

**UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA**

*Dipartimento di Matematica "Tullio Levi-Civita"*

*Corso di Laurea Magistrale in Matematica*

# **Teoria degli Origami: analisi di una teoria assiomatica**

**Relatore:** Prof. Ciraulo Francesco

**Laureando:** Defina Francesco

**N. di matricola:** 1132003

Anno Accademico 2017 / 2018  
Sessione di laurea: 14 dicembre 2018



## Indice

<b>1</b>	<b>Storia degli Origami</b>	<b>4</b>
<b>2</b>	<b>Matematica degli Origami</b>	<b>5</b>
<b>I</b>	<b>La Teoria degli Origami</b>	<b>6</b>
<b>3</b>	<b>La struttura della Teoria degli Origami</b>	<b>6</b>
<b>4</b>	<b>Gli assiomi di Huzita-Justin-Hatori</b>	<b>7</b>
4.1	L'assioma O1 . . . . .	9
4.2	L'assioma O2 . . . . .	9
4.3	L'assioma O3 . . . . .	10
4.4	L'assioma O4 . . . . .	10
4.5	L'assioma O5 . . . . .	11
4.6	L'assioma O6 . . . . .	11
4.7	L'assioma O7 . . . . .	12
4.8	Riga e compasso . . . . .	13
<b>II</b>	<b>Analisi delle teorie assiomatiche</b>	<b>14</b>
<b>5</b>	<b>La geometria costruibile</b>	<b>14</b>
5.1	I punti costruibili . . . . .	14
5.2	I numeri costruibili . . . . .	15
5.3	Relazione tra punti e numeri costruibili . . . . .	15
<b>6</b>	<b>La Teoria di Talete</b>	<b>16</b>
6.1	La Geometria di Talete . . . . .	16
6.2	I numeri di Talete . . . . .	19
6.3	Caso $z = i$ e i poligoni costruibili . . . . .	25
<b>7</b>	<b>La Teoria di Pitagora</b>	<b>29</b>
7.1	La Geometria di Pitagora . . . . .	29
7.2	I numeri di Pitagora . . . . .	31
<b>8</b>	<b>La Teoria di Euclide</b>	<b>36</b>
8.1	La Geometria di Euclide . . . . .	36
8.2	I numeri di Euclide . . . . .	38
8.3	La dipendenza di alcuni assiomi . . . . .	40
<b>9</b>	<b>La Teoria degli Origami</b>	<b>42</b>
9.1	la Geometria degli Origami . . . . .	42
9.2	I numeri Origami . . . . .	43
9.2.1	Risoluzioni di equazioni di terzo grado . . . . .	43
9.3	Relazione con la geometria di Riga e Compasso . . . . .	49
9.3.1	Duplicazione del cubo . . . . .	49
9.3.2	Trisezione di un angolo . . . . .	49
9.4	Poligoni costruibili . . . . .	50
9.5	La dipendenza di alcuni assiomi . . . . .	51

<b>III Conclusione</b>	<b>53</b>
<b>10 Riassunto e possibili studi futuri</b>	<b>53</b>
<b>11 Oltre la teoria classica</b>	<b>54</b>
11.1 Teoria della doppia piega . . . . .	54
11.2 Origami piatti . . . . .	54
11.3 Origami circolari . . . . .	54

*"Esattamente come un foglio di carta  
che non ha ancora nessuna forma  
contiene già in sé tutte le pieghe necessarie  
alla realizzazione di un origami".  
dal libro "Il signor Origami"*

# Introduzione

Negli ultimi cinquant'anni la *Teoria degli Origami*, nota anche col nome di *Geometria della piegatura della carta* o *paper folding*, ha interessato un numero sempre crescente di studiosi, non solo tra i matematici, attirati dai diversi aspetti del problema, che vanno dallo studio puramente astratto e teorico all'applicazione ingegneristica.

Uno dei motivi principali di tale interesse è probabilmente determinato dal fatto che la geometria che scaturisce dal piegamento della carta si è dimostrata superiore persino alla geometria euclidea, consentendo la risoluzione di problemi, come la duplicazione del cubo e la trisezione dell'angolo, irrisolvibili con la geometria classica. La quasi totalità degli studi, oggi, si basa su una lista di sette istruzioni note in letteratura come "assiomi di Huzita-Justin" o "assiomi di Huzita-Hatori", i quali fissano le operazioni base realizzabili in questa geometria. Questo elenco di regole, tuttavia, non risulta essere un sistema di assiomi indipendenti, in quanto è ben noto che alcuni di questi postulati sono, in realtà, semplici conseguenze geometriche di altri.

Lo scopo principale di questo lavoro è quello di verificare le effettive indipendenze all'interno di questa lista di assiomi, analizzando in particolare le conseguenze geometriche di ogni singolo assioma.

La tesi, dopo una breve descrizione storica sull'arte degli origami e degli studi matematici relativi a tale ambito, si sviluppa in tre capitoli. Nel primo capitolo è descritta in dettaglio la Teoria degli Origami, e in particolare sono esposti in modo esplicito i sette assiomi di Huzita-Justin-Hatori, descrivendone le specifiche proprietà. In questo capitolo sono anche brevemente richiamati alcuni risultati noti riguardanti la geometria euclidea classica per un confronto, riportato nel capitolo 2, con gli approcci teorici sviluppati in questa tesi. Nel secondo capitolo, ricalcando in parte il lavoro di R. C. Alperin [1], sono analizzate quattro teorie assiomatiche ottenute considerando, di volta in volta, solo alcuni tra i sette assiomi. Queste analisi considerano sia le possibili costruzioni geometriche sia, immergendo il piano di lavoro nel piano dei numeri complessi, i possibili campi di numeri costruibili.

I risultati ottenuti dallo studio geometrico e da quello algebrico hanno, in particolare, consentito di verificare l'esistenza o meno di una dipendenza tra i diversi assiomi.

Nel capitolo finale sono riassunti i principali risultati raggiunti in questo lavoro di tesi e sono inoltre suggeriti alcuni degli aspetti che potrebbero essere meritevoli di approfondimenti e ulteriori sviluppi.

# 1 Storia degli Origami

Il termine *origami* deriva dai termini giapponesi *Ori* (= piegare) e *Kami* (= carta) e oggi indica l'arte di piegare la carta senza tagliarla o strapparla per creare modelli tridimensionali di oggetti reali, come ad esempio animali, fiori, barchette o scatole.

Nonostante nell'immaginario collettivo gli origami vengano spesso visti come un moderno passatempo per ragazzi, in realtà la tecnica degli origami ha radici piuttosto antiche, risalenti ai primi secoli dopo Cristo e aveva un significato prevalentemente religioso. Questo era dovuto probabilmente al fatto che quasi esclusivamente i monaci avevano materie e opportunità per fabbricare la carta, che era quindi un materiale costoso e legato ai rituali shintoisti e alle cerimonie formali. Solo a partire dal periodo Heian (714-1185 d.C.) si verificò un primo passaggio dall'uso prevalentemente religioso ad uno più profano. Sebbene la carta continuasse ad essere un materiale costoso, non solo i monaci e sacerdoti shintoisti ma anche gli appartenenti alla classe nobiliare ne entrarono in possesso. Naturalmente l'alto prezzo faceva sì che la carta venisse usata ancora in rare occasioni, come nel caso dei matrimoni tradizionali shintoisti in cui, durante una cerimonia augurale, era uso adornare le bottiglie di sake con farfalle di carta. Questi modelli, detti Mecho e Ocho, rispettivamente farfalla femminile per la sposa e maschile per lo sposo, sono probabilmente il primo modello di origami figurativo, da cui seguirono molti altri esempi di animali, insetti, fiori e altri soggetti naturali. Fu proprio in questo periodo che nacque il modello oggi forse più conosciuto al mondo, nonché simbolo internazionale dell'origami, la famosa gru considerata simbolo di lunga vita e prosperità. Successivamente ci fu l'inizio dell'era Kamakura (1185-1333), a cui fece seguito il periodo Muromachi (1333-1573), durante il quale ci fu un graduale declino dell'aristocrazia civile e un'ascesa di quella militare e della classe dei samurai. Fu in questo periodo che nacque in Giappone l'uso di accompagnare particolari doni con specifici origami augurali. L'origami tsuki ad esempio era un modello di carta piegata che accompagnava un regalo di valore e serviva per attestarne l'autenticità, mentre il noshi veniva consegnato insieme al regalo come portafortuna.

Con il periodo Edo (1603-1868), in Giappone la carta era finalmente alla portata di tutti, e l'invenzione della stampa permise la pubblicazione dei primi libri sugli origami aumentando la diffusione. La tecnica origami iniziò quindi a svilupparsi anche all'interno della classe popolare, dove la gente iniziò ad usare la carta per creare piccole scatole per offrire doni, cartoline augurali o semplici modellini specifici per alcune feste tipiche. Nel 1764 fu stampato il primo libro contenente le istruzioni per 13 modelli cerimoniali e successivamente, nel 1797, la prima raccolta di origami a carattere ricreativo.

Fu con la fine del periodo Edo e l'inizio di quel periodo storico noto come rinnovamento Meiji, che iniziarono gli scambi economici e culturali tra il Giappone, fino a quel momento quasi completamente isolato, e l'Occidente, e tali scambi permisero la diffusione dell'arte degli origami anche all'estero. In Europa in un primo momento gli artisti origami furono considerati al pari dei prestigiatori tanto era lo stupore per questa forma d'arte, ma ben presto l'origami divenne un passatempo alla moda e particolarmente apprezzato da tutti i ceti sociali. In Germania il pedagogo Friedrich Fröbel, noto per aver fondato i primi giardini d'infanzia al mondo, intuì le proprietà geometriche-didattiche degli origami, inserendoli nel suo progetto educativo, e quando questi asili iniziarono a svilupparsi anche in Oriente, il Giappone introdusse l'uso del pratico foglio quadrato che funge oggi da base di partenza per la maggior parte dei progetti origami.

Nella seconda metà del secolo scorso l'arte degli origami era ormai largamente diffusa sia in Europa che in America dove vennero fondate diverse associazioni di appassionati e pubblicati numerosi libri con inediti progetti e dove ancora oggi sono all'opera una gran quantità di rinomati artisti origami.

## 2 Matematica degli Origami

La piegatura della carta fu probabilmente usata in ambito geometrico già a partire dal 1600, sebbene il primo riferimento scritto sembra sia da attribuire a Rouse Ball che in un suo libro del 1883, [5], racconta di una dimostrazione riguardante la somma degli angoli interni di un triangolo ottenuta con tale metodo due secoli prima da Blaise Pascal, e a sua volta aggiunge una sua elegante dimostrazione del medesimo teorema. Sebbene Ball non si occupò mai in modo serio di lavorare con le piegature della carta, e forse non era nemmeno a conoscenza dell'arte giapponese degli origami, nel suo libro si possono trovare per la prima volta i termini *ripiegare*, *sovrapporre*, *piega* all'interno di una dimostrazione di geometria.

Il primo studio completamente dedicato alla geometria delle pieghe sembra essere stato quello di Sundara Row, un insegnante di matematica indiano, che nel 1893 scrisse il libro *Geometric Exercises in Paper Folding* per i suoi studenti che non avevano mai visto un compasso. Il libro ebbe un grande successo, tanto che l'anno successivo fu citato da Felix Klein in un suo testo sulla geometria elementare, e spinse diversi matematici europei ad occuparsi di geometria piegando la carta.

Un importantissimo contributo fu dato da Margherita Beloch Piazzolla, una professoressa di geometria di Ferrara, che negli anni '30 portò avanti uno studio basato sul lavoro di Eduard Lill, dimostrando la possibilità di risolvere le equazioni polinomiali fino al terzo grado con l'uso della piegatura della carta.

Nei primi decenni del '900 furono scoperte diverse costruzioni interessanti come ad esempio l'involuppo di circonferenze, parabole ed ellissi tramite pieghe, tuttavia mancava ancora un'assiomatizzazione che regolasse e riordinasse questa teoria nata da poco.

Nel 1941 fu Robert Carl Yates che provò a formalizzare questa teoria definendo tre assiomi di costruibilità, tuttavia successivamente si capì che i suoi tre assiomi non erano sufficienti per descrivere una teoria sulla piegatura della carta soddisfacente.

Nel 1985 fu stilata da Humiaki Huzita una lista di sei assiomi, poi completata con un settimo ad opera di Justin, ancora oggi maggiormente utilizzati e di cui si parlerà nello specifico nel prossimo capitolo. È probabilmente nei testi di Huzita che il termine *paper folding* inizia ad essere accostato al termine nipponico *origami* e viene dato il via a quella che viene oggi considerata la Teoria assiomatica degli Origami.



## Capitolo I

# La Teoria degli Origami

### 3 La struttura della Teoria degli Origami

La Teoria degli Origami nasce quindi come teoria per cercare di descrivere in modo matematico - geometrico le possibili strutture costruibili tramite la tecnica del piegamento della carta.

Negli origami moderni si parte da un foglio di carta quadrato, di dimensione variabile a seconda del progetto, e si modella sovrapponendo punti o linee del foglio, creando in questo modo una piega che va a modificare la struttura di partenza.

Per eliminare i problemi legati allo spazio ristretto si preferisce, nel modello matematico, considerare tutto il piano euclideo.

La teoria degli origami quindi lavora all'interno del piano euclideo stesso; in particolare i concetti primitivi di punto, retta e piano rimarranno ancora validi, così come le relazioni di appartenenza e tutti i concetti derivati tra i quali, ad esempio, le diverse figure geometriche, le nozioni di angolo, di segmento o di parallelismo tra rette.

Come è uso comune, i punti, le rette e gli angoli verranno indicati rispettivamente con lettere maiuscole, lettere minuscole e lettere greche.

Questa teoria tuttavia rappresenta una geometria di carattere costruttivo per cui si concentrerà su due nuovi elementi geometrici, quelli di **piega costruibile** e **punto costruibile**; tali elementi verranno definiti in maniera ricorsiva, a partire da un certo insieme di punti di base preesistenti.

In un origami una piega è un segmento ottenuto sovrapponendo tra loro due elementi già costruiti: due punti, due segmenti, o un punto e un segmento.

In modo simile, in questa teoria una piega costruibile sarà una retta ottenuta riflettendo un determinato elemento già costruito in modo che la sua immagine si sovrapponga ad un altro elemento preesistente.

Si può pensare ad una piega come alla retta ottenuta piegando concretamente un semipiano sull'altro facendo combaciare tra loro due elementi costruibili, ad esempio due punti, e poi riaprendolo in modo da ritornare a lavorare su uno spazio bidimensionale.

Una piega è quindi una retta che riflette un semipiano rispetto all'altro e viceversa, tale che almeno due elementi costruibili, appartenenti ai due semipiani, coincidano.

Da un punto di vista matematico una piega determina quindi una riflessione  $\mathcal{F}$  sul piano, tale che esistono due elementi costruibili  $e_1$  ed  $e_2$ , punti o rette, che vengono riflessi uno sull'altro. Essendo la riflessione una trasformazione simmetrica e involutiva diremo generalmente che i due elementi  $e_1$  ed  $e_2$  sono sovrapposti tramite  $\mathcal{F}$ , e lo indicheremo con  $\mathcal{F}(e_1) \longleftrightarrow e_2$  o, equivalentemente,  $\mathcal{F}(e_2) \longleftrightarrow e_1$ .

Nel prossimo paragrafo si vedranno tutti i modi per creare una nuova piega.

All'interno della tesi verranno usati i termini *pieghe* o *rette costruibili* in modo indistinto.

I punti costruibili invece, oltre a quelli di base che sono già esistenti, si ottengono esclusivamente dalle intersezioni tra pieghe costruibili.

Ogni nuova piega, quindi, aggiunge all'insieme degli elementi già costruibili una nuova retta e tutti i punti ottenuti dalla sua intersezione con le rette costruibili già esistenti.

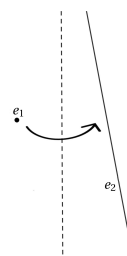


Figura 1:  $\mathcal{F}(e_1) \longleftrightarrow e_2$

## 4 Gli assiomi di Huzita-Justin-Hatori

Nonostante ci siano riferimenti alle prime idee di studiare gli origami da un punto di vista geometrico e matematico già a partire dal 1800, la principale svolta che portò all'esaltazione di questa teoria fu l'assiomatizzazione ad opera di Humiaki Huzita verso la fine del secolo scorso.

Huzita, un matematico italo-giapponese, nel 1985 con l'articolo "*La recente concezione matematica dell'origami-trisezione dell'angolo*", formula sei operazioni origami conosciute come "Huzita Axioms" (HAs). Gli HAs costituiscono una lista di sei pieghe elementari che sono costruibili a partire da altre pieghe o punti preesistenti.

Il lavoro di Huzita fu preso come fonte di ispirazione da numerosi matematici che negli anni seguenti cercarono di apportare continui miglioramenti allo studio degli origami.

Nello stesso periodo il matematico francese Jacques Justin condusse lavori analoghi a quelli di Huzita, e nel 1986 pubblicò l'articolo *Résolution par le pliage de l'équation du troisième degré et applications géométriques* in cui proponeva l'introduzione di sette costruzioni origami, le prime sei molto simili agli assiomi di Huzita, mentre la settima risultava essere innovativa.

Purtroppo il suo lavoro, forse per il fatto di essere stato pubblicato in francese, passò quasi inosservato e solo nel 2001, quando l'artista origami giapponese Koshiro Hatori riscoprì questa settima operazione, essa venne aggregata agli altri sei assiomi.

Queste sette operazioni sono quindi note in letteratura coi nomi di assiomi di Huzita-Justin o Huzita-Hatori; in questa tesi verranno denominati assiomi di Huzita-Justin-Hatori e abbreviati con H-J-H.

Per quanto in quasi tutti gli articoli riguardanti questa teoria assiomatica risulta ben chiaro il fatto che questi assiomi non siano tutti tra loro indipendenti, non vi è ancora uno studio completo che chiarisca i rapporti di dipendenza.

In questi ultimi decenni infatti si è prestata attenzione soprattutto allo studio di ciò che risulta costruibile con gli assiomi di H-J-H, concentrandosi maggiormente sull'aspetto divulgativo e geometrico innovativo di questa teoria, tralasciando una corretta formalizzazione. Solo un articolo di R. C. Alperin, *A Mathematical Theory of Origami Constructions and Numbers*, cerca di intraprendere questa strada, evidenziando le relazioni di indipendenza che sono presenti tra alcuni assiomi, senza tuttavia lavorare sulle relazioni di dipendenza e/o equivalenza tra di essi.

In questa tesi seguiremo in parte il percorso di Alperin, cercando di completare questo lavoro di analisi assiomatica.

Nonostante la situazione della dipendenza tra gli assiomi sia ancora aperta, nel 2009 Alperin e il fisico americano e artista origami R. J. Lang dimostrarono nel loro articolo *One-, Two-, and Multi-fold Origami Axioms* che la lista dei sette assiomi H-J-H è completa, ovvero che non esistono altre costruzioni base indipendenti per poter costruire un origami. Il metodo adoperato per dimostrare la completezza si basa sull'idea, già adoperata parzialmente da Huzita e Justin, di analizzare tutti i possibili abbinamenti tra gli oggetti della geometria degli origami, ovvero tra punti e pieghe.

