



Università degli Studi di Padova

---

FACOLTÀ DI INGEGNERIA  
Corso di Laurea Triennale in Ingegneria delle Telecomunicazioni

TESI DI LAUREA

**STIMA DEL CANALE IN OFDM CON ZERI IN  
FREQUENZA**

**CHANNEL ESTIMATE IN OFDM WITH LARGE FREQUENCY GAPS**

24 Luglio 2012

Candidato  
**Luca Stefan**  
Matricola 524489-TC

Relatore  
**Prof. Nevio Benvenuto**



# Indice

<b>1</b>	<b>INTRODUZIONE</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>MODELLO DEL SISTEMA</b>	<b>3</b>
	2.0.1 Impostazioni del caso per il modello in esame . . . . .	7
<b>3</b>	<b>STIMA DEL CANALE</b>	<b>9</b>
	3.1 Stima LS del canale . . . . .	9
	3.2 Stima LS-FR . . . . .	11
	3.3 Stima LS-SVD del canale . . . . .	12
	3.4 Finestratura in frequenza . . . . .	12
	3.5 Pruning nel tempo . . . . .	13
	3.6 Stima finale del canale in frequenza . . . . .	13
<b>4</b>	<b>ALGORITMO PROPOSTO A BANDA RIDOTTA (RED)</b>	<b>15</b>
<b>5</b>	<b>RISULTATI OTTENUTI</b>	<b>17</b>
	5.1 CANALE 1 . . . . .	17
	5.2 CANALE 2 . . . . .	33
<b>6</b>	<b>CONCLUSIONI</b>	<b>49</b>
<b>A</b>	<b>APPROFONDIMENTO SUL NUMERO DI CONDIZIONA- MENTO</b>	<b>51</b>
	A.1 LS-FR IN RELAZIONE AL NUMERO DI CONDIZIONA- MENTO . . . . .	53
<b>B</b>	<b>APPROFONDIMENTO DELL'ALGORITMO SVD</b>	<b>55</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>57</b>



# Capitolo 1

## INTRODUZIONE

La richiesta di nuovi servizi dati ad alta velocità di trasmissione e la scarsa disponibilità di banda giustificano l'impiego di nuove tecnologie radio che consentono l'aumento dell'efficienza spettrale e della qualità dei futuri sistemi di comunicazione.

Come indica sinteticamente la frase da cui deriva l'acronimo OFDM "Orthogonal Frequency Division Multiplexing", si tratta di una forma di modulazione/trasmissione numerica multiportante (multicarrier), dove il flusso informativo da trasmettere è ripartito su un numero  $N$  di portanti, tra loro ortogonali diversamente da quanto avviene nei multiplex classici a divisione di frequenza (FDM).

In genere il numero di portanti risulta elevato e, a seconda delle applicazioni, varia da qualche decina a qualche decina di migliaia. La prima caratteristica di questa forma di trasmissione, cioè la ripartizione del flusso informativo su molte portanti, consente, di poter combattere in maniera relativamente poco onerosa l'interferenza tra i simboli (ISI, Inter-symbol Interference) che si ha nel caso di trasmissione su una sola portante in canali selettivi in frequenza. La seconda caratteristica, l'ortogonalità delle portanti, consente di garantire un'efficienza spettrale (bit/s per unità di banda) comparabile con quella di una trasmissione numerica analogica su portante singola, in quanto consente di sovrapporre parzialmente le bande delle varie componenti del multiplex, idealmente senza avere interferenza tra le portanti (ICI, Inter Carrier Interference), nella pratica con valori di ICI accettabili, se si rispettano alcune condizioni. Per tali motivi, l'OFDM è una modulazione adatta a trasmettere in maniera efficiente elevati flussi informativi in canali a cammini multipli, come ad esempio il canale radiomobile a larga banda.

Riepilogando i vantaggi nell'utilizzo della tecnica OFDM sono rappresentati da:

- Elevata efficienza spettrale;
- Bassa complessità dell'implementazione (FFT);
- Trasmissione ad alto rate su canali "ostili";
- Facilità nell'adattare la modulazione al canale (bit loading).

Per questi motivi ha trovato applicazione nei seguenti campi:

- a) Sistemi di radiofonia e televisione numerica da rete terrestre quali ad es. gli standard europei di radio e televisione digitale :
  - DAB (Digital Audio Broadcasting);
  - DRM (Digital Radio Mondiale);
  - DVB-T / DVB-T2 (Digital Video Broadcasting - Terrestrial);
  - DVB-H (Digital Video Broadcasting - Handheld);
- b) Reti Wireless LAN/MAN a larga banda , come ad es. negli standard:
  - HIPERLAN2;
  - IEEE802.11a, 11n, 15a, 16 (Es. WiMAX).
- c) Applicazioni su portante fisica, quali ad esempio ADSL, VDSL, dove più frequentemente viene usata con l'acronimo DMT (Digital MultiTone).

## Capitolo 2

# MODELLO DEL SISTEMA

Il modello generico di sistema è

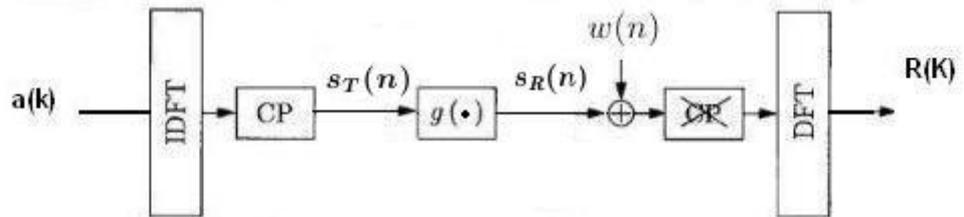


Figura 2.1: Modello di sistema OFDM (equivalente in banda base).

**Definizione 1** *Trasformata (DFT) e antitrasformata (IDFT) di Fourier discreta*

$$R(k) = \sum_{n=0}^{N-1} r(n) e^{-j2\pi \frac{kn}{N}} \quad k = 0, 1, \dots, N-1. \quad (2.1)$$

$$r(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} R(k) e^{j2\pi \frac{kn}{N}} \quad n = 0, 1, \dots, N-1. \quad (2.2)$$

Consideriamo un sistema OFDM con  $N$  sottoportanti. Al trasmettitore, i bit di informazione sono raggruppati e mappati in simboli appartenenti ad una delle disponibili costellazioni. Sia  $a(k)$  il simbolo complesso nel dominio della frequenza modulato sulla  $k$ -esima sottoportante, per semplicità assumeremo che

$$\mathbf{E} [|a(k)|^2] = \sigma_a^2 = 1 \quad (2.3)$$

Successivamente, la sequenza modulata  $a(k)$  è convertita da serie a parallelo per la modulazione OFDM che è implementata dalla IDFT su  $N$ -punti. Dopodichè per evitare ISI e conseguente interferenza inter-portante viene aggiunto un prefisso ciclico (CP) di lunghezza  $N_{cp}$  al simbolo OFDM. Posto

$$A(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} a(k) e^{j2\pi \frac{kn}{N}} \quad n = 0, 1, \dots, N-1. \quad (2.4)$$

sarà

$$s_T(n) = \begin{cases} A(N-1+n) & n = -1, -2, \dots, -N_{cp} + 1 \\ A(n) & n = 0, 1, \dots, N-1 \end{cases} \quad (2.5)$$

Il blocco di  $N + N_{cp} - 1$  campioni di  $s_T(n)$  viene poi inviato sul canale. Il canale di lunghezza  $L_h$ , è di tipo multipath con risposta impulsiva (channel impulsive response, CIR)

$$g(n), \quad n = 0, 1, \dots, L_h - 1. \quad (2.6)$$

Notiamo che per non avere ISI e ICI deve essere

$$N_{cp} \geq L_h - 1 \quad (2.7)$$

Per semplificare il modello si assume che

$$\mathbf{E} \left[ \sum_{n=0}^{L_h-1} |g(n)|^2 \right] = 1 \quad (2.8)$$

Al ricevitore, si assume che la sincronizzazione sia perfetta. I campioni nel dominio del tempo del segnale ricevuto dopo aver rimosso il CP sono dati da

$$r(n) = s_T(n) * g(n) + w(n) \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (2.9)$$

Il rumore  $w(n)$  è assunto gaussiano bianco con media zero e varianza  $\sigma_w^2$ ,  $w(n) \sim \mathbb{CN}(0, \sigma_w^2)$

Ora si effettua la demodulazione OFDM tramite DFT. Il segnale al ricevitore in corrispondenza della  $k$ -esima è sottoportante è

$$R(k) = a(k)G(k) + W(k) \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (2.10)$$

Dove:

- $a(k)$  sono i simboli modulati (nel dominio della frequenza);

- $W(k)$  è il rumore in frequenza dato da

$$W(k) = W_I(k) + jW_Q(k) \quad (2.11)$$

$W_I$  è la componente in fase e  $W_Q$  è la componente in quadratura; essendo la media del rumore nulla

$$\sigma_W^2 = \sigma_{W_I}^2 + \sigma_{W_Q}^2 \Rightarrow \sigma_{W_I}^2 = \sigma_{W_Q}^2 = \frac{\sigma_W^2}{2} \quad (2.12)$$

Quindi

$$W_I(k), W_Q(k) \sim N(0, \frac{\sigma_W^2}{2}) \quad (2.13)$$

- $G(k)$  è risposta in frequenza del canale (channel frequency response, CFR) data da

$$G(K) = \sum_{n=0}^{L_h-1} g(n)e^{-j2\pi \frac{kn}{N}}; \quad (2.14)$$

Introducendo la varianza del segnale ricevuto  $\sigma_{S_R}^2$ , si ha che l'SNR (rapporto segnale-rumore) è dato da

$$\Gamma = \frac{\sigma_{S_R}^2}{\sigma_w^2} = \frac{\sigma_{S_T}^2}{\sigma_w^2} \quad (2.15)$$

Dalle 2.1 e 2.2 la varianza del rumore in frequenza è data da

$$\sigma_W^2 = N \cdot \sigma_w^2 \quad (2.16)$$

Sfortunatamente di solito  $a(k)$  viene trasmesso solo su alcune sottoportanti, in particolare assumeremo:

$$a(k) \neq 0, \quad k = 0, \dots, K_1, K_2, \dots, N-1 \quad \text{con} \quad K_1 < K_2 \quad (2.17)$$

quindi

$$a(k) = 0 \text{ o sottoportante non utilizzata, per } k = K_1+1, \dots, K_2-1 \quad (2.18)$$

Indicheremo con  $C_{sa}$  i valori di  $k$  per cui  $a(k)$  è non nullo, (vedi Figura 2.2) :

$$C_{sa} = \{0 \div K_1\} \cup \{K_2 \div N-1\} \quad (2.19)$$

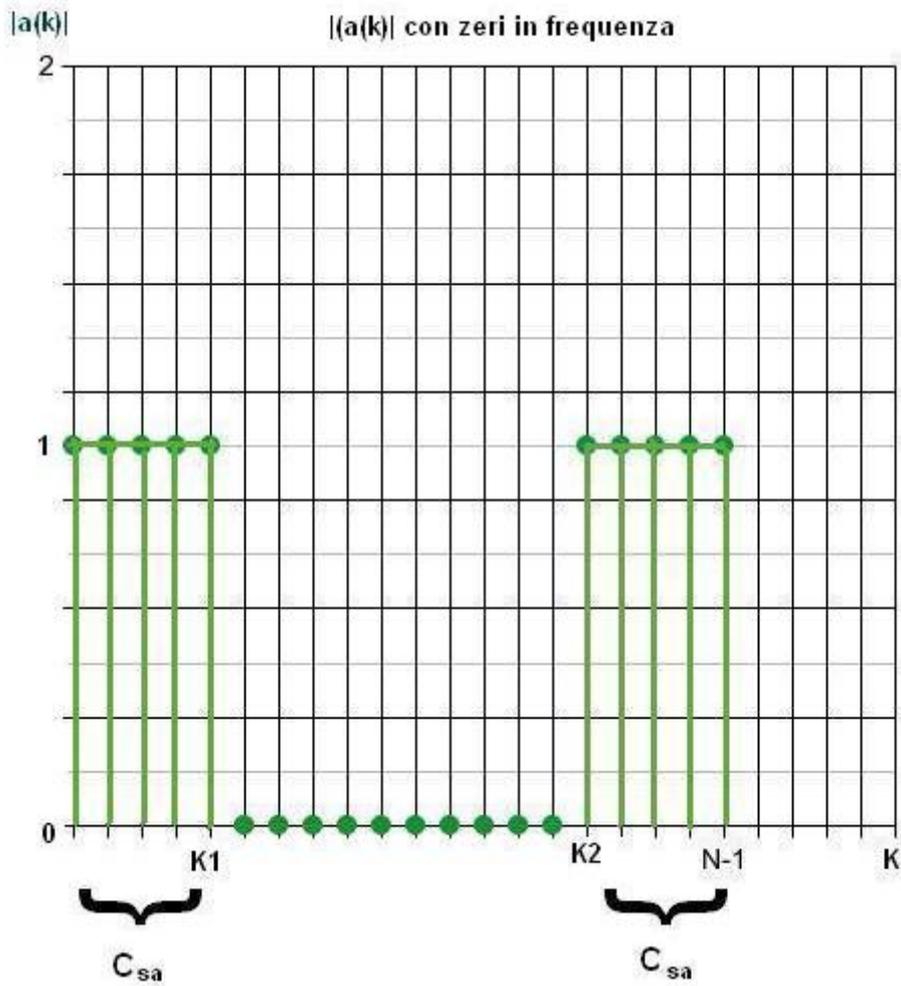


Figura 2.2: Definizione dell'insieme  $C_{sa}$ , insieme delle sottoportanti utilizzate per la trasmissione.

### 2.0.1 Impostazioni del caso per il modello in esame

Le impostazioni iniziali della nostra prova saranno con:  $N = 128$ ,  $L_h = 15$ ,  $K_1 = 32$  e  $K_2 = 96$ .

Poi imposteremo inizialmente come primo canale

$$g(n) = \frac{2}{\sqrt{5}}\delta(n-1) + \frac{1}{\sqrt{5}}\delta(n-2) \quad (2.20)$$

e

$$a(k) = \frac{1+j}{\sqrt{2}} \quad (2.21)$$

ottenendo i grafici di Figura 2.3 e 2.4 per quanto riguarda la risposta impulsiva e risposta in frequenza, rispettivamente.

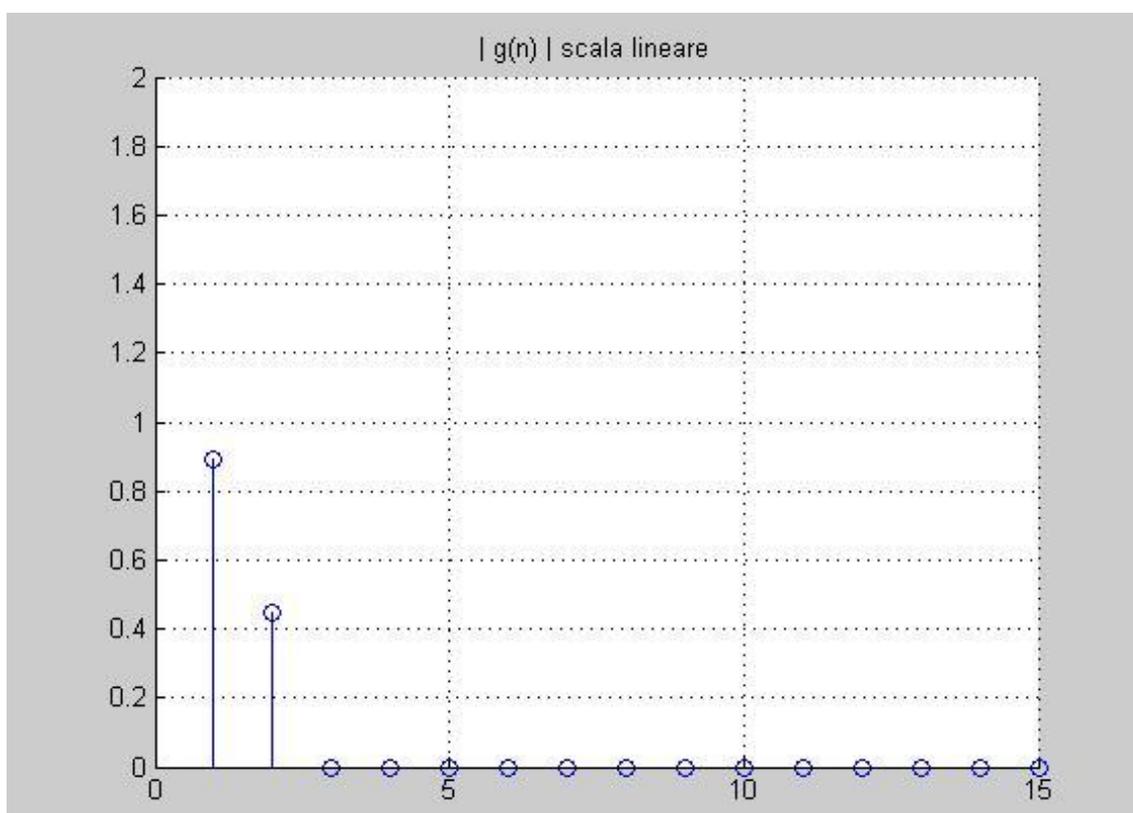


Figura 2.3: Modulo della risposta impulsiva del canale  $g(n)$ .

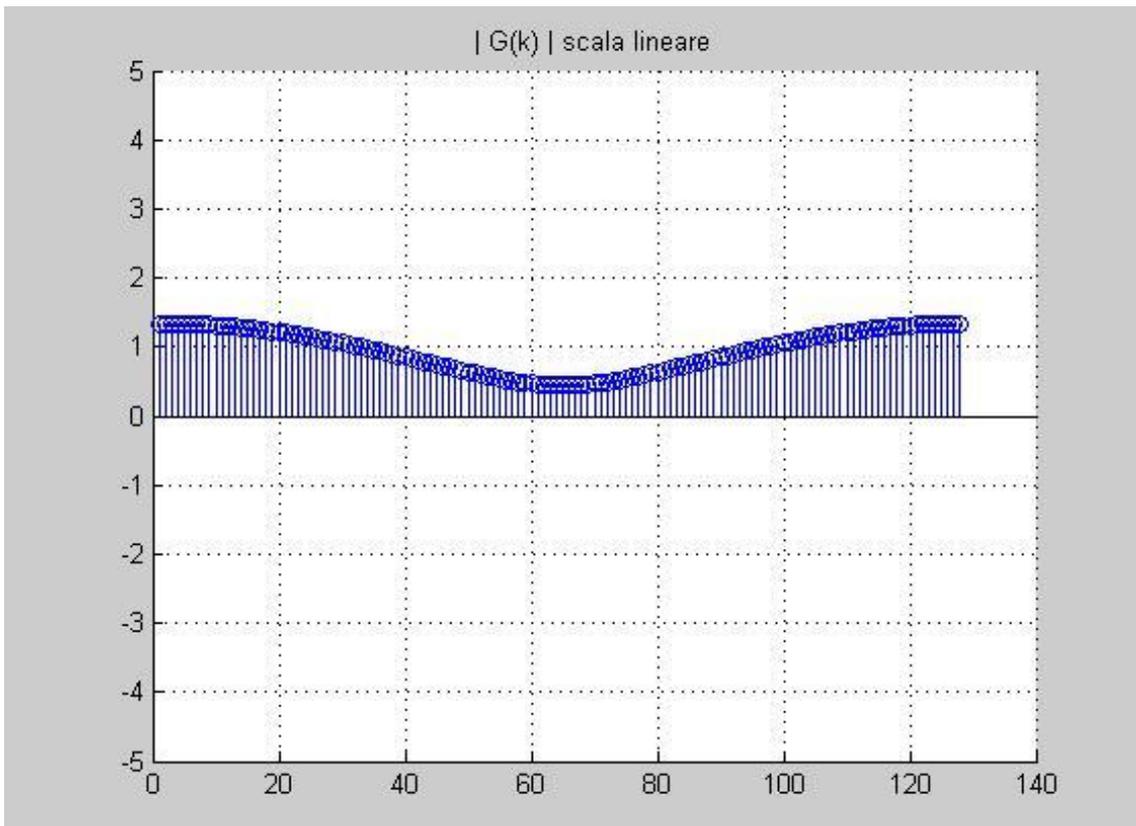


Figura 2.4: Modulo della risposta in frequenza del canale  $G(k)$ .

