

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Dipartimento di Fisica e Astronomia *Galileo Galilei*

CORSO DI LAUREA IN FISICA

Rilevazione diretta di materia oscura

Relatore

Prof. D'Eramo Francesco

Laureando

Benedetto Daniele

ANNO ACCADEMICO 2023-2024

Data di laurea 15/07/2024

Sommario

La materia oscura (DM) è una componente misteriosa e sfuggente del nostro universo. Nel primo capitolo verrà brevemente ripercorsa la storia della materia oscura, soffermandosi sulle evidenze osservative e cosmologiche della sua presenza. Nel secondo capitolo verranno esposte le sue principali caratteristiche e verranno presentati i diversi candidati di materia oscura. Nel terzo capitolo verrà trattato in modo approfondito il fenomeno del *freeze-out*, un elemento chiave per la comprensione delle proprietà della DM . Nel quarto ed ultimo capitolo verrà analizzata la *direct detection*, uno tra i principali metodi di rilevazione della materia oscura, presentando gli attuali limiti imposti dagli esperimenti sulle caratteristiche di interazione della materia oscura.

Indice

1	Introduzione	1
1.1	Materia oscura: dall'antichità alla prima citazione scientifica	1
1.2	Prove osservative dell'esistenza della materia oscura	2
1.2.1	Stime della massa media di una galassia appartenente al <i>Coma Cluster</i>	2
1.2.2	Curve di rotazione delle galassie	3
1.2.3	Evidenze cosmologiche	5
2	Caratteristiche della materia oscura	7
2.1	Interazione gravitazionale	7
2.2	Caratteristiche di massa: i candidati di materia oscura	8
3	<i>Freeze-out</i>	12
3.1	Meccanismo di produzione termica	12
3.2	Discussione analitica del <i>freeze-out</i> di <i>Cold DM</i>	16
4	<i>Direct detection</i>	19
4.1	Introduzione e cinematica dell'urto	19
4.2	Calcolo dello <i>scattering rate</i>	20
4.2.1	Sezione d'urto tra materia oscura e nucleoni	21
4.2.2	<i>Scattering rate</i> tra materia oscura e nuclei	22
4.3	Discussione della dipendenza dalla velocità dello <i>scattering rate</i>	23
4.4	Stato sperimentale e conclusioni	25
	Bibliografia	27

1 Introduzione

Nel primo capitolo si presenterà l'origine storica del concetto di materia oscura, con particolare attenzione alle evidenze osservative.

1.1 Materia oscura: dall'antichità alla prima citazione scientifica

La possibilità che possa esistere qualcosa che non sia visibile ai nostri occhi ha acceso le ricerche dei pensatori nel corso della storia, già dai tempi della filosofia Greca. Nonostante questo, la storia della materia oscura inizia nel 1687, anno di pubblicazione de i *Philosophi Naturalis Principia Mathematica* di Isaac Newton. L'introduzione delle leggi del moto e della Gravitazione Universale hanno rivoluzionato il pensiero scientifico; diverse ipotesi riguardo materia invisibile sono seguite.

Nel 1783 John Michell ipotizzò[1] che se la luce subisce la forza di gravità, come dovrebbe visto il carattere generale di tale forza, allora possono esistere oggetti talmente massivi da attrarre la luce al loro interno, rendendoli così scuri, non visibili; questi oggetti sono oggi conosciuti come buchi neri.

Nel 1844 Friederich Bessel asserì[2] che¹

L'esistenza di innumerevoli stelle luminose non può provare nulla contro l'evidenza di altrettante stelle invisibili

introducendo anche una problematica che sarà di fondamentale importanza per la scoperta e lo studio della materia oscura: il rapporto massa-luminosità (*mass-to-light ratio* è il più comune termine inglese) di un oggetto astronomico. Lo scienziato osservò infatti che il moto delle stelle *Sirio* e *Procione* poteva essere spiegato solo dalla presenza di stelle non luminose e dunque non visibili nelle vicinanze, che influenzavano il moto delle stelle osservato attraverso la loro attrazione gravitazionale.

¹La traduzione dall'Inglese è stata effettuata dall'autore

Tra la fine del diciannovesimo e l'inizio del ventesimo secolo fu inventata la fotografia astronomica; venne notato che la distribuzione delle stelle nel cielo non era regolare e che vi erano zone scure, in cui non era possibile vedere alcuna stella. La presenza di queste zone poteva essere spiegata in due modi diversi: o lo spazio era occupato da stelle poco luminose e per questo non visibili nelle fotografie, oppure era presente materiale non luminoso frapposto tra la Terra e le stelle in quella sezione celeste, la cui luce era dunque attratta gravitazionalmente da questi corpi scuri.

Questi studi si concentrarono sulla *Via Lattea*; Lord Kelvin fu tra i primi a tentare di stimare la quantità di materiale non luminoso presente nella nostra galassia. La sua argomentazione era la seguente[3]: se le stelle nella Via Lattea possono essere descritte come un gas di particelle, agenti sotto l'influenza della gravità, allora è possibile stabilire una relazione tra le dimensioni del sistema e la velocità di dispersione delle stelle.

Nel 1906 Henri Poincaré scrisse nell'articolo 158 del giornale *L'Astronomie*[4], sulla base delle considerazioni di Lord Kelvin²:

Ci sono stelle che possiamo vedere perché brillano; è perciò possibile che ci siano stelle oscure che circolano nella spazio interstellare e la cui esistenza possa a lungo rimanere sconosciuta? È bene dunque, che quello che il metodo di Lord Kelvin ci darebbe sarebbe il numero totale di stelle includendo quelle oscure; dal momento che il numero è comparabile a quello che il telescopio restituisce, allora non c'è materia oscura, o almeno non in quantità comparabile con quella luminosa.

In questo articolo, per la prima volta, viene utilizzato il termine *materia oscura* (*matière obscure* nell'originale francese) in senso astrofisico.

1.2 Prove osservative dell'esistenza della materia oscura

1.2.1 Stime della massa media di una galassia appartenente al *Coma Cluster*

Da quest'affermazione di Poincaré iniziarono una serie di studi sulla materia oscura, uno tra i più importanti è quello effettuato da Fritz Zwicky.

Zwicky, studiando i risultati di Hubble e Humason riguardo i *redshift* di diversi ammassi di galassie³, notò che le velocità stimate di alcune galassie appartenenti al *Coma cluster*, un ammasso di galassie distante circa 330 milioni di anni luce⁴, erano sensibilmente diverse tra loro.

²È possibile trovare la traduzione dal Francese all'Inglese nell'articolo [4] (secondo articolo), la traduzione dall'Inglese all'Italiano è stata effettuata dall'autore

³Pubblicazione: Hubble, E., and M. L. Humason (1931), *Astrophys. J.* 74, 43

⁴cfr. Dettagli sulle caratteristiche del Coma cluster

Partendo da questo spunto, in una sua pubblicazione del 1937[5], lo svizzero cercò di stimare la massa dell'ammasso per cercare di capire la ragione di una tale differenza.

In particolare, applicò il teorema del viriale all'ammasso studiato, che per il potenziale gravitazionale risulta essere $2T = -W$, dove T è l'energia cinetica media della massa galattica all'interno dello spazio studiato e W è la sua energia potenziale gravitazionale.

Da tale relazione egli dedusse la seguente:

$$M = \frac{5}{3} \frac{R \langle v \rangle^2}{G} \quad (1.1)$$

che descrive la massa di una sfera uniforme di raggio R , dove $\langle v \rangle$ è la velocità media della massa galattica all'interno del volume della sfera e G è la costante di gravitazione universale.

Continuò stimando la massa M_{exp} del sistema come il prodotto tra il numero delle galassie osservate (1000) appartenenti al *Coma cluster* e la massa media di una galassia (10^9 masse solari, calcolato da Hubble); considerando il valore di R essere pari a $2 \cdot 10^6$ anni luce, il valore di $\langle v \rangle$ essere circa $700 km/s$, dedotto da osservazioni dirette, attraverso la 1.1 arrivò alla conclusione che il valore medio della massa di una galassia sarebbe dovuto essere di circa $4.5 \cdot 10^{10}$ masse solari, dunque molto maggiore del valore atteso (10^9 masse solari).

Basandosi su questo risultato, Zwicky affermò che il rapporto tra massa non visibile e massa visibile all'interno dell'ammasso sarebbe potuto essere di gran lunga maggiore rispetto a quello fino a quel momento considerato come probabile, esemplificato dalle affermazioni di Poincaré citate.

Lo studio appena descritto risulta essere particolarmente importante per lo sviluppo della ricerca sulla materia oscura; infatti non soltanto viene esposto l'argomento a favore dell'esistenza di massa galattica non visibile attraverso osservazioni astronomiche, ma viene dimostrato che tale massa non può essere trascurata ai fini di costruire modelli di cosmologia che siano in accordo con le osservazioni sperimentali.

1.2.2 Curve di rotazione delle galassie

La seconda principale evidenza della presenza della materia oscura sono le curve di rotazione delle galassie. Con tale denominazione ci si riferisce alla velocità di rotazione delle stelle e dei gas contenuti in una galassia in funzione della distanza radiale di queste dal centro della stessa. Dallo studio di queste curve è possibile, attraverso alcune assunzioni semplificative, stimare la massa delle galassie in oggetto.

