$\lambda^2 1_{\Omega_1} \leq det D^2 u \leq \frac{1}{\lambda^2} 1_{\Omega_1} \tag{3.5}$$

nel senso di Aleksandrov. Supponiamo per assurdo che u non sia strettamente convessa in Ω_1. A meno di sommare funzioni lineari, possiamo assumere che

$u \geq 0$ e che $W = \{u = 0\}$ contenga più di un punto in Ω_1. Consideriamo i seguenti casi:

- W non ha punti esposti, e quindi contiene una retta,

- esiste $\overline{x}$ punto esposto di W.

Supponiamo di essere nel primo caso e sia $(x_1, 0)$, $x_1 \in \mathbb{R}$ la retta contenuta in W ovvero $u((x_1, 0)) = 0$ per ogni $x_1 \in \mathbb{R}$. Quindi se $x \in \mathbb{R}^n$ e $p \in \partial u(x)$

$$0 = u(tx_1, 0) \geq u(x_1, x') + (t-1)p_1 x_1 + p'x' \geq (t-1)p_1 x_1 + p'x'$$

Mandando $t \to \infty$ si vede che $p_1 = 0$ e quindi che $\partial u(\mathbb{R}^n) \subset \{p_1 = 0\}$. Ma questo contraddice il fatto che u soddisfa nel senso di Aleksandrov l'equazione sopra riportata. Supponiamo quindi di essere nel secondo caso. Per il teorema 13 $\overline{x}$ non può stare in Ω_1. Assumiamo $\overline{x} = 0$ e

$$W \subset \{x_1 \leq 0\},\ \{x_1 = 0\} \cap W = \{0\}$$

Vale quindi uno dei seguenti casi:

- $0 \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}_1$,

- $0 \in \partial\Omega$.

Supponiamo di essere nel primo caso. Allora definita

$$w_\epsilon = u - \epsilon(x_1 + \epsilon)$$

e $K_\epsilon = \{w_\epsilon \leq 0\} \subset \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}_1$. Allora per l'equazione (3.5) deve valere $|\partial w_\epsilon(K_\epsilon)| = 0$, mentre $\inf_{K_\epsilon} w_\epsilon < 0$ contraddicendo il principio di massimo di Aleksandrov. Supponiamo quindi di essere nel secondo caso, ovvero

$$0 \in \partial\Omega_1, \qquad \tilde{x} \in \Omega_1 \cap W, \qquad W \subset \{x_1 \leq 0\}$$

Definiamo $v_\epsilon = u - \epsilon(x_1 - (\tilde{x}_1 - \epsilon))$ e $J_\epsilon = \{v_\epsilon \leq 0\}$. Si noti che per ϵ piccolo J_ϵ è un aperto convesso limitato, $\tilde{x} \in J_\epsilon$, e $|J_\epsilon| > 0$. Sia T_ϵ l'affinità che normalizza J_ϵ e $\tilde{v}_\epsilon = (detT_\epsilon)^{2/n} v_\epsilon \circ T_\epsilon^{-1}$. Allora $\tilde{v}_\epsilon$ soddisfa

$$\lambda^2 1_{T_\epsilon(\Omega_1)} \leq detD^2\tilde{v}_\epsilon \leq \frac{1}{\lambda^2} 1_{T_\epsilon(\Omega_1)}$$

Siccome $T(J_\epsilon)$ è normalizzato, per il principio di massimo di Aleksandrov si ha

$$|\tilde{v_\epsilon}(T_\epsilon(0))|^n \leq C(n)|T_\epsilon(J_\epsilon) \cap T_\epsilon(\Omega_1)|dist(T_\epsilon(0), T_\epsilon(\partial J_\epsilon))/\lambda^2$$

Siccome $detJ_\epsilon \approx \frac{1}{|J_\epsilon|}$ si ha

$$|\tilde{v_\epsilon}(0)|^n \leq C(n,\lambda)|J_\epsilon||J_\epsilon \cap \Omega_1|dist(T_\epsilon(0), T_\epsilon(\partial J_\epsilon)).$$