# Capitolo 3

## STIMA DEL CANALE

Le informazioni sullo stato del canale (CSI) sono necessarie per recuperare i dati trasmessi e quindi la stima del canale diventa necessaria. I metodi di stima del canale possono essere classificati in tre distinte categorie:

- A) Stima del canale tramite simboli pilota: i simboli pilota noti al ricevitore sono trasmessi come preambolo all'inizio del frame o sparsi su ogni frame in modo regolare
- B) Stima cieca del canale: le informazioni sullo stato del canale sono ottenute dalle statistiche del segnale
- C) Stima semi-cieca del canale, che combina i due metodi precedenti

Noi analizzeremo il canale (in tempo e frequenza) usando un segnale dati di riferimento noto a priori e valuteremo diversi metodi per ridurre l'errore sulla stima del canale.

### 3.1 Stima LS del canale

Una prima stima 'grezza' del canale si chiama least-square (LS) ed è ottenuta dalla (2.10)

$$\hat{G}_{LS}(k) = \frac{R(k)}{a(k)} = G(k) + \frac{W(k)}{a(k)} \quad k \in C_{sa} \quad (3.1)$$

da cui si ricava un vettore colonna con numero di componenti  $N_{sa} = |C_{sa}|$ :

$$\hat{\mathbf{G}}_{LS} = \left\{ \hat{G}_{LS}(k), \quad k \in C_{sa} \right\} \quad (3.2)$$

Un esempio di stima LS per il CIR (2.20) è riportato in Figura 3.1.

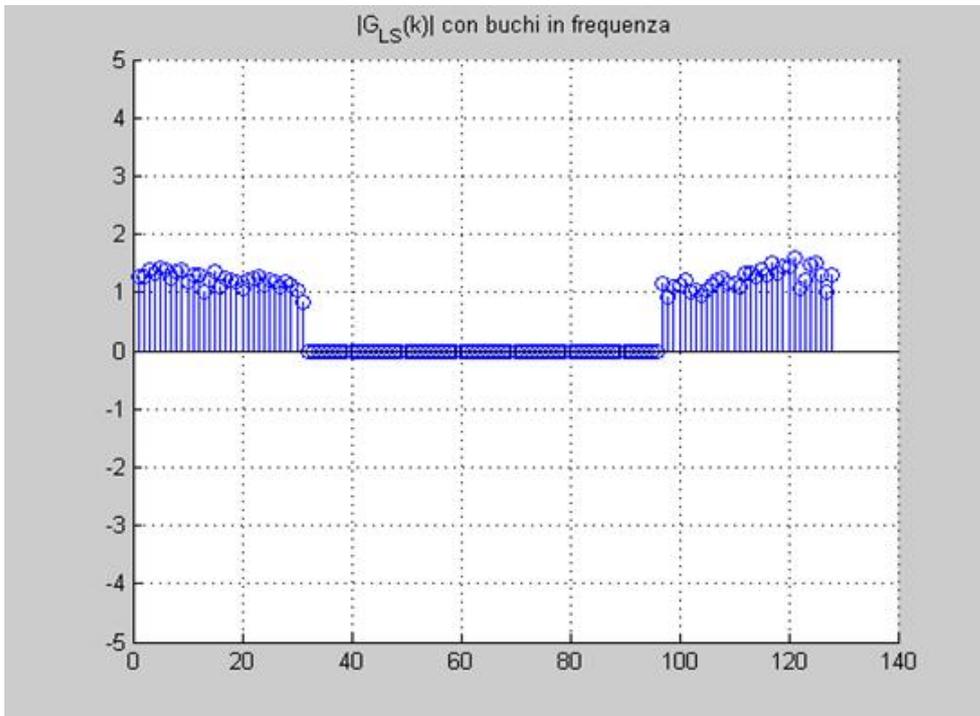


Figura 3.1: Modulo di  $\hat{\mathbf{G}}_{LS}$  impostando un  $\Gamma = 20$  dB.

Si può notare che la stima LS è soggetta al rumore  $W(k)$ . Per ridurre il suo effetto vedremo diversi metodi. Antitrasformando nel tempo si ottiene

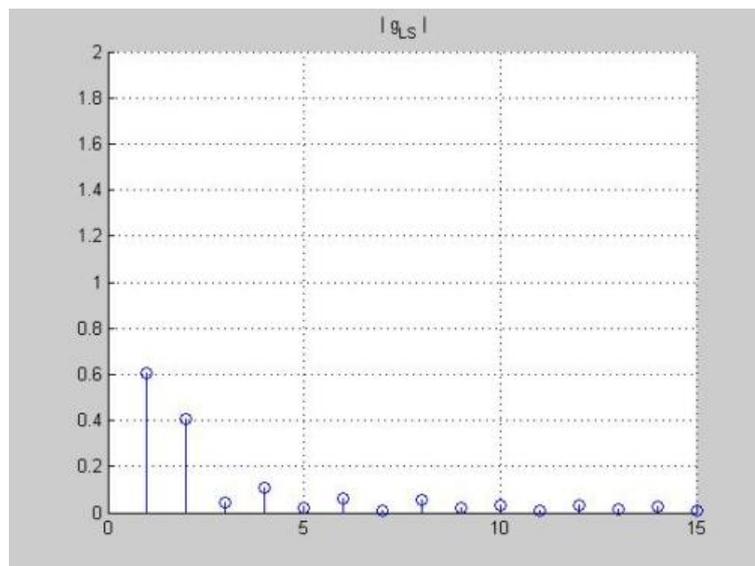


Figura 3.2: Modulo di  $\hat{\mathbf{g}}_{LS}$  impostando un  $\Gamma = 20$  dB.

Definiamo la matrice di trasformazione  $\mathbf{F}_N$ , di dimensione  $N \times N$ :

$$(\mathbf{F}_N)_{k,n} = e^{-j2\pi \frac{kn}{N}}, \quad k, n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (3.3)$$

Da questa costruiamo  $\tilde{\mathbf{F}}_N$  formata dalle righe di indice  $C_{sa}$  e dalle prime  $L_h$  colonne di  $(\mathbf{F}_N)$ .  $\tilde{\mathbf{F}}_N$  è di dimensione  $N_{sa} \times L_h$

Quindi  $\tilde{\mathbf{F}}_N \cdot \mathbf{g}$ , se  $\mathbf{g}$  è di dimensione  $L_h$ , produce una risposta in frequenza solo sull'insieme di sottoportanti  $C_{sa}$ , dove l'informazione è conosciuta

La stima  $\hat{\mathbf{g}}_{LS}$  della risposta impulsiva del canale (CIR) è ottenuta minimizzando:

$$\hat{\mathbf{g}} = \underset{\mathbf{g}}{\operatorname{argmin}} \left\| \hat{\mathbf{G}}_{LS} - \tilde{\mathbf{F}}_N \cdot \mathbf{g} \right\|^2 \quad (3.4)$$

Notiamo che il problema (3.4) pone  $N_{sa}$  vincoli su  $N$  nel dominio della frequenza.

## 3.2 Stima LS-FR

Da  $\tilde{\mathbf{F}}_N$  costruiamo  $\bar{\mathbf{F}}_N$  formata dalle prime  $R$  colonne di  $\tilde{\mathbf{F}}_N$  dove  $R = \operatorname{rango}(\tilde{\mathbf{F}}_N)$ . E' un procedimento iterativo che parte da  $R = L_h$  e decrementa  $R$  di un'unità ad ogni iterazione finchè  $R = \operatorname{rango}(\bar{\mathbf{F}}_N)$ . Da questo deriva il nome di stima least square con matrice ridotta a rango pieno (full rank, FR). Questo procedimento, potrebbe non dare i risultati sperati, nel senso che se la matrice  $\tilde{\mathbf{F}}_N$  ha rango pieno, non abbiamo nessuna matrice ridotta, e questo in genere è determinato dal fatto che la matrice è mal-condizionata. Aggiungiamo quindi nell'iterazione la restrizione di avere un *Numero di Condizionamento* non troppo alto.<sup>1</sup>

La CIR con solo  $R$  componenti che risolve il problema (3.4), è data da

$$\hat{\mathbf{g}}_{LS-FR} = (\bar{\mathbf{F}}_N^H \bar{\mathbf{F}}_N)^{-1} \bar{\mathbf{F}}_N^H \hat{\mathbf{G}}_{LS} \quad (3.5)$$

La complessità computazionale (data dal numero di moltiplicazioni complesse) dell'equazione è  $R \cdot N_{sa}$ .

Nel dominio della frequenza la (3.5) diviene

$$\hat{\mathbf{G}}_{LS-FR} = \left( \mathbf{F}_N \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{g}}_{LS-FR} \\ \mathbf{0}_{N-R} \end{bmatrix} \right)_{C_{sa}} \quad (3.6)$$

o meglio

---

<sup>1</sup>vedi l'approfondimento in APPENDICE A.

$$\hat{\mathbf{G}}_{LS-FR} = DFT \left\{ \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{g}}_{LS-FR} \\ \mathbf{O}_{N-R} \end{bmatrix} \right\}_{C_{sa}} \quad (3.7)$$

Dove:

- $(\dots)_{C_{sa}}$  denota il sottoinsieme di valori del vettore  $\mathbf{V}$  di indice  $C_{sa}$ ;
- $\mathbf{O}_{A-B}$  denota un vettore di zeri in numero di  $(A-B)$  che va a completare il vettore  $\hat{\mathbf{g}}$  sovrastante per rendere possibile l'operazione tra matrice e vettore.

### 3.3 Stima LS-SVD del canale

Dalla decomposizione ai valori singolari (singular value decomposition, SVD)<sup>2</sup> di  $\tilde{\mathbf{F}}_N$

$$\tilde{\mathbf{F}}_N = \mathbf{U} \mathbf{\Sigma} \mathbf{V}^H \quad (3.8)$$

La pseudoinversa è

$$\tilde{\mathbf{F}}_N^\# = \mathbf{V} \mathbf{\Sigma}^{-1} \mathbf{U}^H \quad (3.9)$$

Quindi una soluzione della (3.4) è data da

$$\hat{\mathbf{g}}_{LS-SVD} = \tilde{\mathbf{F}}_N^\# \cdot \hat{\mathbf{G}}_{LS} \quad (3.10)$$

La complessità computazionale dell'equazione è  $L_h \cdot N_{sa}$   
In frequenza (3.10) diviene

$$\hat{\mathbf{G}}_{LS-SVD} = \left( \mathbf{F}_N \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{g}}_{LS-SVD} \\ \mathbf{O}_{N-L_h} \end{bmatrix} \right)_{C_{sa}} \quad (3.11)$$

### 3.4 Finestratura in frequenza

Sfortunatamente, se  $N_{sa} \ll N$ , le stime del CIR (3.5) e (3.10) non sono buone, anche se  $\hat{\mathbf{G}}_{LS-FR}$  e  $\hat{\mathbf{G}}_{LS-SVD}$ , relativamente alle sottoportanti  $C_{sa}$  sono dei discreti stimatori del canale in frequenza (CFE). Infatti, fuori di  $C_{sa}$  e vicino ai bordi, potrebbe esserci una risposta in frequenza del canale con valori molto elevati. Una soluzione è di finestrare  $\hat{G}(k)$  fuori di  $C_{sa}$ . Cioè

<sup>2</sup>vedi l'approfondimento in APPENDICE B.

$$\hat{G}_W(k) = \begin{cases} \hat{G}(k) & k \in C_{sa} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \quad (3.12)$$

In pratica si moltiplica  $\hat{G}(k)$  per un  $rect(\cdot)$  sulle frequenze di  $C_{sa}$ . Nel dominio del tempo ciò corrisponde ad avere una convoluzione di  $\hat{g}(n)$  con la funzione  $sinc(\cdot)$ .

Da (3.12) ritorniamo nel dominio del tempo e prendiamo solo le prime  $L_h$  componenti che ci interessano

$$\hat{\mathbf{g}}_W = (\mathbf{F}_N^{-1} \hat{\mathbf{G}}_W)_{[0, \dots, L_h-1]} \quad (3.13)$$

### 3.5 Pruning nel tempo

Per ridurre ancora il rumore, i tappi della stima impulsiva del canale,  $\hat{g}(n)$ ,  $n = 0, 1, \dots, L_h - 1$ , che sono piccoli rispetto al livello di rumore, possono essere posti a zero. Per esempio adottiamo la procedura

$$\hat{g}_{pruning}(n) = \begin{cases} \hat{g}(n) & \text{se } |\hat{g}(n)| > Th \\ 0 & \text{se } |\hat{g}(n)| < Th \end{cases} \quad (3.14)$$

dove usualmente:

$$Th = 1 \div 3 \sigma_w \quad (3.15)$$

### 3.6 Stima finale del canale in frequenza

Applichiamo ora la procedura descritta in (3.14) per ottenere dal segnale (3.13)

$$\hat{g}_{W-pruning}(n) = \begin{cases} \hat{g}_W(n) & \text{se } |\hat{g}_W(n)| > Th \\ 0 & \text{se } |\hat{g}_W(n)| < Th \end{cases} \quad (3.16)$$

Infine in frequenza

$$\hat{\mathbf{G}}_{W-pruning} = \left( \mathbf{F}_N \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{g}}_{W-pruning} \\ \mathbf{0}_{N-L_h} \end{bmatrix} \right)_{C_{sa}} \quad (3.17)$$

Proveremo la procedure di finestra seguita da pruning per entrambi i metodi LS-FR e LS-SVD descritti in precedenza.



## Capitolo 4

# ALGORITMO PROPOSTO A BANDA RIDOTTA (RED)

Gli approcci visti precedentemente (LS-FR e LS-SVD) soffrono del fatto che la stima della CIR, soluzione di (3.4), ha molti gradi di libertà nel dominio della frequenza ( $N - N_{sa}$ ) ed è quindi imprecisa. L'idea è di ridurre il numero di gradi di libertà, accorciando la definizione di larghezza di banda del segnale ricevuto da  $N$  campioni a  $M$ , dove  $M < N$ . I gradi di libertà divengono quindi  $(M - N_{sa})$ .

Si presenta la situazione in Figura 4.1

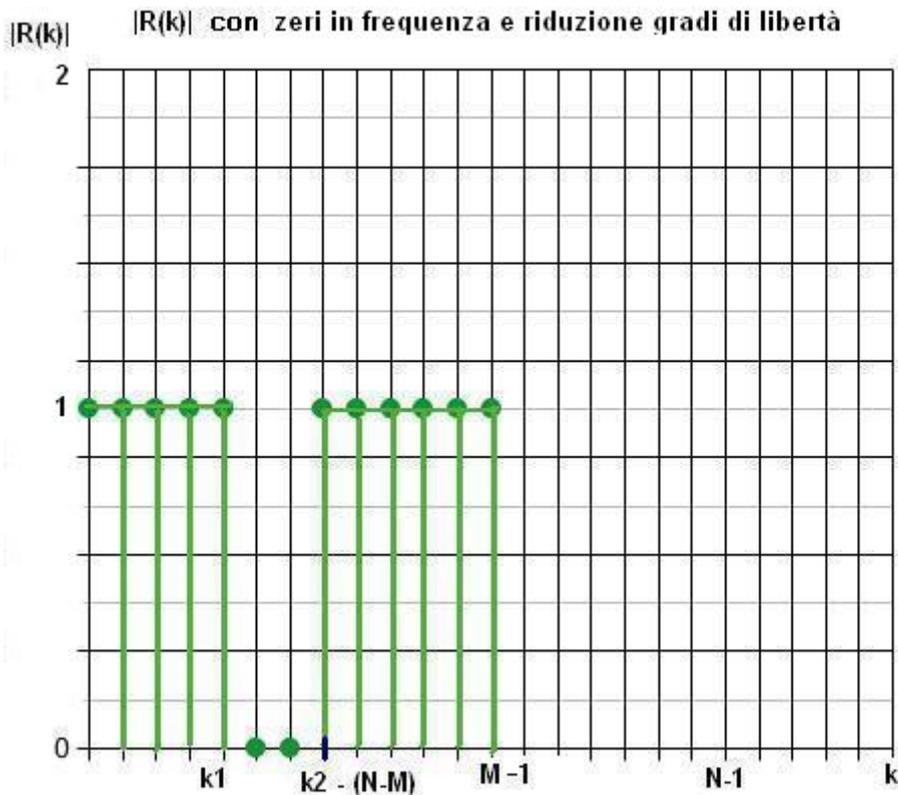


Figura 4.1: Segnale ricevuto  $R(k)$  con riduzione di banda.

Introduciamo quindi una banda di transizione ( $N - M$ ) tra le due bande di frequenze non nulle, che fa in modo di diminuire il numero di portanti inattive da  $K_2 - K_1$  a

$$(K_2 - (N - M)) - K_1 = 4 \text{ o } 8 \quad (4.1)$$

La nuova dimensione della trasformata di Fourier sarà quindi  $M$  e non più  $N$ . Questo implica che la nuova lunghezza del CIR in numero di campioni sarà:

$$L_h^{(red)} = \left\lceil L_h \cdot \frac{M}{N} \right\rceil \quad (4.2)$$

dove  $\lceil x \rceil$  significa il più piccolo numero intero maggiore di  $x$ .

Una stima della risposta impulsiva del canale è da (3.4), ottenuta minimizzando

$$\hat{\mathbf{g}} = \underset{\mathbf{g}}{\operatorname{argmin}} \left\| \hat{\mathbf{G}}_{LS} - \tilde{\mathbf{F}}_M \cdot \mathbf{g} \right\|^2 \quad (4.3)$$

Dove la matrice  $\tilde{\mathbf{F}}_M$  è di dimensione  $N_{sa} \times L_h^{(red)}$  e il nuovo insieme di portanti attive è  $C_{sa}^{(red)} = C_{sa} - \{N - M\}$

Ora applicando l'algoritmo LS-FR (3.5) avremo

$$\hat{\mathbf{g}}_{LS-FR}^{(red)} = \left( (\tilde{\mathbf{F}}_M^H \tilde{\mathbf{F}}_M)^{-1} \tilde{\mathbf{F}}_M^H \hat{\mathbf{G}}_{LS} \right)_{\{L_h^{(red)}\}} \quad (4.4)$$

Ora si può applicare la procedura di pruning (3.14) direttamente a  $\hat{\mathbf{g}}_{LS-FR}^{(red)}$  e ottenere  $\hat{\mathbf{g}}_{LS-FR-pruning}^{(red)}$ <sup>1</sup>

Ritornando in frequenza si avrà

$$\hat{\mathbf{G}}_{LS-FR-pruning}^{(red)} = \left( \mathbf{F}_M \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{g}}_{LS-FR-pruning}^{(red)} \\ \mathbf{0}_{M-L_h^{(red)}} \end{bmatrix} \right)_{C_{sa}^{(red)}} \quad (4.5)$$

---

<sup>1</sup>Notiamo che questa non può essere confrontata con  $\hat{\mathbf{g}}_{LS-FR}$  poichè il periodo di campionamento prima era  $\frac{1}{N}$  mentre ora è diventato  $\frac{1}{M}$ .

# Capitolo 5

## RISULTATI OTTENUTI

Definiamo l'errore di stima del canale in frequenza, normalizzato all'energia del canale stesso,

$$\eta = \frac{\|\mathbf{G}\|^2}{\|\mathbf{G} - \hat{\mathbf{G}}\|^2} = \frac{\sum_{C_{sa}} |G(k)|^2}{\sum_{C_{sa}} |G(k) - \hat{G}(k)|^2} \quad (5.1)$$

Riportiamo i risultati ottenuti con il programma di calcolo numerico *Matlab*, per due diversi canali.

### 5.1 CANALE 1

Dato un canale con risposta impulsiva

$$g(n) = \frac{2}{\sqrt{5}}\delta(n-1) + \frac{1}{\sqrt{5}}\delta(n-2) \quad (5.2)$$

otteniamo i grafici di Figure 5.1 e 5.2 per quanto riguarda il dominio del tempo e frequenza, rispettivamente (per  $\Gamma = 20 \text{ dB}$ ):

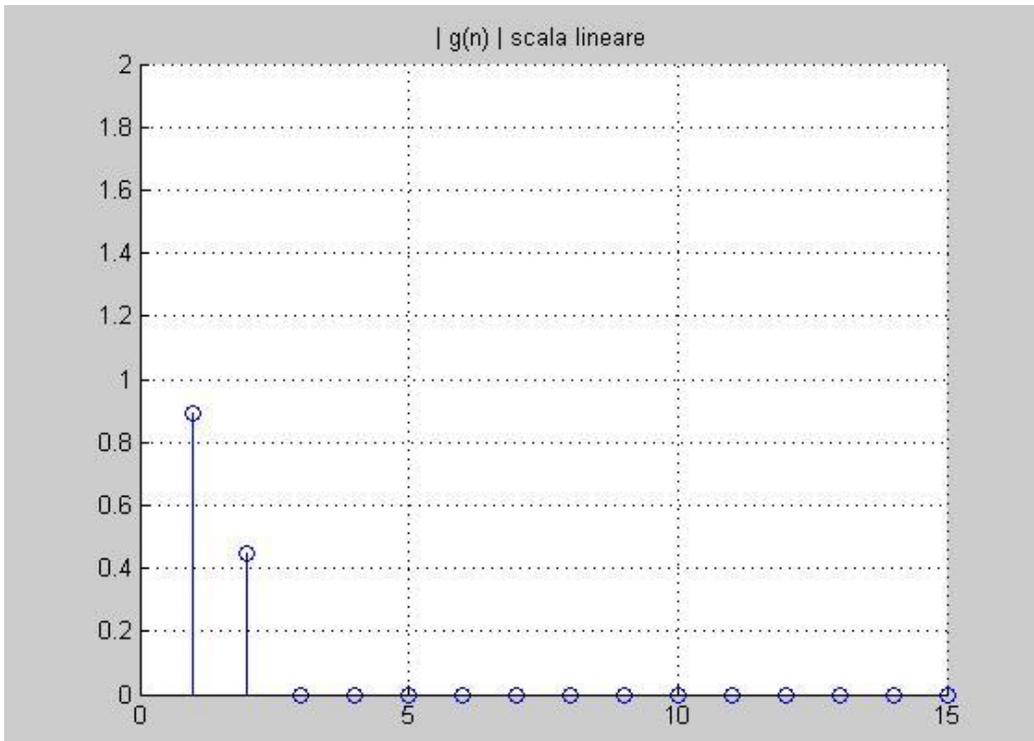


Figura 5.2: Modulo della CIR  $g(n)$  con  $\Gamma = 20$  dB.