Le cinque coppie di elementi sovrapponibili sono:

$\mathcal{F}(P_1) \longleftrightarrow P_2$	$\mathcal{F}(P) \longleftrightarrow P$	$\mathcal{F}(r_1) \longleftrightarrow r_2$	$\mathcal{F}(r) \longleftrightarrow r$	$\mathcal{F}(P) \longleftrightarrow r$
--	--	--	--	--

Una generica nuova piega da un punto di vista analitico sarà una retta  $y = mx + q$ , dove  $m$  e  $q$  sono i parametri necessari per determinarla, quindi ogni nuova piega avrà due gradi di libertà.

L'allineamento  $\mathcal{F}(P_1) \longleftrightarrow P_2$ , con  $P_i = (x_i, y_i)$  due punti distinti, fornisce due equazioni che, con un piccolo abuso di linguaggio, sono  $\mathcal{F}(x_1) = x_2$  e  $\mathcal{F}(y_1) = y_2$ .

Analoga situazione accade nella sovrapposizione  $\mathcal{F}(r_1) \longleftrightarrow r_2$ , in cui le due rette distinte  $r_i : y = m_i x + q_i$  determinano le equazioni  $\mathcal{F}(m_1) = m_2$  e  $\mathcal{F}(q_1) = q_2$ . Questi due allineamenti presi singolarmente sono quindi sufficienti a generare una nuova piega, e infatti corrispondono rispettivamente all'assioma O2 e O3 di H-J-H.

Il quinto allineamento invece,  $\mathcal{F}(P) \longleftrightarrow r$ , con  $P = (x_0, y_0)$  e  $r : y = m_0 x + q_0$ , fornisce un'unica equazione  $\mathcal{F}(y_0) = m_0 \mathcal{F}(x_0) + q_0$ .

In quest'ultimo caso, come nei due casi in cui rispettivamente un punto e una retta vengono riflessi su sé stessi, sarà soddisfatto solo uno dei due gradi di libertà, e quindi presi singolarmente non determineranno una piega.

Per soddisfare ai due gradi di libertà necessari per determinare una piega, quindi, è necessario accoppiare due sovrapposizioni di questo genere.

Nella tabella seguente si possono vedere tutti gli allineamenti possibili di questo tipo, e gli assiomi di H-J-H corrispondenti.

	$\mathcal{F}(P_1) \longleftrightarrow P_1$	$\mathcal{F}(P_1) \longleftrightarrow r_1$	$\mathcal{F}(r_1) \longleftrightarrow r_1$
$\mathcal{F}(P_2) \longleftrightarrow P_2$	O1	O5	O4
$\mathcal{F}(P_2) \longleftrightarrow r_2$	O5	O6	O7
$\mathcal{F}(r_2) \longleftrightarrow r_2$	O4	O7	×

Il caso  $\mathcal{F}(r_i) \longleftrightarrow r_i \quad i = 1, 2$  non corrisponde a nessun assioma in quanto una tale piega potrebbe esistere solo se  $r_1 \parallel r_2$ , ma in tale situazione i due coefficienti angolari coinciderebbero e questo non permetterebbe di identificare con esattezza la piega.

Nei prossimi sottoparagrafi verrà data una definizione e sarà fornita una prima analisi di ciascuno dei 7 assiomi di H-J-H.

È bene notare che, per quanto in letteratura vengano sempre ricordati con lo stesso nome, spesso gli assiomi di H-J-H presentano piccole differenze nella formalizzazione a seconda dell'autore. Non è raro infatti che nell'enunciazione di un assioma un autore preferisca una formulazione più analitica piuttosto che una più geometrica, o che vengano richieste alcune condizioni più specifiche come ad esempio il non parallelismo delle rette di partenza, il fatto che due punti siano distinti o il fatto che un punto appartenga o meno alla retta considerata.

In questo lavoro si cercherà di prediligere l'aspetto geometrico-costruttivo degli assiomi, per rimanere fedeli il più possibile all'aspetto concreto degli origami.

Per questo motivo, ad esempio, il concetto di punto riflesso su sé stesso verrà sostituito dal fatto che la nuova piega passi per il punto in questione, mentre l'idea della retta riflessa su sé stessa lascerà il posto al fatto che sia perpendicolare alla retta di partenza; si noti che una retta potrebbe essere riflessa su sé stessa anche considerando sé stessa come piega, e quindi essendo una retta di punti uniti, ma questo caso non aggiunge alcuna nuova piega alla geometria preesistente e quindi non sarà considerato.

## 4.1 L'assioma O1

L'assioma O1 di H-J-H afferma che:

*O1* Dati due punti  $P$  e  $Q$  costruibili,  $P \neq Q$ , la piega che passa per entrambi è costruibile.

La piega in questione è la retta che si è soliti chiamare  $PQ$ .

Questo assioma, insieme a O2, è uno dei due assiomi fondamentali per le costruzioni degli origami in quanto necessita esclusivamente di una coppia di punti, e i punti sono stati scelti come elementi basilari della teoria.

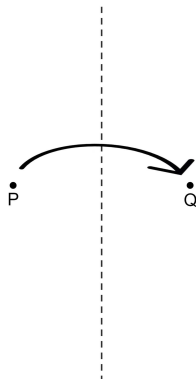
È da notare che O1 non è solo un assioma di esistenza ma anche di unicità, in quanto la retta passante per due punti risulta essere unica nella geometria euclidea, e che l'unica condizione da rispettare è che i due punti siano distinti.



## 4.2 L'assioma O2

L'assioma O2 di H-J-H afferma che:

*O2* Dati due punti  $P$  e  $Q$  costruibili,  $P \neq Q$ , la piega che riflette  $P$  su  $Q$  è costruibile.



La piega in questione è l'asse del segmento  $\overline{PQ}$ .

Come nel caso precedente, anche O2 è un assioma di esistenza e unicità, e l'unica condizione da rispettare è che i due punti siano distinti.

O1 e O2 risultano essere i due assiomi più importanti, e verranno inseriti in ogni sotto-teoria degli origami analizzata in questa tesi.

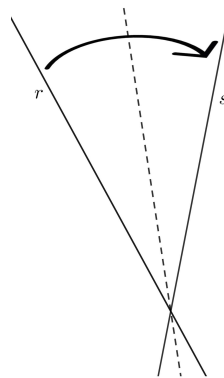
### 4.3 L'assioma O3

L'assioma O3 di H-J-H afferma che:

O3 *Date due rette  $r$  e  $s$  costruibili,  $r \neq s$ , una piega che riflette  $r$  su  $s$  è costruibile.*

Questo assioma ha due risvolti geometrici a seconda della posizione reciproca delle rette. Se  $r \nparallel s$  questo assioma permette di costruire le due bisettrici degli angoli formati da queste due rette nel loro punto di incidenza. Nelle dimostrazioni verrà ommesso di specificare quale delle due bisettrici si intende costruire applicando l'assioma O3 ogni volta che sarà chiaro dal contesto.

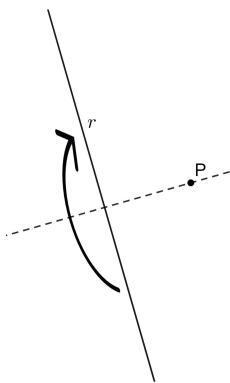
Se invece  $r \parallel s$  l'assioma permetterà la costruzione di un'unica piega, che risulterà essere la retta parallela a  $r$  e  $s$  ed equidistante da entrambe.



### 4.4 L'assioma O4

L'assioma O4 di H-J-H afferma che:

O4 *Dati un punto costruibile  $P$  e una retta costruibile  $r$ , la piega passante per  $P$  e perpendicolare alla retta  $r$  è costruibile.*



Si noti che non viene specificato se il punto  $P$  appartenga o meno alla retta  $r$ .

In entrambi i casi questo assioma genera un'unica retta, ovvero la retta che passa per  $P$  e che riflette  $r$  su sé stessa, ma non puntualmente, cioè è perpendicolare ad  $r$ .

In particolare la retta  $r$  avrà un unico punto fisso, che coincide con l'intersezione tra la nuova piega e  $r$  stessa, e che viene generalmente indicato come la proiezione ortogonale di  $P$  su  $r$ .

Anche l'assioma O4 si dimostra quindi essere un assioma di esistenza e unicità.

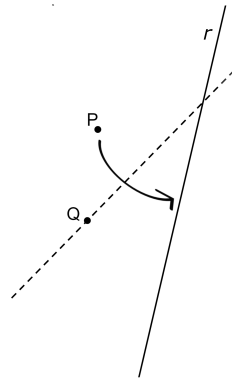
## 4.5 L'assioma O5

L'assioma O5 di H-J-H afferma che:

*O5* Data una retta costruibile  $r$  e due punti costruibili  $P$  e  $Q$ , se esiste una piega passante per  $Q$  e che riflette  $P$  su  $r$ , allora essa è costruibile.

Innanzitutto si noti che il caso in cui  $P$  appartenga a  $r$  risulta equivalente all'assioma O4. Si consideri il caso in cui  $P$  non appartiene ad  $r$ ; da un punto di vista geometrico la nuova piega che si costruisce con questo assioma non è altro che l'asse di un qualche segmento  $PP'$ , dove  $P'$  è un punto appartenente alla retta  $r$ , tale che  $Q$  giaccia su questo asse.

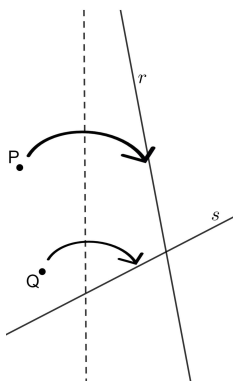
Per un noto fatto geometrico questa piega corrisponde alla retta passante per  $Q$  e tangente alla parabola di fuoco  $P$  e direttrice  $r$ . Per questo motivo da questo assioma si potranno ottenere 0, 1 o 2 nuove pieghe a seconda della posizione reciproca di  $P, Q$  e  $r$ . Nello specifico si avranno 0, 1 o 2 pieghe se  $Q$  giacerà rispettivamente dentro, sopra o fuori dalla parabola in questione, ovvero se  $|PQ| \lesseqgtr d(Q, r)$ .



## 4.6 L'assioma O6

L'assioma O6 di H-J-H afferma che:

*O6* Dati due punti costruibili  $P$  e  $Q$ , con  $P \neq Q$ , e due rette costruibili  $r$  e  $s$ , se esiste una piega che riflette  $P$  su  $r$  e  $Q$  su  $s$  allora essa è costruibile.



Questo assioma ricorda in parte l'assioma O5 e ha una conseguenza geometrica simile.

In questo caso però una piega che si potrà costruire sarà tangente contemporaneamente a ben due parabole, una di fuoco  $P$  e direttrice  $r$  e l'altra di fuoco  $Q$  e direttrice  $s$ .

Per motivi geometrici, le tangenti comuni a due parabole possono essere 0, 1, 2 o 3 a seconda delle relative posizioni.

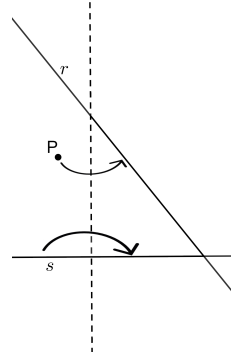
## 4.7 L'assioma O7

L'assioma O7 di H-J-H afferma che:

*O7 Dato un punto costruibile  $P$  e due rette costruibili  $r$  e  $s$ , se esiste una piega perpendicolare a  $s$  e che riflette  $P$  su  $r$ , allora essa è costruibile.*

Innanzitutto si noti che, nel caso in cui  $r \parallel s$ , l'unica possibilità perché esista una retta che soddisfi le ipotesi dell'assioma è che  $P$  appartenga alla retta  $r$ ; in questo caso la piega che si va a formare è esattamente la retta per  $P$  e ortogonale alle due rette  $r$  e  $s$ .

Se invece le due rette non sono parallele, questo assioma permette sempre di costruire una e una sola nuova piega.



## 4.8 Riga e compasso

Quando si studia una geometria così simile alla geometria Euclidea classica, non si può non fare confronti con le costruzioni con riga e compasso.

La geometria di riga e compasso è rappresentata dall'insieme di tutte le costruzioni creabili a partire da un certo numero di punti e righe di partenza e utilizzando come strumenti esclusivamente una riga, da considerare non numerata e in grado di prolungare infinitamente un segmento, e un compasso a molla, in grado di creare dati due punti una circonferenza ma non di mantenere una certa apertura una volta staccato dal piano.

In questo paragrafo saranno riportati alcuni risultati noti che torneranno utili in seguito, sorvolando sulle dimostrazioni reperibili in molti libri di geometria o di algebra.

**Teorema 4.1 (Gauss-Wantzel 1796).** *Un poligono regolare di  $n$  lati, con  $n$  maggiore di due, è costruibile con riga e compasso se e solo se  $n = 2^a p_0 p_1 \cdots p_s$  con  $a, s \in \mathbb{N}$  e  $p_i$  numeri di Fermat distinti, ovvero numeri della forma  $p_i = 2^{2^i} + 1$  per  $i = 0, \dots, s$ .*

Secondo questo teorema quindi sono costruibili ad esempio triangoli, pentagoni, esagoni e ottagoni, ma non ettagoni o ennagoni regolari.

Altro teorema fondamentale riguarda la caratterizzazione dei numeri costruibili con riga e compasso.

**Teorema 4.2.** *Un numero reale  $x$  è costruibile con riga e compasso, a partire da un sottocampo di numeri complessi  $K_0$ , se e solo se esiste una catena di campi  $K_0 < K_1 < \cdots < K_n$  dove  $x \in K_n$  e  $[K_{i+1} : K_i] = 2$  e  $K_i$  sono sottocampi di numeri complessi per  $i = 0, \dots, n-1$ .*

**Corollario 4.1.** *I numeri costruibili con riga e compasso formano il più piccolo sottocampo dei numeri complessi chiuso per coniugazione e per l'operazione  $a \mapsto \sqrt{a}$ .*



## Capitolo II

# Analisi delle teorie assiomatiche

## 5 La geometria costruibile

### 5.1 I punti costruibili

Sia  $\mathcal{T}$  una **teoria assiomatica origami**, ovvero una teoria formata a partire da tre punti  $X$ ,  $Y$  e  $Z$  non tutti allineati e regolata dall'insieme di assiomi  $\mathcal{S}$  tale che  $O1, O2 \in \mathcal{S}$  e  $\mathcal{S} \subseteq \{O1, O2, O3, O4, O5, O6, O7\}$ .

I punti  $X, Y$  e  $Z$  sono chiamati **punti originali** per la teoria  $\mathcal{T}$ .

Un elemento, punto o retta, è detto **elemento costruibile** per la teoria  $\mathcal{T}$  se è uno dei punti originali o esiste una successione finita di operazioni  $e_0 \cdot e_1 \cdots e_n$  tali che:

- $e_0$  è l'applicazione di uno degli assiomi in  $\mathcal{S}$  sull'insieme dei tre punti originali  $X$ ,  $Y$  e  $Z$ .
- $e_i$  è l'applicazione di uno degli assiomi in  $\mathcal{S}$  sull'insieme degli elementi costruibili dalla sequenza  $e_0 \cdot e_1 \cdots e_{i-1} \quad \forall i = 1 \dots n$ .
- $e_n$  è l'applicazione di un assioma in  $\mathcal{S}$  che crea l'elemento in questione.

I due seguenti lemmi torneranno piuttosto utili nei prossimi capitoli.

**Lemma 5.1.** *Per ogni punto di  $\mathcal{T}$  passano almeno due rette costruibili in  $\mathcal{T}$ .*

*Dimostrazione.* Per quanto riguarda i tre punti di partenza  $X, Y$  e  $Z$  è sufficiente notare che per ciascuno passano esattamente due tra le rette  $XY$ ,  $YZ$  e  $XZ$  creabili grazie a  $O1$ . Ogni altro punto costruibile è invece intersezione di due rette costruibili per definizione.  $\square$

**Lemma 5.2.** *Ogni retta costruibile in  $\mathcal{T}$  passa per almeno due punti costruibili in  $\mathcal{T}$ .*

*Dimostrazione.* Per come è stata definita la teoria  $\mathcal{T}$  si possono sempre costruire la retta  $XY$  e l'asse del segmento  $\overline{XY}$  che sono tra loro perpendicolari. Ogni retta costruibile in  $\mathcal{T}$  che non sia parallela o perpendicolare a  $XY$  incontra quindi queste due rette in due punti che diventano per definizione costruibili.

Sia ora  $l$  una retta parallela a  $\overline{XY}$  o al suo asse. Analogamente a come fatto con  $X$  e  $Y$  si costruiscono retta e asse del segmento  $\overline{YZ}$ ; poiché per definizione  $Z$  non giace sulla retta  $XY$ , la retta  $l$  intersecherà almeno due tra le rette  $XY$ ,  $YZ$  e i due assi di  $\overline{XY}$  e  $\overline{YZ}$ .  $\square$

## 5.2 I numeri costruibili

Un modo molto utile per studiare la quantità di geometria prodotta da una teoria assiomatica di carattere geometrico è quello di introdurre un insieme di numeri "costruibili" grazie a tali assiomi.

In questo modo si riescono ad utilizzare, in aggiunta ai metodi geometrici, metodi algebrici, in particolare utilizzando la teoria di Galois e le estensioni dei campi.

Considerando il piano su cui si lavora come il piano dei numeri complessi possiamo prendere, senza perdita di generalità, i punti  $X$  e  $Y$  in corrispondenza dei due numeri complessi  $0$  e  $1$ ; in questo modo il terzo punto,  $Z$ , che per scelta non era allineato con gli altri due, corrisponderà ad un certo numero  $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ .

In modo altrettanto canonico si può considerare la retta  $XY$  come l'asse dei numeri reali, mentre la retta perpendicolare a  $XY$  e passante per  $X$  sarà l'asse dei numeri immaginari. Sia definito l'insieme dei **numeri costruibili** nella teoria  $\mathfrak{T}$  come il sottoinsieme  $\Pi[z] \subseteq \mathbb{C}$  i cui elementi corrispondono ai punti costruibili nella teoria  $\mathfrak{T}$ .

Per definizione quindi  $0, 1, z \in \Pi[z]$ .

Si darà particolare risalto al caso in cui  $z = i$  che rappresenta il caso più simile a ciò che avviene concretamente nella creazione di un origami.

Per semplicità a volte verrà scritto solo  $\Pi$  al posto di  $\Pi[z]$  e inoltre, quando sarà chiaro in quale teoria si sta lavorando, si parlerà solo di punti e numeri costruibili.

## 5.3 Relazione tra punti e numeri costruibili

Come già accennato l'introduzione dei numeri costruibili ci fornisce un metodo aggiuntivo per studiare e confrontare tra loro due teorie.

Date due teorie geometriche  $\mathfrak{T}_1$  e  $\mathfrak{T}_2$  come quella introdotta nei paragrafi precedenti, esse saranno **equivalenti**, e saranno indicate con  $\mathfrak{T}_1 \equiv \mathfrak{T}_2$ , se ogni elemento, punto o retta, costruibile in  $\mathfrak{T}_1$  sarà anche costruibile in  $\mathfrak{T}_2$  e viceversa.