Tuttavia considerando la dilatazione di $T_\epsilon(J_\epsilon)$ rispetto 0, si ha per il lemma 11 che per $x \in T_\epsilon(J_\epsilon)/2$, $p \in \partial u(x)$,

$$|p| \leq \frac{\inf_{T_\epsilon(J_\epsilon)} \tilde{v}_\epsilon}{dist(T_\epsilon(J_\epsilon/2), T_\epsilon(\partial J_\epsilon))}$$

Per il lemma 10 vale

$$dist(T_\epsilon(J_\epsilon/2), T_\epsilon(\partial J_\epsilon)) \geq \frac{1}{C(n)}$$

e quindi

$$|p| \leq C(n)|\inf_{T_\epsilon(J_\epsilon)} \tilde{v}_\epsilon|$$

$$\partial\tilde{v}_\epsilon(T_\epsilon(J_\epsilon)/2) \subset B\bigg(0, |C(n)\inf_{T_\epsilon(J_\epsilon)} \tilde{v}_\epsilon|\bigg).$$

Quindi

$$\begin{aligned}\frac{\lambda^2}{2^n}|T_\epsilon(J_\epsilon) \cap T_\epsilon(\Omega_1)| &= \lambda^2|T_\epsilon(J_\epsilon)/2 \cap T_\epsilon(\Omega_1)/2| \\ &\leq \lambda^2|T_\epsilon(J_\epsilon)/2 \cap T_\epsilon(\Omega_1)| \\ &\leq |\partial\tilde{v}_\epsilon(T_\epsilon(J_\epsilon)/2)| \leq C(n)||\inf_{T_\epsilon(J_\epsilon)} \tilde{v}_\epsilon|^n.\end{aligned}$$

Tornando a v_ϵ si ha

$$|J_\epsilon||J_\epsilon \cap \Omega_1| \leq C(n,\lambda)|\inf_{J_\epsilon} v_\epsilon|^n$$

e quindi

$$\frac{|v_\epsilon(0)|}{|\inf_{J_\epsilon} v_\epsilon|} \leq C(n,\lambda)dist(T_\epsilon(0), T_\epsilon(\partial J_\epsilon)).$$

A questo punto otteniamo $\frac{v_\epsilon(0)}{\inf_{J_\epsilon} v_\epsilon} \to 1$ e $dist(T_\epsilon(0), T_\epsilon(\partial J_\epsilon)) \to 0$ e argomentando come nel teorema 13 si ottiene una contraddizione. $\square$

Capitolo 4

Appendice

4.1 Richiami di Teoria della Misura e Analisi Funzionale

Definizione 13 (Push forward)**.** Siano dati due spazi topologici X, Y, $\mu \in M(X)$ e una funzione borelliana $f : X \to Y$. Il Push forward di μ tramite f è la misura borelliana definita da

$$f_{\#}\mu(E) = \mu(f^{-1}(E)).$$

Proposizione 4. (Formula di cambio variabili) Dati due spazi metrici X, Y, una funzione boreliana $f : X \to Y$, una misura boreliana $\mu \in M^+(X)$ e una funzione borelina $\phi : Y \to [-\infty, +\infty]$. Allora ϕ è integrabile rispetto a $f_{\#}\mu$ se, e solo se, $\phi \circ f$ lo è rispetto μ e in tal caso vale

$$\int_Y \phi df_{\#}\mu = \int_X \phi \circ f d\mu.$$

Proposizione 5.

Siano X, Y spazi metrici, $\mu \in M^+(X)$, $\nu \in M^+(Y)$ e $T : X \to Y$ funzione borelliana. Si ha che $\nu = T_{\#}\mu$ se, e solo se,

$$\int_Y \phi d\nu = \int_X \phi \circ T d\mu, \qquad \forall \phi \in C_b(Y).$$

Teorema 14 (Teorema di Riesz)**.** Sia (X, d) spazio metrico compatto, allora l'insieme $E(X)$ delle misure di Radon dotato della norma variazione totale, è isometrico al duale topologico di $C_b(X)$ tramite l'isometria

$$E(X) \ni \mu \mapsto \Big(f \mapsto \int_X f d\mu)\Big).$$

Per una dimostrazione dei precedenti risultati si veda [4].