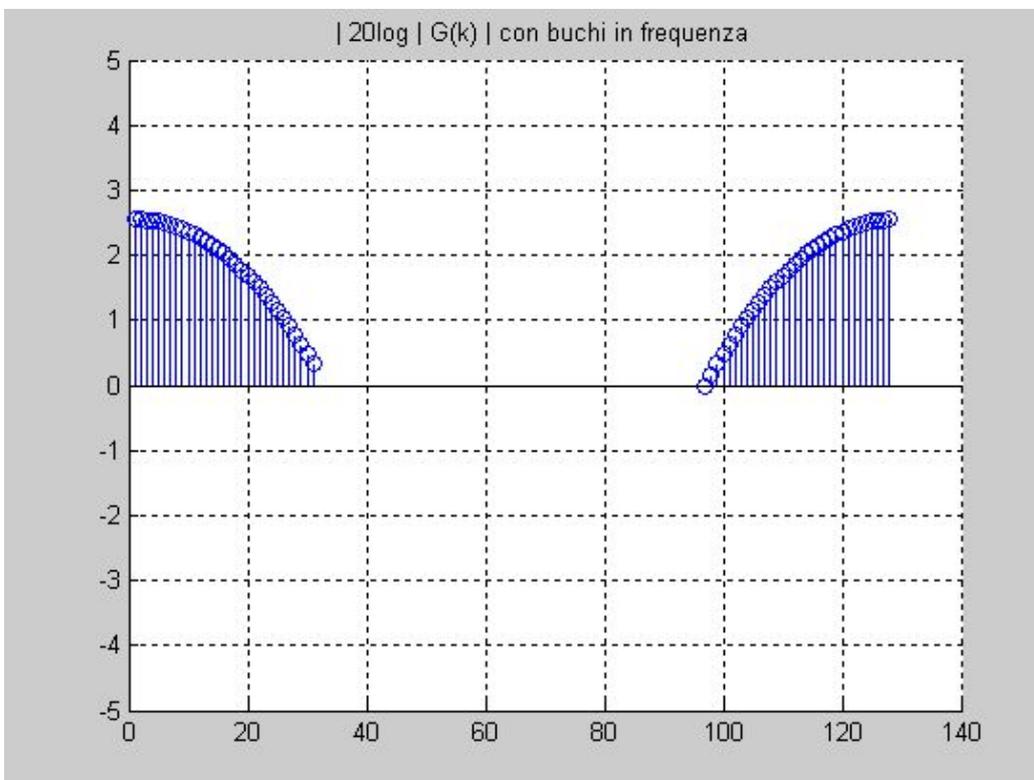


Figura 5.1: Modulo della CFR  $G(k)$  con  $\Gamma = 20$  dB.

Otteniamo i risultati di Tabella 5.1.

<b>METODO</b>	$\eta$ ( $\Gamma = 20$ dB)	$\eta$ ( $\Gamma = 10$ dB)	$\eta$ ( $\Gamma = 5$ dB)
LS	22.2	13.5	7.7
LS-FR	36.0	22.9	24.8
LS-FR-W-pruning	12.5	12.9	11.7
LS-SVD	34.3	19.8	20.0
LS-SVD-W-pruning	5.7	5.6	5.6
LS-RED-FR	27.6	22.9	20.5

Tabella 5.1: Rapporto segnale-rumore di stima  $\eta$  in dB per vari metodi.

Per l'algoritmo LS-FR è stato adottato un numero di condizionamento  $N_{cond} = 100$ , in Appendice vedremo una prova con  $N_{cond} = 1000$ .

Notiamo da questa che una buona stima si ha con l'algoritmo LS-FR: man mano che  $\Gamma$  diminuisce (cioè il rumore aumenta) questo algoritmo si presenta molto efficace. Anche il metodo LS-SVD lo è, ma sensibilmente peggio del full-rank. Aggiungendo ad entrambi i metodi la finestatura (W) e il pruning, si ha un grosso peggioramento di  $\eta$ , questo è dovuto al fatto che la finestatura taglia una grossa componente in frequenza, e quindi distorce le CIR originarie su cui poi il pruning opera e ritornando in frequenza si ha una CFR molto diversa da quella reale. Passiamo ora all'algoritmo a banda ridotta: è stata adottata una banda  $M = 72$  e conseguentemente  $L_h^{(red)} = 9$ . Senza aver finestrato, otteniamo dei risultati soddisfacenti al diminuire di  $\Gamma$ , e con  $\Gamma = 5$  dB si ha un miglioramento del metodo LS-RED-FR di quasi 13 dB, rispetto alla stima LS, si passa da 7.7 dB a 20.5 dB.

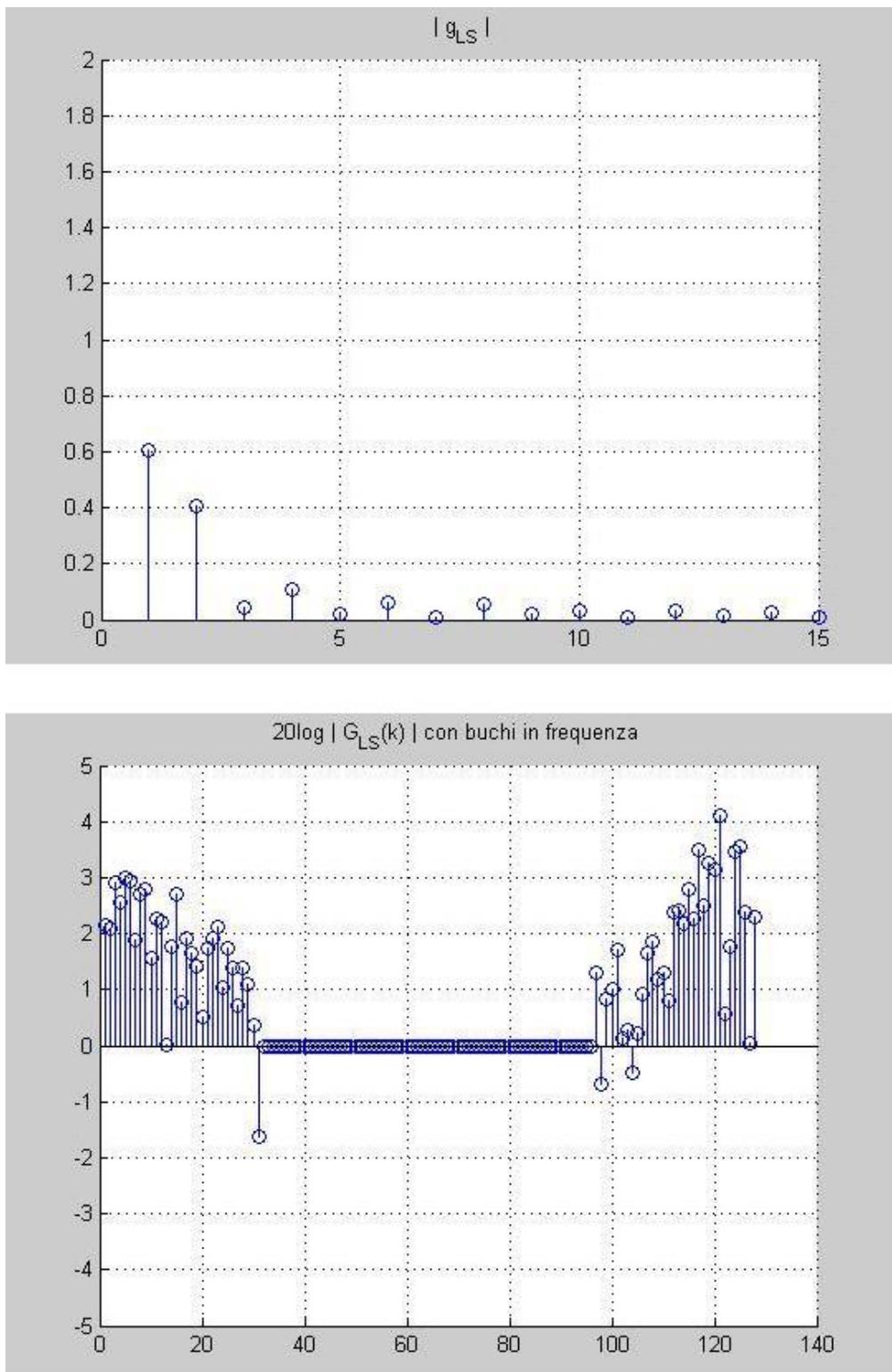


Figura 5.3: Modulo della stima LS del canale nel tempo e in frequenza con  $\Gamma = 20$  dB.

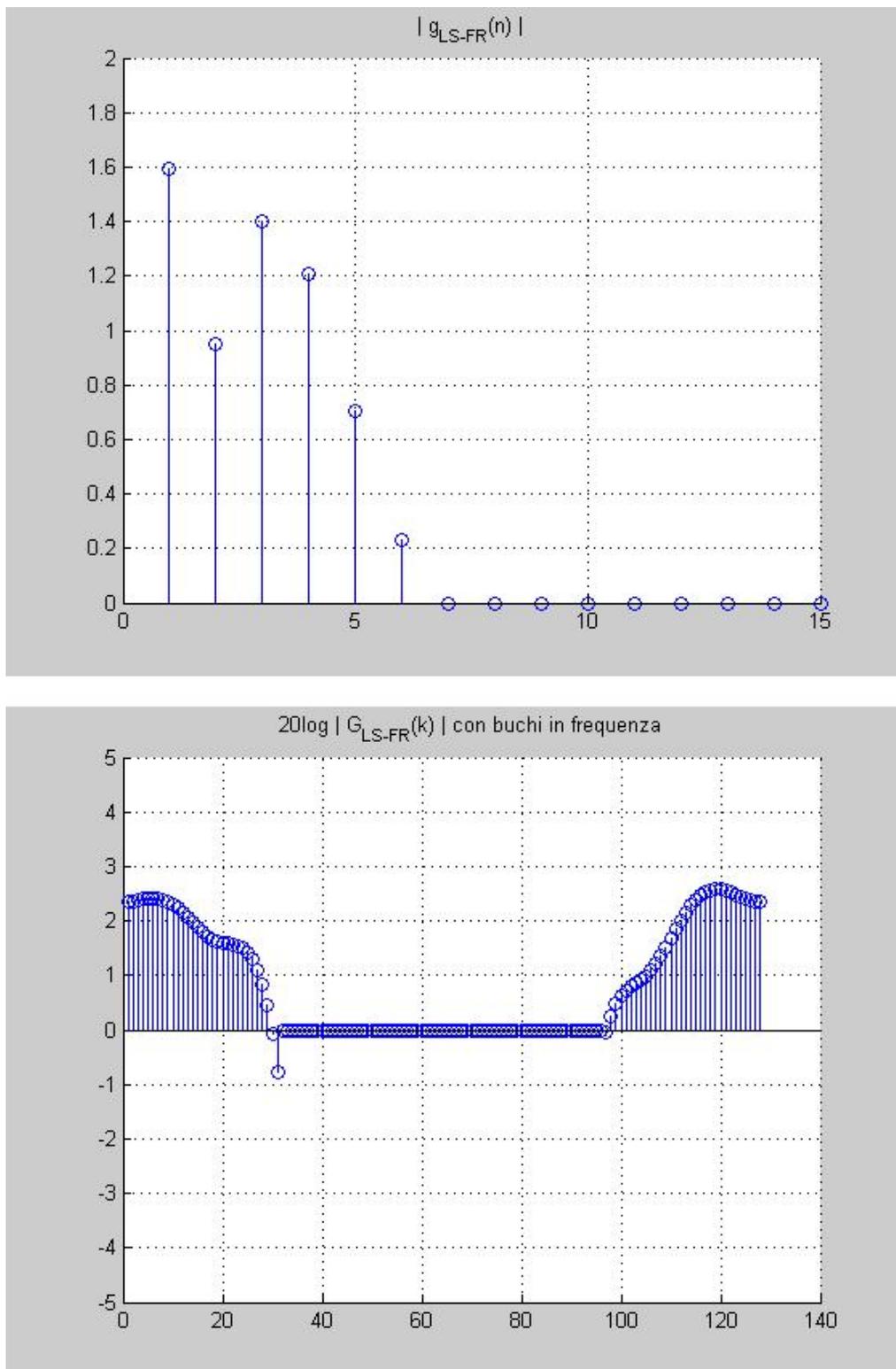


Figura 5.4: Modulo della stima LS-FR del canale nel tempo e in frequenza con  $\Gamma = 20$  dB.

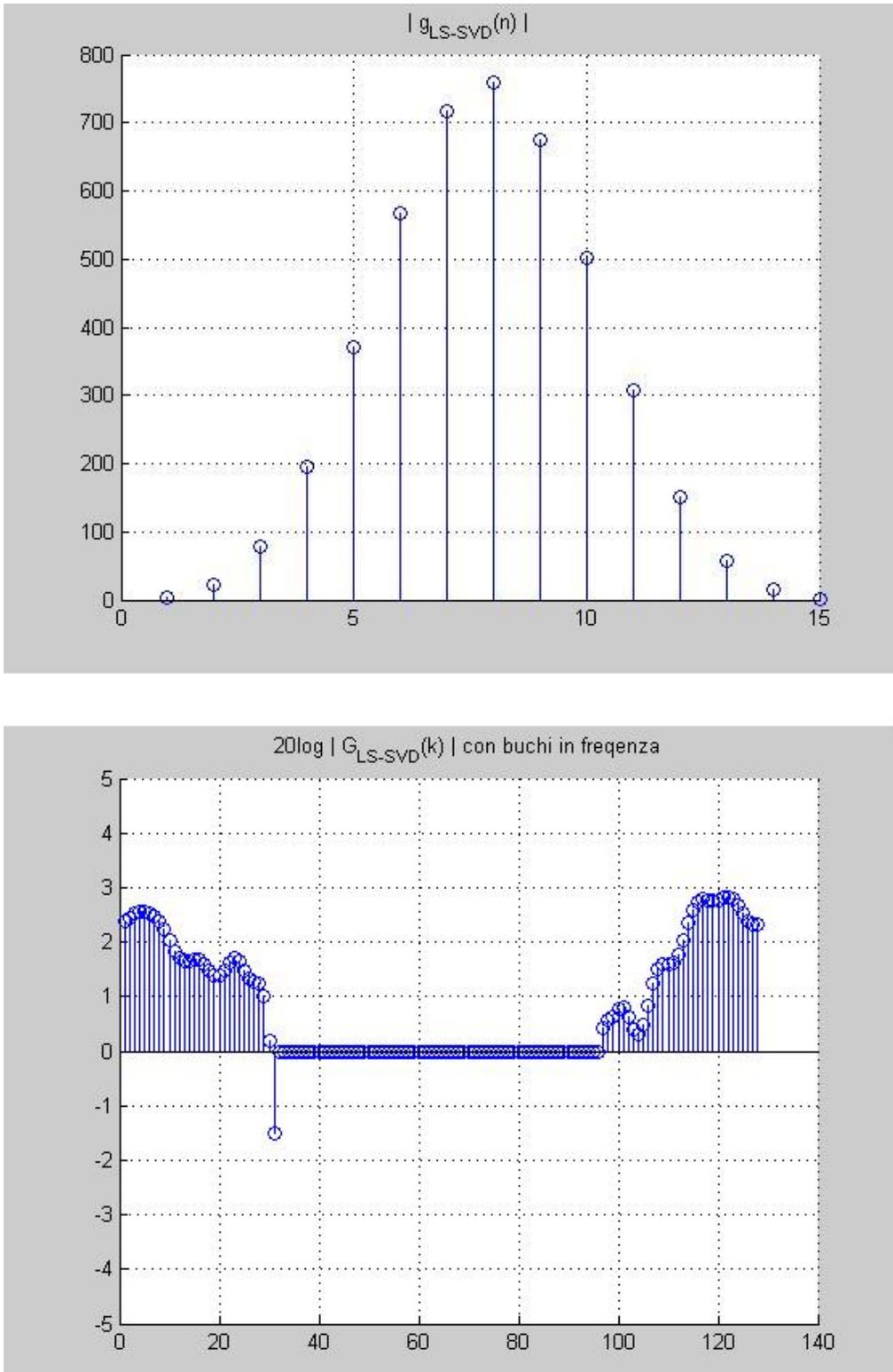


Figura 5.5: Modulo della stima LS-SVD del canale nel tempo e in frequenza con  $\Gamma = 20$  dB.

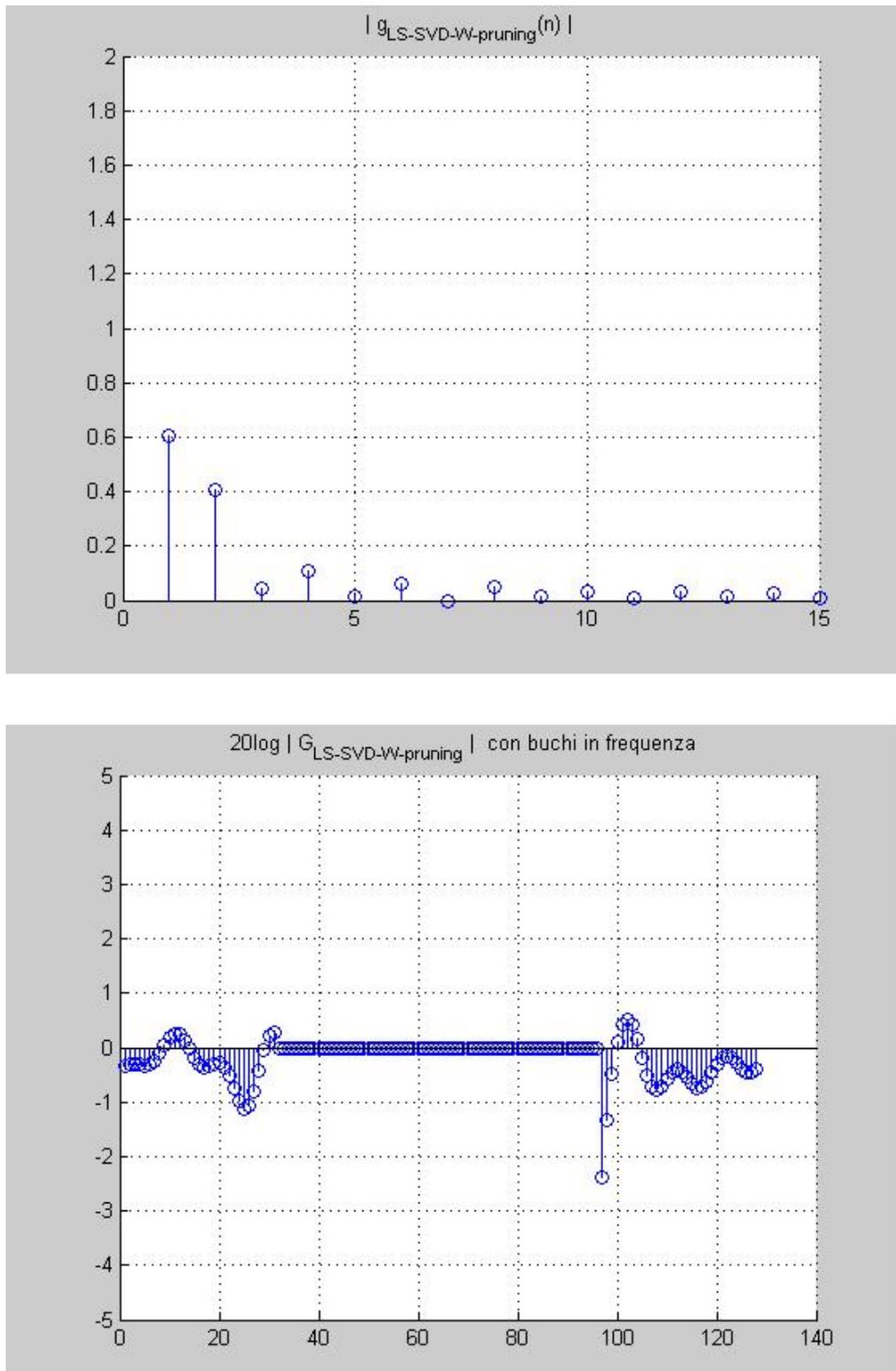


Figura 5.6: Modulo della stima LS-SVD con finestrazione e pruning del canale nel tempo e in frequenza con  $\Gamma = 20$  dB.