Naturalmente se  $\mathfrak{T}_1 \equiv \mathfrak{T}_2$  segue immediatamente che anche l'insieme dei numeri costruibili  $\Pi_1 \equiv \Pi_2$ ; quindi più in generale se due teorie avranno insiemi di numeri costruibili diversi, sarà chiaro che anche le due teorie saranno diverse.

L'implicazione inversa non sembra altrettanto immediata in quanto avere lo stesso insieme di numeri costruibili garantisce solo l'equivalenza tra i due insiemi dei punti costruibili, senza dire nulla di immediato sulle rette che le due teorie possono costruire.

Tuttavia grazie al lemma 5.2 dimostrato in precedenza, che ci garantiva che ogni retta costruibile ha almeno due punti costruibili, e al fatto che ognuno di queste teorie possiede l'assioma  $O1$  che permette di costruire una retta dati i due punti, possiamo affermare anche il viceversa.

Si ha quindi che:

**Proposizione 5.1.** *Date due teorie geometriche origami  $\mathfrak{T}_1$  e  $\mathfrak{T}_2$*

$$\mathfrak{T}_1 \equiv \mathfrak{T}_2 \Leftrightarrow \Pi_1 \equiv \Pi_2$$

*Dimostrazione.* Per la discussione precedente. □

## 6 La Teoria di Talete

Rifacendosi all'articolo di Alperin [1], si è deciso di chiamare **Teoria di Talete**, che in questo paragrafo sarà indicata con  $\mathfrak{T}$ , la teoria provvista di tre punti non tutti allineati e osservante i soli assiomi  $O1$  e  $O2$ .

La geometria che seguirà da questa teoria sarà chiamata **Geometria di Talete**.

### 6.1 La Geometria di Talete

Per prima cosa saranno introdotte alcune costruzioni geometriche di base che saranno fondamentali per le successive dimostrazioni.

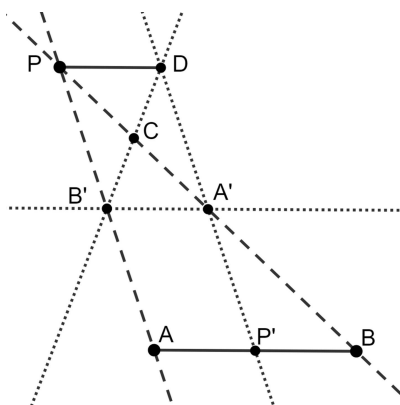
**Lemma 6.1.** *Il punto medio tra due punti costruibili è sempre costruibile.*

*Dimostrazione.* È sufficiente applicare ai due punti costruibili entrambi gli assiomi  $O1$  e  $O2$ ; così facendo si crea la retta per i due punti e l'asse del segmento, la cui intersezione è proprio il punto medio.

□

**Lemma 6.2.** *Dato un punto  $P$  e un segmento  $\overline{AB}$  è possibile costruire un segmento parallelo e con la stessa lunghezza e orientamento di  $\overline{AB}$  e di cui  $P$  occupa uno dei due estremi.*

*Dimostrazione.* Ipotizziamo che  $P$  non stia sulla retta  $AB$ . Utilizzando l'assioma  $O1$  si può costruire il triangolo  $ABP$  e grazie all'assioma  $O2$  è possibile individuare i punti medi  $A'$ ,  $B'$ , e  $P'$  dei tre lati come in figura. In particolare i segmenti  $\overline{A'B'}$  e  $\overline{A'P'}$  risultano congruenti e paralleli rispettivamente ai segmenti  $\overline{AP}$  e  $\overline{AB}$ .



Dopo aver costruito il punto medio  $C$  del segmento  $\overline{A'P'}$ , si possono tracciare le due rette  $B'C$  e  $A'P'$  che si incrociano nel nuovo punto  $D$ . I due triangoli  $\overline{A'DC}$  e  $\overline{B'CP}$  sono congruenti in quanto  $\overline{A'C} = \overline{CP}$ ,  $\widehat{CA'D} \cong \widehat{B'PC}$  e  $\widehat{A'DC} \cong \widehat{PB'C}$ . Ne consegue che il segmento  $\overline{DP}$  è congruente e parallelo al segmento  $\overline{AB}$  e quindi a metà di  $\overline{AP}$ .

Ripetendo la stessa costruzione considerando questa volta il punto  $D$  al posto del punto  $P$ , si ottiene il segmento desiderato.

La dimostrazione nel caso in cui si vuole che nel segmento traslato  $P$  coincida con la traslazione di  $B$  è del tutto analoga.

Nel caso in cui il punto  $P$  sia sulla retta  $AB$  è sufficiente traslare prima  $\overline{AB}$  su di un punto non appartenente alla sua retta, e successivamente traslarlo su  $P$ .

□

Questo semplice lemma permette quindi di traslare un segmento su un qualsiasi punto precedentemente costruito. Questa costruzione sarà utilissima in quanto consente di trasportare parallelamente una direzione necessitando esclusivamente di un punto costruibile a cui applicarla.

**Corollario 6.1.** *Dati un punto  $P$  e una retta  $l$  è possibile costruire una retta passante per  $P$  e parallela ad  $l$ .*

*Dimostrazione.* Si è visto nel lemma 5.2 che ogni retta costruibile ha almeno due punti costruibili; siano  $A$  e  $B$  due punti costruibili della retta  $l$ .

Per il lemma precedente è possibile traslare il segmento  $\overline{AB}$  sul punto  $P$  e, applicando l'assioma  $O1$  agli estremi del nuovo segmento, ottenere la retta desiderata. □

**Corollario 6.2.** *Dati un punto  $P$  e una retta  $l$  è possibile costruire una retta passante per  $P$  e perpendicolare ad  $l$ .*

*Dimostrazione.* Come nella dimostrazione precedente siano  $A$  e  $B$  due punti costruibili della retta  $l$ .

Per il lemma 6.2 è possibile traslare due volte il segmento  $\overline{AB}$  sul punto  $P$  in modo tale che  $P$  sia il punto medio di un nuovo segmento  $\overline{A'B'}$  parallelo (e lungo il doppio) ad  $\overline{AB}$ .

Usando l'assioma  $O2$  sui punti  $A'$  e  $B'$  ottengo la retta richiesta. □

Si noti che questo corollario corrisponde esattamente a quello che Huzita chiama assioma  $O4$ . Già da questo primo caso si capisce quindi che  $O1, \dots, O7$  non sono tutti assiomi indipendenti tra loro.

**Corollario 6.3.** *Dato un punto costruibile  $P$  e due rette costruibili  $r$  e  $s$  non parallele, allora è possibile costruire una piega perpendicolare a  $s$  e che riflette  $P$  su  $r$ .*

*Dimostrazione.* Per il corollario 6.1 è possibile tracciare una retta  $s'$  che sia parallela ad  $s$  e passante per  $P$ ; tale retta intersecherà  $r$  in un punto costruibile  $Q$ . Allora per il lemma 6.1 e il corollario 6.2 è possibile costruire una piega passante per il punto medio del segmento  $\overline{PQ}$  e perpendicolare alla retta  $s$  che sarà quindi la retta cercata. □

Anche questo corollario corrisponde ad uno degli assiomi di Huzita-Justin-Hatori, quello denominato  $O7$ .

Per motivi storici si continuerà in questa tesi a chiamare assiomi sia  $O4$  che  $O7$ , pur rendendoci conto che si tratta di proposizioni derivanti da  $O1$  e  $O2$ .

**Corollario 6.4.** *Date due rette parallele  $p$  e  $q$ , è possibile costruire una terza retta parallela equidistante dalle due.*

*Dimostrazione.* Siano  $P_1$  e  $P_2$  punti costruibili di  $p$  e  $Q_1$  e  $Q_2$  punti costruibili di  $q$ , sappiamo che esistono per il lemma 5.2. Allora è sufficiente calcolare i due punti medi dei segmenti  $\overline{P_1Q_1}$  e  $\overline{P_2Q_2}$  e tracciare la piega tra questi nuovi punti. □

**Lemma 6.3.** *Sia dato un triangolo  $ABC$ , con  $A, B$  e  $C$  costruibili, e un punto  $D$  appartenente alla retta  $AB$ . Allora il punto  $E$  appartenente alla retta  $AC$ , tale che i due triangoli  $ABC$  e  $ADE$  siano simili, è costruibile.*

*Dimostrazione.* È sufficiente tracciare la retta parallela a  $BC$  e passante per il punto  $D$  e chiamare  $E$  l'intersezione tra tale retta e la retta  $AC$ . □

**Lemma 6.4.** *Sia  $l$  una retta costruibile; qualsiasi punto o retta costruibile può essere riflessa rispetto a tale retta.*

*Dimostrazione.* Sia  $P$  un punto costruibile; se  $P \in l$  allora la sua riflessione coincide banalmente con sé stesso.

Sia quindi  $P \notin l$ , allora è possibile tracciare la retta passante per  $P$  e perpendicolare ad  $l$  e chiamare  $Q$  il punto di intersezione tra tale retta e  $l$ .

Ora è sufficiente traslare il segmento  $PQ$  su  $Q$  per ottenere il punto riflesso di  $P$ .

Usando il fatto che ogni retta costruibile ha almeno due punti costruibili si può riflettere tali punti, unire le due immagini grazie all'assioma  $O1$  e ottenere così la riflessione della retta di partenza. □

Questo lemma permette quindi la costruzione di nuovi punti e rette riflettendo rispetto ad una piega preesistente. Una caratteristica molto particolare di questo lemma è che risulta essere equivalente all'assioma  $O2$ .

**Proposizione 6.1.** *Sia  $\mathcal{T}$  una teoria in cui vale l'assioma  $O1$ , allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

*i) Vale l'assioma  $O2$ .*

*ii) È possibile riflettere un punto costruibile rispetto ad una retta costruibile.*

*Dimostrazione.*  $i) \Rightarrow ii)$  Segue banalmente dal lemma 6.4.

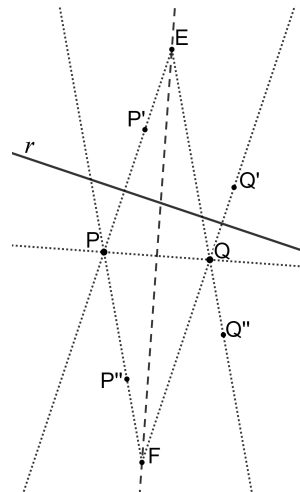
$ii) \Rightarrow i)$  Siano  $P$  e  $Q$  due punti costruibili e sia una retta  $r$  costruibile posizionata come in figura. Si riflettano i punti  $P$  e  $Q$  rispetto alla retta  $r$  ottenendo  $P'$  e  $Q'$  e successivamente si riflettano tali punti rispetto alla retta  $PQ$  ottenendo  $P''$  e  $Q''$ .

Sia  $E$  l'intersezione tra le rette  $PP'$  e  $QQ'$ , e sia  $F$  l'intersezione tra  $PP''$  e  $QQ''$ .

Per costruzione si ha che gli angoli  $\widehat{P'PQ}$ ,  $\widehat{Q'QP}$ ,  $\widehat{EQP}$  e  $\widehat{P'PQ}$ ,  $\widehat{Q'QP}$ ,  $\widehat{FPQ}$  sono congruenti tra loro; in particolare i triangoli  $PQE$  e  $PQF$  sono isosceli e i punti  $E$  e  $F$  appartengono all'asse del segmento  $PQ$ , che quindi è costruibile.

I casi in cui  $r$  abbia diversa inclinazione o intersechi il segmento  $PQ$  risultano analoghi.

Il caso in cui  $r$  sia parallela a  $PQ$  è dimostrabile in modo simile intersecando a due a due le rette  $PQ'$ ,  $P'Q$  e  $PQ''$ ,  $P''Q$  oppure costruendo una retta ulteriore, ad esempio  $P'Q$ , e riconducendosi ai casi precedenti.



□

## 6.2 I numeri di Talete

In modo analogo a ciò che si è fatto nel paragrafo introduttivo, fissati  $X = 0$ ,  $Y = 1$  e  $Z = z$  con  $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ , indichiamo con  $\Theta = \Theta[z]$  i numeri costruibili con questa geometria.

**Proposizione 6.2.** *Sia  $w \in \Theta$ . Allora anche  $-w$  e  $\bar{w} \in \Theta$ , dove con  $\bar{w}$  si indica la coniugata complessa di  $w$ .*

*Dimostrazione.* Poiché  $\Theta \subseteq \mathbb{C}$ , posso scrivere  $w$  nella forma esponenziale  $w = re^{i\theta}$  con  $r = |w|$  e  $\theta \in [0, 2\pi)$ .

Il fatto che  $w$  sia costruibile significa che esiste un punto costruibile  $W$  tale che  $|\overline{WX}| = r$  e la retta  $WX$  determina in  $X$  un angolo orientato in verso antiorario a partire dalla semiretta di vertice  $X$  e direzione  $XY$  pari a  $\theta$ .

È sufficiente traslare il segmento  $WX$  dalla parte opposta rispetto a  $X$  e rifletterlo rispetto alla retta  $XY$  per ottenere rispettivamente i due punti costruibili corrispondenti a  $-w$  e  $\bar{w}$ .

□

Questa proposizione permette di allargare la definizione di numero costruibile nel seguente modo:

**Proposizione 6.3.** *Un numero  $w \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$  è costruibile se e solo se esistono due punti costruibili  $P$  e  $Q$  tali che  $\overline{PQ} = |w|$  e la retta  $PQ$  forma con la retta  $XY$  due angoli elementari  $\alpha$  e  $(180 - \alpha)$  tali che  $\sin \alpha = \sin(180 - \alpha) = |\sin \theta|$ , dove  $\theta$  è l'argomento del numero complesso  $w$ .*

*Dimostrazione.* Deriva direttamente dalla possibilità di traslare un segmento costruibile e di rifletterlo rispetto alla retta  $XY$  e dalla chiusura di  $\theta$  rispetto alla coniugazione.

□

**Proposizione 6.4.**  *$\Theta$  è chiuso rispetto alla somma tra numeri complessi.*

*Dimostrazione.* Siano due numeri  $u, v \in \Theta$  e due segmenti  $\overline{AB}$  e  $\overline{CD}$  rappresentanti i due numeri in questione. È possibile traslare uno dei due segmenti in modo da incollarlo all'altro e ottenere una spezzata, ad esempio  $A - B - D$ . Allora anche il segmento  $AD$  è costruibile e rappresenta esattamente il numero complesso  $u + v$ .

□

**Corollario 6.5.** *L'insieme  $\Theta$  è un gruppo abeliano rispetto all'addizione indotta dall'addizione sui numeri complessi.*

Inoltre se  $P$  è il punto costruibile corrispondente ad un numero  $u = x + iy$  con  $x, y \in \mathbb{R}$  e  $i$  unità immaginaria, è possibile tracciare le perpendicolari agli assi delle ascisse e delle ordinate e passanti per  $P$ ; tali rette intersecano gli assi in due punti costruibili che rappresenteranno i numeri  $x$  e  $y$  sui due assi.

Quindi chiamando  $Re = Re[z]$  e  $Im = Im[z]$  i due sottoinsiemi di  $\mathbb{R}$  e di  $\theta$  delle componenti reali e immaginarie dei numeri in  $\Theta$ , essi ereditano la struttura di gruppo abeliano additivo; inoltre si ha che  $\Theta[z] = Re[z] \oplus i Im[z]$ .

Si noti che gli insiemi  $Re$  e  $Im$ , pur essendo entrambi sottoinsiemi di numeri reali, in generale non coincideranno. Vedremo in seguito che una condizione necessaria e sufficiente perché coincidano è che abbiano almeno un elemento non nullo in comune.

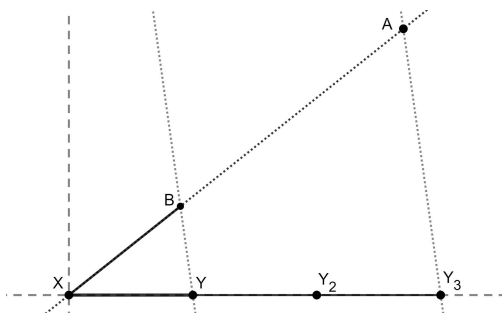
**Proposizione 6.5.** *L'insieme  $\Theta$  è un  $\mathbb{Q}$ -spazio vettoriale con sottospazi  $Re$  e  $Im$ .*

*Dimostrazione.* La dimostrazione deriva da osservazioni precedenti e alcune osservazioni elementari. L'unico punto da verificare è che effettivamente  $\Theta$  sia chiuso per moltiplicazione per uno scalare in  $\mathbb{Q}$ .

Questo fatto è equivalente a dimostrare che, dato un qualsiasi punto costruibile  $A$  e numero naturale  $n$ , è possibile costruire un punto  $B$  sulla retta  $AX$  tale che  $n \cdot \overline{BX} = \overline{AX}$ .

Per fare ciò è sufficiente riportare il segmento  $\overline{XY}$  sulla retta  $XY$  per  $n$  volte, fino ad ottenere un punto  $Y_n$  tale che  $\overline{XY_n} = n\overline{XY}$ .

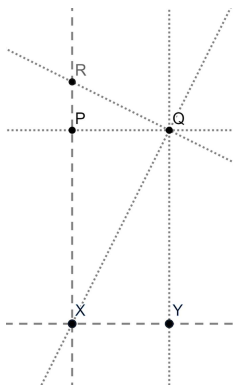
A questo punto si costruisce la piega  $AY_n$  e si traccia la parallela a questa retta e passante per  $Y$ ; tale parallela intersecherà la retta  $AX$  nel punto  $B$  richiesto.



□

**Proposizione 6.6.** *Sia  $u \in Im$  tale che  $u \neq 0$ , allora  $1/u \in Im$ .*

*Dimostrazione.*



Senza perdita di generalità si può supporre  $u > 0$  e sia  $P$  il punto sull'asse delle  $y$  corrispondente al valore  $(0, u)$ . Si chiami  $Q$  l'intersezione tra le due pieghe parallele agli assi e passanti per  $P$  e per  $Y$  e si costruisca la piega per  $X$  e  $Q$ . La piega passante per  $Q$  e perpendicolare a  $XQ$  intersecherà l'asse delle  $y$  in un punto costruibile  $R$ .

I due triangoli rettangoli  $PQR$  e  $XYQ$  sono simili perché  $\widehat{PQR} \cong \widehat{YQX}$  e quindi  $\overline{PR} = \frac{\overline{PQ} \cdot \overline{XY}}{\overline{QY}}$  rappresenterà il valore  $1/u$ .

□

Si noti che lo stesso ragionamento non può essere fatto per l'insieme  $Re$ , in quanto a priori nessuno garantisce che  $1 \in Im$ .

Grazie ad una costruzione geometrica vista in precedenza tuttavia si può conoscere ulteriori caratteristiche dei gruppi  $Re$  e  $Im$ .