Definizione 14 (Equiintegrabilitá)**.** Una famiglia di funzioni $F \subset L^1(X, \mu)$ si dice equiintegrabile se :

1. per ogni $\epsilon > 0$ esiste un insieme misurabile A di misura finita tale che

$$\int_{X \setminus A} |f| d\mu < \epsilon, \qquad \forall f \in F$$

2. per ogni $\epsilon > 0$ esiste un $\delta > 0$ tale che per ogni insieme misurabile E con $\mu(E) < \delta$ si ha

$$\int_E |f| d\mu < \epsilon, \qquad \forall f \in F.$$

Teorema 15 (Dunford-Pettis)**.** $F \subset L^1(X, \mu)$ una famiglia limitata e equinitegrabile di funzioni, allora F è debolmente sequenzialmente compatta, ovvero esiste una successione $(f_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset F$ ed una funzione $f \in F$ tale che

$$f_k \rightharpoonup f$$

in L^1.

Per una dimostrazione consultare [3].

Teorema 16 (Teorema di Banach geometrico)**.** Sia E spazio vettoriale normato, $A \subset E$, $B \subset E$ due insiemi convessi non vuoti tali che $A \cap B = \emptyset$. Assumiamo che A sia chiuso e B sia compatto. Allora esiste un iperpiano chiuso che separa strettamente A e B.

Per una dimostrazione consultare [1].

4.2 Richiami di analisi convessa

In questa sezione sono riportati i principali risultati di analisi convessa utilizzati nei capitoli precedenti. Per le dimostrazioni mancanti si veda [6].

Definizione 15. Una funzione $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ si dice dice convessa se

$$\forall\, x, y \in \mathbb{R}^n,\ \forall t \in [0,1], \qquad \phi(tx + (1-t)y) \leq t\phi(x) + (1-t)\phi(y)$$

Inoltre si dice strettamente convessa se ogni volta che vale l'uguaglianza nell'equazione sopra si ha $x = y$ o $t = 0$ o $t = 1$. Una funzione si dice propriamente convessa se non è identicamente $+\infty$ e non assume mai valore $-\infty$. Si definisce $Dom(\phi)$ come l'insieme in cui ϕ è finita.

Definizione 16. Data ϕ convessa si definisce il sottodifferenziale di ϕ come la mappa $\partial\phi$ definita da

$$y \in \partial\phi(x) \iff [\forall z \in \mathbb{R}^n,\ \phi(z) \geq \phi(x) + y \cdot (z - x)]$$

Si verifica facilmente che $\partial\phi(x)$ è un sottoinsieme convesso di $\mathbb{R}^n$. Inoltre $Graph(\partial\phi)$ è un sottoinsieme chiuso di $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.

Definizione 17 (Funzione coniugata)**.** Data $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ non identicamente $+\infty$, si definisce funzione convessa coniugata, o trasformata di Legendre, la funzione

$$\phi^*(y) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (x \cdot y - \phi(x)).$$

Si vede facilmente che ϕ^* è convessa,non identicamente infinita (per dimostrare si usa il teroema di Hann-Banach geometrico) e semicontinua inferiormente.

Grazie alla nozione di funzione coniugata, possiamo dare una caratterizzazione del sottodifferenziale di una funzione convessa semicontinnua inferiormente. Dalla definizione segue che

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n,\ x \cdot y \leq \phi(x) + \phi^*(y)$$

Proposizione 6. Sia ϕ una funzione convessa non identicamente infinita e semicontinua inferiormente su $\mathbb{R}^n$. Allora per ogni $x, y \in \mathbb{R}^n$ vale

$$x \cdot y = \phi(x) + \phi^*(y) \iff y \in \partial\phi(x) \iff x \in \partial\phi^*(x)$$

Dimostrazione.