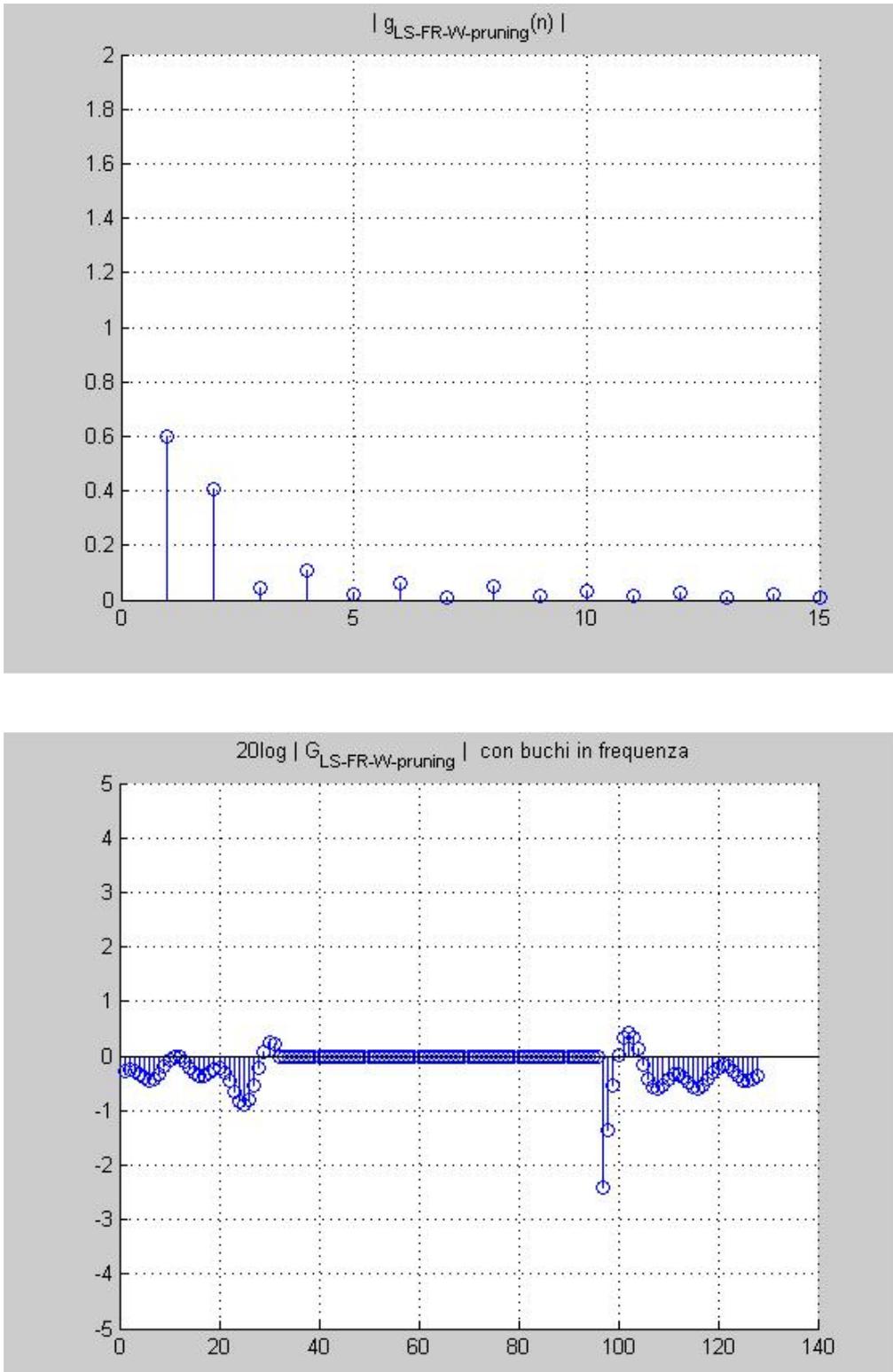
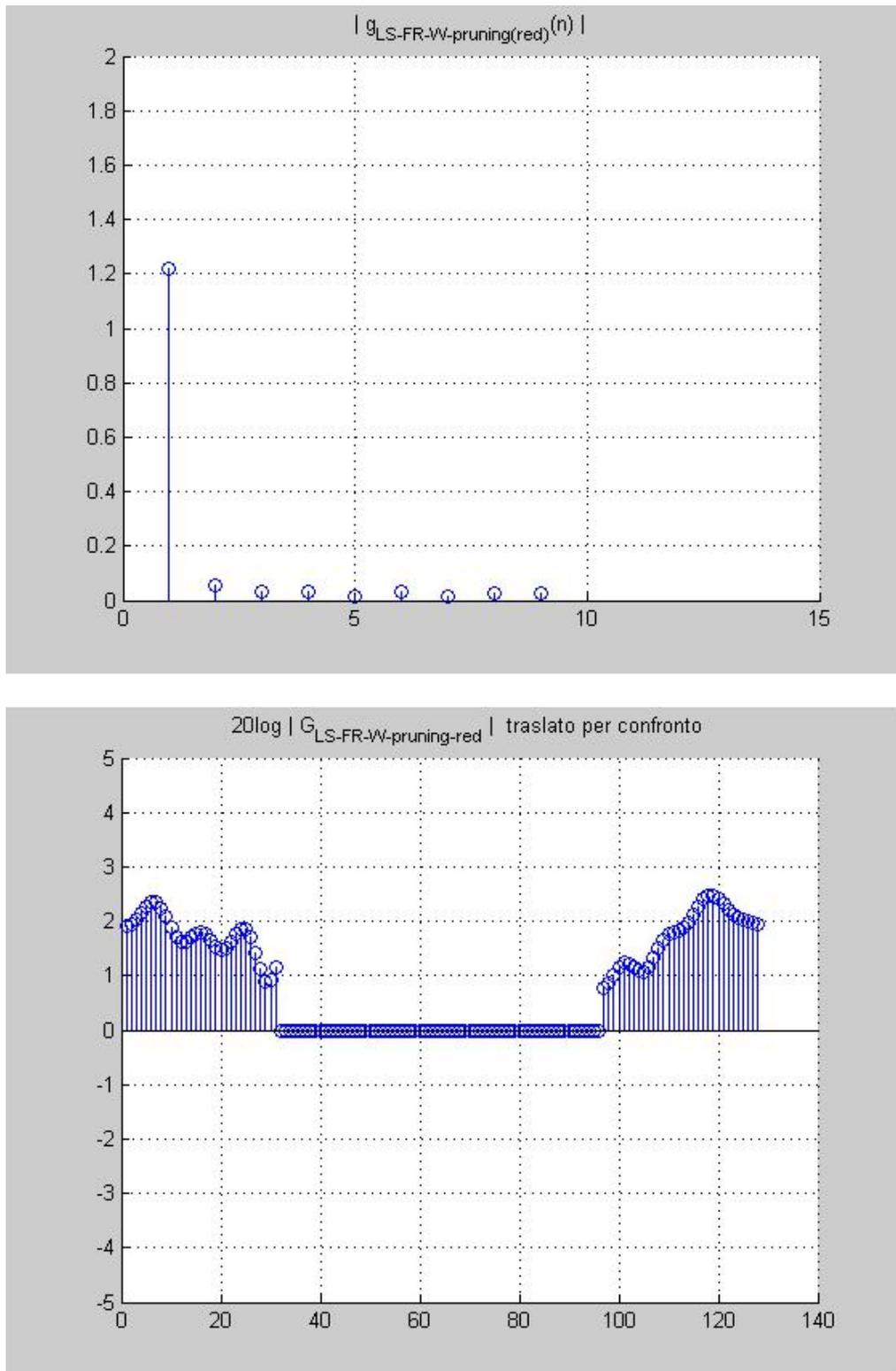
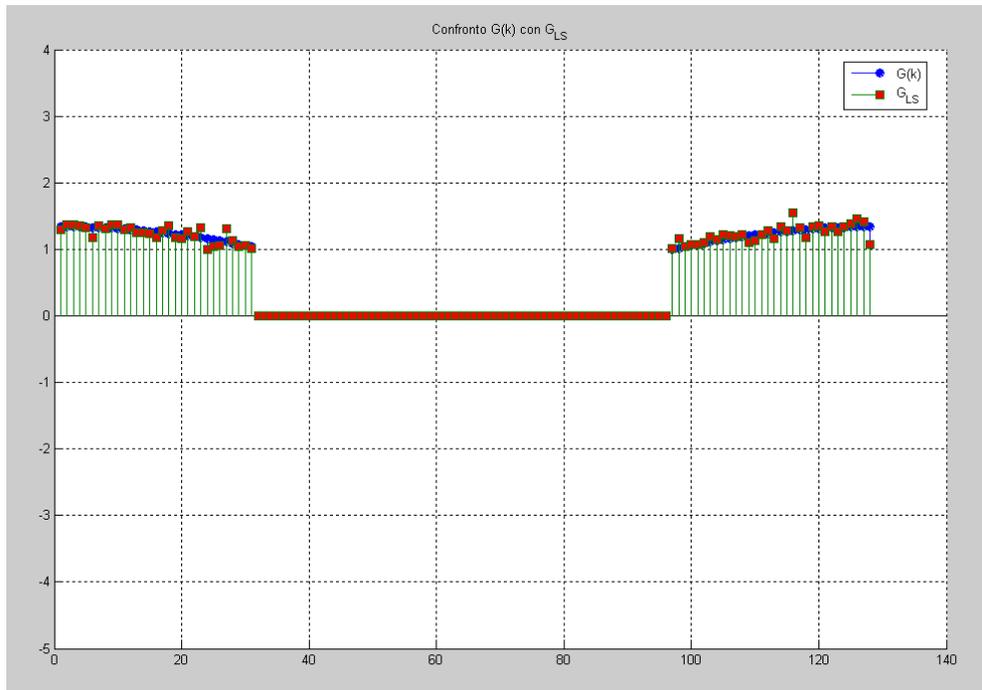
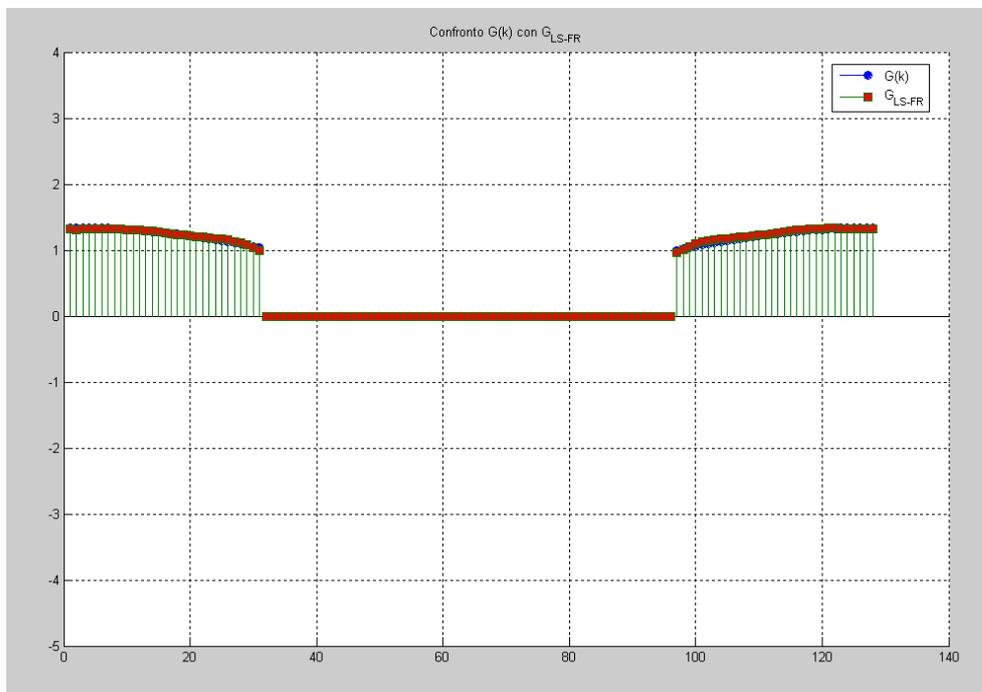


Figura 5.7: Modulo della stima LS-FR con finestrata e pruning del canale nel tempo e in frequenza con  $\Gamma = 20$  dB.

Figura 5.8: Modulo della stima LS-RED-FR con  $\Gamma = 20 \text{ dB}$ .

Figura 5.9: Confronto fra il modulo di  $G(k)$  (blu) e di  $G_{LS}(k)$  (rosso).Figura 5.10: Confronto fra il modulo di  $G(k)$  (blu) e di  $G_{LS-FR}(k)$  (rosso).

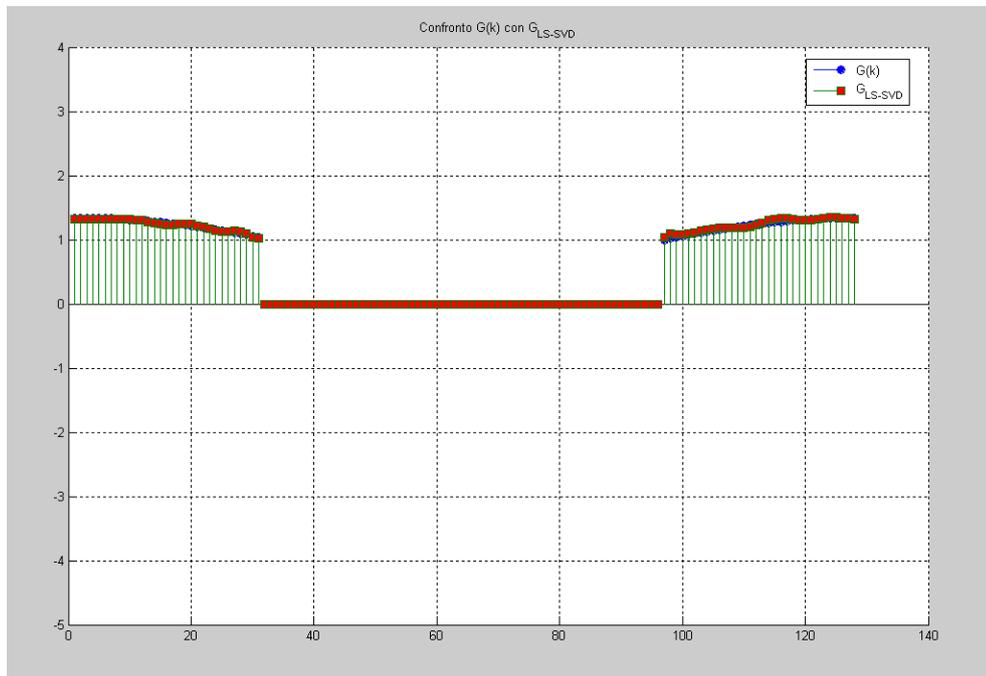


Figura 5.11: Confronto fra il modulo di  $G(k)$  (blu) e di  $G_{LS-SVD}(k)$  (rosso).

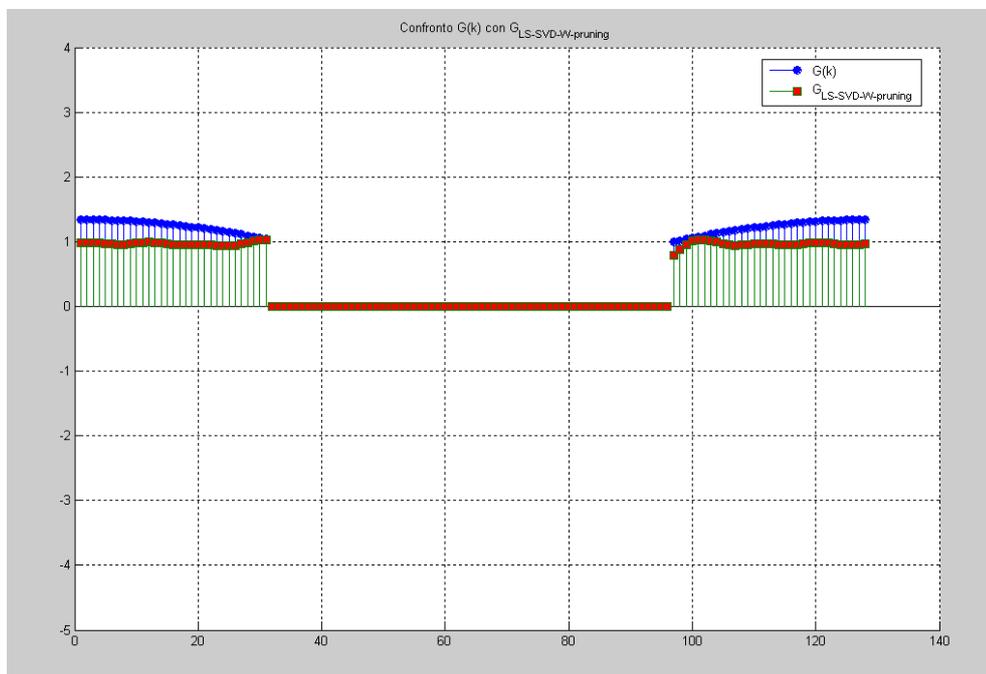


Figura 5.12: Confronto fra il modulo di  $G(k)$  (blu) e di  $G_{LS-SVD}(k)$  con finestrata e pruning (rosso).

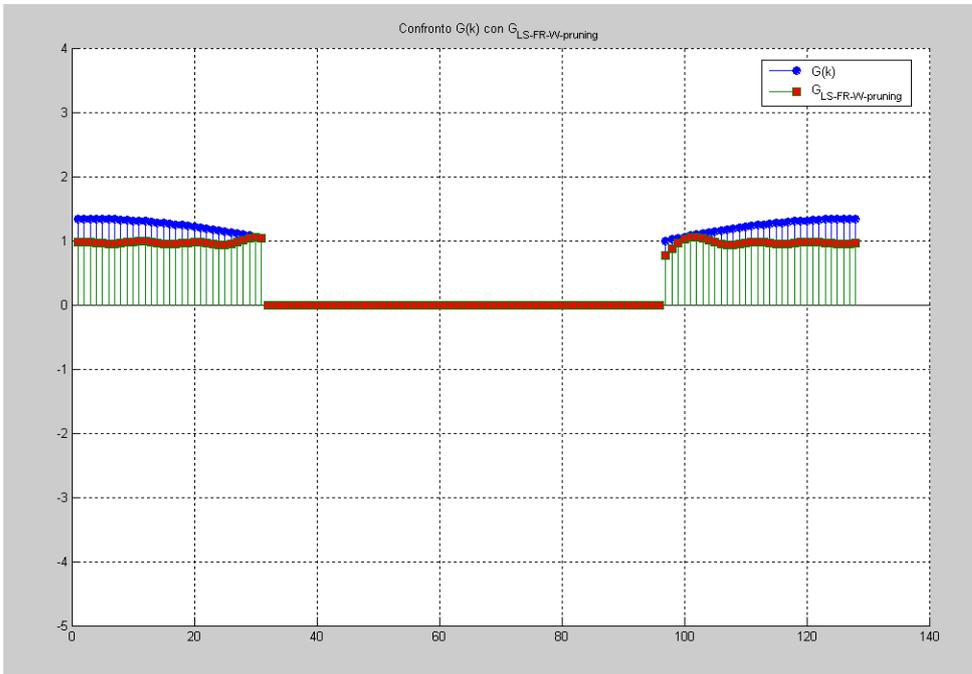


Figura 5.13: Confronto fra il modulo di  $G(k)$  (blu) e di  $G_{LS-FR}(k)$  con finestra e pruning (rosso).