**Proposizione 6.7.** Siano  $a, b \in Re$  e  $u, v, w \in Im$ , allora

$$\frac{v}{u}a, uv, \frac{v}{u}, a^2 \in Re \quad e \quad \frac{b}{a}u, au, \frac{u}{a}, uvw \in Im.$$

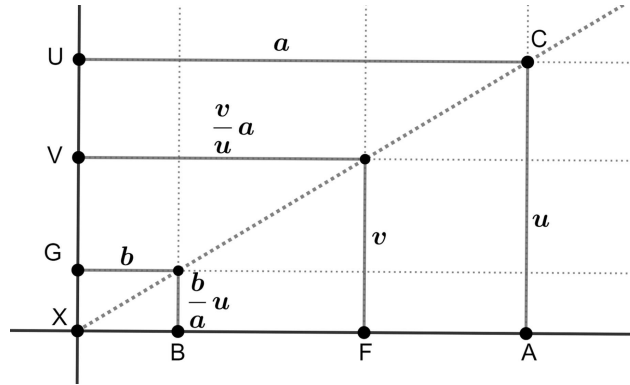
*Dimostrazione.* Per definizione è possibile costruire il punto relativo alle coordinate  $(a, u)$  e congiungere tale punto col punto originale  $X$ .

Ora è sufficiente applicare il lemma 6.3 che permette di costruire il punto di tale retta e ascissa  $b$  e quello di ordinata  $v$ . Con una semplice proporzione si calcola che tali punti hanno coordinate  $(b, \frac{b}{a}u)$  e  $(\frac{v}{u}a, v)$ ; quindi  $\frac{b}{a}u \in Im$  e  $\frac{v}{u}a \in Re$ .

Prendendo semplicemente  $a$  o  $b = 1$  si ottiene che  $\frac{v}{u} \in Re$  e  $au, \frac{u}{a} \in Im$ .

Dal lemma 6.6 inoltre si sa che  $Im$  è chiuso rispetto all'inverso, quindi il risultato appena ottenuto ci dice anche che  $uv \in Re$ .

Riunendo questi ragionamenti si può concludere che  $Im$  è chiuso rispetto al triplice prodotto, cioè che  $uvw \in Im$  e che  $Re$  è chiuso rispetto ai quadrati, ovvero  $a^2 \in Re$ .



□

Questa caratterizzazione porta ad una lunga lista di corollari molto utili.

**Corollario 6.6.**  $Re$  è una  $\mathbb{Q}$ -algebra.

*Dimostrazione.* Si è già visto che è un  $\mathbb{Q}$ -spazio vettoriale; manca da vedere che è chiuso rispetto al prodotto.

Ma  $\forall a, b \in Re$  si ha che  $ab = \frac{1}{2}((a+b)^2 - a^2 - b^2) \in Re$  per il risultato precedente.

□

**Corollario 6.7.**  $Re$  è un campo.

*Dimostrazione.* Sia  $0 \neq u \in Im$ , allora  $\forall a \in Re$  tale che  $a \neq 0$  si ha:

$\frac{1}{a} = \frac{u}{a} \cdot \frac{1}{u} \in Re$  perché prodotto di due elementi del gruppo  $Im$ .

□

**Corollario 6.8.** Se  $0 \neq u \in Im$ ; allora  $Im = Re \cdot u$ .

*Dimostrazione.* Si è appena visto che  $au \in Im \forall a \in Re$ , quindi  $Re \cdot u \subseteq Im$ .

Viceversa se  $v \in Im$  si ha che  $v = \frac{v}{u}u \in Re \cdot u$  perché  $\frac{v}{u} \in Re$ ; quindi anche  $Im \subseteq Re \cdot u$ .

□



**Proposizione 6.8.** *Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

i)  $Re \cap Im \neq \{0\}$ .

ii)  $Re = Im$ .

iii)  $\Theta[z] = Re(i)$  dove  $Re(i)$  è il più piccolo campo contenente  $Re$  e  $i$ .

*Dimostrazione.* i)  $\rightarrow$  ii) Sia  $0 \neq x \in Re \cap Im$ . Per ogni  $u \in Im$  si sa che  $u = \frac{u}{x}x \in Re$  perché prodotto di due elementi di  $Im$ , quindi  $Im \subseteq Re$ .

Viceversa sia  $a \in Re$ , allora  $a = \frac{ax}{x} \in Im$  perché rapporto tra un elemento in  $Im$  e uno in  $Re$ , e quindi  $Im \subseteq Re$ .

Vi è anche un'interessante dimostrazione geometrica che consiste nel creare la piega tra i due punti corrispondenti ai numeri  $x$  e  $ix$ ; allora il fascio di rette costruibili parallele alla retta data collegherà ogni punto costruibile sull'asse delle ascisse con uno costruibile sull'asse delle ordinate e viceversa.

ii)  $\rightarrow$  iii) Dal fatto che  $Re = Im$  e che  $\Theta$  è un campo, ho che  $\Theta[z] = Re \oplus iIm = Re \oplus iRe = Re(i)$ .

iii)  $\rightarrow$  i) Poiché  $i \in Re(i) = Re \oplus iIm$  si ha che  $1 \in Im$  e quindi  $1 \in Re \cap Im$ . □

**Proposizione 6.9.** *Un numero reale  $m$  è un coefficiente angolare di una retta costruibile se e solo se  $m \in Im$ .*

*Dimostrazione.* Sia  $m$  la pendenza di una retta costruibile  $r$ , e sia  $P = (a, u)$  un punto costruibile di tale retta con ascissa diversa da 0. La retta  $r$  intersecherà l'asse delle ordinate in un punto costruibile  $Q = (0, v)$  diverso da  $P$ . Ma allora  $m = \frac{u-v}{a} \in Im$  perché rapporto tra un numero in  $Im$  e uno in  $Re$ .

Viceversa, sia  $m \in Im$ ; allora il punto  $P$  di coordinate  $(1, m)$  è costruibile.

Quindi la retta  $PX$  è una retta costruibile, con pendenza  $m$  e passante per l'origine. □

Si noti che questo non significa che se  $m \in Im$ , allora tutte le rette con tale pendenza sono costruibili, ma solo che almeno una lo è. Naturalmente dato un punto costruibile  $P$  so che posso trasportare una retta parallelamente e quindi costruire la retta per  $P$  e con inclinazione  $m$ .

Per quanto riguarda le rette verticali invece, è immediato vedere che una retta di equazione  $x = k$  è costruibile se e solo se  $k \in Re$ .

**Proposizione 6.10.** *Sia il punto originale  $Z$  relativo al numero complesso  $z = a + iu$  con  $a, u \in \mathbb{R}$  e  $u \neq 0$ .*

*Allora i numeri costruibili  $\Theta[z] \subseteq \mathbb{Q}(a, u, i)$ .*

*Dimostrazione.* Procediamo per induzione a partire dai tre punti iniziali. Chiaramente  $0, 1, z \in \mathbb{Q}(a, u, i)$ . Consideriamo ora per ipotesi induttiva che tutti i numeri costruiti siano nel campo in questione; i nuovi punti costruibili si ottengono tramite intersezione di rette costruibili, e tali rette sono le rette passanti per due punti costruibili e l'asse di un segmento costruibile.

Le rette che uniscono due punti già precedentemente costruiti e gli assi dei segmenti costruibili avranno anch'esse coefficienti in  $\mathbb{Q}(a, u, i)$ , come si può intuire dalle formule

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1) \quad e \quad y - \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{x_1 - x_2}{y_2 - y_1} \left( x - \frac{x_1 + x_2}{2} \right)$$

Un nuovo punto costruibile sarà dato quindi dall'intersezione di due rette di questo tipo

$$\begin{cases} y = m_1 x + q_1 & \text{con } m_1, q_1 \in \mathbb{Q}(a, u, i) \\ y = m_2 x + q_2 & \text{con } m_2, q_2 \in \mathbb{Q}(a, u, i) \end{cases} \implies \begin{cases} x = \frac{q_2 - q_1}{m_1 - m_2} \\ y = \frac{m_1 q_2 - m_2 q_1}{m_1 - m_2} \end{cases}$$

e quindi avrà anche lui coordinate nel campo  $\mathbb{Q}(a, u, i)$ . □

I principali risultati ottenuti riguardanti i numeri costruibili possono essere riassunti in parte nella seguente proposizione.

**Proposizione 6.11.** *L'insieme  $\Theta[z]$  è un campo contenuto in  $\mathbb{Q}(a, u, i)$  e chiuso rispetto alla coniugazione complessa.*

*Dimostrazione.* Che sia chiuso rispetto alla coniugazione complessa e contenuto nel campo  $\mathbb{Q}(a, u, i)$  deriva direttamente dalle proposizioni 6.2 e 6.10.

Bisogna ora dimostrare che effettivamente sia un campo; in particolare bisogna verificare che  $\Theta$  sia chiuso rispetto al prodotto e all'inverso.

Siano  $z_1 = a + iu$  costruibile, ovvero  $a \in Re$  e  $u \in Im$ ; allora  $z_1^2 = a^2 - u^2 + i2au \in \Theta$  in quanto  $Re$  è chiuso rispetto ai quadrati e  $Im$  rispetto ai prodotti tra due elementi misti; quindi  $\Theta$  è chiuso rispetto ai quadrati.

Sia ora  $z_2 = b + iv$  un altro numero costruibile; per vedere che  $\Theta$  è chiuso rispetto al prodotto è sufficiente notare che  $z_1 z_2 = \frac{1}{2}((z_1 + z_2)^2 - z_1^2 - z_2^2) \in \Theta$ .

Infine si ha che

$$z_1^{-1} = \frac{1}{z_1} = \frac{\bar{z}_1}{a^2 + u^2} = \frac{a}{a^2 + u^2} - i \frac{u}{a^2 + u^2} \in \Theta \quad \text{per le proposizioni precedenti.}$$

□

**Proposizione 6.12.** *Sia  $z = a + iu$  con  $a \in Re$   $0 \neq u \in Im$  e sia  $u$  algebrico su  $\mathbb{Q}$ .*

*Se il polinomio minimo  $f(x)$  di  $u$  sul campo  $\mathbb{Q}$  non è un polinomio nell'incognita  $x^2$ , allora  $Re = Im$ .*

*Ne segue che se l'estensione  $\mathbb{Q}(u)/\mathbb{Q}$  ha grado dispari dispari, allora  $Re = Im$ .*

*Dimostrazione.* Sia  $u$  algebrico e sia  $f(x) = q_n x^n + q_{n-1} x^{n-1} + \dots + q_1 x + q_0$  con  $q_i \in \mathbb{Q}$   $i = 0 \dots n$  il suo polinomio minimo.

In particolare se non è un polinomio in  $x^2$  significa che, una volta calcolato in  $u$  si avrà:

$$q_n u^n + q_{n-1} u^{n-1} + \dots + q_1 u + q_0 = 0 \quad \text{con i } q_i \text{ con } i \text{ dispari non tutti nulli}$$

Portando a destra dell'uguale tutti i termini di grado pari, senza perdita di generalità si può supporre  $n$  pari, si ottiene:

$$q_{n-1} u^{n-1} + q_{n-3} u^{n-3} + \dots + q_1 u = q_n u^n + q_{n-2} u^{n-2} + \dots + q_0 \neq 0$$

Per la proposizione 6.7 un elemento di  $Im$  elevato ad un esponente dispari appartiene ancora a  $Im$ , mentre se lo elevo ad un esponente pari appartiene a  $Re$ ; inoltre per il corollario 6.5  $Re$  e  $Im$  sono  $\mathbb{Q}$ -spazi vettoriali.

Ne consegue che i termini a sinistra e a destra dell'uguale sono elementi rispettivamente di  $Im$  e di  $Re$  e sono non nulli perché non tutti i  $q_i$  con  $i$  dispari sono nulli; perciò  $Re = Im$  per il corollario 6.8.

Se  $[\mathbb{Q}(u) : \mathbb{Q}]$  è dispari significa che il polinomio minimo avrà grado dispari e, in particolare, non sarà un polinomio in  $x^2$ ; perciò si conclude per la parte appena dimostrata. □

Ciò che si è visto finora si può riassumere nel fatto che, dato il valore di partenza  $z = a + iu$  con  $u \neq 0$ , allora

$$\mathbb{Q}(a, u^2) \subseteq Re \subseteq \mathbb{Q}(a, u) \quad \text{e} \quad Im = u \cdot Re$$

Inoltre le uniche rette costruibili sono quelle di equazione

$$y = mx + q \quad \text{con } m, q \in Im \quad \text{e} \quad x = k \quad \text{con } k \in Re$$

È possibile distinguere due differenti sviluppi della teoria di Talete introducendo la definizione di numero di Talete.

Diciamo che  $z = a + iu$  è un **numero di Talete** se il campo  $\Theta[z]$  contiene il numero  $i$ , ovvero se il punto corrispondente al valore  $i$  è costruibile.

Se  $z$  è di Talete è immediato vedere che  $Re = Im$  e in particolare  $\Theta[z] = Re(i)$ .

Inoltre  $u \in Re$  e quindi  $Re = \mathbb{Q}(a, u)$  e  $\Theta[z] = \mathbb{Q}(a, u, i)$ .

Se invece considero un numero complesso  $z$  non di Talete, allora  $u \in Im$  ma  $u \notin Re$ , perché se no i due campi coinciderebbero e quindi  $i$  apparterebbe a  $Im$ , e in particolare  $Re \subsetneq \mathbb{Q}(a, u)$ .

**Teorema 6.1.** *Il numero complesso  $z = a + iu$  con  $u \neq 0$  è di Talete se e solo se  $u \in \mathbb{Q}(a, u^2)$ .*

*Dimostrazione.* Dimostriamo che  $z$  non è di Talete se e solo se  $u \notin \mathbb{Q}(a, u^2)$ .

Se  $z$  non è un numero di Talete abbiamo già constatato che  $u \notin \mathbb{Q}(a, u^2)$ , quindi resta da vedere l'altra implicazione.

Sia  $z = a + iu$  tale che  $u \notin \mathbb{Q}(a, u^2)$ , si può dimostrare per induzione, a partire dai tre numeri originali, che ogni numero costruibile è della forma  $b + iv$  con  $b \in \mathbb{Q}(a, u^2)$  e  $v \in \mathbb{Q}(a, u^2) \cdot u$ . La dimostrazione ricalca fedelmente quella fatto per provare la proposizione 6.10. Ma allora il numero  $i$  non è costruibile e quindi  $z$  non è di Talete. □

**Corollario 6.9.** *Se  $z$  è di Talete si ha che  $Re = \mathbb{Q}(a, u) = \mathbb{Q}(a, u^2)$  e  $\Theta[z] = \mathbb{Q}(z, \bar{z}, i)$ .*

*Se  $z$  non è di Talete si ha che  $Re = \mathbb{Q}(a, u^2) \subsetneq \mathbb{Q}(a, u)$  e  $\Theta[z] = \mathbb{Q}(z, \bar{z})$ .*

*Dimostrazione.* Sappiamo che  $\mathbb{Q}(a, u^2) \subseteq Re \subseteq \mathbb{Q}(a, u)$ ; inoltre l'estensione  $\mathbb{Q}(a, u) / \mathbb{Q}(a, u^2)$  ha grado 2 se  $u \notin \mathbb{Q}(a, u^2)$  perché ha polinomio minimo  $x^2 - u^2$  e 1 altrimenti.

Dal teorema precedente sappiamo che se  $z$  è di Talete allora le inclusioni sono tutte ugualanze e quindi  $Re = \mathbb{Q}(a, u) = \mathbb{Q}(a, u^2)$ . Se invece  $z$  non è di Talete la seconda inclusione sarà stretta e quindi, non essendoci altri campi intermedi, si avrà che  $Re = \mathbb{Q}(a, u^2)$ . □

**Proposizione 6.13.** *Sia  $n > 2$ , allora la radice dell'unità  $z = e^{\frac{2\pi i}{n}}$  è di Talete se e solo se  $4|n$ .*

*Dimostrazione.* Se  $4|n$ ,  $z^{\frac{n}{4}} = i$  e quindi  $z$  è di Talete.

Per il viceversa consideriamo il caso in cui  $n$  non sia divisibile per 4; quindi  $n$  è dispari o il doppio di un numero dispari.

Il campo  $\mathbb{Q}(a, u^2) = \mathbb{Q}(\cos \frac{2\pi}{n}, \sin^2 \frac{2\pi}{n}) = \mathbb{Q}(\cos \frac{2\pi}{n})$  è tale che  $[\mathbb{Q}(\cos \frac{2\pi}{n}) : \mathbb{Q}] = \frac{\phi(n)}{2}$  dove  $\phi$  è la funzione di Eulero (per la dimostrazione si veda [15]).

Se  $n$  non è un multiplo di 4 invece il campo  $\mathbb{Q}(u) = \mathbb{Q}(\sin \frac{2\pi}{n})$  è tale che  $[\mathbb{Q}(\sin \frac{2\pi}{n}) : \mathbb{Q}] = \phi(n)$ , e quindi si avrà che  $[\mathbb{Q}(a, u) : \mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}(\cos \frac{2\pi}{n}, \sin \frac{2\pi}{n}) : \mathbb{Q}] \geq \phi(n)$ .

Ne segue che i due campi  $\mathbb{Q}(a, u) \neq \mathbb{Q}(a, u^2)$  e quindi  $z$  non è di Talete. □

### 6.3 Caso $z = i$ e i poligoni costruibili

Come accennato nel paragrafo introduttivo, una particolare importanza va riservata al caso  $z = i$ . Una volta fissato il valore iniziale  $z$  lo studio della geometria che deriva da questa teoria si fa molto più semplice; nello specifico ci si è soffermati sullo studio dei poligoni regolari costruibili.

La particolarità di questa analisi è che, a differenza della geometria con riga e compasso, non è sempre possibile ricondurre lo studio dei generici poligoni regolari ai soli poligoni inscritti nella circonferenza di raggio unitario, in quanto non tutte le rotazioni sono realizzabili.

**Teorema 6.2.** *Sia  $z = i$ , Allora i numeri costruibili sono tutti i soli i numeri complessi con coordinate razionali, ovvero  $\Theta = \mathbb{Q}(i)$ .*

*Dimostrazione.* Se  $z = i$  è banalmente di Talete, in particolare si ha che  $Re = \mathbb{Q}(a, u) = \mathbb{Q}(a, u^2) = \mathbb{Q}$  e quindi  $\Theta = \mathbb{Q}(i)$ . □

**Lemma 6.5.** *Il quadrato è l'unico poligono regolare centrato nell'origine, inscritto nella circonferenza unitaria e avente un vertice nel punto  $V = (1, 0)$  che sia costruibile.*

*Dimostrazione.* Si consideri un poligono regolare  $\mathcal{P}$  che realizza le ipotesi del teorema, e sia  $W$  il vertice successivo a  $V$  in senso antiorario. Il punto  $W$  corrisponderà ad una radice dell'unità  $e^{\frac{2\pi i}{n}} = \cos(\frac{2\pi}{n}) + i \sin(\frac{2\pi}{n})$ . In particolare si avrà che  $\sin(\frac{2\pi}{n}), \cos(\frac{2\pi}{n}) \in \mathbb{Q}$ .

È noto che  $[\mathbb{Q}(\cos \frac{2\pi}{n}) : \mathbb{Q}] = \frac{\phi(n)}{2}$  e  $[\mathbb{Q}(\sin \frac{2\pi}{n}) : \mathbb{Q}] = \frac{\phi(n)}{2}$  o  $\phi(n)$  a seconda che  $4|n$  o  $4 \nmid n$ .