Una delle prime analisi delle curve di rotazione venne effettuata dallo scienziato Horace Babcock, che nel 1939 pubblicò uno studio[6] nel quale descriveva la curva di rotazione della galassia *Andromeda* (M31) fino ad una distanza di circa 20 kiloparsec, mettendo in evidenza come

la velocità delle stelle avesse un andamento inaspettato; le velocità a distanze grandi (maggiori del raggio del nucleo) erano molto più elevate di quelle previste.

Durante la seconda guerra mondiale, furono sviluppati dei radar ad onde radio per uso militare. La stessa tecnologia, tuttavia, venne dopo la guerra utilizzata per osservazioni di tipo astronomico. Uno dei primi strumenti ad onde radio fu sviluppato in Olanda da un gruppo di scienziati guidati da Jan Oort; attraverso tale innovazione fu possibile studiare le galassie con ritratti a lunghezze d'onda molto più ampie, in particolare divenne molto popolare l'analisi della onde di lunghezza pari a 21cm .

Usando questa tecnologia, in pochi anni un gran numero di scienziati concentrò i propri sforzi nello studio delle curve di rotazione di diverse galassie; tra questi spicca il nome di Albert Bosma.

Nella sua tesi di PhD del 1978[7], studiò le curve di rotazione di un numero molto grande di galassie, pari a 25, includendo anche galassie a spirale. In particolare, lavorò raggruppando e commentando i risultati fino a quel momento ottenuti da altri scienziati contemporanei ed aggiungendo le proprie considerazioni ed osservazioni per ogni galassia studiata. In questo modo, egli riuscì a evidenziare in modo convincente un andamento comune nelle diverse curve di rotazione, lo stesso andamento osservato da Babcock per *Andromeda* ma con una completezza di informazioni molto maggiore, potendo sfruttare le osservazioni della lunghezza d'onda di 21cm ed ampliare così la distanza dal centro delle galassie studiata.

Segue un grafico che riassume i risultati storici sullo studio delle curve di rotazione di *M 31*.

Nel grafico: i punti viola sono le misurazioni di Babcock; i segni neri sono le misurazioni di Rubin e Ford (i segni si dividono in quadrati, cerchi pieni e cerchi vuoti in base al metodo di osservazione ed alla precisione della misura); i cerchi vuoti corrispondono ad una precisione minore, che caratterizza le misure più interne); i segni rossi e verdi sono relativi a misurazioni ottenute con lo studio della lunghezza d'onda di 21cm ; la linea continua blu corrisponde alla curva di rotazione attesa per una galassia con un profilo di luminosità esponenziale, tipico per le galassie a disco.

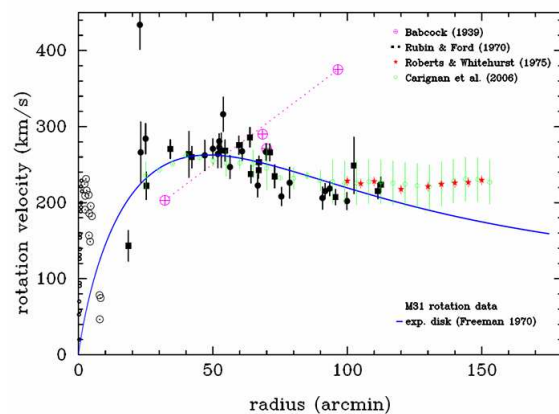


Figura 1.1: Grafico riassuntivo delle misurazioni sulle curve di rotazione, effettuato dallo stesso Bosma e tratto dal documento [8]

Dal grafico è possibile trarre alcune importanti considerazioni. In primo luogo, le misure di Babcock risultano, soprattutto con l'aumentare della distanza radiale, molto inaccurate. Le misure fino a circa 100 minuti d'arco risultano seguire un andamento simile a quello atteso, tuttavia il massimo della curva viene raggiunto a distanze dal centro della galassia maggiori. La differenza

tra valori attesi e valori misurati è invece evidente per le misurazioni effettuate con la lunghezza d'onda di 21 cm , che ritraggono un andamento quasi costante delle velocità a distanze superiori a 100 minuti d'arco.

La consistenza di queste osservazioni fu di grande importanza nel convincere la comunità scientifica dell'esistenza della materia oscura. Va tuttavia sottolineato che, nonostante l'ipotesi dell'esistenza della materia oscura fosse ormai largamente accettata, fino agli inizi del decennio del 1980, quando la fisica delle particelle si radicò nella cosmologia, si discuteva della materia oscura identificandola con massa galattica (come stelle nane, detriti e gas) non luminosa, senza specificare ulteriormente la sua natura.

1.2.3 Evidenze cosmologiche

Anisotropie nel Cosmic Microwave Background

Un'altra categoria di evidenze della presenza di materia oscura sono quelle cosmologiche. In particolare, queste prove sono da ricercarsi nelle anisotropie del *Cosmic Microwave Background* (*CMB*).[9] Nelle prime fasi dell'universo, a causa delle alte temperature, i fotoni hanno un'energia tale da ionizzare rapidamente gli atomi, non permettendo loro di aggregarsi e formare strutture. Con l'espandersi dell'universo, i fotoni si raffreddano e dopo $t \approx 0.25\text{ Myr}$ gli atomi iniziano a formarsi; il processo viene detto ricombinazione. Continuando lo spazio ad espandersi, i fotoni smettono di urtare gli atomi e si muovono liberamente; ciò avviene a $t \approx 0.37\text{ Myr}$, nel processo chiamato disaccoppiamento. Questi fotoni che si muovono liberamente costituiscono il *CMB*, che ha uno spettro di corpo nero caratterizzato dalla temperatura $T_0 \simeq 2.7\text{ K}$. Oltre al concetto di *CMB*, è importante descrivere come da piccole anisotropie nello spazio si formino strutture più complesse. Si assuma che $\bar{\rho}$ sia la densità media dell'universo e che $\delta = (\rho - \bar{\rho})/\bar{\rho}$ sia una piccola perturbazione che caratterizza una regione sferica dello spazio, considerato come statico e senza pressione; dall'accelerazione gravitazionale sulla superficie della sfera si evince che $\ddot{\delta} = 4\pi G\bar{\rho}\delta$, dunque la perturbazione aumenta esponenzialmente con tempo caratteristico $t_{car} = 1/(4\pi G\bar{\rho})^{1/2}$. Chiaramente nel caso di assenza di pressione la sfera collasserebbe, tuttavia nel caso reale la pressione c'è e dunque la sfera resiste al collasso. La perturbazione si inizia ad espandere quando $t_{pre} \approx R/c_s > t_{car}$, con R dimensione caratteristica della perturbazione e c_s velocità del suono del mezzo. Queste piccole anisotropie nella densità portano alla formazione di ulteriori anisotropie nella temperatura del *CMB*, che si possono analizzare attraverso l'uso di armoniche sferiche ($Y_l^m(\theta, \phi)$):

$$\frac{\Delta T}{\bar{T}} = \frac{T(\theta, \phi) - \bar{T}}{\bar{T}} = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^l a_{lm} Y_l^m(\theta, \phi) \quad (1.2)$$

con \bar{T} temperatura media della radiazione, $T(\theta, \phi)$ temperatura in una specifica direzione e a_{lm} coefficienti dell'espansione. Calcolando la media statistica dei coefficienti si può definire $C_l = \langle |a_{lm}|^2 \rangle$, detto *angular power spectrum*. C_l varia significativamente in funzione di l , il momento di multipolo; si possono distinguere tre diversi andamenti:

- per bassi $l < 10 - 10^2$ si ha una zona pressochè costante, in cui le piccole variazioni di temperatura sono causate da variazioni del potenziale gravitazionale.
- per valori di $10 < l < 10^3$ si trovano tre diversi picchi, che derivano da oscillazioni nel bagno di fotoni e barioni a causa della competizione tra potenziale gravitazionale e la pressione derivante dall'interazione tra fotoni ed elettroni.
- per valori di $l > 10^3$ si ha una soppressione delle fluttuazioni a causa della diffusione dei fotoni durante la ricombinazione.

Materia oscura e CMB

Il valore tipico delle fluttuazioni nella temperatura del CMB sono dell'ordine di grandezza di $\Delta T/T \approx 10^{-5}$; già questo dato fornisce evidenze sulla presenza di materiale non barionico nell'universo. Come visto precedentemente, una perturbazione nella densità inizia a crescere quando $t_{pre} = t_{car} \approx 0.05 Myr$; la materia barionica, tuttavia, è strettamente accoppiata ai fotoni fino a $t \approx 0.4 Myr$, cosa che rende impossibile far crescere una perturbazione attraverso barioni prima di questa soglia temporale. A causa di questo ritardo, se non si considerasse la presenza di materia oscura (quindi non barionica) si dovrebbe avere un valore della fluttuazione di temperatura di $\Delta T/T \approx 10^{-4}$ perché si formino le strutture visibili attualmente nell'universo; come visto, questo va contro le evidenze sperimentali [9].