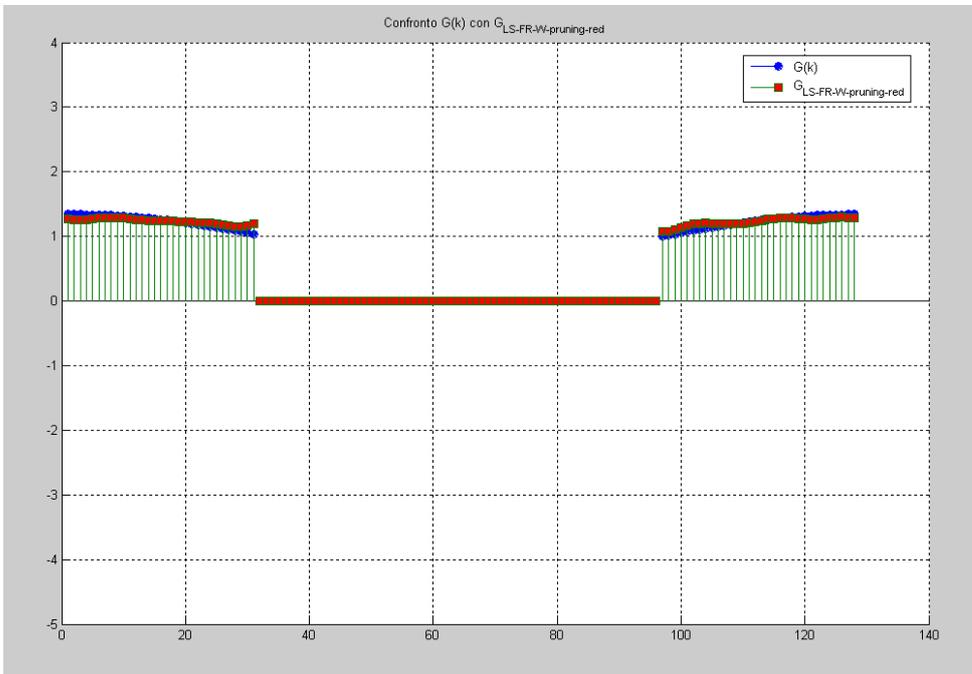


Figura 5.14: Confronto fra il modulo di  $G(k)$  (blu) e di  $G_{LS-FR-pruning}^{(red)}(k)$  (rosso).

Per analizzare meglio i risultati possiamo dal denominatore di (5.1) graficare l'errore per ogni  $k = 0, \dots, K_1, K_2, \dots, N - 1$ . Quindi da

$$\Delta_{\hat{G}}(k) = \left| G(k) - \hat{G}(k) \right| \quad (5.3)$$

graficheremo in scala logaritmica per ogni metodo di stima usato

$$(\Delta_{\hat{G}}(k))_{db} = 20 \log_{10}[\Delta_{\hat{G}}(k)]. \quad (5.4)$$

Ecco i risultati nelle Figure 5.15, 5.16, 5.17 per ogni criterio di stima.

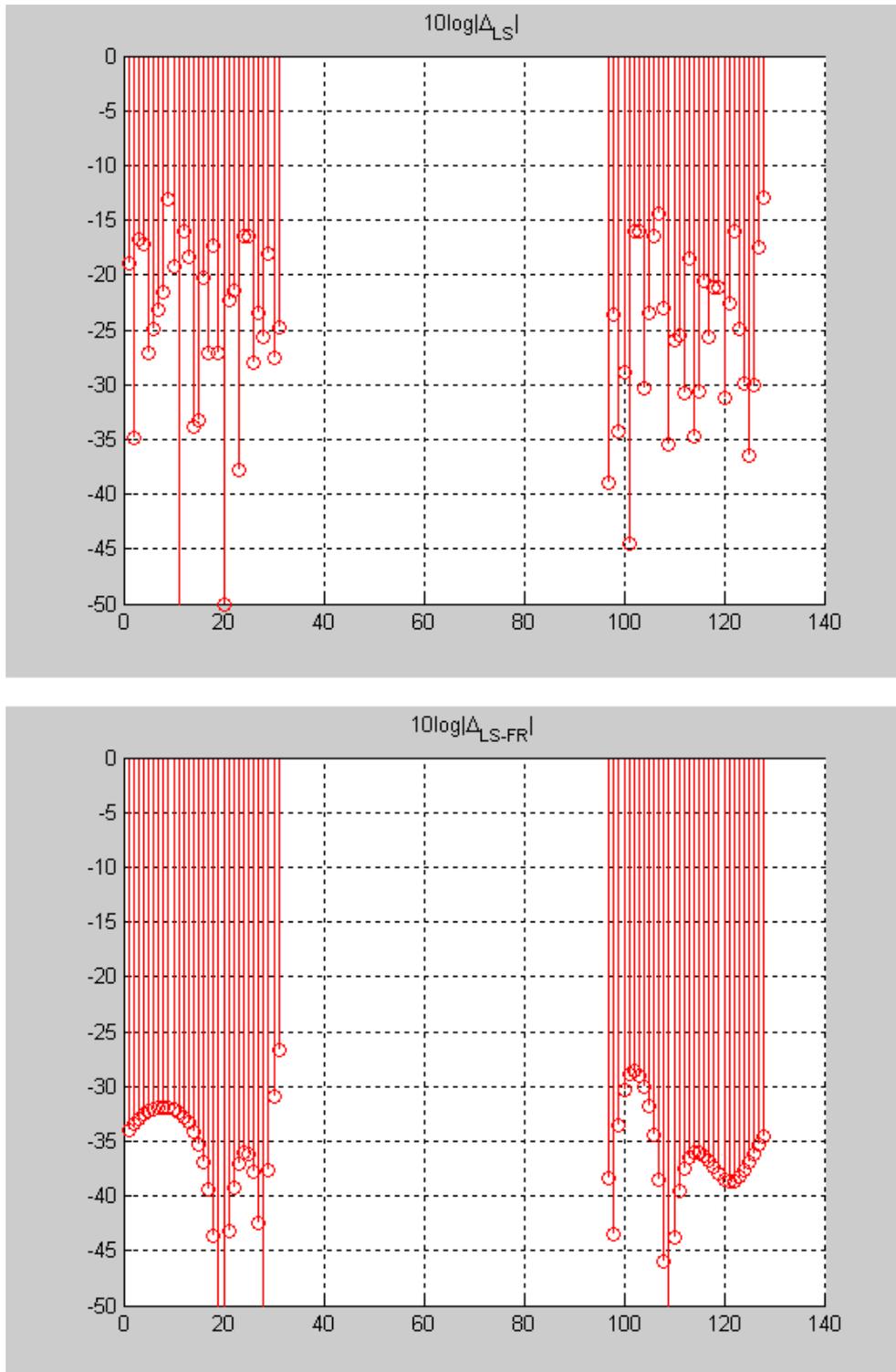


Figura 5.15: Errore  $(\Delta_{\hat{G}})_{db}$  per la stima LS (in alto) e LS-FR (in basso).

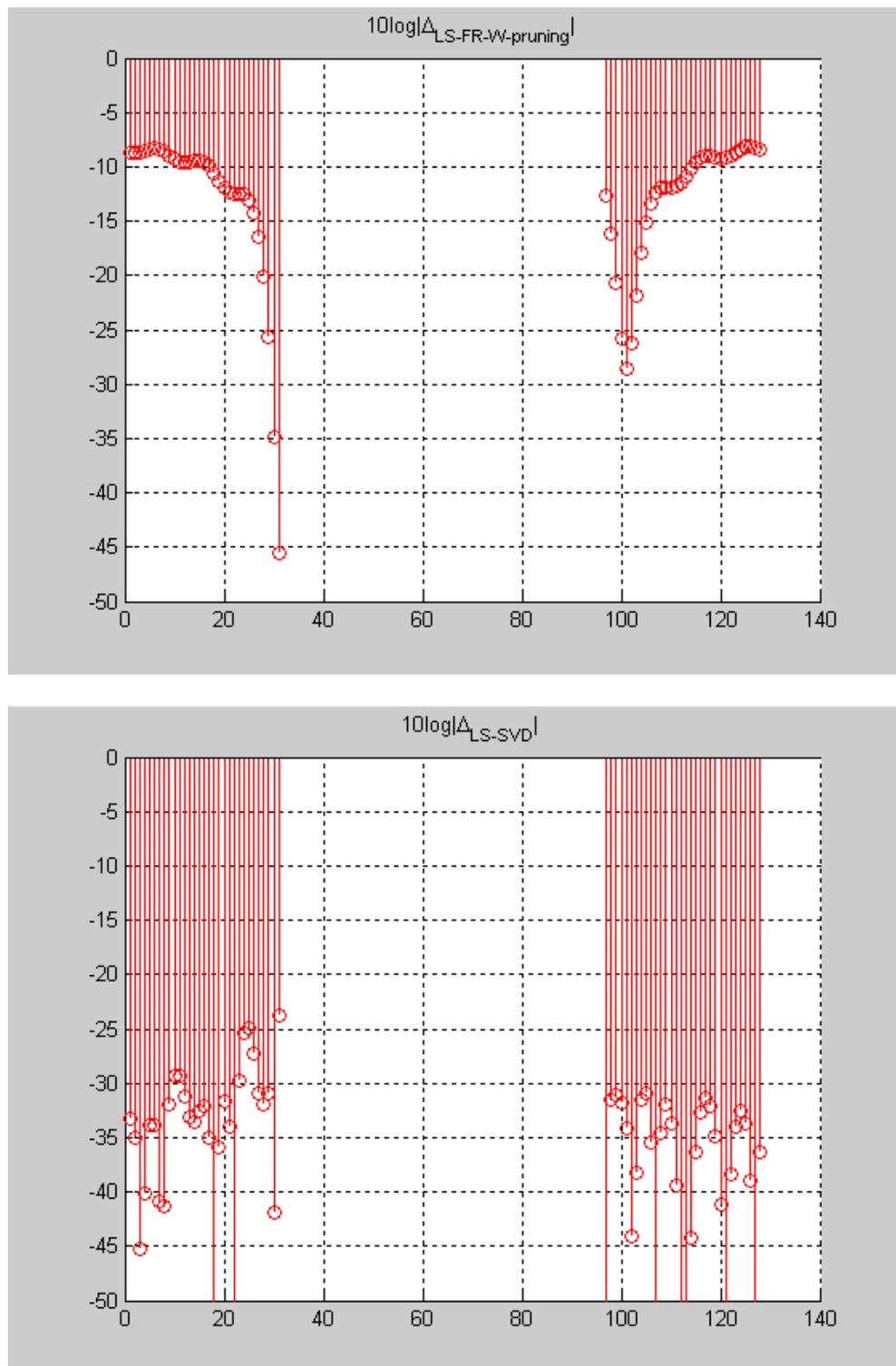


Figura 5.16: Errore  $(\Delta_{\hat{G}})_{db}$  per la stima LS-FR con finestatura e pruning (in alto) e LS-SVD (in basso).

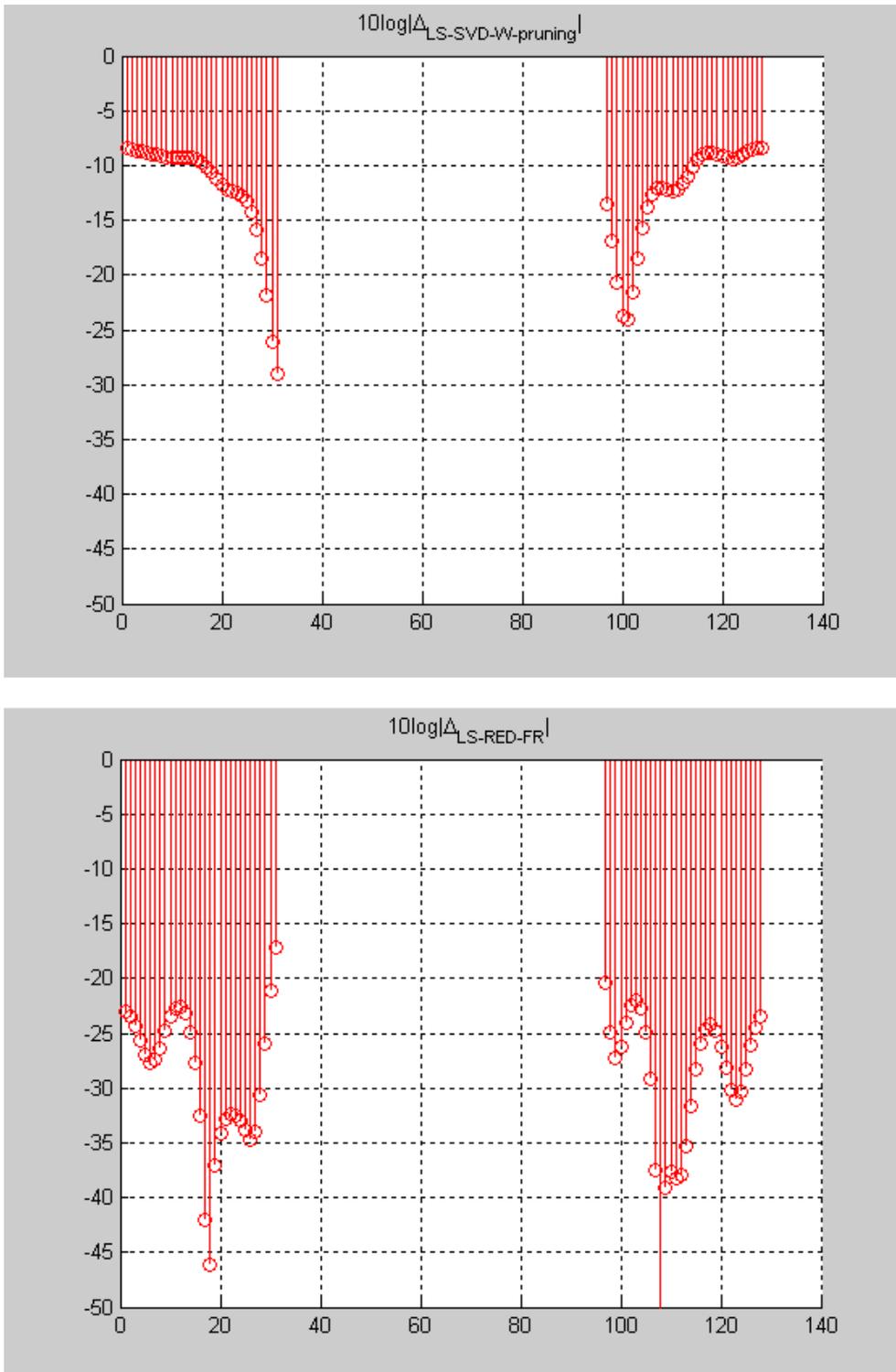


Figura 5.17: Errore  $(\Delta_{\hat{G}})_{db}$  per la stima LS-SVD con finestatura e pruning (in alto) e LS-RED-FR (in basso).

## 5.2 CANALE 2

Dato un canale con risposta impulsiva

$$g(n) = \frac{2}{\sqrt{5}}\delta(n-1) - \frac{1}{\sqrt{5}}\delta(n-11) \quad (5.5)$$

più selettivo del precedente canale, otteniamo i grafici di Figure 5.18 e 5.19 nel tempo e in frequenza, rispettivamente (per  $\Gamma = 10 \text{ dB}$ ):

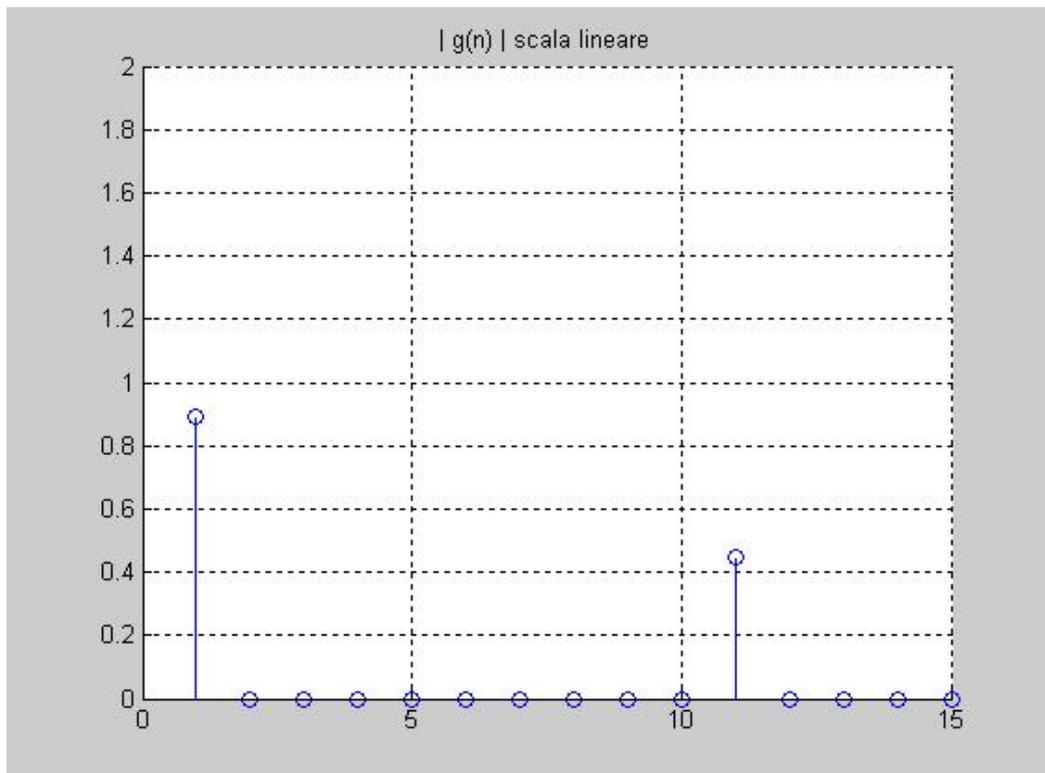


Figura 5.18: Modulo della risposta impulsiva del canale  $g(n)$  con  $\Gamma_{db} = 10 \text{ dB}$ .

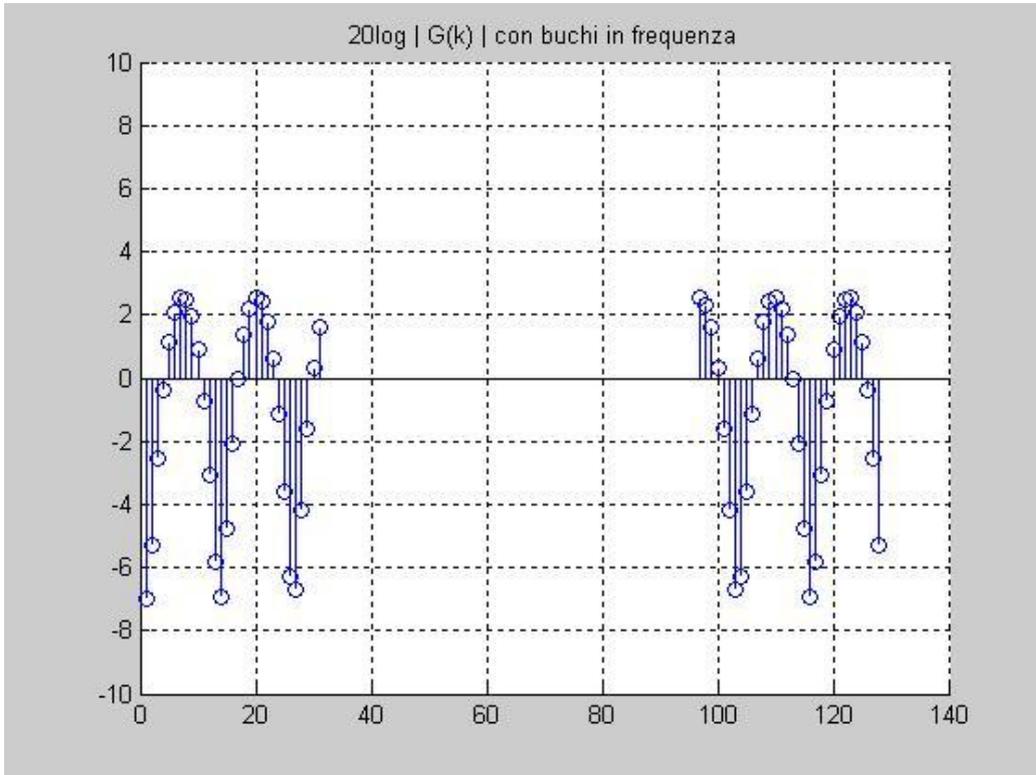


Figura 5.19: Modulo della risposta in frequenza del canale  $G(k)$  con  $\Gamma = 10$  dB.

Otteniamo i risultati di Tabella 5.2.

METODO	$\eta$ ( $\Gamma = 20$ dB)	$\eta$ ( $\Gamma = 10$ dB)	$\eta$ ( $\Gamma = 5$ dB)
LS	20.4	10.2	5.6
LS-FR	10.5	10.4	9.6
LS-FR-W-pruning	8.4	8.5	9.3
LS-SVD	16.0	13.4	10.5
LS-SVD-W-pruning	4.9	4.7	4.7
LS-RED-FR	15.5	14.6	12.6

Tabella 5.2: Rapporto segnale-rumore di stima  $\eta$  in dB per i vari metodi di stima.

Per l'algoritmo LS-FR è stato adottato un numero di condizionamento  $N_{cond} = 100$ , in Appendice vedremo una prova con  $N_{cond} = 1000$ .