Usando la relazione per cui  $\phi(n) \geq \sqrt{\frac{n}{2}}$  è facile verificare che l'unico valore di  $n$  per cui il seno e il coseno siano ancora in  $\mathbb{Q}$  è  $n = 4$  e rappresenta quindi il quadrato descritto nell'enunciato. □

Questo lemma da una prima visione di quali poligoni regolari siano costruibili e quali no, ma adopera delle ipotesi decisamente restrittive.

Per indebolire queste richieste ci sarà bisogno di alcune proposizioni legate alle isometrie del piano.

**Proposizione 6.14.** *Sia  $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ , allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

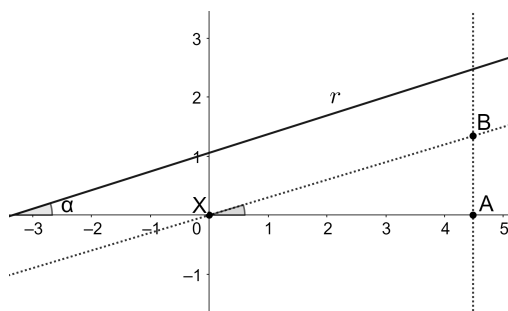
- i) È possibile ruotare di un angolo  $\alpha$  attorno all'origine un punto costruibile.*
- ii) Esiste una retta costruibile  $r$  tale che  $\alpha$  sia l'angolo minore formato tra tale retta e l'asse  $x$  e su tale retta vi sia un segmento di lunghezza razionale.*

*Dimostrazione.* *ii)  $\Rightarrow$  i)* Si analizzi innanzitutto il caso in cui  $r$  sia una retta costruibile e non parallela agli assi.

Dalla proposizione 6.9 si ha che se  $r$  è costruibile allora  $\tan \alpha \in \mathbb{Q}$ .

Per la possibilità di traslare parallelamente i segmenti, esiste un segmento di lunghezza razionale su  $r$  se e solo se esiste un punto  $B$  appartenente alla retta passante per  $X$  e parallela a  $r$ , tale che  $|\overline{BX}| \in \mathbb{Q}$ .

Tracciando la retta per  $B$  e ortogonale all'asse delle  $x$  si ottiene un punto  $A$  di intersezione con tale asse; in questo modo il triangolo  $ABX$  avrà tutti tre i lati di lunghezza razionale.



In particolare si avrà che  $\sin \alpha$  e  $\cos \alpha$ , esprimibili come rapporti tra due di queste lunghezze, saranno ancora numeri razionali.

Ricordando che una rotazione nel piano è rappresentata da una matrice che manda le coordinate di un punto nelle coordinate della sua immagine ruotata tramite il prodotto matriciale

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \mp \sin \alpha \\ \pm \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

ogni punto costruibile, e quindi con coordinate razionali, verrà ruotato in un punto con coordinate che sono ancora razionali, e quindi è costruibile.

*i) ⇒ ii)* È possibile effettuare una rotazione di un certo angolo  $\alpha$  solo se la matrice di rotazione ha coefficienti razionali, ovvero se  $\sin \alpha$  e  $\cos \alpha$  appartengono a  $\mathbb{Q}$ .

Ma allora basterà costruire un triangolo  $A'B'X$  analogo a  $ABX$  ma scegliendo i vertici  $A'$  e  $B'$  in modo tale che  $|A'X| = \cos \alpha$  e  $|B'A'| = \sin \alpha$ , in questo modo il segmento  $B'X$  sarà lungo 1 e giacerà su una retta con inclinazione richiesta nell'enunciato.

Sia invece  $r$  è una retta parallela all'asse delle  $y$  e quindi sia  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ; ruotare di un angolo retto un punto costruibile determina un punto le cui coordinate corrispondono a quelle di partenza, scambiate tra loro ed eventualmente cambiate di segno. In particolare coordinate razionali vengono mandate in coordinate razionali e quindi questa rotazione è sempre realizzabile. D'altra parte su una retta parallela all'asse  $y$  è sempre trasportabile un segmento di lunghezza unitaria.

Il caso in cui  $r$  sia parallelo all'asse  $x$  possiamo considerarlo come il caso in cui  $\alpha = 0$ , e la rotazione di un angolo nullo è l'identità e quindi è sempre fattibile, così come un segmento di lunghezza unitaria è sempre trasportabile su una retta orizzontale.

□

**Osservazione.** Si noti che la condizione *i i)* afferma solo che una tale retta  $r$  deve esistere, ma per il fatto che ogni retta ha almeno un punto costruibile e per la possibilità di traslare segmenti parallelamente, questo è equivalente a dire che ogni retta costruibile con tale inclinazione deve contenere un segmento di lunghezza razionale.

**Corollario 6.10.** È possibile ruotare un segmento o una retta costruibile di un certo angolo  $\alpha$  attorno all'origine se e solo se vale la condizione *i i)*

**Lemma 6.6.** *Dato un  $n$ -agono regolare costruibile, è sempre possibile traslarlo in modo tale che risulti centrato nel punto  $X$ .*

*Dimostrazione.* Siano  $V_i$  con  $i = 1, \dots, n$  i vertici del  $n$ -agono regolare; allora sono costruibili tutti i segmenti del tipo  $\overline{V_i V_j}$  con  $i \neq j$ .

Inoltre sono costruibili gli assi dei segmenti  $\overline{V_i V_{i+1}}$  e in particolare intersecando due di questi assi si può costruire il centro  $C$  del poligono. Ne consegue che è possibile costruire tutti i segmenti  $\overline{CV_i}$  e, traslandoli sul punto  $X$  costruire i vertici del  $n$ -agono traslato.  $\square$

**Teorema 6.3.** *Il quadrato è l'unico poligono regolare inscritto in una circonferenza di raggio razionale che sia costruibile.*

*Dimostrazione.* Sia  $\mathcal{P}$  un  $n$ -agono regolare inscritto in una circonferenza di raggio  $r \in \mathbb{Q}$ ; si è visto che, senza perdita di generalità si può supporre il poligono centrato nell'origine  $X$ . Siano  $V_1, \dots, V_n$  i vertici ordinati in senso antiorario tali che  $V_1$  sia il vertice del primo quadrante più vicino all'asse delle  $x$ , e sia  $\alpha$  l'angolo acuto tra la retta  $XV_1$  e l'asse delle  $x$  (vedi figura 2). Essendo  $\overline{XV_1}$  un segmento di lunghezza razionale appartenente alla retta  $XV_1$ , è possibile ruotare in entrambi i versi qualsiasi punto costruibile dell'angolo  $\alpha$ . In particolare è possibile ruotare il punto  $Y$ , che giace in corrispondenza del numero complesso 1, in modo tale che la sua immagine ruotata  $W_1 \in XV_1$  (vedi figura 3).

Analoga costruzione è possibile a partire dagli altri  $n-1$  vertici  $V_i$ , fino ad ottenere  $n$  punti  $W_1, \dots, W_n$  che saranno i vertici di un  $n$ -agono regolare di raggio 1.

Ruotando questi nuovi vertici dell'angolo  $\alpha$  ma nel verso contrario rispetto a prima, si ottiene un  $n$ -agono regolare di raggio 1 in cui un vertice ha coordinate  $(1, 0)$ .

Per il lemma 6.5 si avrà che  $n = 4$ .

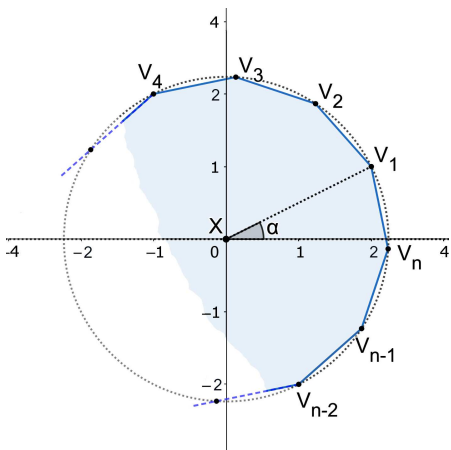


Figura 2:  $n$ -agono di raggio  $r$

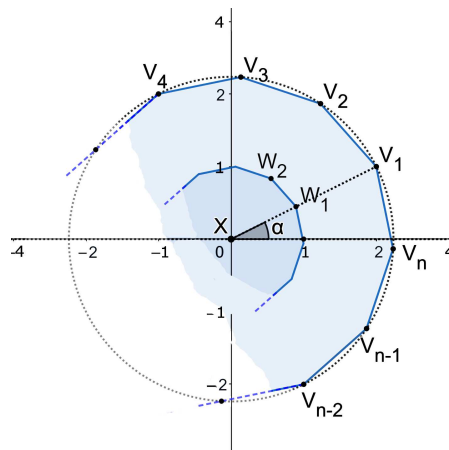


Figura 3:  $n$ -agono di raggio 1

$\square$

Con questo teorema si è risolto completamente il discorso sulla costruibilità di poligoni regolari inscritti in un cerchio di raggio razionale.

Pur non riuscendo a fare lo stesso per quanto riguarda la situazione in cui il raggio del cerchio circoscritto è irrazionale, si è dimostrata una importante proposizione.

**Proposizione 6.15.** *Se esiste un  $n$ -agono regolare inscritto in una circonferenza di raggio  $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ , allora, detti  $V_i$  con  $i = 1, \dots, n$  i vertici e  $C$  il centro del cerchio circoscritto, tutte le rette costruibili  $V_i C$  non contengono segmenti di lunghezza razionale.*

*Dimostrazione.* Senza perdita di generalità posso supporre il poligono centrato nell'origine, ovvero il punto  $C$  coincidente con  $X$ .

Se per assurdo esistesse un vertice  $V_i$  tale che la retta  $V_i C$  contenga un segmento di lunghezza razionale, allora per la proposizione 6.14 potrei ruotare il poligono in modo che l'immagine  $V'_i$  del vertice  $V_i$  stia sull'asse delle  $x$ .

Il punto  $V'_i$  essendo costruibile avrà una distanza razionale dal centro  $X$ , ma allora  $r = \overline{V'_i X} \in \mathbb{Q}$ , contraddicendo l'ipotesi. □

## 7 La Teoria di Pitagora

Per osservare che relazione c'è tra gli assiomi  $O1$  e  $O2$  e il terzo assioma di H-J-H,  $O3$ , verrà analizzata una nuova teoria che chiameremo **Teoria di Pitagora**.

Anche questa volta sarà studiata la geometria sviluppata da tale teoria, e sarà chiamata **Geometria di Pitagora**.

Partendo dai tre punti originali  $X$ ,  $Y$  e  $Z$ , posizionati come nel sottoparagrafo precedente, la teoria di Pitagora si baserà sull'insieme di assiomi  $\mathcal{S} = \{O1, O2, O3\}$ , dove si ricordi che  $O3$  è all'assioma che dice:

*$O3$  Date due rette  $r$  e  $s$  costruibili,  $r \neq s$ , una piega che riflette  $r$  su  $s$  è costruibile.*

Questo assioma, come si è visto nel sottoparagrafo 4.3, permette di bisecare un qualsiasi angolo costruibile.

Il fatto che questa teoria contenga gli assiomi  $O1$  e  $O2$  e le condizioni iniziali della teoria di Talete fa sì che tutte le costruzioni realizzabili nella teoria precedente siano ancora realizzabili. In particolare si potranno ancora costruire punti medi, rette perpendicolari e parallele a rette date e passanti per un punto costruibile, traslare segmenti e riflettere rette e punti rispetto ad una piega preesistente.

Ponendo nuovamente i punti  $X, Y$  e  $Z$  in corrispondenza dei numeri complessi  $0$ ,  $1$  e  $i$  si avrà che l'insieme dei numeri costruibili rappresenterà un'estensione rispetto al campo precedentemente studiato.

### 7.1 La Geometria di Pitagora

Per studiare le nuove proprietà geometriche di questa teoria sarà analizzato innanzitutto un teorema di caratterizzazione di questo nuovo assioma; ovviamente per poterlo fare sarà necessario studiarlo all'interno della teoria di Talete, ovvero la teoria privata di quest'ultimo assioma.

**Teorema 7.1.** *All'interno della teoria di Talete le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

- i) Vale l'assioma  $O3$ .*
- ii) È possibile riportare un segmento costruibile di qualsiasi lunghezza su un punto costruibile e lungo una qualsiasi sua semiretta.*
- iii) È possibile riportare un segmento costruibile di lunghezza unitaria su un punto costruibile e lungo una qualsiasi sua semiretta.*

*Dimostrazione.* *i)  $\Rightarrow$  ii)* Sia  $\overline{PQ}$  un segmento costruibile e sia  $r$  una semiretta costruibile uscente da un punto  $R$ . Si trasli il segmento  $\overline{PQ}$  in modo che il punto  $P$  e il punto  $R$  coincidano.

Se il segmento traslato giace già sulla semiretta  $r$  si ha concluso; altrimenti si applichi l'assioma  $O3$  all'angolo tra il segmento e la retta per ottenerne la bisettrice. Si usi ora il lemma 6.4 per riflettere il punto  $Q$  sulla semiretta  $r$ ; il nuovo punto  $Q'$  così ottenuto sarà tale che  $\overline{RQ'}$  sia un segmento su  $r$  della stessa lunghezza di  $\overline{PQ}$ .

*ii)  $\Rightarrow$  iii)* Ovvio

*iii)  $\Rightarrow$  i)* Siano  $p$  e  $q$  due rette costruibili non parallele e sia  $\alpha$  l'angolo tra di esse; senza perdita di generalità si può considerare l'angolo  $\alpha$  minore di 180 gradi.



Per ipotesi si può prendere un punto  $P \in p$  e un punto  $Q \in q$  tali che, chiamando l'intersezione tra le due rette  $R$ , i segmenti  $\overline{PR}$  e  $\overline{RQ}$  abbiano lunghezza unitaria. Si costruiscono le rette per i punti  $P$  e  $Q$  e perpendicolari alle rispettive rette e si chiami  $S$  il punto di intersezione. I triangoli rettangoli  $PRS$  e  $RQS$  risultano congruenti e quindi l'angolo  $\alpha$  è bisecato dalla retta  $RS$ . Il caso in cui le rette sono parallele deriva direttamente dal corollario 6.4.

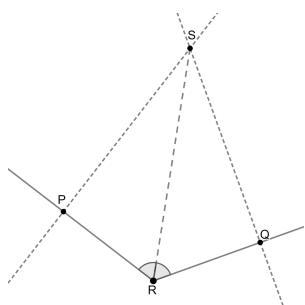


Figura 4:  $iii) \Rightarrow i)$

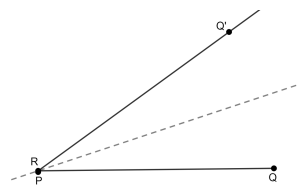


Figura 5:  $i) \Rightarrow ii)$

□

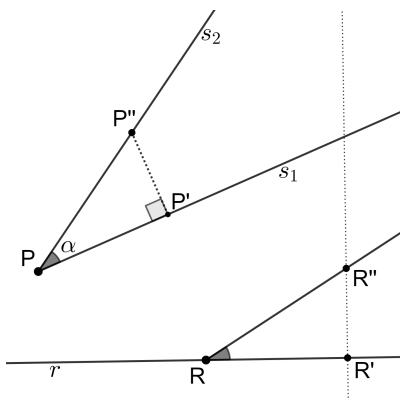
Questa caratterizzazione dell'assioma O3 ha una conseguenza geometrica piuttosto interessante.

Dato un punto costruibile  $P$  è possibile considerare il fascio di semirette costruibili uscenti dal punto  $P$  e riportare un segmento di lunghezza  $r$  su tali semirette.

In questo modo si è costruito una circonferenza "bucata" di centro  $P$  e raggio  $r$ .

**Corollario 7.1.** *Data una retta costruibile  $r$  e un suo punto costruibile  $R$ , è possibile riportare un qualsiasi angolo  $\alpha$  in modo che abbia vertice  $R$  e che uno di due lati sia la retta  $r$ .*

*Dimostrazione.*



Sia  $\alpha$  un angolo acuto con vertice nel punto costruibile  $P$  e con lati le due semirette costruibili  $s_1$  e  $s_2$ .

Si trasli innanzitutto il segmento di lunghezza unitaria sulla retta  $s_1$  e sulla retta  $r$  in modo da ottenere due nuovi punti, rispettivamente  $P'$  e  $R'$ , tali che i segmenti  $\overline{PP'}$  e  $\overline{RR'}$  siano lunghi 1.

Si tracci ora per  $P'$  una retta perpendicolare a  $s_1$  che, poiché l'angolo  $\alpha$  è acuto, intersecherà in un punto costruibile  $P''$  la retta  $s_2$ .

Si riporti ora il segmento  $\overline{P'P''}$  sulla retta perpendicolare a  $r$  e passante per il punto  $R'$  e si ottenga così un punto  $R''$  tale che l'angolo  $\overline{R'RR''} = \alpha$ .

Se l'angolo  $\alpha$  non è un angolo acuto è sufficiente bisecarlo più volte fino ad ottenere una sua partizione in angoli acuti, e trasportarli uno alla volta.

□

Prima di analizzare fino in fondo le ulteriori effettive capacità di questa teoria, si osservi un caso particolare che garantisce la capacità di questa teoria di costruire un maggior numero di punti rispetto alla teoria di Talete.

**Proposizione 7.1.** Sia  $z = e^{\frac{2\pi i}{2m}}$  con  $m$  un intero dispari diverso da 1.

Allora la radice dell'unità  $e^{\frac{2\pi i}{4m}}$  è costruibile con la geometria di Pitagora ma non con la geometria di Talete.

*Dimostrazione.* Che  $e^{\frac{2\pi i}{4m}}$  sia costruibile nella geometria di Pitagora è banale in quanto è sufficiente bisecare con l'assioma O3 l'angolo formato dai punti corrispondenti a  $z$ , 0 e 1 e poi riportare sulla bisettrice un segmento di lunghezza unitaria.

Nella geometria di Talete, avendo  $z$  modulo 1, è possibile trovare il punto medio tra i punti corrispondenti a 1 e  $z$ , e unendolo al punto  $X$  costruiamo la medesima bisettrice.

Tuttavia su tale bisettrice la radice dell'unità  $e^{\frac{2\pi i}{4m}}$  non sarà costruibile.

Infatti, siccome  $4 \nmid 2m$ , per la proposizione 6.13 il numero  $z$  non è di Talete; mentre se  $e^{\frac{2\pi i}{4m}}$  fosse costruibile si avrebbe che anche  $\left(e^{\frac{2\pi i}{4m}}\right)^m = i$  sarebbe costruibile, e quindi  $z$  risulterebbe di Talete, il che è assurdo. □

Questa proposizione garantisce l'indipendenza dell'assioma O3 dai due assiomi precedenti, e giustifica quindi il fatto di chiamare le due teorie con nomi differenti.

## 7.2 I numeri di Pitagora

Prima di tutto si osservi che il punto  $Z$  in realtà può essere facilmente costruito bisecando l'angolo piatto formato dalla retta  $XY$  nel punto  $X$  e riportando il segmento unitario  $\overline{XY}$  sul nuovo asse verticale; quindi in questo caso specifico gli unici punti originali necessari per questa geometria sarebbero  $X$  e  $Y$ .

Verrà usata la lettera greca  $\Pi$  per indicare l'insieme di numeri costruibili con tale teoria e i suoi elementi saranno chiamati **numeri di Pitagora**.