La densità barionica influenza le oscillazioni nel bagno di fotoni, aumentando l'ampiezza dei picchi di C_l , come visto nel paragrafo precedente. Da un'analisi più approfondita di questo fenomeno segue che anche l'eventuale presenza di materia oscura nel bagno di fotoni produce variazioni nell'ampiezza dei picchi, in particolare nel terzo picco della regione $10 < l < 10^3$; i valori osservati di C_l riescono ad essere riprodotti solo introducendo la materia oscura nella densità di materia presente nel bagno di fotoni, confermando la necessità di includere nelle descrizioni dei fenomeni cosmologici questa misteriosa componente.

2 Caratteristiche della materia oscura

In questo capitolo verranno presentate le caratteristiche che attualmente sono attribuite alla materia oscura, distaccandosi dal carattere storico del primo capitolo. La si tratterà anche dal punto di vista della fisica astroparticellare; ove necessario, verranno effettuate alcune parentesi di carattere cosmologico.

2.1 Interazione gravitazionale

È certo che la materia oscura interagisca gravitazionalmente, come è evidente dal contenuto del capitolo precedente. La materia oscura è tutt'ora presente nell'universo e non c'è alcuna evidenza riguardo ad altre interazioni se non quelle di tipo gravitazionale.

È dunque lecito chiedersi se, per spiegare le anomalie riscontrate e che hanno dato origine all'ipotesi della materia oscura, sia opportuno riformulare la legge di gravitazione newtoniana. Tra i modelli proposti, quello che ha avuto più successo è il modello *MOND*[10] (Modified Newtonian Dynamics).

Questo modello si fonda sull'ipotesi che la relazione

$$F = ma \tag{2.1}$$

si possa correggere attraverso un fattore $\mu(a)$, che è pari all'unità a meno che l'accelerazione non sia molto minore di un valore di riferimento, detto a_0 . Applicando il caso appena descritto alla forza di gravità si ottengono i seguenti risultati:

$$\mu = \frac{a}{a_0} \quad F = \frac{GMm}{r^2} = ma\mu \tag{2.2}$$

$$\Rightarrow a = \frac{\sqrt{GMa_0}}{r} \tag{2.3}$$

considerando ora questa accelerazione come centripeta, si ottiene il risultato di velocità orbitale costante in modulo: $v = (GMa_0)^{1/4}$.

Per valori di $a_0 \simeq 1.2 \cdot 10^{-10} m/s^2$ i valori di v risultano in ottimo accordo con i valori osservati

delle curve di rotazione su scala galattica.

Questa teoria, tuttavia, presenta due grandi problemi: il primo è che è unicamente non relativistica, dunque non può essere usata nei casi in cui la relatività generale è necessaria; il secondo e più importante è che le previsioni non rispettano i valori osservati a distanze più grandi di quelle galattiche[11].

In conclusione, nonostante la materia oscura interagisca gravitazionalmente, non sembra che modificare la dinamica newtoniana sia sufficiente per spiegare le prove osservative della sua esistenza.

Una volta scartata l'ipotesi di una teoria che non preveda la materia oscura, ci si può chiedere come questa sia distribuita all'interno di una galassia. In prossimità di una galassia, a causa dell'interazione gravitazionale, la materia oscura forma veri e propri aloni, che si possono estendere molto al di là dei confini della materia visibile. In particolare, dall'analisi delle curve di rotazione è possibile stimare il seguente andamento per la densità di materia oscura[12]:

$$\rho(r) \propto \frac{M(r)}{r^3} \simeq \frac{1}{r^2} \quad (2.4)$$

dove è stata fatta l'assunzione che la materia oscura si distribuisca in un alone a simmetria sferica, in contrapposizione alla materia barionica che è distribuita in un disco.

Una volta nota la distribuzione di densità, il prossimo passo è trovare la distribuzione di velocità della materia oscura; il calcolo verrà effettuato in dettaglio nella sezione 4.3.

Per dare un ordine di grandezza è necessario mettere in evidenza che la materia oscura è non relativistica, come si può evincere da semplici calcoli; ad esempio utilizzando il teorema del viriale per la *Via lattea*, si ottiene il seguente valore della velocità media per l'alone di materia oscura[12]:

$$\langle v \rangle \simeq \sqrt{\frac{GM_{halo}}{R_{halo}}} \simeq 200 km/s \quad (2.5)$$

dove sono utilizzati i valori $M_{halo} \simeq 10^{12} M_{\odot}$ ¹ per la massa dell'alone di materia oscura e $R_{halo} \simeq 100 kpc$ per il raggio dell'alone.

2.2 Caratteristiche di massa: i candidati di materia oscura

In questa sezione verranno trattati i limiti sulla massa, le conseguenti descrizioni della materia oscura come particella o struttura cosmologica più complessa, per poi descrivere i più importanti candidati di materia oscura.

Nel primo capitolo 1.1 è stato evidenziato come inizialmente si pensasse alla materia oscura

¹ M_{\odot} è il valore di una massa solare

descrivendola come *stelle oscure*; nonostante la ricerca sia fortemente progredita in questo ambito, tutt'ora i limiti superiore ed inferiore sulla massa della materia oscura sono molto larghi, permettendo di effettuare diverse ipotesi sulla sua natura.

Per trattare il limite inferiore si deve considerare la materia oscura come una particella; dividendo la densità di materia oscura nello spazio delle fasi ottenuta da osservazioni su galassie nane in modo simile a quanto sarà fatto nella sezione 4.3 per il numero di particelle presenti in una cella (o unità di volume) dello spazio delle fasi, è possibile ottenere una stima della massa della materia oscura come particella. Un metodo alternativo è chiaramente dividere la massa totale dell'alone per il numero di particelle; la scelta di utilizzare osservazioni su aloni di galassie nane è necessaria per ottenere il valore più piccolo possibile per la massa delle particelle.

Per ottenere il numero di particelle presenti in una cella dello spazio delle fasi è necessario effettuare delle assunzioni sulle caratteristiche di spin della materia oscura.

Se lo spin è intero, dunque la materia oscura è di natura bosonica, allora non c'è un limite al numero di particelle che possono essere presenti in una cella dello spazio delle fasi, in accordo con la distribuzione di Bose-Einstein; in questo caso il numero di particelle è talmente elevato che si possono trattare come un campo classico. Usando[12] dunque il principio di indeterminazione:

$$\Delta x \Delta p \simeq 1 \quad \Delta p \simeq m_\chi v \quad \Delta x \simeq 2R_{halo} \quad (2.6)$$

dove Δx è approssimativamente il valore della distanza lineare in cui le particelle si muovono, m_χ è la massa incognita della materia oscura e v è ottenuta dalle curve di rotazione. Queste relazioni permettono di stimare il seguente limite inferiore per la massa:

$$m_{bos} > 10^{-22} eV \quad (2.7)$$

se invece lo spin è semintero, per il principio di esclusione di Pauli è vera la seguente disuguaglianza[12]:

$$M_{halo} = m_{ferm} V \int f(p) d^3p < m_{ferm} V \int d^3p \approx m_{ferm} R_{halo}^3 (m_{ferm} v)^3 \quad (2.8)$$

dove M_{halo} è la massa totale dell'alone, m_{ferm} è la massa incognita della particella, V è il volume dell'alone considerato sferico, $f(p)$ è la distribuzione delle particelle in funzione del momento, che prevede la presenza di massimo una particella per ogni cella dello spazio delle fasi. Utilizzando il valore di v ottenuto dal teorema del viriale segue la seguente espressione:

$$m_{ferm} > (G^3 M_{halo} R_{halo}^3)^{-1/8} \quad (2.9)$$

$$m_{ferm} > O(10) eV \quad (2.10)$$

da cui è possibile ricavare una stima per il limite inferiore della massa della materia oscura nel caso di particella fermionica. Come ci si poteva aspettare, il limite per la materia bosonica è molto meno stringente.

Per quanto riguarda il limite superiore, invece, si può ottenere[13] dallo studio della dinamica delle più piccole galassie conosciute, che si trovano all'interno di un alone di materia oscura che ha massa $\approx 10^5 - 10^6 M_\odot$ entro i confini del raggio efficiente delle galassie. Da questa osservazione segue che la materia oscura potrebbe essere costituita anche da oggetti con massa di $\approx 10^4 - 10^5 M_\odot$ ed essere ancora coerente con le osservazioni della dinamica galattica.

Nella figura 2.1, dopo aver posto i limiti inferiore e superiore per la massa, vengono brevemente presentate le diverse tipologie di materia oscura che sono state ipotizzate.