Notiamo che con questo canale l'algoritmo LS-FR funziona discretamente bene solo per un  $\Gamma$  basso, l'LS-SVD va ancora meglio e funziona bene anche per un  $\Gamma$  intermedio ( $\Gamma = 10dB$ ). Passiamo ora all'algoritmo a banda ridotta: è stata adottata come prima  $M = 72$  di e quindi  $L_h^{(red)} = 9$ . Senza aver finestrato, otteniamo dei risultati soddisfacenti sempre più al diminuire di  $\Gamma$ , e con ( $\Gamma = 5 dB$ ) si ha un miglioramento di  $7 dB$  rispetto alla stima LS, si passa da  $5.6 dB$  a  $12.6 dB$ . In generale, con un  $\Gamma$  elevato, nessuno di questi metodi riesce a dare un CFE soddisfacente, il metodo base LS è il migliore.

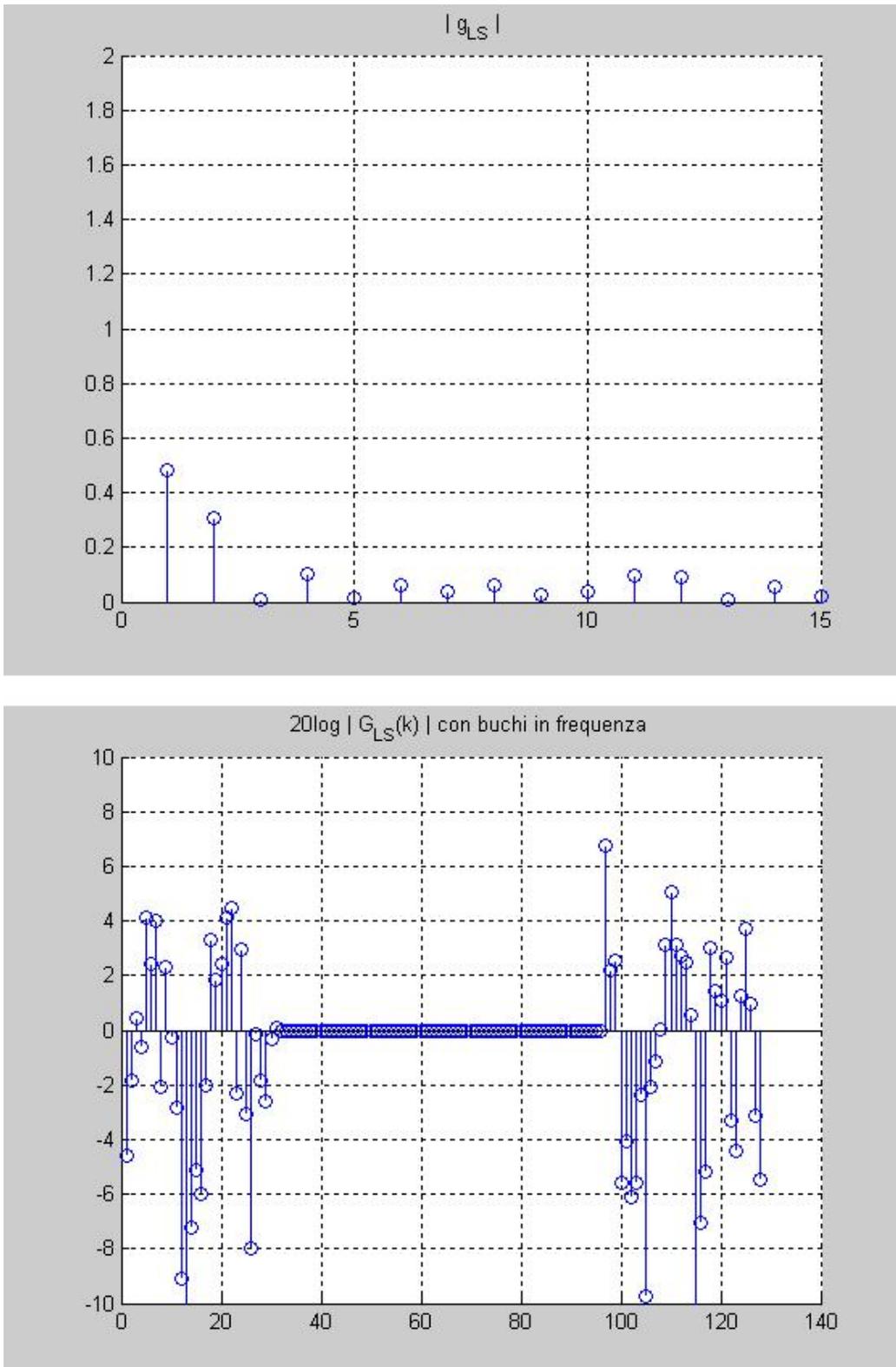


Figura 5.20: Modulo della stima LS del canale nel tempo e in frequenza con  $\Gamma = 10$  dB.

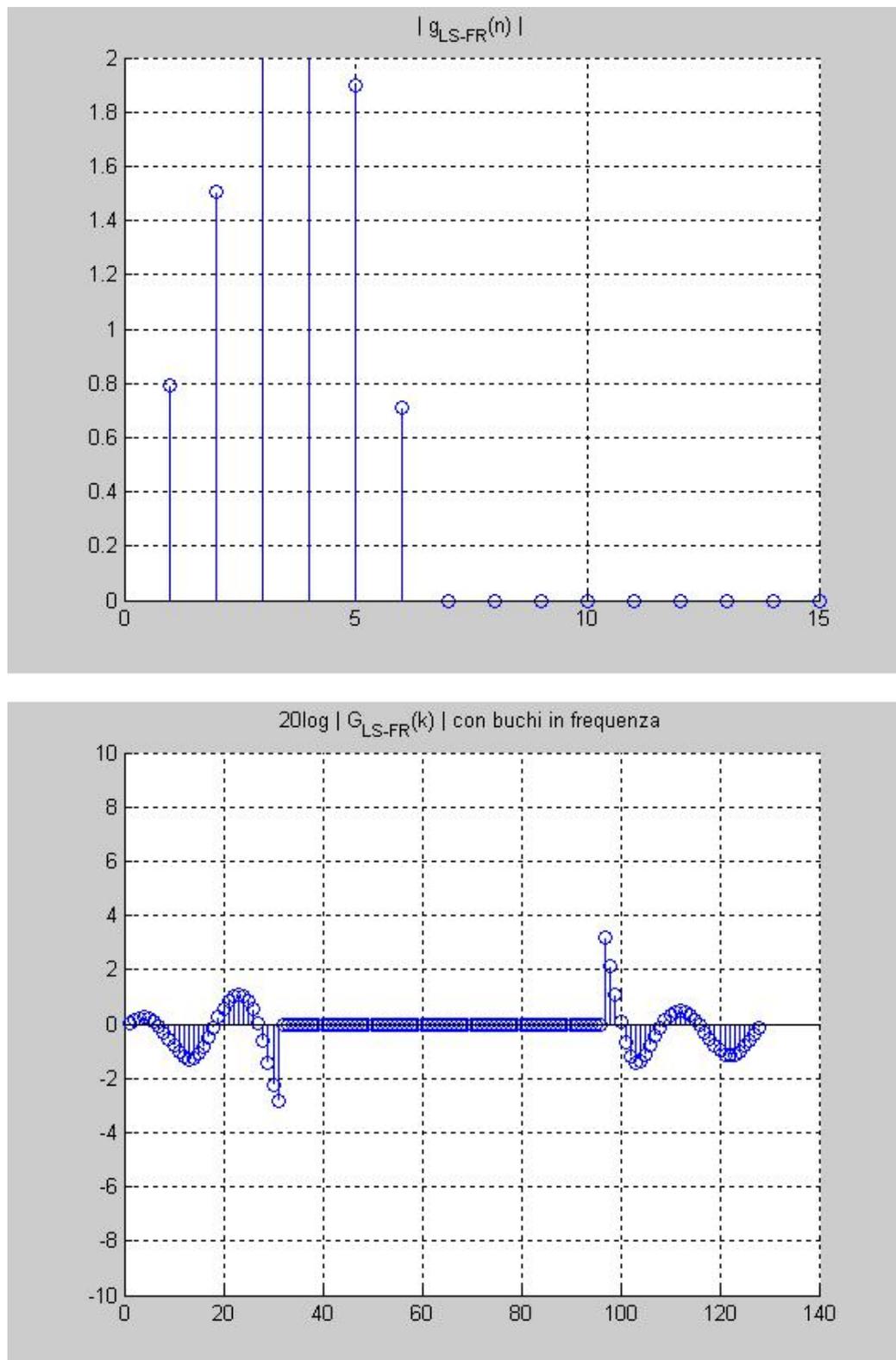


Figura 5.21: Modulo della stima LS-FR del canale nel tempo e in frequenza con  $\Gamma = 10$  dB.

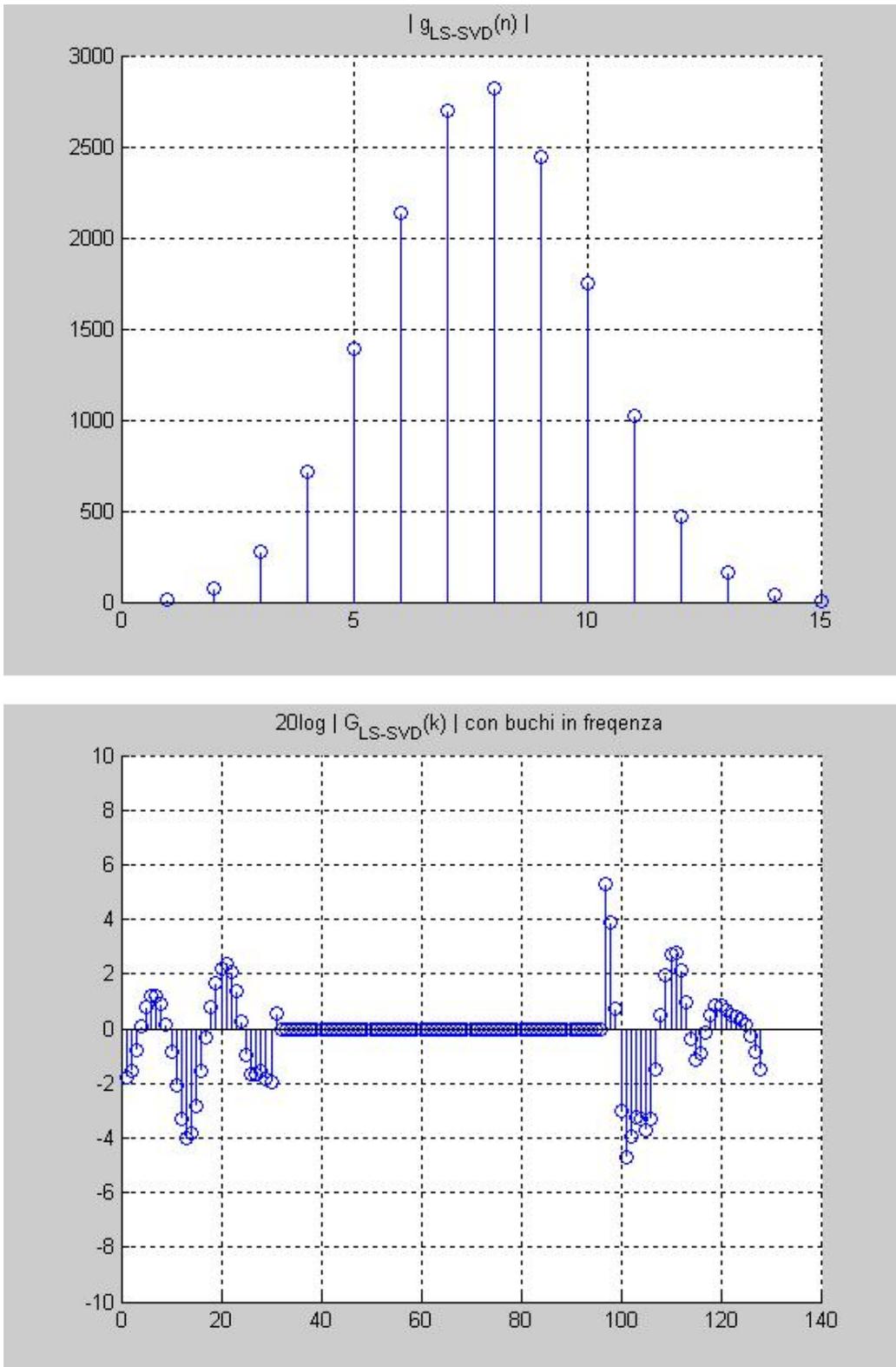


Figura 5.22: Modulo della stima LS-SVD del canale nel tempo e in frequenza con  $\Gamma = 10$  dB.

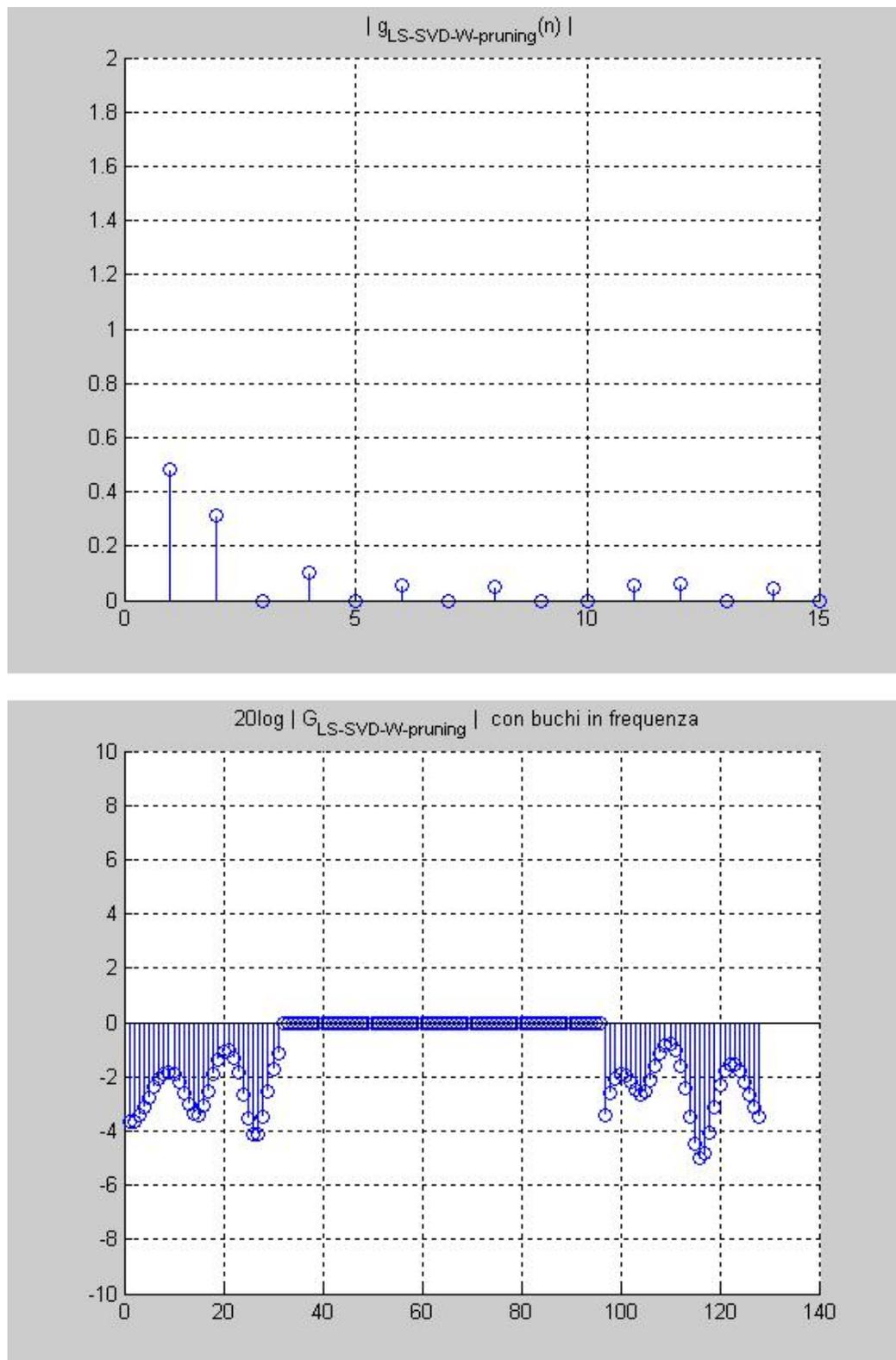


Figura 5.23: Modulo della stima LS-SVD con finestrazione e pruning del canale nel tempo e in frequenza con  $\Gamma = 10$  dB.

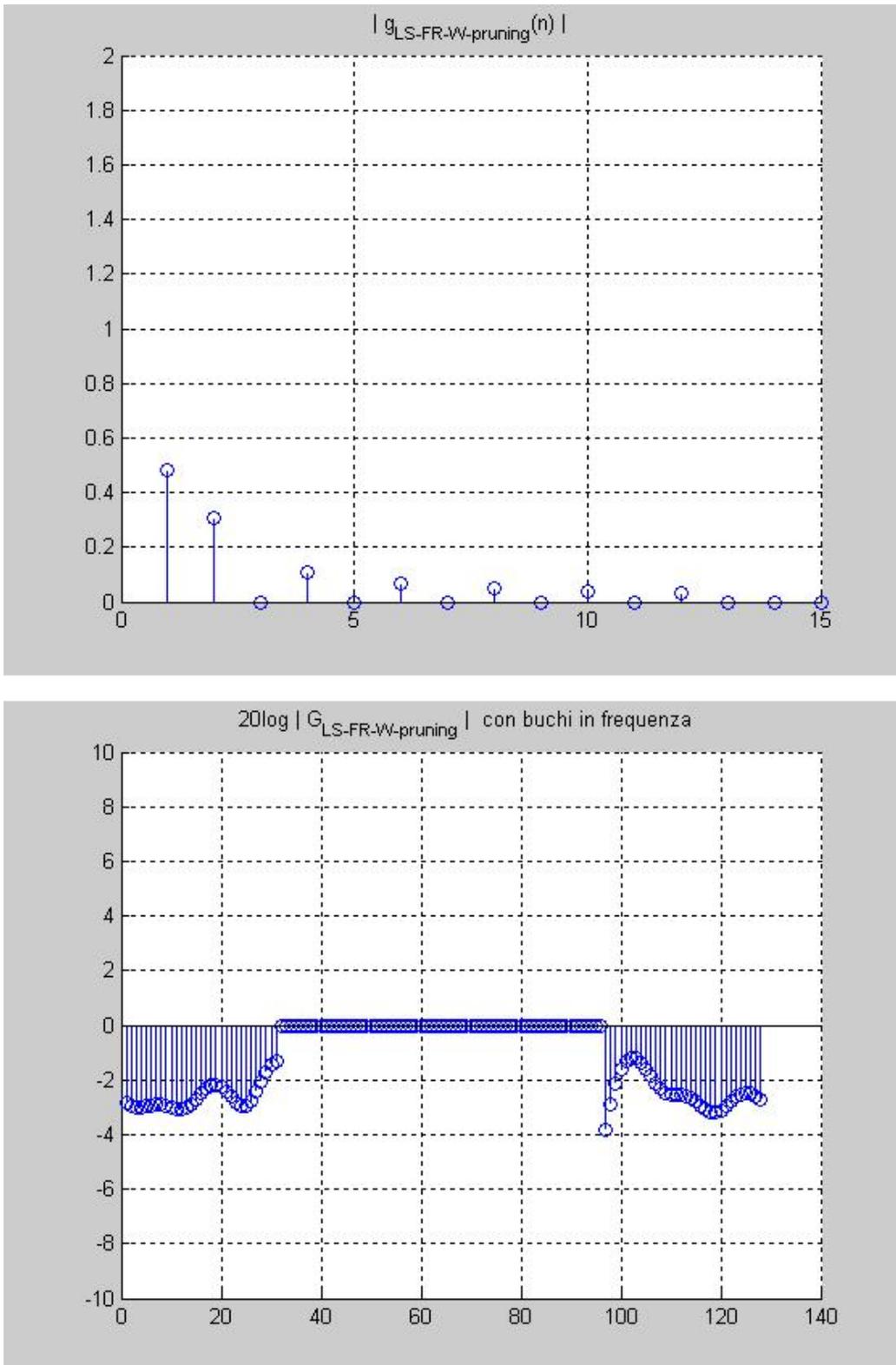


Figura 5.24: Modulo della stima LS-FR con finestatura e pruning del canale nel tempo e in frequenza con  $\Gamma = 10$  dB.