Come nel paragrafo precedente,  $\Pi$  sarà un sottocampo dei numeri complessi con due sottocampi reali  $Re$  e  $Im$  tali che  $\Pi = Re \oplus iIm$ .

In particolare, siccome per ipotesi 1 appartiene ad entrambi i campi  $Re$  e  $Im$  si ha che, per il lemma 6.8, i due campi coincidono e  $\Pi = Re(i)$ .

Una conseguenza importante al fine di caratterizzare  $\Pi$  del teorema 7.1 è il fatto che ogni lunghezza di un segmento costruibile è un numero costruibile nel campo  $Re$ ; è sufficiente infatti trasportare il segmento in questione sul semiasse reale.

Da un punto di vista algebrico questo fatto equivale a dire che  $\sqrt{a^2 + b^2} \in Re \quad \forall a, b \in Re$ .

**Lemma 7.1.** Le seguenti affermazioni sono equivalenti:

$$i) \sqrt{a^2 + b^2} \in Re \quad \forall a, b \in Re$$

$$ii) \sqrt{1 + x^2} \in Re \quad \forall x \in Re$$

*Dimostrazione.*  $i) \Rightarrow ii)$  Deriva direttamente dal fatto che  $1 \in Re$ .

$$ii) \Rightarrow i) \quad \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{a^2 \left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right)} = |a| \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2} \in Re \quad \text{perché } |a|, \frac{b}{a} \in Re.$$

□

Quindi il campo  $Re$  è chiuso rispetto all'operazione  $a \mapsto \sqrt{1+a^2}$ .

**Teorema 7.2.**  $Re$  è il più piccolo sottocampo di  $\mathbb{R}$  che contiene  $\mathbb{Q}$  ed è chiuso rispetto all'operazione  $a \mapsto \sqrt{1+a^2}$ .

*Dimostrazione.* Si è già visto che  $Re$  è un campo, che contiene  $\mathbb{Q}$  e che è chiuso rispetto all'operazione  $a \mapsto \sqrt{1+a^2}$ ; resta da vedere che è il più piccolo campo con queste caratteristiche.

Per dimostrare ciò è sufficiente vedere che ogni punto costruibile ha coordinate ottenibili da  $\mathbb{Q}$  utilizzando esclusivamente le proprietà di campo (chiusura rispetto la somma, il prodotto, l'inverso etc) e l'operazione  $a \mapsto \sqrt{1+a^2}$ ; come in altre dimostrazioni precedenti si opererà per induzione.

I punti originali  $X$  e  $Y$  hanno le coordinate che stanno banalmente in  $\mathbb{Q}$ .

I nuovi punti costruibili si ottengono come intersezione tra una retta preesistente, i cui coefficienti stanno in  $Re$  per ipotesi induttiva, e una nuova piega ottenuta utilizzando uno dei tre assiomi su punti costruiti.

Per quanto riguarda il caso in cui vengono usati gli assiomi  $O1$  e  $O2$  la dimostrazione è uguale a quella della proposizione 6.10 del paragrafo precedente; resta da studiare quindi solo il caso in cui la nuova piega sia ottenuta da  $O3$ .

Siano due rette preesistenti  $a_1x + b_1y + c_1 = 0$  e  $a_2x + b_2y + c_2 = 0$  dove i coefficienti stanno in  $Re$  per ipotesi induttiva.

Nel caso in cui le due rette non siano parallele, le due equazioni delle bisettrici sono date dalla formula:

$$\frac{a_1x + b_1y + c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \pm \frac{a_2x + b_2y + c_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}} \iff \frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_1\sqrt{1 + \left(\frac{b_1}{a_1}\right)^2}} = \pm \frac{a_2x + b_2y + c_2}{a_2\sqrt{1 + \left(\frac{b_2}{a_2}\right)^2}}$$

e quando la piega data da una di queste equazioni si interseca con una retta non parallela preesistente  $y = mx + q$  con  $m, q \in Re$ , il punto ottenuto avrà coordinate ottenibili con le operazioni considerate.

Nel caso in cui le due rette di partenza siano parallele, il coefficiente angolare della nuova retta ottenibile con  $O3$  sarà lo stesso delle altre due rette, mentre l'ordinata all'origine sarà il valore medio tra quelle delle due rette, e quindi staranno ancora in  $Re$ . □

Questo teorema permette di dimostrare una particolare proprietà geometrica di questa teoria che evidenzia le maggiori capacità costruttive rispetto alla teoria di Talete.

**Corollario 7.2.** È possibile ruotare attorno all'origine un punto costruibile di un qualsiasi angolo  $\alpha$  costruibile.

*Dimostrazione.* Dato un angolo acuto  $\alpha$  è possibile trasportarlo in modo che abbia vertice nell'origine e sia formato dal semiasse positivo delle  $x$  e da una certa retta  $r: y = mx + q$ . Su tale retta si considerino i punti costruibili  $P$  e  $Q$  di ascisse rispettivamente  $1$  e  $1 + \sqrt{1+m^2}$ ; ne consegue che la distanza  $|PQ| = 1 + m^2 \in \Pi$ .

Seguendo il ragionamento della dimostrazione della proposizione 6.14 è facile vedere che la matrice di rotazione richiesta ha coefficienti nel campo  $\Pi$  e perciò per ruotare un punto con tale matrice sono sufficienti le operazioni di campo.

Nel caso in cui  $\alpha$  non sia acuto è sufficiente lavorare con gli angoli complementari. □

Col teorema 7.2 si è trovata una buona caratterizzazione del campo dei numeri Pitagorici, tuttavia è necessario studiare meglio le proprietà di questo campo per capire se un determinato numero vi appartiene o meno.

Si può vedere facilmente che numeri come ad esempio che  $\sqrt{2} = \sqrt{1+1^2}$ ,  $\sqrt{3} = \sqrt{1+(\sqrt{2})^2}$ ,  $\sqrt{4+2\sqrt{2}} = \sqrt{1+(1+\sqrt{2})^2}$  appartengono al campo  $Re$ .

Per induzione si può inoltre dimostrare che  $\sqrt{n} \in Re \quad \forall n \in \mathbb{N}$ , anche se in generale questo non varrà per tutti i numeri costruibili.

Si avrà tuttavia bisogno di un criterio applicabile anche a numeri più complessi per determinarne la costruibilità.

Per determinare questo criterio di costruibilità è necessario innanzitutto ricordare un paio di definizioni algebriche e richiamare alcuni lemmi le cui dimostrazioni si possono trovare in [4].

Sia  $w \in \mathbb{C}$ , una qualsiasi radice del polinomio minimo  $\min_w(x)$  di  $w$  su  $\mathbb{Q}$  è detta **radice coniugata**, o semplicemente **coniugato**, di  $w$ .

**Lemma 7.2.** *Sia  $K$  un'estensione algebrica di  $\mathbb{Q}$ , allora un elemento  $\alpha \in K$  è somma di quadrati in  $K$  se e solo se tutti i suoi coniugati reali sono positivi.*

**Lemma 7.3.** *Sia  $\alpha$  un coniugato di  $x^2$ , allora  $\alpha = \beta^2$  dove  $\beta$  è coniugato di  $x$ .*

Un numero reale è detto **totalmente reale** se ogni suo coniugato è reale.

Indicheremo con la lettera  $\mathbb{F}_{tr}$  l'insieme di tutti i numeri totalmente reali.

**Teorema 7.3.** *L'insieme  $\mathbb{F}_{tr}$  forma un campo ed è chiuso rispetto all'operazione  $x \mapsto \sqrt{1+x^2}$ .*

Da questo risultato e dal teorema 7.2 è immediato concludere che:

**Corollario 7.3.**  $Re \subseteq \mathbb{F}_{tr}$ .

Questo corollario non dice ancora chiaramente chi è effettivamente il campo  $Re$ , però fornisce un ottimo strumento per verificare la non costruibilità di alcuni numeri.

Ad esempio è facile vedere che il numero  $w = \sqrt[3]{2}$  non è un numero costruibile; infatti il suo polinomio minimo è  $x^3 - 2$  e perciò gli altri due coniugati di  $w$  sono  $\sqrt[3]{2} \left(-\frac{1}{2} \pm i \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ ; quindi  $w$  non è totalmente reale. Da questo si ha come conseguenza di carattere geometrico l'impossibilità con questa teoria di duplicare un cubo.

Altro esempio geometrico è il fatto di garantire che non è sempre possibile costruire un triangolo rettangolo dati una ipotenusa e un cateto costruibili. Infatti posso considerare come controesempio il caso in cui l'ipotenusa sia lunga  $\sqrt{2+\sqrt{2}}$  e il cateto sia lungo 1.

È facile verificare che entrambi sono numeri costruibili perché  $\sqrt{2+\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{-1} \sqrt{4+2\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{-1} \sqrt{1+(1+\sqrt{2})^2}$ , ma l'altro cateto avrà misura  $\sqrt{2+\sqrt{2}-1} = \sqrt{1+\sqrt{2}}$  che non è un numero totalmente reale in quanto il suo polinomio minimo  $x^4 - 2x^2 - 1$  ha due radici non reali  $\pm \sqrt{1-\sqrt{2}}$ .

Analogamente non è sempre possibile costruire un triangolo rettangolo le cui proiezioni sull'ipotenusa, e quindi l'ipotenusa stessa, sono numeri costruibili. In questo caso posso considerare come esempio le due proiezioni lunghe 1 e  $\sqrt{2}$ . Se questo triangolo fosse costruibile lo sarebbe anche l'altezza relativa all'ipotenusa, che dal teorema di Euclide risulta essere  $\sqrt[4]{2}$ ; eppure il polinomio minimo di  $\sqrt[4]{2}$  che è  $x^4 - 2$  ha due radici non reali  $\pm i\sqrt[4]{2}$ . Da un punto di vista algebrico questo esempio ci garantisce che il campo  $Re$  non è chiuso rispetto all'operazione  $x \mapsto \sqrt{x}$ .

Come si è visto nel sottoparagrafo 4.8, il campo dei numeri costruibili con riga e compasso, che sarà indicato con  $\mathbb{F}_{rc}$  è il più piccolo sottocampo dei reali chiuso rispetto all'operazione  $x \mapsto \sqrt{x}$ . Viene naturale chiedersi che relazione c'è tra il campo  $Re$  dei numeri di Pitagora e il campo  $\mathbb{F}_{rc}$ .

**Proposizione 7.2.**  $Re \subsetneq \mathbb{F}_{rc}$ .

*Dimostrazione.* Si è dimostrato che  $Re$  è il più piccolo sottocampo dei reali chiuso per l'operazione  $x \mapsto \sqrt{1+x^2}$ . Ma con le sole proprietà di campo si vede che se  $x \in Re$ , allora  $1+x^2 \in Re$ ; quindi è sufficiente utilizzare l'operazione  $a \mapsto \sqrt{a}$  delle costruzioni riga e compasso per definire tutti i numeri in  $Re$ . Questo dimostra l'inclusione, è necessario ora dimostrare che tale inclusione è stretta.

Tuttavia questa affermazione deriva direttamente da un'analisi precedente in cui si osservava che  $Re$  non è chiuso rispetto a  $a \mapsto \sqrt{a}$ . □

Questa proposizione ci dice quindi che ogni costruzione fatta con la teoria di Pitagora è costruibile anche con l'uso di riga e compasso, tuttavia non vale il viceversa. Osserviamo ora la caratterizzazione finale del campo  $Re$  dei numeri di Pitagora.

**Teorema 7.4.** *Il campo dei numeri costruibili  $\Pi$  con la geometria di Pitagora è tale che  $\Pi = Re(i)$  con  $Re = \mathbb{F}_{tr} \cap \mathbb{F}_{rc}$ .*

*Dimostrazione.* Il fatto che  $\Pi = Re(i)$  e che  $Re \subseteq \mathbb{F}_{tr} \cap \mathbb{F}_{rc}$  derivano direttamente dalle considerazioni di inizio paragrafo, dal corollario 7.3 e dalla proposizione 7.2.

Resta da vedere che, dato  $\alpha \in \mathbb{F}_{tr} \cap \mathbb{F}_{rc}$ , esso sia effettivamente un elemento di  $Re$ .

Il fatto che  $\alpha \in \mathbb{F}_{tr} \cap \mathbb{F}_{rc}$  significa che esiste una catena ascendente di campi

$$\mathbb{Q} = K_0 < K_1 < \dots < K_n$$

tale che  $K_i = K_{i-1}(\beta_i)$  con  $\beta_i$  totalmente reali,  $\alpha \in K_n$ , e  $[K_i : K_{i-1}] = 2$  per  $i = 1 \dots n$ . In particolare, siccome le estensioni sono tutte di grado 2, ogni  $\beta_i$  avrà un polinomio minimo di secondo grado, ovvero risolverà un polinomio del tipo  $x^2 + c_i x + d_i$  con  $c_i, d_i \in K_{i-1}$ .

Quindi si avrà che  $(\beta_i + \frac{c_i}{2})^2 = \frac{c_i^2}{4} - d_i \in K_{i-1}$ .

Per il lemma 7.3 i coniugati di  $(\beta_i + \frac{c_i}{2})^2$  saranno i quadrati dei coniugati di  $\beta_i + \frac{c_i}{2}$  quindi in particolare sono positivi.

Per il lemma 7.2 inoltre si ha che  $(\beta_i + \frac{c_i}{2})^2$  si può scrivere come somma di quadrati in  $K_{i-1}$ ;

sia quindi  $(\beta_i + \frac{c_i}{2})^2 = a_1^2 + \dots + a_m^2$  con gli  $a_i \in K_{i-1}$  da cui si ottiene:

$$\begin{aligned} \beta_i &= \sqrt{a_1^2 + \dots + a_m^2} - \frac{c_i}{2} = a_1 \sqrt{1 + \left(\frac{a_2}{a_1}\right)^2 + \dots + \left(\frac{a_m}{a_1}\right)^2} - \frac{c_i}{2} = \\ &= a_1 \sqrt{1 + \left(\frac{a_2}{a_1} \sqrt{1 + \left(\frac{a_3}{a_2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{a_m}{a_2}\right)^2}\right)^2} - \frac{c_i}{2} = \dots \end{aligned}$$

Ripetendo tale costruzione per ogni  $\beta_i$  si riusciranno ad ottenere tutti i numeri  $\alpha \in \mathbb{F}_{tr} \cap \mathbb{F}_{rc}$  a partire da  $\mathbb{Q}$  con l'uso delle operazioni di campo e con l'operazione  $a \mapsto \sqrt{1+a^2}$ .

□

## 8 La Teoria di Euclide

Nel paragrafo 6 si era visto che, dato il corollario 6.2, l'assioma  $O4$  derivava direttamente dai primi due assiomi  $O1$  e  $O2$ . Si può passare quindi ad analizzare direttamente la relazione che c'è tra l'assioma  $O5$  e gli assiomi precedenti.

Si definisca come **Teoria di Euclide** la teoria assiomatica costituita da due punti originali  $X$  e  $Y$  e dall'insieme di assiomi  $\mathcal{S} = \{O1, O2, O3, O5\}$ , dove si ricordi che  $O5$  è l'assioma che dice:

*$O5$  Data una retta costruibile  $r$  e due punti costruibili  $P$  e  $Q$ , se esiste una piega passante per  $Q$  e che riflette  $P$  su  $r$ , allora essa è costruibile.*

Dal lemma 6.4 inoltre anche la riflessione  $P'$  del punto  $P$  rispetto alla nuova piega risulterà essere un punto costruibile.

Si noti che, per la discussione fatta all'inizio dello scorso paragrafo, è sufficiente prendere solo due punti originali in quanto un terzo punto  $Z$  è facilmente costruibile.

Da questo paragrafo in poi, per non fare confusione, la geometria di Euclide classica, ovvero con le costruzioni effettuate con riga e compasso, sarà chiamata Geometria di riga e compasso, mentre per **Geometria di Euclide** si intenderà la geometria sviluppata con questi assiomi e queste condizioni iniziali.

Naturalmente, contenendo gli assiomi  $O1, O2$  e  $O3$ , tutte le costruzioni realizzabili nelle geometrie di Talete e Pitagora saranno ancora costruibili.

Come si è visto nel sottoparagrafo 4.5 questo assioma ci permette, dato un punto costruibile  $P$  e una retta costruibile  $r$ , di tracciare tutte le rette che rappresentano l'involuppo della parabola di fuoco  $P$  e direttrice  $r$ ; inoltre, detto  $P'$  la riflessione del fuoco  $P$  rispetto ad una tangente  $s$ , la retta per  $P'$  e perpendicolare a  $r$  intersecherà la tangente  $s$  nel punto  $R$  di tangenza, che quindi sarà anch'esso costruibile. Come si vedrà questo fatto rappresenta uno strumento molto efficace per studiare le estensioni quadratiche.

In questo paragrafo si riuscirà a dimostrare l'equivalenza tra la geometria di Euclide realizzata con gli origami e la geometria costruita tramite l'uso di riga e compasso.

Questa equivalenza verrà analizzata prima da un punto di vista strettamente geometrico, e successivamente da un punto di vista algebrico.

### 8.1 La Geometria di Euclide

Come è noto la geometria di riga e compasso si basa su poche e semplici regole:

- Dati due punti costruibili, la retta tra di essi è costruibile
- Dati due punti costruibili, la circonferenza di centro uno dei due e passante per l'altro è costruibile
- Intersezioni tra due rette, tra una retta e una circonferenza o tra due circonferenze costruibili rappresentano punti costruibili

Per quanto riguarda il primo punto, nella teoria di Euclide è soddisfatta dalla presenza dell'assioma  $O1$ , mentre il fatto che intersezione di rette costruibili dia punti costruibili è una delle condizioni delle teorie origami.

Quello che è necessario dimostrare sono le relazioni tra circonferenze e costruibilità; naturalmente non potendo utilizzare uno strumento come il compasso non sarà possibile realizzare delle vere e proprie circonferenze.

Per aggirare questo problema ci si concentrerà esclusivamente sui punti costruibili di una circonferenza e sui punti di intersezione che si vorrà dimostrare essere costruibili. Verrà usato il termine *circonferenza fittizia* per sottolineare il fatto che la circonferenza in questione sarà determinata grazie alla costruzione esclusivamente del centro e un punto di passaggio, senza tracciare effettivamente una circonferenza sul piano.

**Proposizione 8.1.** *Siano  $C$  e  $P$  due punti costruibili e sia  $\mathcal{C}$  una circonferenza fittizia di centro  $C$  e raggio  $\overline{CP}$ .*

*Allora se una retta interseca la circonferenza  $\mathcal{C}$ , i punti di intersezione sono costruibili.*

*Dimostrazione.* Sia  $r$  una generica retta che interseca  $\mathcal{C}$  e si chiamino  $A$  e  $B$  i due punti di intersezione.

Gli assi dei segmenti  $\overline{AP}$  e  $\overline{BP}$  passano per il centro  $C$  e quindi per l'assioma  $O5$  sono pieghe costruibili. Inoltre i punti  $A$  e  $B$  coincidono con le riflessioni del punto  $P$  rispetto a queste due pieghe, e quindi sono anch'essi costruibili. □

**Proposizione 8.2.** *Date due circonferenze fittizie  $\mathcal{C}_1$  e  $\mathcal{C}_2$  di centri  $C_1$  e  $C_2$  e passanti rispettivamente per i punti  $P_1$  e  $P_2$ . Allora, se le due circonferenze si intersecano, i due punti di intersezione sono costruibili.*

*Dimostrazione.* Senza perdita di generalità è possibile considerare i punti costruibili  $P_1$  e  $P_2$  tali che i raggi che insistono su tali punti siano perpendicolari alla retta  $C_1C_2$ .