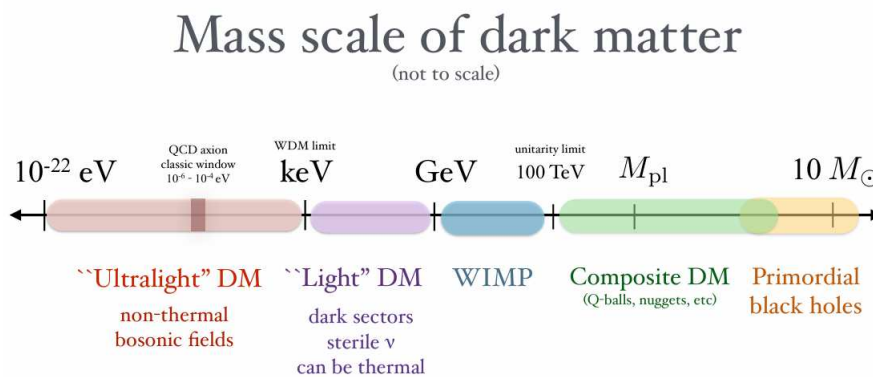


Figura 2.1: Grafico riassuntivo dei diversi range di massa per la materia oscura, tratto dalla *lecture*[13]

Ultralight DM

L'*ultralight DM*, di cui si è brevemente discusso nella trattazione del limite di massa inferiore, è la tipologia di materia oscura più leggera. La caratteristica principale è che, nel caso bosonico, poiché è numericamente molto densa, può essere trattata come un campo classico.

In questo range, nella figura 2.1 è presente una sottosezione denominata *QCD Axion*. *QCD* sta per *Quantum Chromodynamics*, cioè lo studio delle interazioni forti; l'assione è una particella la cui esistenza è stata ipotizzata per risolvere il così detto *strong CP problem*, cioè il fatto che la violazione di simmetria per coniugazione di carica e inversione di coordinate spaziali, prevista dalla *QCD*, non viene osservata. Senza addentrarsi troppo in dettagli che esulano da questa trattazione, gli assioni possono essere candidati per l'identificazione della materia oscura; in particolare[13], dopo aver applicato diversi vincoli di carattere cosmologico ed astrofisico, se gli assioni costituiscono la totalità della materia oscura, la loro massa deve essere confinata nel range $10^{-6} - 10^{-4}$ eV.

Il limite tra l'*ultralight DM* e la *light DM* è nell'ordine di grandezza dei keV; in questo range

di massa la materia oscura è detta *WDM*, cioè *Warm Dark Matter*. L'aggettivo *warm* è una caratteristica termica di cui si tratterà in dettaglio nella sezione 3.1.

Light DM e WIMPs

Il range tra l'ordine di grandezza dei keV e quello di un centinaio di TeV è caratterizzato dalle *WIMPs*, cioè *Weakly Interactive Massive Particles* (particelle massive debolmente interagenti); questo tipo di particelle sono caratterizzate dall'interagire solo gravitazionalmente o in modo debole², non avendo dunque carica elettrica e di colore. Sono le più studiate in letteratura perché, per le loro caratteristiche di massa e per il valore della costante di accoppiamento, i modelli costruiti sulle *WIMPs* restituiscono valori aspettati di densità di materia oscura in accordo con i valori tratti da osservazioni sperimentali (questo argomento verrà trattato in modo dettagliato nella sezione 3.1). Per *WIMPs* con massa dell'ordine di grandezza del GeV , il valore della costante di accoppiamento è dell'ordine di grandezza di $\alpha \approx 0.01$ [12].

Composite DM e buchi neri primordiali

Oltre che in forma di particella, la materia oscura potrebbe presentarsi in una struttura più complicata[13].

L'*Ultralight DM* è come detto molto densa; per questo motivo è possibile che le particelle, che siano queste bosoniche o assioni, condensino, formando agglomerati (*composite DM*): le così dette stelle di bosoni o assioni. Questi oggetti possono costituire parte della materia oscura.

Un altro tipo di oggetto cosmologico che potrebbe costituire la materia oscura sono i buchi neri primordiali, cioè che si sono formati prima della ricombinazione³. Il range di massa per questi buchi neri può andare da $\approx 10^{-17}M_{\odot}$, valore necessario perché siano abbastanza scuri (cioè evaporino molto lentamente), a $\approx 50M_{\odot}$, sotto l'ipotesi che la frazione di materia oscura sotto forma di questi oggetti sia $\approx 10\%$.

²Meglio, con sezioni d'urto paragonabili a quelle tipiche dell'interazione debole

³Periodo cosmologico in cui elettroni e protoni iniziano a legarsi, formando idrogeno; è lo stesso periodo in cui iniziano a propagarsi i fotoni della radiazione cosmica di fondo.

3 *Freeze-out*

Dopo aver presentato i principali candidati di materia oscura, la discussione si concentra sulle *WIMPs*. In particolare, in questo capitolo si discuterà come mettere in relazione la densità di materia oscura osservata oggi con i processi che hanno caratterizzato la *DM* nelle prime fasi dell'Universo. Verrà presentato ed analizzato il fenomeno del *freeze-out*, un passaggio fondamentale per la comprensione delle caratteristiche della materia oscura.

3.1 Meccanismo di produzione termica

In questa sezione si tratterà la materia oscura come particella, per ricavare quali siano le sue caratteristiche termiche.

La prima domanda che è lecito porsi è: come interagisce una particella di materia oscura (χ) con altre particelle, di materia oscura o ordinaria (x)?

I processi chiave di interazione sono due:

1. l'annichilazione di coppia di due particelle di materia oscura, che ha come prodotto due particelle di materia ordinaria: $\chi + \chi \Rightarrow x + x$
2. l'urto elastico tra una particella di materia oscura ed una di materia ordinaria $\chi + x \Rightarrow \chi + x$

Il modo migliore per verificare se e con che frequenza queste interazioni avvengono è tenere traccia dei prodotti di materia ordinaria nei casi di interesse. Per questo motivo una grandezza fondamentale è il flusso di particelle di materia ordinaria che fuoriescono, per unità di tempo, da un volume V che contiene particelle di materia oscura; questa grandezza, $\Gamma_{x,x',\dots} = \Gamma_{MO}$, viene detta *rate*.

Il processo di interesse per questo capitolo è l'annichilazione di coppia; l'urto elastico sarà invece protagonista nel capitolo 4. Nel primo caso il rate può essere scritto come prodotto dei seguenti fattori[14]:

- il numero di di coppie particelle χ nel volume considerato;
- il tasso di annichilazione di coppia delle particelle χ ;

- il flusso di particelle per singolo evento di annichilazione.

Si ottiene dunque il seguente rate:

$$\Gamma_{MO,ann} = \left(\int \frac{\rho_{DM}^2}{m_\chi^2} dV \right) (\sigma v) (N_{MO,ann}) \quad (3.1)$$

dove ρ_{DM} è la densità della materia oscura, m_χ è la massa della singola particella di materia oscura, σ è la sezione d'urto nello scattering tra due χ .

La maggior parte di queste quantità è fortemente dipendente da come la materia oscura è stata prodotta nelle prime fasi dell'universo. Un fenomeno di fondamentale importanza per le previsioni teoriche sulla densità di materia oscura è il disaccoppiamento termico, strettamente legato al rate di interazione.

Nelle sue prime fasi, l'universo, è caratterizzato da una temperatura molto elevata; per questo motivo il rate di interazione tra particelle di materia oscura e materia ordinaria è molto elevato. Con l'espandersi dell'universo, quando il rate diventa dell'ordine di grandezza della funzione di Hubble H , le particelle di materia oscura non riescono a trovare un partner di interazione a causa dell'espansione dello spazio in cui si trovano, dunque gli urti smettono di avvenire. Questo fenomeno è detto *freeze-out*, cioè congelamento della densità di una specie particellare avvenuto a causa dell'uscita dall'equilibrio chimico e termico che caratterizza lo spazio circostante le particelle. Dopo il *freeze-out*, la densità della specie varia solo a causa dell'espansione dello spazio.

Si analizza ora nel dettaglio la relazione tra il rate e la funzione di Hubble[14].

Le equazioni fondamentali sono le seguenti:

$$\Gamma \approx H(T) \quad (3.2)$$

$$\Gamma = n\sigma \quad H^2 \simeq \frac{8\pi^3 G_N}{90} gT^4 \quad (3.3)$$

per quanto riguarda il *rate*, esso può essere espresso come il prodotto tra la densità numerica di particelle e la sezione d'urto di interazione; un passaggio importante è ora descrivere la densità numerica, attraverso l'uso di risultati derivati dalla meccanica statistica.

Una particella di massa m , in un bagno termico di temperatura T , ha due regimi asintotici:

$$n_{rel} \approx T^3 \quad se \quad m \ll T \quad (3.4)$$

$$n_{n-rel} \approx (mT)^{3/2} e^{-m/T} \quad se \quad m \gg T \quad (3.5)$$

per quanto riguarda la funzione di Hubble, invece, essa è stata tratta dall'equazione di Friedmann, avendo scelto come densità quella caratteristica dell'epoca dominata dalle radiazio-

ni ($T \geq 1eV$). Il fattore g descrive i gradi di libertà relativistici. Riscrivendo G_N come $M_P = 1/\sqrt{8\pi G_N}$, segue questa relazione: $H \simeq T^2/M_P$.

La materia oscura viene detta calda (*Hot DM*) se la sua temperatura è relativistica nel momento del *freeze-out*, fredda (*Cold DM*) se non è relativistica e tiepida (*Warm DM*) se la sua densità numerica non è descrivibile nè come quella della *Hot DM* nè come quella della *Cold DM*.