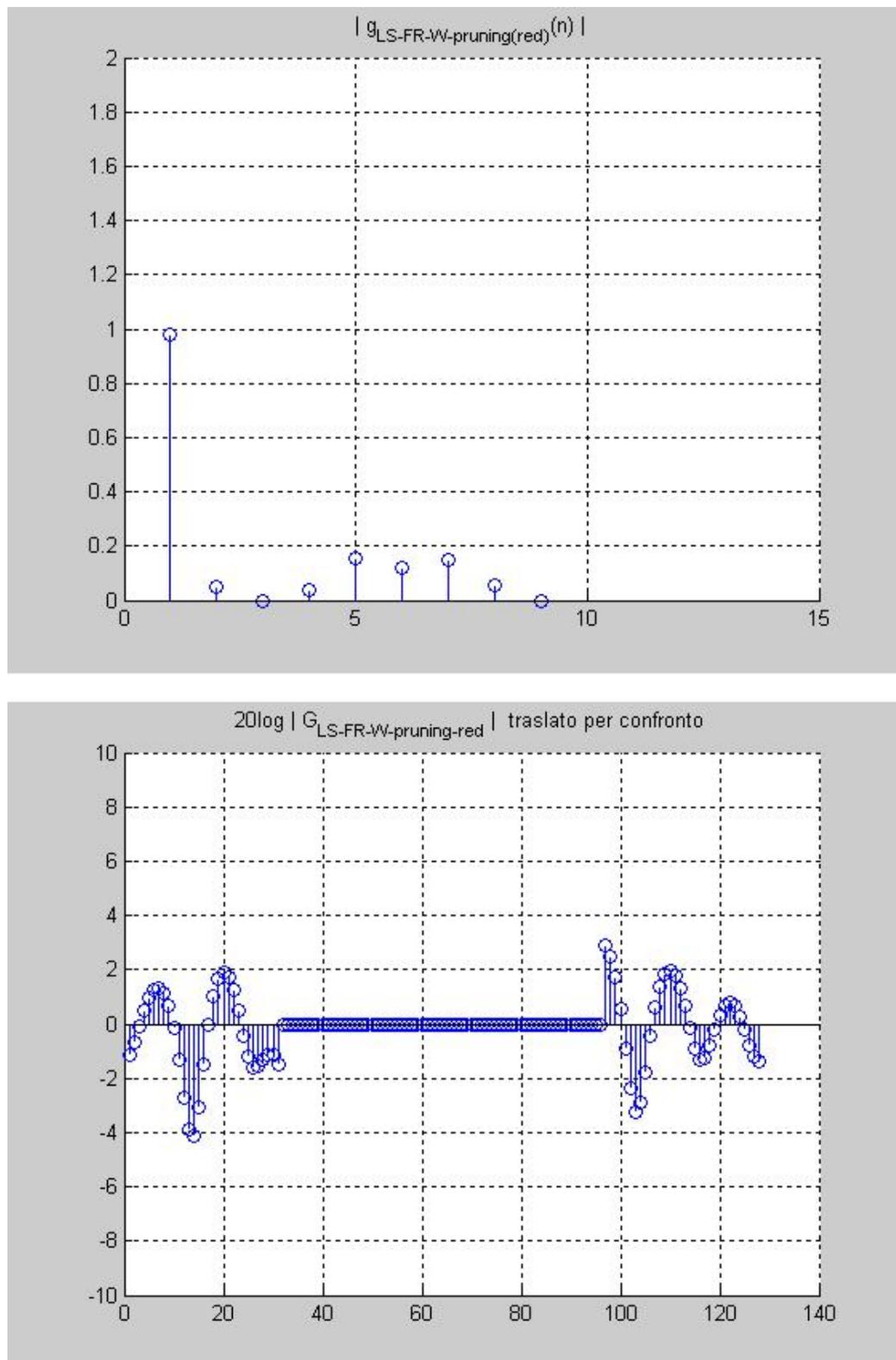


Figura 5.25: Modulo della stima LS-RED-FR nel tempo e in frequenza con  $\Gamma = 10 \text{ dB}$ .

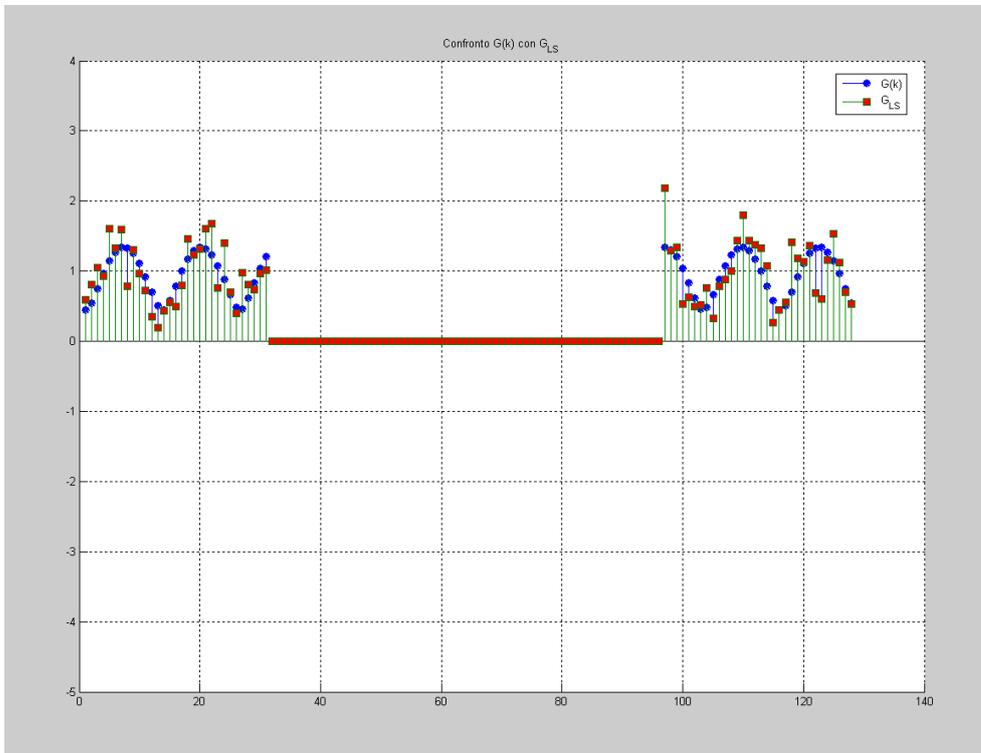


Figura 5.26: Confronto fra il modulo di  $G(k)$  (blu) e di  $G_{LS}(k)$  (rosso).

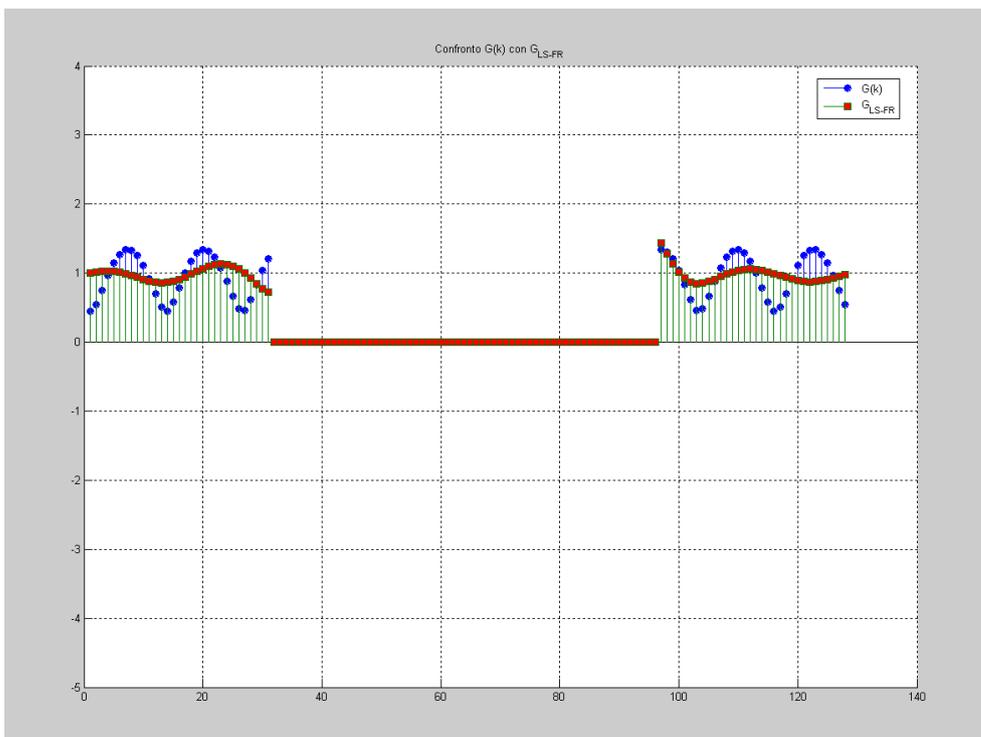


Figura 5.27: Confronto fra il modulo di  $G(k)$  (blu) e di  $G_{LS-FR}(k)$  (rosso).

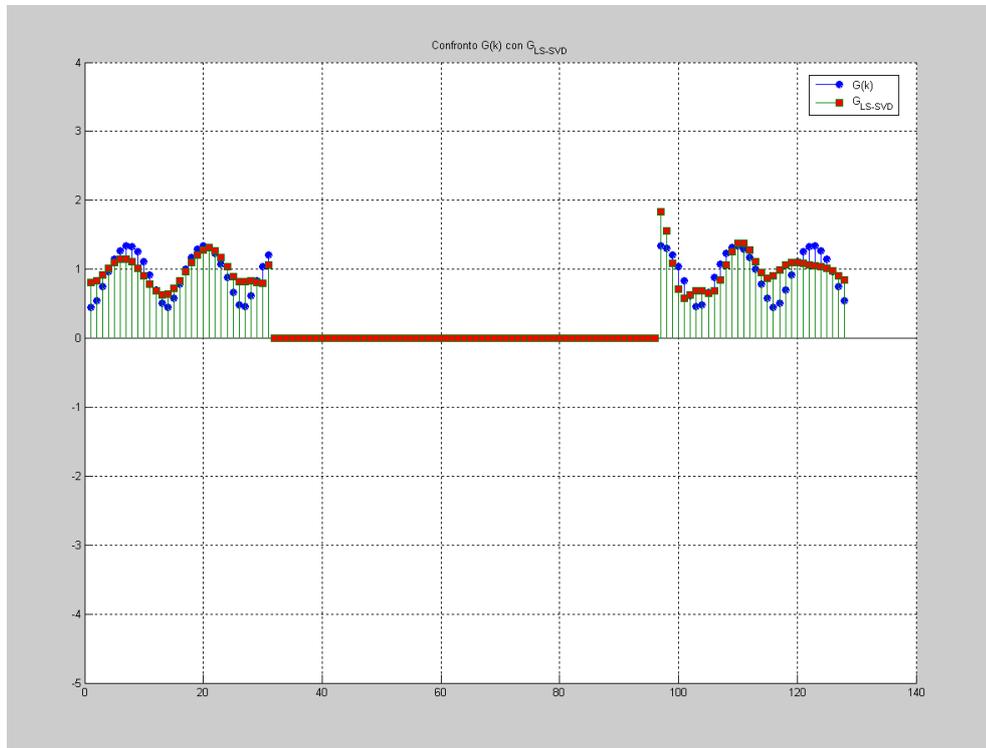


Figura 5.28: Confronto fra il modulo di  $G(k)$  (blu) e di  $G_{LS-SVD}(k)$  (rosso).

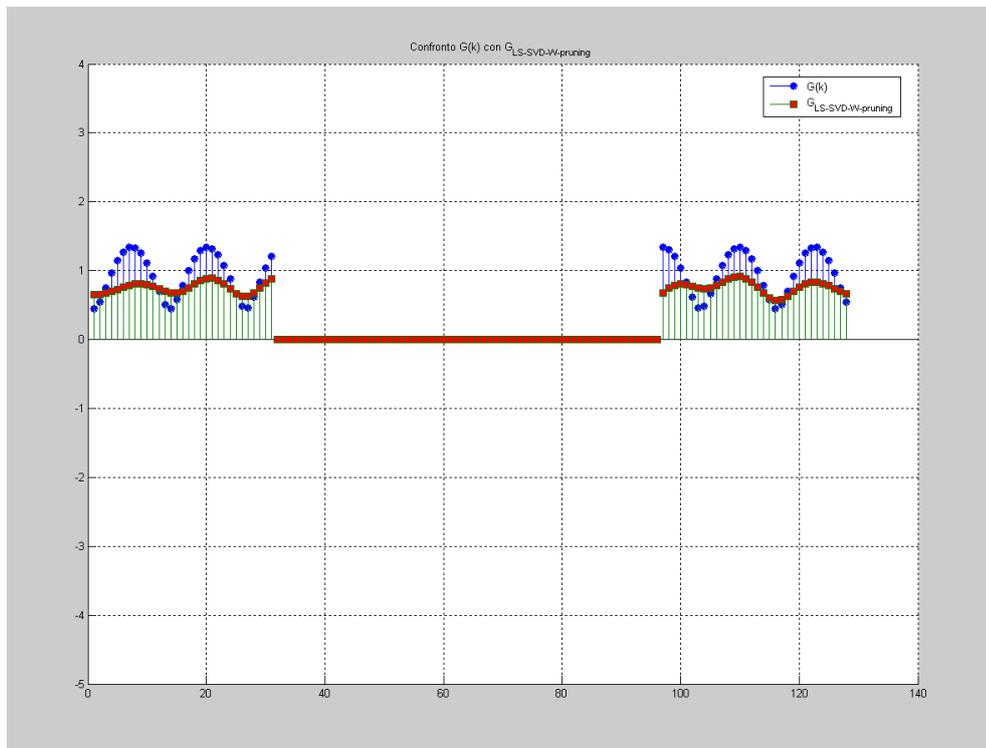


Figura 5.29: Confronto fra il modulo di  $G(k)$  (blu) e di  $G_{LS-SVD}(k)$  con finestra e pruning (rosso).

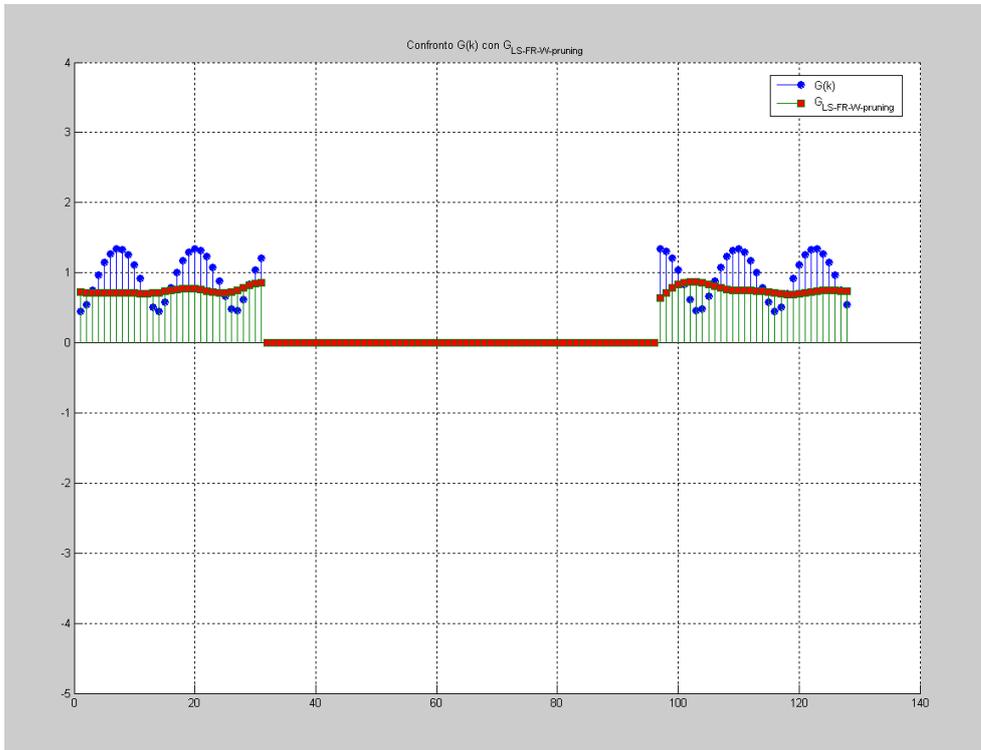


Figura 5.30: Confronto fra il modulo di  $G(k)$  (blu) e di  $G_{LS-FR}(k)$  con finestra e pruning (rosso).

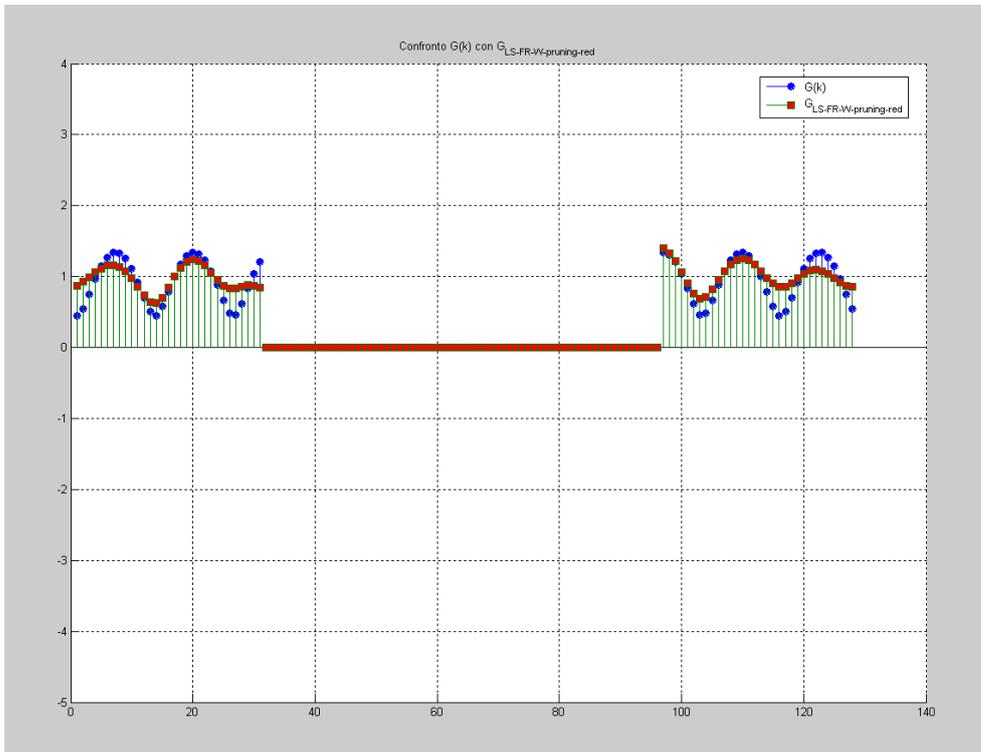


Figura 5.31: Confronto fra il modulo di  $G(k)$  (blu) e di  $G_{LS-FR-pruning}^{(red)}(k)$  (rosso).

Procediamo come abbiamo fatto per il Canale 1 e grafichiamo ora l'errore  $(\Delta_{\hat{G}}(k))_{db}$  per  $k = 0, \dots, K_1, K_2, \dots, N - 1$ .

Ecco i risultati nelle Figure 5.32, 5.33, 5.2 per ogni criterio di stima.