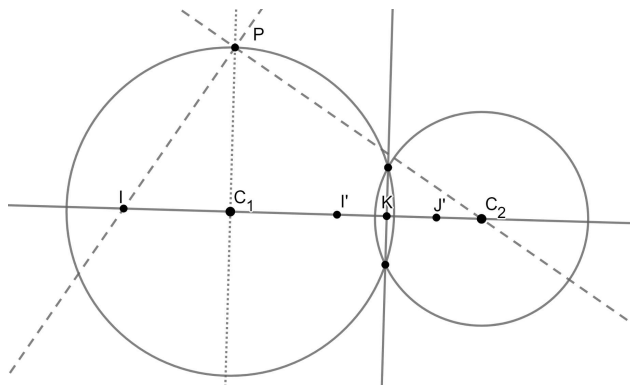
Infatti si è visto che è sempre possibile costruire le rette perpendicolari a  $C_1C_2$  e passante per i centri e trasportarci sopra i segmenti di lunghezza radiale.

Si costruiscano innanzitutto la retta  $P_1C_2$  e la sua perpendicolare passante per il punto  $P_1$  che intersecherà la retta  $C_1C_2$  in un nuovo punto costruibile  $I$ .

Creata ora la piega  $C_1P_1$ , sia  $I'$  la riflessione rispetto ad essa del punto  $I$ , e per costruzione starà ancora sulla retta  $C_1C_2$ .

Si denomini ora per semplicità  $r_i = \overline{C_iP_i}$   $i = 1, 2$ . Utilizzando il teorema di Euclide sul triangolo rettangolo  $IC_2P_1$  si ottiene che  $r_1^2 = \overline{C_1I} \cdot \overline{C_1C_2}$ .

Riportando le stesse costruzioni anche sulla seconda circonferenza si otterranno due nuovi punti  $J$  e  $J'$  sulla retta  $C_1C_2$ , e per lo stesso ragionamento si avrà  $r_2^2 = \overline{C_2J} \cdot \overline{C_1C_2}$ .





Sia ora il punto costruibile  $K$  il punto medio del segmento  $I'J'$  e si osservi che:

$$\begin{aligned} r_1^2 - r_2^2 &= \overline{C_1 C_2} \cdot (\overline{C_1 I} - \overline{C_2 J}) = (\overline{C_1 I'} + \overline{I'K} + \overline{J'K} + \overline{C_2 J'}) \cdot (\overline{C_1 I'} - \overline{C_2 J'}) = \\ &= (\overline{C_1 I'})^2 + \overline{I'K} \cdot \overline{C_1 I'} + \overline{J'K} \cdot \overline{C_1 I'} + \overline{C_2 J'} \cdot \overline{C_1 I'} - \overline{C_1 I'} \cdot \overline{C_2 J'} - \overline{I'K} \cdot \overline{C_2 J'} - \overline{J'K} \cdot \overline{C_2 J'} - (\overline{C_2 J'})^2 = \\ &= (\overline{C_1 I'})^2 + 2\overline{I'K} \cdot \overline{C_1 I'} - 2\overline{J'K} \cdot \overline{C_2 J'} - (\overline{C_2 J'})^2 = \\ &= (\overline{C_1 I'} + \overline{I'K})^2 - (\overline{C_2 J'} + \overline{J'K})^2 = (\overline{C_1 K})^2 - (\overline{C_2 K})^2 \end{aligned}$$

Da questa equazione si ottiene che  $r_1^2 - (\overline{C_1 K})^2 = r_2^2 - (\overline{C_2 K})^2$  da cui, per il teorema di Pitagora, si può dedurre che  $K$  è l'intersezione tra l'asse radicale e l'asse centrale delle due circonferenze.

Una volta costruito l'asse radicale la dimostrazione si conclude per la proposizione precedente. □

Con queste due proposizioni si è dimostrato che ogni punto costruibile con l'uso di riga e compasso, è ottenibile anche all'interno della geometria di Euclide.

Per vedere che effettivamente queste due teorie coincidono saranno analizzate da un punto di vista algebrico.

## 8.2 I numeri di Euclide

In modo analogo ai capitoli precedenti verranno definiti **numeri di Euclide**, e indicati con  $\mathcal{E}$ , il sottoinsieme di numeri complessi ottenibile con la teoria di Euclide.

**Proposizione 8.3.** *I numeri di Euclide formano un sottocampo dei complessi chiuso per coniugazione e per l'operazione  $x \mapsto \sqrt{x}$ .*

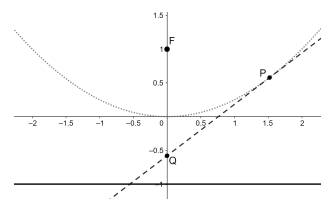
*Dimostrazione.* Abbiamo già visto che i numeri di questo genere formano un sottocampo complesso chiuso per coniugazione; manca da far vedere che è anche chiuso per l'operazione di radice quadrata.

Si consideri la parabola con fuoco nel punto costruibile  $Z$  di coordinate  $(0; 1)$  e con direttrice la retta costruibile  $d$  di equazione  $y = -1$ ; sarà quindi la parabola di equazione  $y = \frac{1}{4}x^2$ .

Si è visto all'inizio di questo paragrafo che è sempre costruibile una tangente ad una parabola e il suo punto di tangenza.

Usando semplici formule geometria analitica è facile vedere che la tangente nel punto costruibile della parabola  $P = (k; \frac{1}{4}k^2)$  interseca l'asse delle ordinate nel punto  $(0; -\frac{1}{4}k^2)$ .

Pertanto per verificare la chiusura del campo sotto radice quadrata è sufficiente notare che, considerato un punto  $Q = (0; -\frac{1}{4}n)$  con  $n$  costruibile positivo, le rette tangenti alla parabola e passanti per tale punto, avranno come punti di tangenza i punti costruibili  $(\pm\sqrt{n}; \frac{1}{4}n^2)$ , e quindi  $\sqrt{n}$  risulta costruibile. Per  $n$  negativo sarà sufficiente aggiungerci l'unità immaginaria.



□

**Teorema 8.1.** *I numeri di Euclide corrispondono ai numeri costruibili con riga e compasso.*

*Dimostrazione.* Si ricordi il fatto noto, già introdotto nel sottoparagrafo 4.8, che i numeri costruibili con riga e compasso formano il più piccolo sottocampo dei complessi chiuso per coniugazione e per l'operazione  $x \mapsto \sqrt{x}$ .

Per la proposizione precedente sappiamo che i numeri costruibili con riga e compasso sono sicuramente contenuti nei numeri euclidei; per il viceversa è sufficiente verificare che tutti i numeri di Euclide si ottengono con le sole operazioni di campo ed estrazione di radice (i.e. formano il più piccolo campo con l'operazione di estrazione di radice).

Nel paragrafo precedente si è già visto che i due punti originali e tutti i punti costruibili intersecando pieghe ottenute dagli assiomi  $O1, O2$  e  $O3$ , rispettano le condizioni richieste. È ora necessario analizzare il caso della piega ottenuta tramite  $O5$ .

Siano allora due punti costruibili  $P = (x_p; y_p)$  e  $Q = (x_q; y_q)$  e una retta costruibile  $r$  di equazione  $y = \bar{m}x + \bar{q}$ , con  $x_p, y_p, x_q, y_q, \bar{m}, \bar{q}$  costruibili con riga e compasso.

L'assioma  $O5$  ci permette di creare una piega di equazione  $y = mx + q$  che passi per il punto  $Q$  e che mandi il punto  $P$  sulla retta  $r$ .

Dal fatto che la retta passi per il punto  $Q$  si ottiene che  $q = y_q - mx_q$ .

Ricordiamo che le coordinate del punto ottenuto dalla riflessione di  $P$  rispetto a  $r$  osserva la formula:

$$\begin{cases} x' = \frac{-2mq + x_p - m^2 x_p + 2my_p}{m^2 + 1} = \frac{-2m(y_q - mx_q) + x_p - m^2 x_p + 2my_p}{m^2 + 1} \\ y' = \frac{2q + 2mx_p - y_p + m^2 y_p}{m^2 + 1} = \frac{2(y_q - mx_q) + 2mx_p - y_p + m^2 y_p}{m^2 + 1} \end{cases}$$

Utilizzando il fatto che la riflessione di  $P$  deve stare sulla retta  $r$  si ottiene che:

$$\frac{2y_q - 2mx_q + 2mx_p - y_p + m^2 y_p}{m^2 + 1} = \bar{m} \cdot \frac{-2my_q + 2m^2 x_q x_p - m^2 x_p + 2my_p}{m^2 + 1} + \bar{q}$$

da cui

$$2y_q - 2mx_q + 2mx_p - y_p + m^2 y_p = -2m\bar{m}y_q + 2m^2\bar{m}x_q x_p - m^2\bar{m}x_p + 2m\bar{m}y_p + \bar{q}m^2 + \bar{q}$$

$$(y_p - 2\bar{m}x_q x_p + \bar{m}x_p - \bar{q})m^2 + (-2x_q + 2x_p + 2\bar{m}y_q - 2\bar{m}y_p)m + (2y_q - y_p - \bar{q}) = 0$$

Da quest'ultima equazione si può osservare che  $m$ , e di conseguenza  $q$ , è ottenibile con le sole operazioni di campo e di estrazione di radice quadrata.

In modo analogo a quello usato in molte dimostrazioni precedenti si conclude che tutti i punti della teoria di Euclide sono ottenibili con riga e compasso. □

### 8.3 La dipendenza di alcuni assiomi

L'aggiunta di  $O5$  agli assiomi precedenti ha un'ulteriore conseguenza molto particolare; si può infatti vedere che gli assiomi  $O1$  e  $O2$  diventano equivalenti, e che  $O3$ ,  $O4$  e  $O7$  si possano derivare da  $O1$  e  $O5$ .

**Proposizione 8.4.** *In una teoria in cui vale l'assioma  $O5$  le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

- i) Vale l'assioma  $O1$*
- ii) Vale l'assioma  $O2$*

*Dimostrazione.  $i) \Rightarrow ii)$*

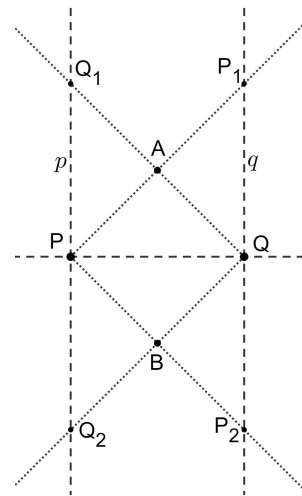
Siano  $P$  e  $Q$  due punti costruibili, si può costruire la retta  $PQ$  grazie all'assioma  $O1$ .

A questo punto applicando l'assioma  $O5$  ai punti  $P, Q$  e alla retta tra di essi, si trovano la piega  $p$ , passante per  $P$  e perpendicolare a  $PQ$ , e la piega  $q$ , passante per  $Q$  e ortogonale sempre a  $PQ$ .

Utilizzando per due volte l'assioma  $O5$  è possibile costruire le rette  $PP_1$  e  $PP_2$  che passano per il punto  $P$  e che riflettono il punto  $Q$  sulla retta  $p$ .

In modo del tutto analogo si possono costruire le due rette  $QQ_1$  e  $QQ_2$  passanti per  $Q$  e riflettenti il punto  $P$  sulla retta  $q$ . Per motivi geometrici i punti  $A$  e  $B$ , intersezioni rispettivamente tra le rette  $PP_1$  e  $QQ_1$  e  $PP_2$  e  $QQ_2$ , apparterranno all'asse del segmento  $\overline{PQ}$ .

Applicando quindi l'assioma  $O1$  ai punti  $A$  e  $B$  si ottiene l'asse cercato.

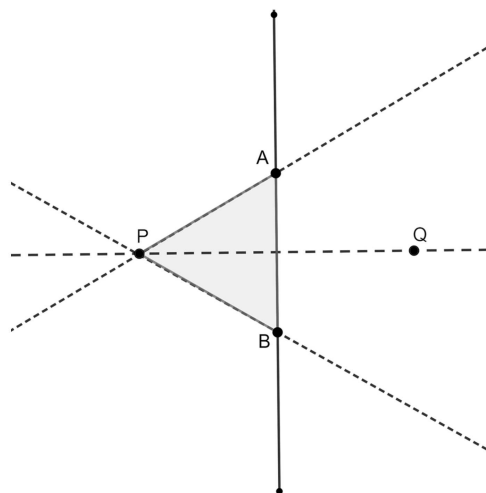


*ii)  $\Rightarrow i)$*

Siano  $P$  e  $Q$  due punti costruibili e sia  $r$  l'asse ottenuto con  $O2$ ; con l'assioma  $O5$  è possibile creare due pieghe per  $P$  che riflettono il punto  $Q$  sulla retta  $r$ .

Allora queste due pieghe intersecheranno l'asse  $r$  in due punti costruibili  $A$  e  $B$ . Per l'esattezza  $A$  e  $B$  saranno i due punti di  $r$  tali che il triangolo  $PAB$  sia equilatero e quindi l'asse del segmento  $\overline{AB}$  sarà esattamente la retta  $PQ$ .

□



**Proposizione 8.5.** *Gli assiomi O3, O4 e O7 derivano esclusivamente dall'assioma O5 e da uno tra gli assiomi equivalenti O1 o O2.*

*Dimostrazione. Caso O3:* Siano due rette  $r$  e  $s$  intersecanti nel punto  $Q$ , e sia  $P$  un altro punto costruibile di  $r$  che esiste per il lemma 5.2 che è ancora valido vista la presenza di  $O1$  e  $O2$ . Allora la piega ottenuta con l'assioma  $O5$ , che passa per il punto di intersezione  $Q$  e riflette  $P$  sulla retta  $s$ , sarà la bisettrice dell'angolo tra le due rette.

Nel caso in cui le due rette  $r$  e  $s$  siano parallele, è sufficiente prendere due punti costruibili di  $r$  e creare il loro asse; tale piega genererà due nuovi punti costruibili, uno per ogni retta, il cui asse sarà la retta cercata.

*Casi O4 e O7:* Derivano direttamente dai corollari 6.2 e 6.3 a pagina 17 che facevano uso degli assiomi  $O1$  e  $O2$ .

□

Un modo quindi più economico dal punto di vista assiomatico per definire la teoria di Euclide è il seguente:

**Corollario 8.1.** *La teoria di Euclide è la teoria assiomatica costituita da due punti originali  $X$  e  $Y$  e dall'insieme di assiomi  $\mathcal{S} = \{O1, O5\}$  o  $\mathcal{S} = \{O2, O5\}$ .*

## 9 La Teoria degli Origami

Nel paragrafo 6 si è visto che l'assioma  $O7$  è derivabile direttamente dai primi due assiomi  $O1$  e  $O2$ ; per questo motivo aggiungendo l'assioma  $O6$  si avrà l'ultima possibile teoria degli origami.

Viene definita quindi come **Teoria di Origami** la teoria assiomatica costituita da due punti originali  $X$  e  $Y$  e dall'insieme di assiomi  $\mathcal{S} = \{O1, O2, O3, O5, O6\}$ , dove ricordiamo che  $O6$  è l'assioma che dice:

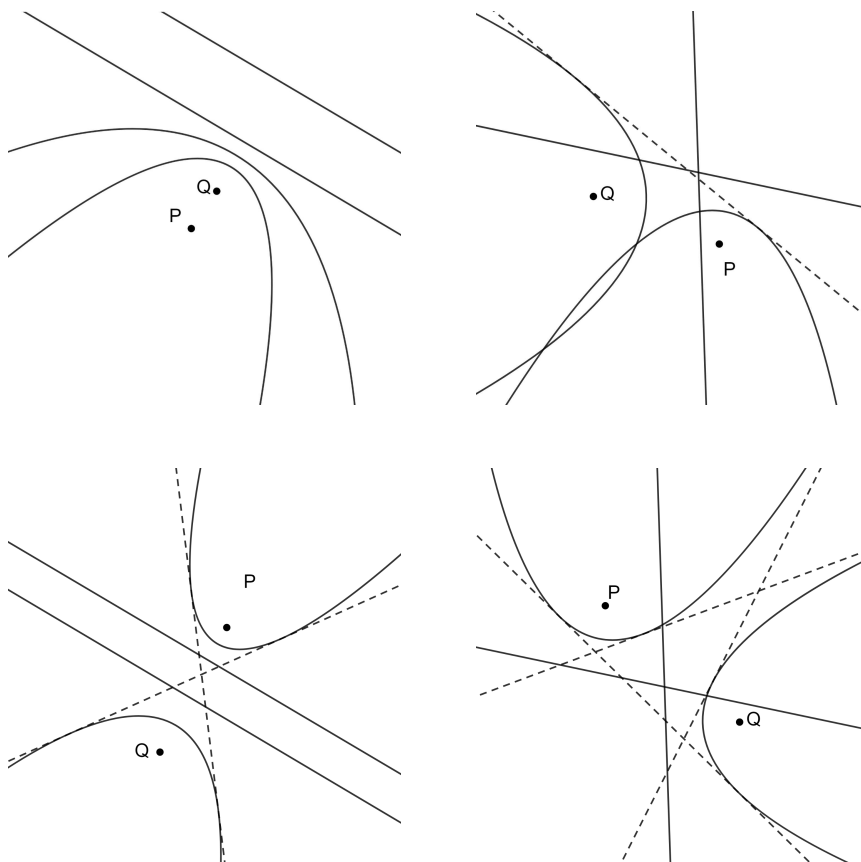
*$O6$  Dati due punti costruibili  $P$  e  $Q$ , con  $P \neq Q$ , e due rette costruibili  $r$  e  $s$ , se esiste una piega che riflette  $P$  su  $r$  e  $Q$  su  $s$  allora essa è costruibile.*

Anche in questa teoria naturalmente sarà sufficiente prendere solo due punti originali in quanto un terzo punto  $Z$  risulta facilmente costruibile.

### 9.1 la Geometria degli Origami

Come anticipato nel sottoparagrafo 4.6, questo assioma permette di costruire una qualunque piega che sia tangente contemporaneamente a due parabole.

Il numero di nuove pieghe costruibili dipende ovviamente dalla posizione reciproca dei 2 punti e delle 2 rette variando da tre a nessuna tangente in comune.



## 9.2 I numeri Origami

Con la medesima idea adoperata per le altre teorie, posti i punti  $X$  e  $Y$  in corrispondenza dei numeri complessi  $0$  e  $1$ , sarà indicato con  $\mathcal{O}$  il sottocampo complesso dei dei **numeri Origami**, ovvero i numeri costruibili con questa teoria. Sicuramente quindi si avrà che:  $\Theta < \Pi < \mathcal{E} \leq \mathcal{O}$ .

Prima di dare una definitiva caratterizzazione di questo campo di numeri, nel prossimo sottoparagrafo si potrà osservare una differenza essenziale tra  $\mathcal{O}$  e i campi di numeri visti nelle precedenti teorie, provando così l'indipendenza del sesto assioma di H-J-H rispetto ai precedenti.