Hot DM

Si vuole ora calcolare la densità di materia oscura per la *Hot DM*. Introducendo la notazione $Y = n/s$, dove n è la densità numerica e s è la densità di entropia. In un universo isoentropico, $s \cdot a^3 = cost$, con a fattore di scala dell'universo. Il parametro $Y \approx na^3$ è perciò una densità numerica comovente, cioè che in un universo isoentropico rimane costante nonostante l'espansione dell'universo.

Per la materia oscura calda, la densità numerica in coordinate comoventi nel momento del *freeze-out* è:

$$Y_{f-o}^{hot} = \frac{\rho_X(T_X)}{m_X s(T_X)} \quad (3.6)$$

con T_X temperatura delle particelle di materia oscura durante il *freeze-out*. La densità numerica ai giorni nostri può essere trovata nel seguente modo a partire da Y :

$$n_{oggi} = s_{oggi} Y_{f-o} \quad (3.7)$$

La densità di materia oscura può essere espressa come frazione (Ω_X) rispetto alla densità critica dell'universo (ρ_{crit}) moltiplicata per $h^2 \simeq 0.5$, il quadrato della costante di Hubble ai giorni nostri. Effettuando il calcolo, si ottiene il seguente risultato:

$$\Omega_X h^2 = \frac{\rho_X}{\rho_{crit}} h^2 \propto m_X \quad (3.8)$$

l'abbondanza della *hot DM* è dunque proporzionale alla massa della particella di materia oscura associata.

A causa di questo andamento, tuttavia, la materia oscura calda presenta profondi problemi di carattere cosmologico (in particolare nella formazione di strutture complesse nelle prime fasi dell'universo), che sono stati evidenziati attraverso analisi numeriche[12]. Per questo motivo, in questa discussione il focus sarà sulla materia oscura fredda.

Cold DM

Per quanto riguarda la materia oscura fredda, partendo dalle equazioni 3.2 e 3.5 si arriva alla seguente relazione[14]:

$$n_{f-o} \approx \frac{T_{f-o}^2}{M_P \sigma} \quad (3.9)$$

il vincolo per parlare di materia oscura fredda è $m_\chi \gg T_\chi$; definendo $x \equiv m_\chi/T_\chi \gg 1$, si può riscrivere l'equazione 3.2 nel seguente modo:

$$\frac{m_\chi^3}{x^{3/2}} e^{-x} = \frac{m_\chi}{x^2 M_P \sigma} \quad (3.10)$$

questa equazione si può risolvere caratterizzando la materia oscura come una particella che interagisce per interazione debole, ponendo dunque $\sigma \approx G_F^2 m_\chi^2$ con G_F la costante di Fermi.

Anche in questo caso si calcola Ω_χ :

$$\Omega_\chi = \frac{m_\chi n_\chi(T_\chi = T_0)}{\rho_{crit}} = \frac{m_\chi T_0^3 n_0}{\rho_{crit} T_0^3} \quad (3.11)$$

con $T_0 = 2.75K$ la temperatura media dell'universo oggi ed n_0 la densità numerica oggi. Per un universo isoentropico $aT \approx cost$, dunque:

$$\frac{n_0}{T_0^3} \simeq \frac{n_{f-o}}{T_{f-o}^3} \quad (3.12)$$

utilizzando queste relazioni e l'equazione 3.9 si ottiene il seguente risultato:

$$\Omega_\chi = \frac{m_\chi T_0^3 n_{f-o}}{\rho_{crit} T_{f-o}^3} = \frac{T_0^3}{\rho_{crit}} x_{f-o} \left(\frac{n_{f-o}}{T_{f-o}^2} \right) = \left(\frac{T_0^3}{\rho_{crit} M_P} \right) \frac{x_{f-o}}{\sigma} \quad (3.13)$$

al posto della sezione d'urto σ , in letteratura si trova spesso la notazione $\langle \sigma v \rangle$, cioè la *thermally averaged cross section*, una media della sezione d'urto pesata attraverso la probabilità che si verifichi l'urto ad una data velocità.

Utilizzando[12] i parametri $x_{f-o} \approx 25$, ordine di grandezza ragionevole per la materia oscura fredda, $\langle \sigma v \rangle \approx \alpha^2/m_\chi$ con $\alpha \approx 0.01$, valore tipico per le interazioni deboli, ed $m_\chi \approx 100 GeV$ avviene il così detto *WIMPs miracle*: l'equazione restituisce il valore corretto di abbondanza di materia oscura oggi; $\Omega_\chi \simeq 0.12$.

Nonostante ci siano buone basi, le *Weakly Interactive Massive Particles* non sono l'unico tipo di particelle che restituiscono risultati corretti di densità di materia oscura oggi; saranno tuttavia i candidati di materia oscura scelti per il proseguo della tesi.

Dopo aver presentato i risultati più importanti per la trattazione, si procede alla derivazione

analitica della densità di materia oscura nell'universo.

3.2 Discussione analitica del *freeze-out* di *Cold DM*

Per iniziare la discussione[12] si presenta l'equazione di Boltzmann:

$$\mathbf{L}[f] = \mathbf{C}[f] \quad (3.14)$$

$$\mathbf{L}[f] = E \frac{\partial f}{\partial t} - \frac{\dot{a}}{a} |\mathbf{p}|^2 \frac{\partial f}{\partial E} \quad (3.15)$$

dove $\mathbf{L}[f]$ è l'operatore di Liouville nella forma covariante e $\mathbf{C}[f]$ è l'operatore di collisione. L'operatore di Liouville tiene traccia del cambiamento della densità nello spazio delle fasi, l'operatore di collisione invece descrive l'effetto delle collisioni con altre particelle sulla densità. La funzione $f(E, t)$ è la densità nello spazio delle fasi. La densità numerica di una data particella è legata alla propria funzione f dalla seguente relazione:

$$n = g \int f(E, t) \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \quad (3.16)$$

con g gradi di libertà di spin della particella.

Ancora, nell'equazione 3.15 $H = \frac{\dot{a}}{a}$ è il tasso di espansione dell'universo ed a è il fattore di scala.

Usando le equazioni 3.15 e 3.16 è possibile scrivere la seguente relazione:

$$g \int L[f] \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} = \frac{1}{a^3} \frac{d}{dt} (na^3) = \frac{dn}{dt} + 3Hn \quad (3.17)$$

per quanto riguarda l'operatore di collisione, invece si consideri un'interazione della forma

$1 + 2 \longleftrightarrow 3 + 4$. Il termine di collisione per la particella 1 è il seguente:

$$g_1 \int C[f_1] \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^3} = - \sum_{spins} \int [f_1 f_2 (1 \pm f_3) (1 \pm f_4) |\mathcal{M}_{12 \rightarrow 34}|^2 - f_3 f_4 (1 \pm f_1) (1 \pm f_2) |\mathcal{M}_{34 \rightarrow 12}|^2] \cdot (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) d\Pi_1 d\Pi_2 d\Pi_3 d\Pi_4$$

dove g_i e f_i sono i gradi di libertà di spin e le densità nello spazio delle fasi per la particella i e $\mathcal{M}_{x \rightarrow y}$ è l'elemento di matrice per l'urto $x \rightarrow y$. I fattori $(1 \pm f_i)$ caratterizzano la natura bosonica (+) o fermionica (-) della particella poiché per i bosoni è più probabile effettuare una transizione verso uno stato già occupato da un altro bosone, viceversa per i fermioni. Il ruolo della funzione δ^4 è quello di azzerare tutti i contributi dei valori di momento ed energia che non

rispettino le leggi di conservazione; i fattori di integrazione $d\Pi_i$ sono definiti come segue:

$$d\Pi_i = \frac{d^3 p_i}{(2\pi)^3 2E_i} \quad (3.18)$$

L'espressione appena descritta può essere semplificata attraverso tre diverse assunzioni:

1. si sta descrivendo la materia oscura in equilibrio cinetico, dunque le particelle possono essere descritte dalle distribuzioni di Bose-Einstein o di Fermi-Dirac in base alla loro natura bosonica o fermionica;
2. tutte le particelle coinvolte hanno una temperatura tale che $T_i \ll E_i - \mu_i$, con μ_i potenziale chimico, in modo tale che seguano la distribuzione di Maxwell-Boltzmann, cosa che rende i fattori $(1 \pm f_i) \simeq 1$;
3. le particelle del modello standard sono in equilibrio con il bagno di fotoni.

Usando la definizione standard che lega la sezione d'urto all'elemento di matrice, si ottiene:

$$\sum_{spins} \int |\mathcal{M}_{ij \rightarrow kl}|^2 \cdot (2\pi)^4 \delta^4(p_i + p_j - p_k - p_l) d\Pi_k d\Pi_l = 4g_i g_j \delta_{ij} \sqrt{(p_i \cdot p_j)^2 - (m_i m_j)^2} \quad (3.19)$$

dove σ_{ij} è la sezione d'urto del processo. Sostituendo nel termine di collisione:

$$g_1 \int C[f_1] \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^3} = - \int [(\sigma v_M)_{12} dn_1 dn_2 - (\sigma v_M)_{34} dn_3 dn_4] \quad (3.20)$$

con la velocità di Møller definita come segue:

$$(v_M)_{ij} = \frac{\sqrt{(p_i \cdot p_j)^2 - (m_i m_j)^2}}{E_i E_j} \quad (3.21)$$

la velocità di Møller è un invariante di Lorentz e cambia molto lentamente in funzione del numero di densità degli stati iniziali e finali, dunque può essere portato fuori dall'integrale ottenendo (utilizzando le equazioni 3.14, 3.17 e 3.20):

$$\dot{n}_1 + 3Hn_1 = -\langle \sigma v_M \rangle_{12} n_1 n_2 + \langle \sigma v_M \rangle_{34} n_3 n_4 \quad (3.22)$$

da questo momento e per il resto della sezione, per indicare la velocità di Møller si utilizzerà solamente la lettera v .