$$x \cdot y = \phi(x) + \phi^*(y) \iff x \cdot y \geq \phi(x) + \phi^*(y)$$

$$\iff \forall z \in \mathbb{R}^n,\ x \cdot y \geq \phi(x) + y \cdot z - \phi(z)$$

$$\iff \forall z \in \mathbb{R}^n,\ \phi(z) \geq \phi(x) + y \cdot (z - x)$$

$$\iff y \in \partial\phi(x)$$

□

Proposizione 7 (Dualità di Legendre per funzioni convesse s.c.i.)**.** $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ non identicamnte $+\infty$. Allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:

1. ϕ è convessa s.c.i.,
2. $\phi = \psi^*$ per una qualche ψ non identicamente infinita,
3. $\phi^{**} = \phi$.

Proposizione 8. Sia ϕ una funzione convessa e finita. Allora valgono i seguenti fatti:

1. $\forall x \in Int(Dom(\phi))$, $\partial\phi(x)$ è non vuoto,
2. ϕ è differenziabile in un punto $x \iff \phi(x)$ contiene un solo punto, che è $\nabla\phi(x)$.

Proposizione 9. Sia ϕ funzione convessa e $x \in Int(Dom(\phi))$. Sia

$$\nabla_*\phi(x) = \{p \in \partial\phi(x) : \textit{esiste una successione di punti differenziabili } x_k, x_k \to x, \nabla\phi(x_k) \to p\}.$$

Allora

$$\partial\phi(x) = \overline{co[\nabla_*\phi(x))]}.$$

Diamo ora alcuni risultati sulla differenziabilità delle funzioni convesse.

Lemma 14. Se u è funzione convessa su $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto, $K \subset \Omega$ compatto, allora u è uniformemente Lipschitziana in K.

Dimostrazione. u è convessa e possiede quindi un iperpiano di supporto in ogni punto $x \in \Omega$. Sia $C = \sup\{|p| : p \in \partial u(K)\}$. Si noti che $C < +\infty$. Se $x \in K$ allora $u(y) \geq u(x) + p \cdot (y - x)$ per $p \in \partial u(x)$ e per ogni $y \in \Omega$. In particolare, se $y \in K$ allora $u(y) - u(x) \geq -|p| \cdot |y - x|$. Scambiano il ruolo di x e y si conclude. □

Teorema 17 (Rademacher)**.** Sia $f : \Omega \to \mathbb{R}$ Lipschitziana, allora f è differenziabile $\mathcal{L}^n$-q.o.

Lemma 15. Sia $u : \Omega \to \mathbb{R}$ convessa, allora u è differenziabile $\mathcal{L}^n$-q.o.

Dimostrazione. si vedano lemma e teorema precedenti. □

Vale il seguente classico teorema riguardo la differenziabilità del secondo ordine di una funzione convessa (si veda [3]).

Teorema 18 (Aleksandrov)**.** Sia u funzione convessa, allora per $\mathcal{L}^n$-q.o. punto di differenziabilità x all'interno del dominio di u, vale :

$$u(y) = u(x) + \nabla u(x) \cdot (y - x) + \frac{1}{2}\nabla^2 u(x)(y - x) \cdot (y - x) + o(|y - x|^2).$$

Per una dimostrazione vedere [3].

Bibliografia

[1] Haim Brezis. *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*, volume 2. Springer, 2011.

[2] Luis A. Caffarelli. Some regularity properties of solutions of monge ampere equation. Technical report, NEW YORK UNIV NY COURANT INST OF MATHEMATICAL SCIENCES, 1991.

[3] Lawrence C. Evans and Ronald F. Gariepy. *Measure theory and fine properties of functions*. Routledge, 2018.

[4] Gerald B. Folland. *Real analysis: modern techniques and their applications*, volume 40. John Wiley & Sons, 1999.

[5] Cristian E. Gutiérrez and Haim Brezis. *The Monge-Ampere equation*, volume 44. Springer, 2001.

[6] R. Tyrrell Rockafellar. *Convex analysis*, volume 18. Princeton university press, 1970.

[7] Cédric Villani. *Topics in optimal transportation*, volume 58. American Mathematical Soc., 2021.