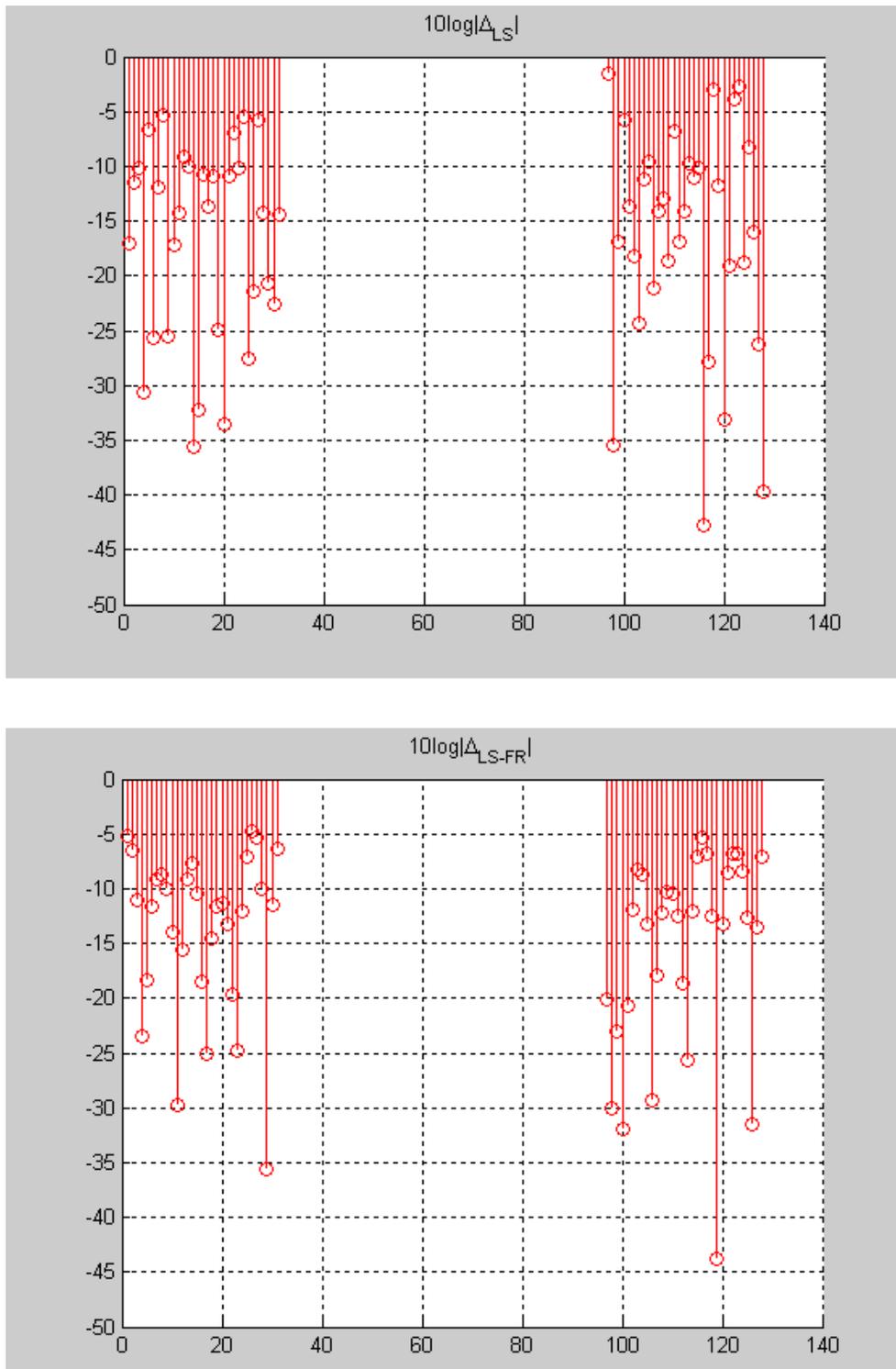


Figura 5.32: Errore  $(\Delta_{\hat{G}})_{db}$  per la stima LS (in alto) e LS-FR (in basso).

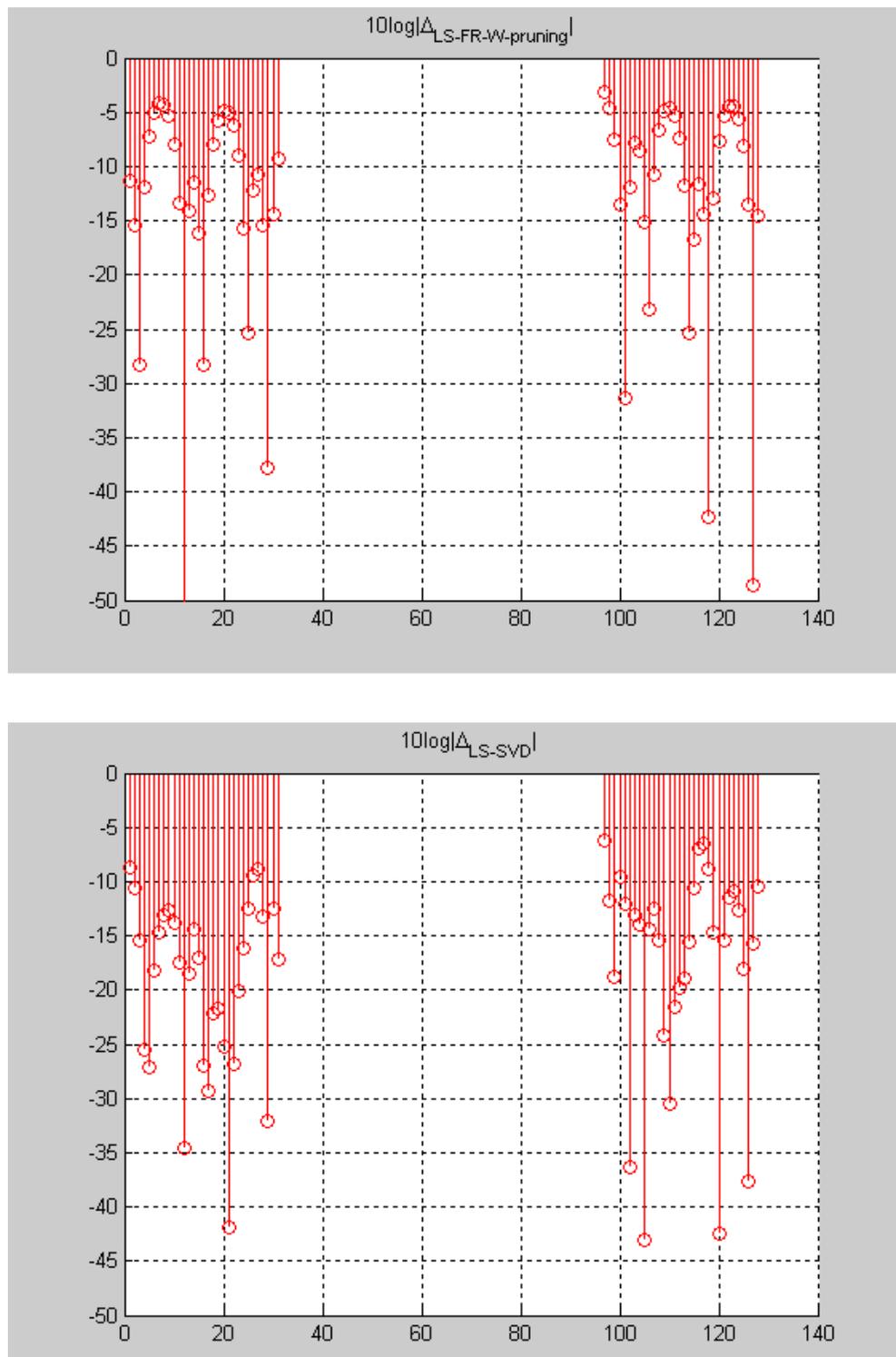


Figura 5.33: Errore  $(\Delta_{\hat{G}})_{db}$  per la stima LS-FR con finestatura e pruning (in alto) e LS-SVD (in basso).

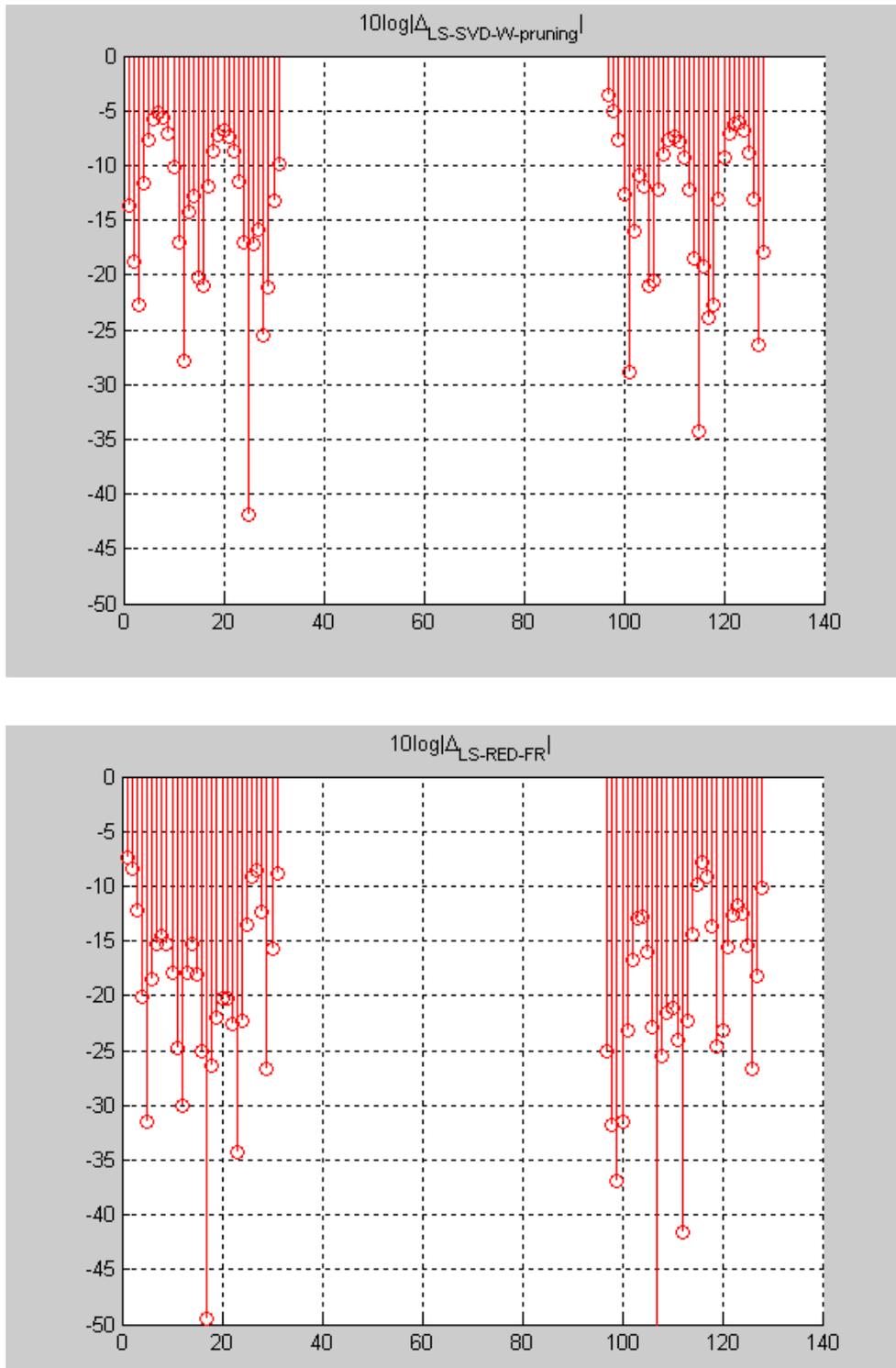


Figura 5.34: Errore  $(\Delta_{\hat{G}})_{db}$  per la stima LS-SVD con finestatura e pruning (in alto) e LS-RED-FR (in basso).

# Capitolo 6

## CONCLUSIONI

Valutando i grafici di confronto diretto dei CFE e dei  $(\Delta_{\hat{G}})_{db}$ , possiamo dire che il metodo a banda ridotta risulta molto buono, in generale, per qualsiasi tipo di risposta impulsiva di canale. In particolare da una buona stima soprattutto alle frequenze intermedie (tra 0 e  $K_1$  e tra  $K_2$  e  $N$ ), mentre presenta qualche problema ai bordi per il canale meno selettivo (vedi Figura 5.17 in basso), e in corrispondenza dei punti di minimo di per il canale più selettivo (vedi Figura 5.31).

Per i metodi tradizionali invece l'unico metodo che funziona bene per ogni canale (anche se molto meglio per quello non selettivo) è il singular value decomposition. Di più, l'aggiunta della finestrazione e pruning fa solo peggiorare le cose. Per il metodo full-rank invece occorre fare due distinzioni:

- 1) Per il canale non selettivo funziona molto bene, peggiora solo vicino al bordo inferiore  $K_1$ . Se aggiungiamo finestrazione e pruning si ha un peggioramento in generale, con un miglioramento per  $k \simeq K_1$ .
- 2) Per il canale selettivo, il metodo LS-FR non porta a sostanziali migliorie. Anche qui le finestrazione e pruning portano stime peggiori. Quindi questo metodo per questo tipo di CIR è da evitare.

Concludendo in generale è meglio usare il metodo a banda ridotta, o, in caso di canale non selettivo, l'LS-FR o LS-SVD, tenendo conto che per due/tre frequenze vicino a  $K_1$  sarebbe meglio operare con l'LS-FR-W-pruning.



# Appendice A

## APPROFONDIMENTO SUL NUMERO DI CONDIZIONAMENTO

Definiamo la *Norma indotta* dal vettore  $\mathbf{x}$  della matrice  $\mathbf{A}$  come

$$\|\mathbf{A}\| := \sup_{\mathbf{x} \neq 0} \frac{\|\mathbf{Ax}\|}{\|\mathbf{x}\|} \quad (\text{A.1})$$

da questa abbiamo che la quantità

$$K(\mathbf{A}) = \|\mathbf{A}\| \cdot \|\mathbf{A}^{-1}\| \quad (\text{A.2})$$

è detta *Indice* (o *Numero*) di *Condizionamento* della matrice  $\mathbf{A}$ .

Se  $\mathbf{I}$  è la matrice identità, allora  $K(\mathbf{I}) = 1$ . In generale per ogni matrice  $\mathbf{A}$  si ha che  $K(\mathbf{A}) \geq 1$ . Se il numero di condizionamento è molto grande allora la matrice  $\mathbf{A}$  si dice mal-condizionata.

In presenza di un sistema lineare  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  dove:

- $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$  è la soluzione del suddetto sistema
- $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{N \times N}$  e  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^N$  sono i dati del problema.

E' facile capire che se l'indice di condizionamento è molto grande, a perturbazioni anche piccole nei dati ( $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{b}$ ) possono corrispondere grandi variazioni nella soluzione, e il problema è quindi mal-condizionato.

Provvederemo quindi nella nostra procedura a forzare il numero di condizionamento perchè non superi un determinato valore, ecco in Figura A.1 il listato del procedimento iterativo LS-FR per un  $N_{cond}$  che non superi il valore 100.

```

108
109 N_cond = cond(F_linea);
110 string2= ['N° condizionamento iniziale: ', num2str(N_cond) ] ;
111 disp(string2);
112 disp(string3);
113 contatore_iterazioni = 0;
114
115 while N_col ~= RANGO_Flinea || N_cond > 100      %% CONDIZIONI SU RANGO e N° CONDIZIONAMENTO
116
117     contatore_iterazioni = contatore_iterazioni + 1; %% INIZIO CICLO ITERATIVO
118     N_col = N_col - 1;                               %% DECREMENTO N° COLONNE
119     string4= [ 'CICLO NUMERO ', num2str(contatore_iterazioni), ': '];
120     disp(string4);
121     F_linea = F_tilda(:,(1:N_col));                 %% AGGIORNAMENTO F_linea
122
123     RANGO_Flinea = rank(F_linea);                   %% NUOVO RANGO DI F_linea per il confronto iniziale
124     string5= [ ' - Rango di F linea: ', num2str(RANGO_Flinea)];
125     disp(string5);
126
127     N_cond = cond(F_linea);                         %% AGGIORNAMENTO DEL N° CONDIZIONAMENTO
128     string6= [ ' - Numero di condizionamento ', num2str(N_cond)];
129     disp(string6);
130     disp(string3);
131 end                                                %% FINE CICLO ITERATIVO
132

```

Figura A.1: Procedimento iterativo su  $N_{cond}$

## A.1 LS-FR IN RELAZIONE AL NUMERO DI CONDIZIONAMENTO

Vediamo ora due esempi (per i due canali visti prima) di come variano i risultati cambiando il numero di condizionamento presente nella procedura di Figura A.1.

- *ESEMPIO A) Canale 1:*

METODO(N° COND)	$\eta$ ( $\Gamma = 20$ dB)	$\eta$ ( $\Gamma = 10$ dB)	$\eta$ ( $\Gamma = 5$ dB)
LS-FR(100)	36.0	22.9	24.8
LS-FR-W-pruning(100)	12.5	12.9	11.7
LS-FR(1000)	29.1	18.9	15.9
LS-FR-W-pruning(1000)	12.7	13.9	12.8

Tabella A.1: Rapporto segnale-rumore di stima  $\eta$  in dB per i metodi di stima FR e FR-W-pruning con due valori del N° di condizionamento per il CANALE 1.

Notiamo che imponendo un numero di condizionamento di un ordine più alto, la stima peggiora, anche se rimane comunque molto buona per l'LS-FR; d'altro canto invece per il metodo LS-FR con aggiunta di finestatura e pruning, la stima resta comunque non molto buona anche se, in percentuale, rispetto all'ordine del  $N_{cond}$  più basso, peggiora meno, soprattutto per un  $\Gamma$  basso ( $\Gamma = 5$  dB): per  $N_{cond} = 100$  si ha un peggioramento del 53% sulla stima passando dal metodo LS-FR a LS-FR-W-pruning, mentre per  $N_{cond} = 1000$  si ha un peggioramento del 20% sulla stima passando da LS-FR a LS-FR-W-pruning.

- *ESEMPIO B) Canale 2:*

METODO(N° COND)	$\eta$ ( $\Gamma = 20$ dB)	$\eta$ ( $\Gamma = 10$ dB)	$\eta$ ( $\Gamma = 5$ dB)
LS-FR(100)	10.5	10.4	9.6
LS-FR-W-pruning(100)	8.4	8.5	9.3
LS-FR(1000)	15.3	14.0	11.7
LS-FR-W-pruning(1000)	9.8	9.5	9.6

Tabella A.2: Rapporto segnale-rumore di stima  $\eta$  in dB per i metodi di stima FR e FR-W-pruning con due valori del N° di condizionamento per il CANALE 2.

In questo caso un numero di condizionamento più alto migliora la stima. Infatti con il secondo canale si ha un tappo della risposta impulsiva con ritardo  $n = 11$ , e imponendo  $N_{cond} = 100$  si riduce la matrice  $F$  ad avere rango pieno 6, tagliando troppi tappi significativi di  $\hat{\mathbf{g}}_{LS-FR}$ , mentre per  $N_{cond} = 1000$  la matrice  $F$  ha rango pieno 9, quindi il numero di tappi della CIR tagliati vicino a  $n = 11$  è minore, e quindi si ha una stima migliore.

# Appendice B

## APPROFONDIMENTO DELL'ALGORITMO SVD

In algebra lineare, la decomposizione ai valori singolari (o Singular Value Decomposition) è una particolare fattorizzazione basata sull'uso di autovalori e autovettori, utilizzata per produrre un'approssimazione della matrice originaria con minor rango. La SVD ha numerose applicazioni nel campo dell'algebra lineare. Innanzitutto fornisce delle informazioni importanti sulla matrice  $\mathbf{A}$ , come il suo rango, qual è il suo nucleo e qual è la sua immagine. Viene usata per definire la pseudo-inversa di una matrice rettangolare utile per la risoluzione del problema dei minimi quadrati. Trova utilizzo anche nella risoluzione di sistema di equazioni lineari omogeneo. Un'altra importante applicazione riguarda l'approssimazione della matrice  $\mathbf{A}$ , con una di rango inferiore (SVD troncata), frequentemente utilizzata nell'elaborazione di immagini e segnali.

Data una matrice  $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{M \times N}$ , esiste una fattorizzazione della stessa nella forma

$$\mathbf{A} = \mathbf{U} \mathbf{\Sigma} \mathbf{V}^H \quad (\text{B.1})$$

dove:

- $\mathbf{U}$  è una matrice unitaria di dimensioni  $M \times M$ ;
- $\mathbf{\Sigma}$  è una matrice diagonale di dimensioni  $M \times N$ ;
- $\mathbf{V}^H$  è la trasposta coniugata di una matrice unitaria di dimensioni  $N \times N$ .

Tale fattorizzazione è indicata come fattorizzazione SVD completa. Gli elementi della diagonale di  $\mathbf{\Sigma}$  sono detti valori singolari di  $\mathbf{A}$  e hanno le proprietà:  $s_i \geq 0 \forall i$  e  $s_1 \geq s_2 \geq \dots \geq s_n$ .

Si può dimostrare che il rango della matrice  $\mathbf{A}$  è uguale a quello della matrice  $\mathbf{\Sigma}$ . In particolare si osserva che il rango di  $\mathbf{\Sigma}$  dipende dai valori singolari ed è uguale al numero di valori singolari diversi da zero.



# Bibliografia

- [1] O. Edfors, M. Sandell, J.-J. van de Beek, S.K. Wilson, P.O. Borjesson, "OFDM Channel Estimation by Singular Value Decomposition", *IEEE Transaction on Communications*, Vol. 46, pp. 931-939, No. 7, Luglio 1998.
- [2] Y. Kang, K. Kim, H. Park, "Efficient DFT-based channel estimation for OFDM systems on multipath channels", *IET Communications*, Vol. 1, pp. 197-202, No. 2, Aprile 2007.
- [3] M. Diallo, M. Héland, L. Cariou, R. Rabineau, "DFT Based Channel Estimation Methods for MIMO-OFDM Systems", in *Vehicular Technologies: Increasing Connectivity*, InTech, pp. 97-114, Aprile 2011.
- [4] D. Altolini, N. Benvenuto, S. Pupolin, R. Riva, "Preamble-based Channel Estimation in HomePlug AV Systems", *16th IEEE International Symposium on Power Line Communications and Its Applications (ISPLC)*, Beijing, China, Marzo 2012, pp. 176-181.