Tornando al caso di interesse, si assuma ora che le particelle 1 e 2 siano identiche con densità numerica n , che le particelle 3 e 4 siano particelle del modello standard in equilibrio termico con il bagno di fotoni. Quando anche la materia oscura è in equilibrio con gli stati finali delle

particelle 3 e 4, allora il bilancio dettagliato diventa:

$$\langle\sigma v\rangle_{12}n_{eq}^2 = \langle\sigma v\rangle_{34}n_3n_4 \quad (3.23)$$

utilizzando anche questa espressione, l'equazione di Boltzmann si riduce a:

$$\dot{n} + 3Hn = \langle\sigma v\rangle_{12}(n_{eq}^2 - n^2) \quad (3.24)$$

In figura 3.1 le linee colorate sono soluzioni numeriche dell'equazione di Boltzmann; ad alte temperature la materia oscura è in equilibrio, a temperature più basse il valore della densità numerica, riscalata per rimuovere gli effetti dell'espansione dell'universo ($Y = n/s$, con s densità di entropia dell'universo), è costante. Dalla figura si deduce anche che il processo di *freeze-out* non è istantaneo, caratteristica che renderebbe le curve spigolose nel passaggio tra l'equilibrio ed il regime asintotico.

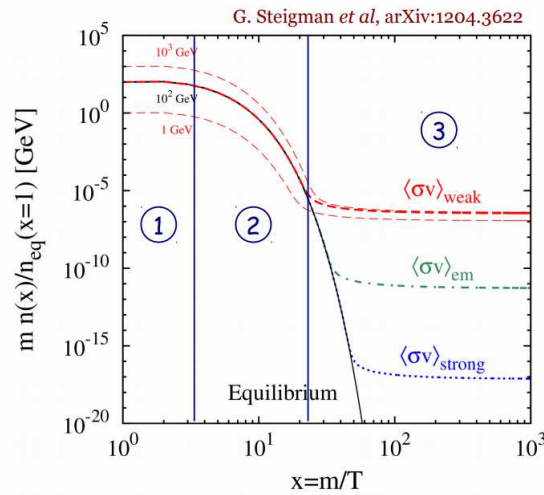


Figura 3.1: Grafico riassuntivo di alcune soluzioni numeriche dell'equazione di Boltzmann. La referenza è all'interno del grafico.

Sono state ora delineate le caratteristiche fondamentali della materia oscura, dunque si può procedere alla descrizione della *direct detection* nel prossimo capitolo.

4 *Direct detection*

In questo capitolo verrà trattata in particolare la *direct detection*, cioè la ricerca della materia oscura attraverso il suo *scattering* con un nucleo bersaglio. Per l'intero capitolo, la fonte principale sarà la [13].

4.1 Introduzione e cinematica dell'urto

L'obiettivo della *direct detection* è quello di rilevare le occasionali collisioni tra una particella di materia oscura e un nucleo di materiale bersaglio. Questo tipo di rilevazione avviene attraverso studi di *scattering* sulla Terra, dunque indaga la materia oscura che si trova nella Via Lattea, in particolare nel Sistema Solare.

Il Sistema Solare si muove attraverso la Via Lattea nel suo moto di rotazione, scontrandosi con un *vento* di materia oscura, in equilibrio gravitazionale con la galassia, le cui proprietà sono deducibili attraverso la sola interazione gravitazionale.

La *direct detection* analizza gli urti definiti in precedenza nella sezione 2.2, differenziandosi dalla *indirect detection* che invece studia l'annichilimento della materia oscura. Uno dei punti critici della *direct detection* è la distinzione tra segnale e rumore di fondo; l'energia tipica di rinculo dei nuclei è molto bassa, di ordine di grandezza inferiore al MeV . Nonostante questa problematica, un punto di forza della *direct detection* è il pieno controllo sull'apparato sperimentale, elemento che permette di effettuare misure molto precise e che rende più facile notare e risolvere eventuali effetti perturbativi nelle misure.

Come detto, il modello di materia oscura scelto per questa trattazione sono le *WIMPs*, con massa di pochi GeV . Considerando un nucleo a riposo ed un urto elastico, l'energia cinetica totale del sistema è, prima e dopo l'urto:

$$E_i = \frac{\mathbf{p}^2}{2m_\chi}, \quad \mathbf{p} = m_\chi \mathbf{v} \quad (4.1)$$

$$E_f = \frac{(\mathbf{p} - \mathbf{q})^2}{2m_\chi} + \frac{\mathbf{q}^2}{2m_N} \quad (4.2)$$

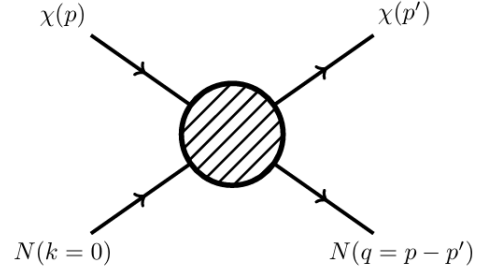


Figura 4.1: Breve schema dell'urto tratto dalla lecture [13]

L'energia di rinculo è $E_R = \mathbf{q}^2/2m_N$ essendo \mathbf{q} il momento trasferito al nucleo. Definendo $\cos \theta = \hat{\mathbf{p}} \cdot \hat{\mathbf{q}}$, per la conservazione della quantità di moto segue:

$$\frac{|\mathbf{p}||\mathbf{q}| \cos \theta}{m_\chi} = \frac{\mathbf{q}^2}{2\mu_{\chi N}} \quad \mu_{\chi N} = \frac{m_\chi m_N}{m_\chi + m_N} \quad (4.3)$$

avendo definito $\mu_{\chi N}$ come massa ridotta del sistema. Il valore massimo del momento trasferito si ha se \mathbf{p} e \mathbf{q} hanno la stessa direzione, dunque $|\mathbf{q}|_{max} = 2\mu_{\chi N}|\mathbf{p}|/m_\chi$. Per tale valore:

$$E_R^{max} = \frac{|\mathbf{q}|_{max}^2}{2m_N} = \frac{2\mu_{\chi N}^2 v^2}{m_N} \simeq 20 - 200 keV \quad (4.4)$$

dove sono stati inseriti nell'equazione i valori tipici della velocità della materia oscura $v \approx 10^{-3}$, della massa ridotta $\mu_{\chi N} \simeq 10 - 100 GeV$ e dell'impulso trasferito $|\mathbf{q}|_{max} \simeq 20 - 200 MeV$.

In questa trattazione verranno trascurati gli ulteriori urti a catena che si generano mettendo in moto il nucleo bersaglio e la possibile eccitazione degli stati legati atomici e nucleari dovuta all'urto.

Assegnato un valore all'energia di rinculo, la minima velocità che permette quel valore di energia sarà dunque $v_{min} = \sqrt{m_N E_R / 2\mu_{\chi N}^2}$. Il limite superiore per la velocità può invece essere fissato al valore della velocità di fuga, $v \lesssim 3 \cdot 10^{-3}$ nel sistema di riferimento del laboratorio.

4.2 Calcolo dello scattering rate

Per identificare quali siano i processi fisici rilevanti è utile tradurre un valore tipico di momento trasferito nell'urto su una scala di lunghezza: $1/|\mathbf{q}| \approx 1 - 10 fm$. L'ordine di grandezza è dunque quello del raggio nucleare, perciò è necessario non trascurare il fattore di forma nella descrizione dell'urto, cioè l'antitrasformata di Fourier della distribuzione di massa di un oggetto coinvolto in uno scattering.

È possibile scrivere il fattore di forma di massa nel seguente modo:

$$F(q) = \int d^3 \mathbf{x} e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} \frac{\rho_n(\mathbf{x})}{m_n} \quad (4.5)$$

dove $\rho_n(\mathbf{x})$ è la densità di massa dei nucleoni del nucleo. Il calcolo di questo integrale dipende fortemente dal modello scelto per la descrizione dell'atomo. Una forma di $F(q)$ comunemente usata è il fattore di forma di Helm:

$$F(q) = \frac{3j_1(qr_n)}{qr_n} e^{-(qs)^2/2} \quad (4.6)$$

dove j_1 è la prima funzione sferica di Bessel; si può ottenere un fit ben approssimato per nuclei pesanti con i valori di $r_n \approx 1.14A^{1/3} fm$ (con A numero di massa atomica) e $s \approx 0.9 fm$.

4.2.1 Sezione d'urto tra materia oscura e nucleoni

Si può ora passare al calcolo dello *scattering rate* indipendente dallo spin. Si inizia con l'analizzare il rate per lo scattering tra nucleoni e materia oscura, per poi passare a quello tra nuclei e materia oscura attraverso il fattore di forma. Nel limite non relativistico e sotto l'assunzione di nucleoni a riposo, la sezione d'urto differenziale si può scrivere come:

$$d\sigma_n = \frac{|\mathcal{M}|^2}{4m_\chi m_n v} \frac{d^3 \mathbf{p}'}{(2\pi)^3 2m_\chi} \frac{d^3 \mathbf{q}}{(2\pi)^3 2m_n} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p + k - p' - k') \quad (4.7)$$

con v velocità iniziale della materia oscura e $p, \mathbf{p}', \mathbf{q}, k, k'$ definiti come nella figura 4.1. $|\mathcal{M}|$ è l'elemento di matrice di interazione che descrive la probabilità di transizione dallo stato iniziale allo stato finale dell'urto. Questo fattore può essere scritto, sotto l'assunzione che sia la materia oscura che i nucleoni siano fermioni di spin 1/2, nel seguente modo:

$$|\mathcal{M}|^2 = b_n^2 (4m_\chi m_n)^2 \quad (4.8)$$

dove b_n è il *vector coupling* tra la materia oscura ed il nucleone.

Sostituendo questa espressione per $|\mathcal{M}|^2$ nella sezione d'urto differenziale si ottiene:

$$d\sigma_n = \frac{b_n^2}{4\pi v^2} d|\mathbf{q}|^2 d\cos\theta \delta\left(\cos\theta - \frac{|\mathbf{q}|}{2\mu_{\chi n} v}\right) \quad (4.9)$$

con $\cos\theta = \hat{\mathbf{q}} \cdot \hat{\mathbf{p}}$ e $\mu_{\chi n}$ definita come la massa ridotta di materia oscura e nucleone. Integrando per tutti i valori del momento cinematicamente permessi $|\mathbf{q}| \leq 2\mu_{\chi n} v$ (come visto nella sezione

precedente) si ottiene la sezione d'urto totale:

$$\sigma_n = \frac{\mu_{\chi n}^2 b_n^2}{\pi} \quad (4.10)$$

4.2.2 Scattering rate tra materia oscura e nuclei

Per passare da nucleoni a nuclei, si inizia ricordando la relazione $d|\mathbf{q}|^2 = 2m_N dE_R$, con E_R energia di rinculo; includendo il fattore di forma nel calcolo della sezione d'urto e inserendo nell'equazione la relazione appena proposta si ottiene:

$$\frac{d\sigma_N}{dE_R} = \frac{|\mathcal{M}|^2 m_N}{\pi 2v^2} F^2(q) d\cos\theta \delta\left(\cos\theta - \frac{|\mathbf{q}|}{2\mu_{\chi N} v}\right) \quad (4.11)$$

$$= \frac{\sigma_n m_N}{\mu_{\chi n}^2 2v^2} F^2(q) \Theta\left(v - \sqrt{\frac{m_N E_R}{2\mu_{\chi N}^2}}\right) \quad (4.12)$$

in cui è stata usata la sezione d'urto per nucleoni appena calcolata per rimuovere il fattore $|\mathcal{M}|^2$ e la funzione a gradino per annullare i contributi delle velocità minori rispetto alla velocità minima per un dato valore di E_R (valore calcolato nella sezione precedente).

Lo *scattering rate* differenziale per unità di tempo e massa è definito come:

$$\frac{dR}{dE_R} = N_T n_\chi \int \frac{d\sigma}{dE_R} v f(\mathbf{v}) d^3\mathbf{v} \quad (4.13)$$

con N_T numero di nuclei per unità di massa del bersaglio, $n_\chi = \rho_\chi/m_\chi$ densità numerica della materia oscura e $f(\mathbf{v})$ distribuzione di velocità normalizzata all'unità nel sistema di riferimento del laboratorio.

Prendendo in considerazione solo la dipendenza dalla velocità di $d\sigma/dE_R$ si può ottenere il seguente integrale:

$$g(v_{min}) = \int d^3\mathbf{v} \frac{f(\mathbf{v})}{v} \Theta\left(v - \sqrt{\frac{m_N E_R}{2\mu_{\chi N}^2}}\right) \quad (4.14)$$

con $v_{min} = \sqrt{m_N E_R / 2\mu_{\chi N}^2}$.

Infine, considerando che neutroni e protoni possano avere accoppiamenti con la materia oscura diversi, si ottiene la seguente espressione per lo *scattering rate* differenziale:

$$\frac{dR}{dE_R} = N_T \frac{\rho_\chi}{m_\chi} \frac{\sigma_n m_N}{2\mu_{\chi n}^2} \left(\frac{b_p Z + b_n (A - Z)}{b_n A}\right)^2 F^2(q) g(v_{min}) \quad (4.15)$$

gli unici contributi che non sono stati discussi in dettaglio sono quelli dovuti a b_p , b_n e $g(v_{min})$. I fattori b_p e b_n non saranno trattati in questa discussione e verranno considerati come parametri;

per quanto riguarda $g(v_{min})$, che racchiude la dipendenza dello *scattering rate* dalla velocità della materia oscura, questo fattore verrà trattato in modo approfondito nella prossima sezione.

4.3 Discussione della dipendenza dalla velocità dello *scattering rate*

Studiando la materia oscura come particelle di materia, è possibile descrivere l'evoluzione della densità nello spazio delle fasi $f(\mathbf{x}, \mathbf{v})$ di una particella all'interno dell'alone attraverso l'equazione di Boltzmann.

$$\mathbf{L}[f] = \mathbf{C}[f] \quad (4.16)$$

$$\mathbf{L}[f] = \frac{\partial f}{\partial t} + \dot{\mathbf{x}} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} + \dot{\mathbf{v}} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} \quad \mathbf{C}[f] = 0 \quad (4.17)$$

dove è stato scritto l'operatore di Liouville nel suo limite non relativistico. Nel caso stazionario, cioè con $\mathbf{C}[f] = 0$, per il teorema di Jeans la funzione f deve dipendere dalle coordinate dello spazio delle fasi attraverso un integrale del moto, cioè una funzione I tale che:

$$\frac{d}{dt} I(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = 0 \quad (4.18)$$

un esempio di integrale del moto è l'Hamiltoniana

$$H = \phi - \frac{1}{2}v^2 \quad (4.19)$$

dove ϕ è il potenziale gravitazionale. Prendendo in considerazione una funzione $f(H) \propto e^H$ che descrive la distribuzione di velocità per un alone isotropico stazionario[12], è possibile ricavare la distribuzione di densità ρ associata nel seguente modo:

$$\rho \propto \int_0^\infty dv v^2 f(v) = \int_0^\infty dv v^2 e^{(\phi - v^2/2)/\sigma^2} \propto e^{\phi/\sigma^2} \quad (4.20)$$

dove σ è la dispersione delle velocità. Usando l'equazione di Poisson e il fatto che $\phi \propto \ln \rho$, è possibile trovare la dipendenza radiale della distribuzione di densità:

$$\nabla^2 \phi = -4\pi G \rho \quad \rho(r) = \frac{\sigma^2}{2\pi G r^2} \quad (4.21)$$

dunque

$$\rho(r) \propto 1/r^2 \quad f(v) \propto e^{-v^2/\sigma^2} \quad (4.22)$$

proprio come ci si aspetterebbe da una sfera di gas isoterma che gravita attorno a se stessa. Dal calcolo si deduce che data una distribuzione di velocità, la distribuzione di densità è ricavabile a partire da questa. In letteratura, la distribuzione più utilizzata è la seguente:

$$f(\mathbf{v}) = \begin{cases} \frac{1}{N_{esc}} \left(\frac{3}{2\pi\sigma_v^2} \right)^{3/2} e^{-3v^2/2\sigma_v^2} & \text{se } |\mathbf{v}| < v_{esc} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (4.23)$$

dove σ_v è dispersione delle velocità, $v_0 = \sigma_v \sqrt{2/3} \simeq 225 \text{ km/s}$ è la velocità più probabile, v_{esc} è la velocità di fuga, $N_{esc} = \text{erf}(z) - 2\pi^{-1/2} z e^{-z^2}$ con $z = v_{esc}/v_0$. Questa distribuzione, la Maxwelliana troncata, nell'ambito della cosmologia è detta *Standard Halo Model*.

Per rendere la stima adatta al sistema di riferimento del laboratorio sulla Terra, bisogna ora descrivere il moto del nostro pianeta rispetto alla galassia. Essendo \mathbf{V}_\odot la velocità del sole rispetto al centro della galassia e \mathbf{V}_\oplus il moto della terra rispetto al sole:

$$\mathbf{V}_T(t) = \mathbf{V}_\odot + \mathbf{V}_\oplus(t) \quad (4.24)$$

effettuando un *boost* Galileiano nella Maxwelliana troncata:

$$f(\mathbf{v}) = \frac{1}{N_{esc}} \left(\frac{3}{2\pi\sigma_v^2} \right)^{3/2} \exp \left(- \frac{(\mathbf{v} + \mathbf{V}_T(t))^2}{v_0^2} \right) \Theta(v_{esc} - |\mathbf{v} + \mathbf{V}_T(t)|) \quad (4.25)$$

valori tipici per le velocità sono $|\mathbf{V}_\odot| \approx 240 \text{ km/s}$ e $|\mathbf{V}_\oplus| \approx 29.8 \text{ km/s}$.

Come è possibile notare, è stata introdotta una dipendenza temporale nel termine $\mathbf{V}_\oplus(t)$; il motivo è che la direzione di questa velocità varia in modo rilevante nel corso di un anno, compiendo la Terra il suo moto di rotazione attorno al Sole. Per questo motivo la velocità del vento di materia oscura viene modulata con cicli annuali[12]. Si avrà dunque che il contributo $|\mathbf{V}_\oplus|$ sarà sommato a Giugno, quando la Terra si muove nella stessa direzione e verso del Sole, sottratto a Dicembre e nullo a Marzo e Settembre. A Marzo, tuttavia, diventa rilevante un altro effetto, quello del Sole come lente gravitazionale; a causa della mutua attrazione tra Sole e materia oscura, si ha un aumento di densità di materia oscura. Il contributo di $|\mathbf{V}_\oplus|$ è ad ogni modo piuttosto modesto, dunque ai fini del calcolo di g può essere trascurato; diventa invece molto importante nel tentativo di distinguere un segnale dovuto all'interazione dei nuclei con la materia oscura dal rumore di fondo (che come detto è uno dei temi più importanti di questa ricerca), proprio perché il segnale ricercato è caratterizzato da questa piccola modulazione annuale. Ci sono ad ogni modo anche altri parametri che hanno modulazione annuale, come ad esempio la temperatura, che influenzano sistematicamente gli esperimenti nelle stesse tempistiche del fenomeno appena descritto; questo rende non immediato attribuire le cause di una modulazione annuale nel segnale alla presenza di materia oscura.

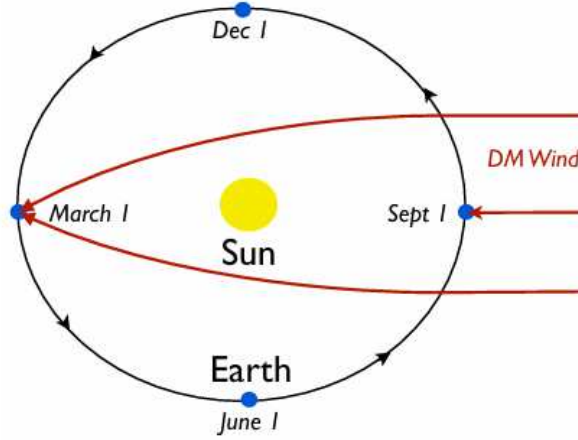


Figura 4.2: Schema della modulazione annuale della velocità della materia oscura sulla Terra, tratto dalla lezione [12]

Terminato questo piccolo *excursus*, si arriva ora al calcolo di g .

Un dato esperimento usa un particolare materiale come nuclei bersaglio, dunque è sensibile a energie di rinculo diverse, che si traducono in diversi range di velocità della materia oscura. Concentrandosi sui range in cui lo strumento è più sensibile, cioè definendo una velocità massima oltre la quale trascurare gli ulteriori contributi al calcolo di g , si può ottenere la seguente approssimazione:

$$g(v_{min}) \propto \int_{v_{min}}^{v_{max}} dv v \exp\left(-\frac{v^2}{v_0^2}\right) \quad (4.26)$$

$$g(v_{min}) \propto \exp\left(-\frac{v_{min}^2}{v_0^2}\right) - \exp\left(-\frac{v_{max}^2}{v_0^2}\right) \simeq \exp\left(-\frac{m_N E_R}{2\mu_{\chi N}^2 v_0^2}\right) \quad (4.27)$$

con la velocità massima raggiungibile nel sistema di riferimento del laboratorio data da $v_{max} = v_{esc} + v_T$.

A questo punto si hanno tutti gli elementi per poter valutare lo *scattering rate* tra materia oscura e i nuclei bersaglio.

4.4 Stato sperimentale e conclusioni

Gli esperimenti che utilizzano la *direct detection* si basano sulle stime che sono state effettuate nel corso di questo capitolo per trovare dei limiti sul valore della sezione d'urto della materia oscura, σ_n .

Vengono ora riassunti i risultati ottenuti dai principali esperimenti riguardanti questo ambito nella figura 4.3:

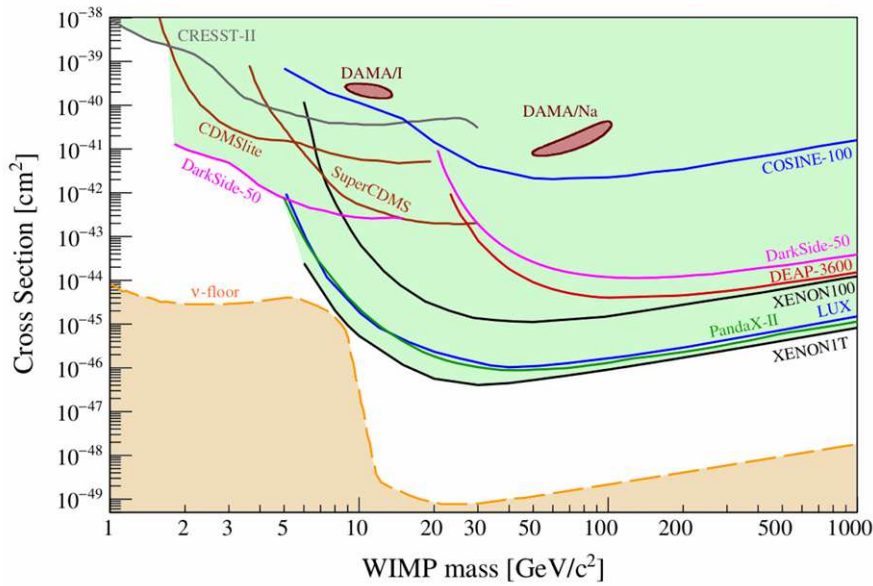


Figura 4.3: Grafico riassuntivo dei limiti sul valore di σ_n imposti dai risultati sperimentali. Grafico tratto dalla lecture [13]

Nel grafico è mostrato il valore della sezione d'urto in funzione della massa della materia oscura ipotizzata. La zona arancione, denominata ν -floor, rappresenta la zona in cui è impossibile per la precisione di questo tipo di esperimenti distinguere il segnale dal rumore di fondo. La zona in verde rappresenta i valori della sezione d'urto che sono stati esclusi dalle evidenze sperimentali; le diverse linee sono i limiti imposti dai diversi esperimenti. La zona bianca rappresenta i valori che la sezione d'urto può assumere senza essere in disaccordo con i dati sperimentali. È importante notare come il minimo valore del rumore di fondo si riesce ad ottenere per valore della massa delle $WIMPs$ tra 10 e 100 GeV .

In conclusione, nonostante la *direct detection* sia riuscita a imporre dei limiti piuttosto stringenti sulla sezione d'urto della materia oscura per masse delle $WIMPs$ superiori ai 10 GeV , i limiti sperimentali dovuti al rumore di fondo per masse minori sono molto elevati. Per questo motivo nuove frontiere nella ricerca della caratterizzazione della materia oscura, come, ad esempio, lo studio dell'energia di rinculo degli elettroni appartenenti agli atomi bersaglio (che hanno energie tipiche di rinculo molto minori rispetto a quelle nucleari) e lo studio dell'accoppiamento tra fononi e materia oscura, si dimostrano essere necessarie per far luce sui territori non esplorati dallo *scattering* tra materia oscura e nuclei.

Bibliografia

- [1] J. Michell, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London Series I* 74, 35, 1784.
- [2] F. Bessel, *MNRAS* 6, 136, 1844.
- [3] B. Kelvin, *Baltimore lectures on molecular dynamics and the wave theory of light*, 1904.
- [4] H. Poincarè, *L'Astronomie*, 158; *Popular Astronomy* 14, 475, 1906.
- [5] F. Zwicky, «On the masses of nebulae and of clusters of nebulae,» *THE ASTROPHYSICAL JOURNAL*, Volume 86, Number 3, 1937.
- [6] H. W. Babcock, *Lick Observatory Bulletin* 19, 41, 1939.
- [7] A. Bosma, *The distribution and kinematics of neutral hydrogen in spiral galaxies of various morphological types*, 1978.
- [8] G. B. e D. Hooper, *A History of Dark Matter*. FERMILAB-PUB-16-157-A, 2016.
- [9] A. M. Green, «Dark Matter in Astrophysics/Cosmology,» *School of Physics and Astronomy, University of Nottingham*, 2021.
- [10] M. Milgrom, *Astrophys. J.* 270, 365, 1983.
- [11] D. C. e altri, *Astrophys. J.* 648, L109, 2006.
- [12] M. Lisanti, «Lectures on Dark Matter Physics,» *Department of Physics, Princeton University, Princeton, NJ 08544*, 2016.
- [13] T. Lin, «TASI lectures on dark matter models and direct detection,» *Department of Physics, University of California, San Diego*, 2019.
- [14] S. Profumo, «TASI 2012 Lectures on Astrophysical Probes of Dark Matter,» *Department of Physics and Santa Cruz Institute for Particle Physics University of California*, 2012.