### 9.2.1 Risoluzioni di equazioni di terzo grado

Si è visto che nella teoria di Euclide, analoga a quella di riga e compasso, si è in grado di risolvere equazioni di primo e secondo grado; tuttavia un risultato noto delle costruzioni con riga e compasso, la non duplicazione di un cubo, ci garantisce che le equazioni di terzo grado non saranno in generale risolvibili.

La teoria Origami si dimostra in questo settore più efficace, permettendo la risoluzione di equazioni di terzo grado a coefficienti in  $\mathcal{O}$ .

Vi sono due metodi per ora conosciuti: il primo è dovuto a Roger C. Alperin ed è degli anni duemila, il secondo è dovuto a E.Lill e compare per la prima volta in alcuni scritti di fine '800, anche se non direttamente riferito alla geometria degli origami.

**Metodo di Alperin** Sia una generica cubica  $y = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ .

Come aveva mostrato già nel sesto secolo François Viète, si può utilizzare la traslazione di coordinate  $\tilde{x} = x - \frac{a_2}{3a_3}$  per ottenere la cubica corrispondente  $y = \tilde{x}^3 + a\tilde{x} + b$  dove i coefficienti  $a$  e  $b$  appartengono ancora al campo  $\mathcal{O}$ .

Risolvere la cubica generica quindi equivale a trovare una radice del polinomio  $x^3 + ax + b$ . Si osservi che la dimostrazione della proposizione 6.9, in cui si affermava che un numero  $m$  era costruibile se e solo se era costruibile una retta con tale coefficiente angolare, è ancora perfettamente valida; perciò una buona strategia è quella di trovare una retta costruibile che abbia il coefficiente angolare risolvete il polinomio di terzo grado in questione. Siano  $\mathcal{P}_1$  e  $\mathcal{P}_2$  le due parabole di equazioni:

$$\mathcal{P}_1: y = \frac{x^2}{2} \quad \mathcal{P}_2: \left(y - \frac{a}{2}\right)^2 = 2bx \quad \text{con i coefficienti } a, b \in \mathcal{O}$$

e sia  $m$  il coefficiente angolare di una retta tangente ad entrambe in due punti, rispettivamente  $(x_1, y_1)$  e  $(x_2, y_2)$ .

Utilizzando le formule di sdoppiamento sul punto  $(x_1, y_1)$  si ottengono le relazioni:

$$x_1 = m \quad \text{e} \quad y_1 = \frac{m^2}{2}$$

mentre utilizzandole sul punto  $(x_2, y_2)$  si ottiene:

$$m = \frac{2b}{2y_2 - a} \quad \Rightarrow \quad y_2 = \frac{b}{m} + \frac{a}{2} \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{b}{2m^2}$$

unendo queste quattro relazioni e la definizione di coefficiente angolare si ricava

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\frac{b}{m} + \frac{a}{2} - \frac{m^2}{2}}{\frac{b}{2m^2} - m} \iff \frac{b - 2m^3}{2m} = \frac{2b + am - m^3}{2m}$$

da cui  $m^3 + am + b = 0$ .

**Metodo di Lill** Il metodo di Lill fu ideato intorno alla fine dell'ottocento da un ingegnere austriaco, Eduard Lill, che lo pubblicò per la prima volta sul giornale scientifico *Nouvelles Annales de Mathématiques* nel 1867 e permette di ricavare le soluzioni reali di un polinomio di grado  $n$  tramite l'analisi grafica dei suoi coefficienti.

Sia  $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$  un polinomio di grado  $n$  qualsiasi e con coefficienti reali (per semplicità si può considerare  $a_n > 0$ ).

1) La prima parte di questo metodo prevede la costruzione di una linea spezzata basata sui coefficienti  $a_0 \dots a_n$ .

Per descrivere l'algoritmo che crea questa spezzata il modo più semplice è quello di immaginarsi all'interno del piano, partendo da un punto qualsiasi  $O$  che considereremo la nostra origine, e di muoversi lungo le quattro direzioni *alto*, *basso*, *destra* e *sinistra*, a seconda di determinate regole.

Come prima cosa ci si muove verso l'alto fino ad un certo punto  $A_n$ , in modo tale che la distanza  $|OA_n|$  corrisponda al valore del coefficiente  $a_n$ .

Giunti in  $A_n$  ci si gira verso sinistra di 90 gradi e si procede in linea retta verso avanti o indietro a seconda che il coefficiente  $a_{n-1}$  sia rispettivamente positivo o negativo.

Ancora una volta ci si fermerà in un punto  $A_{n-1}$  in modo tale che la distanza  $|A_n A_{n-1}|$  corrisponda al modulo del coefficiente  $a_{n-1}$ .

Una volta sul punto  $A_{n-1}$  ci si rigira verso sinistra e si reitera lo stesso procedimento percorrendo ogni volta una lunghezza  $a_i$  fino ad arrivare in un certo punto finale  $A_0$ .

Nel caso in cui un qualche coefficiente  $a_k$  sia nullo, ci si girerà ugualmente verso sinistra e si avanzerà di una distanza nulla. (Vedi figura 7)

Arrivati sul punto  $A_0$  la prima fase della costruzione sarà conclusa e si avrà ottenuto una linea spezzata di  $n + 1$  segmenti tutti perpendicolari o paralleli tra loro.

Figura 6:  $x^3 + 6x^2 + 12x + 8$

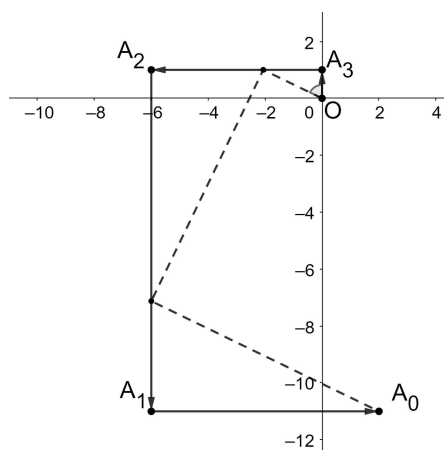
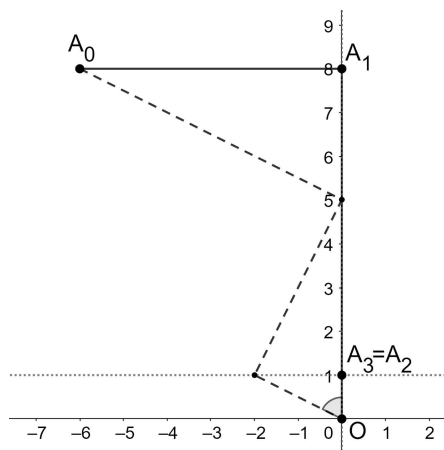


Figura 7:  $x^3 - 7x - 6$



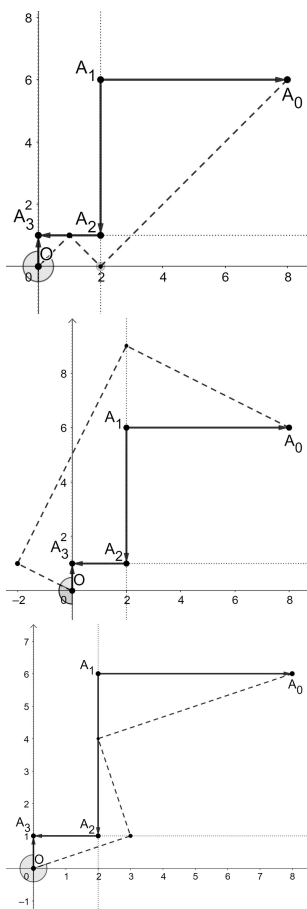


Figura 8:  $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$

2) La seconda parte della costruzione prevede di creare una linea spezzata lunga  $n$  segmenti che unirà il punto  $A_n$  col punto  $O$ .

Il primo segmento di questa spezzata dovrà unire il punto  $O$  con un punto appartenente alla retta  $A_n A_{n-1}$  mentre il secondo segmento dovrà essere perpendicolare al primo e insistere su un punto della retta  $A_{n-1} A_{n-2}$ ; si proceda così finché l' $n$ -esimo segmento dovrà collegarsi col nostro punto finale  $A_0$ .

Sul punto  $O$  si sarà formato ora un angolo orientato  $\alpha$  determinato a partire dal segmento  $\overline{OA_n}$  e ruotando in verso antiorario fino a giungere al segmento della spezzata secondaria uscente da  $O$ .

Tale angolo  $\alpha$  sarà tale che  $x = -\tan \alpha$  risulta essere una radice reale del polinomio in questione.

Naturalmente se il polinomio in questione presenta più di una radice reale, sarà possibile più di una spezzata secondaria che soddisfi i nostri requisiti, una per ogni radice in questione.

Nella figura 8 si può vedere l'esempio del polinomio  $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$  che possiede tre radici reali distinte  $x = 1$ ,  $x = -2$  e  $x = 3$ .

Questo metodo non si limita a calcolare la radice reale  $x_0$  di un polinomio  $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ , ma permette di calcolare la divisione polinomiale tra tale polinomio e il fattore  $(x - x_0)$ .

Se infatti si considera la linea spezzata secondaria ottenuta dal metodo di Lill, e la si ruota di un certo angolo in modo da ottenere che il segmento uscente da  $A_n$  sia in verticale, tale spezzata rappresenterà esattamente il polinomio ottenuto dalla divisione  $\frac{a_n x^n + \dots + a_0}{x - x_0}$ .

Negli anni seguenti alla pubblicazione di Lill purtroppo questo metodo non fu mai particolarmente preso in considerazione, forse per via della difficile applicazione con gli strumenti dell'epoca.

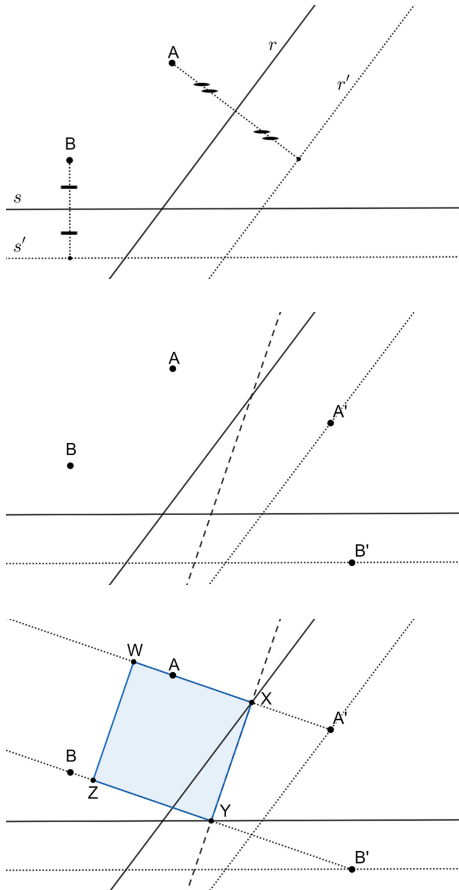
Nel 1936 tuttavia, la professoressa dell'Università di Ferrara Margherita Beloch Piazzolla trovò il modo di utilizzare il metodo di Lill all'interno della teoria degli origami per risolvere le equazioni di primo, secondo e terzo grado.

In particolare alla professoressa Beloch si deve la scoperta di una particolare costruzione nota come il **quadrato di Beloch** che risulta fondamentale per la risoluzione delle cubiche.



**Proposizione 9.1.** *Dati due punti costruibili  $A$  e  $B$  e due rette costruibili  $r$  e  $s$ , è costruibile un quadrato  $WXYZ$  con i due vertici adiacenti  $X$  e  $Y$  appartenenti rispettivamente alle rette  $r$  e  $s$  e le rette  $WX$  e  $YZ$  passanti per  $A$  e  $B$  rispettivamente. Tale figura è detta quadrato di Beloch.*

*Dimostrazione.*



Siano  $A, B, r$  e  $s$  due punti e due rette costruibili.

Come prima cosa si rifletta il punto  $A$  rispetto alla retta  $r$  e si crei una piega  $r'$  parallela alla retta  $r$  passante per il punto riflesso e avente quindi distanza doppia rispetto al punto  $A$ .

Analogamente si ottenga, a partire dal punto  $B$  e dalla retta  $s$ , una seconda retta  $s'$  parallela a  $s$ .

Con l'assioma  $O_6$  è ora possibile costruire una nuova piega che porti simultaneamente il punto  $A$  sulla retta  $r'$  e il punto  $B$  sulla retta  $s'$ .

Denominati  $A'$  e  $B'$  i punti riflessi di  $A$  e  $B$  rispetto a questa piega, si osservi che il punto medio  $X$  del segmento  $\overline{AA'}$  e il punto medio  $Y$  del segmento  $\overline{BB'}$  apparterranno per costruzione alle rette  $r$  e  $s$  rispettivamente.

Inoltre le rette  $AX$  e  $BY$  risultano perpendicolari alla retta  $XY$  in quanto  $XY$  è asse dei segmenti  $\overline{AA'}$  e  $\overline{BB'}$ .

Pertanto è possibile riportare il segmento  $\overline{XY}$  su tali rette e costruire un quadrato con le caratteristiche richieste.

□

Osservando la figura 9 è immediato capire che costruire la seconda spezzata del metodo di Lill per un polinomio di terzo grado è equivalente a costruire il quadrato di Beloch dove i due punti da prendere in considerazione sono quello iniziale e finale e le due rette sono le due rette su cui deve incidere la spezzata cercata.

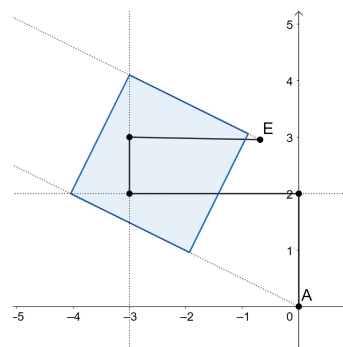


Figura 9:  $2x^3 + 3x^2 - x + \frac{5}{2}$

**Corollario 9.1.** Il campo di numeri  $\mathcal{O}$  è chiuso rispetto all'operazione  $x \mapsto \sqrt[3]{x}$

**Osservazione.** Com'è noto è possibile risolvere un'equazione di quarto grado riconducendosi ad equazioni di grado minore; ne consegue che le equazioni di quarto grado siano risolubili con la teoria degli origami. Uno dei possibili metodi è il seguente:

Sia  $x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$  una generica equazione di quarto grado a coefficienti reali. È possibile aggiungere e togliere il termine  $\frac{a_3^2}{4}x^2$  e riscrivere la formula come

$$x^4 + a_3x^3 + \frac{a_3^2}{4}x^2 = \left(\frac{a_3^2}{4} - a_2\right)x^2 - a_1x - a_0$$

Il primo membro risulta essere un quadrato perfetto e se anche il secondo membro fosse un quadrato perfetto sarebbe possibile estrarre le radici quadrate e ridurre l'equazione a due equazioni di secondo grado. Per fare ciò si può aggiungere ad entrambi i membri un termine in funzione di un'incognita  $y$ , in modo tale che il primo membro rimanga un quadrato perfetto; ad esempio si può ottenere:

$$\left(x^2 + \frac{a_3}{2}x + \frac{y}{2}\right)^2 = \left(\frac{a_3^2}{4} - a_2 + y\right)x^2 + \left(-a_1 + \frac{a_3y}{2}\right)x + \left(-a_0 + \frac{y^2}{4}\right) \quad (1)$$

Per fare in modo che il secondo membro sia un quadrato perfetto è necessario scegliere una  $y$  tale che il discriminante dell'equazione di secondo grado in  $x$  si annulli, ovvero che

$$\left(-a_1 + \frac{a_3y}{2}\right) - 4\left(\frac{a_3^2}{4} - a_2 + y\right)\left(-a_0 + \frac{y^2}{4}\right) = 0$$

da cui

$$y^3 - a_2y^2 + (a_1a_3 - 4a_0)y + (4a_0a_2 - a_0a_3^2 + a_1a_3 - a_1^2) = 0$$

Una volta trovata una  $y$  risolvente questa cubica con uno dei metodi precedentemente illustrati è possibile sostituirla nella 1 per ottenere un'equazione nella forma

$$\left(x^2 + \frac{a_3}{2}x + \frac{y}{2}\right)^2 = (ex + f)$$

per opportuni coefficienti  $e$  e  $f$  ottenuti dalla soluzione  $y$  che ora non è più un'incognita. Da questa equazione si ottengono due equazioni di secondo grado risolubili.

**Lemma 9.1.** Sia  $A = (1, 0)$  e  $a$  la retta  $x = -1$ . Sia  $r$  una retta che riflette  $A$  sulla retta  $a$ , cioè una retta tangente alla parabola  $x = \frac{y^2}{4}$ .

Allora un generico punto  $B = (u, v)$  viene riflesso rispetto alla retta  $r$  nel punto  $B' = (U, V)$  tale che risulti  $(U - u)(U^2 + V^2 - u^2 - v^2) + 2(V - v) = 0$ .

*Dimostrazione.* Sia  $A' = (-1, t)$  la riflessione generica di  $A$  rispetto ad  $r$ , che quindi avrà equazione  $2x - ty + \frac{t^2}{2} = 0$ .

Dal fatto che i due segmenti  $\overline{AA'}$  e  $\overline{BB'}$  risultano paralleli e che il punto medio tra  $B$  e  $B'$  appartenga ad  $r$ , si ottiene:

$$\begin{cases} \frac{V-v}{U-u} = -\frac{t}{2} \\ 2\frac{u+U}{2} - t\frac{v+V}{2} + \frac{t^2}{2} = 0 \end{cases} \implies (U - u)(U^2 + V^2 - u^2 - v^2) + 2(V - v) = 0$$

□

**Teorema 9.1.** *Un numero  $u$  è costruibile con gli origami se e solo se esiste una catena di sottocampi di complessi  $\mathbb{Q} < K_1 < \dots < K_n$  tali che  $u \in K_n$  e tutte le estensioni intermedie sono tali che  $[K_{i+1} : K_i] \leq 3 \quad i = 0, \dots, n-1$ .*

*Dimostrazione.* Sia  $u$  costruibile, allora esisterà una catena ordinata di elementi costruibili, pieghe e punti,  $e_1, \dots, e_m$  con  $e_1$  punto con coordinate razionali.

Procedendo per induzione si può dimostrare che, chiamando  $K_i$  il campo ottenuto a partire dal campo  $K_{i-1}$  e aggiungendo le due coordinate o i due coefficienti del nuovo elemento  $e_i$ , i campi così ottenuti soddisferanno le condizioni richieste.

Se l'elemento  $e_i$  è un punto, quindi ottenuto dall'intersezione di due rette, le sue coordinate si ottengono con le sole operazioni di campo e quindi  $K_i = K_{i-1}$ .

Per quando riguarda le pieghe si utilizza un teorema che verrà dimostrato tra poco per cui gli assiomi  $O3, O4, O5$  e  $O7$  dipendono esclusivamente dagli altri tre; in questo modo il problema si riconduce ad analizzare solo i casi  $O1, O2$  e  $O6$ .

Per gli assiomi  $O1$  e  $O2$  è facile vedere che i coefficienti delle rette sono ottenibili dai due punti con le sole operazioni di campo, perciò anche in questi casi si avrà  $K_i = K_{i-1}$ .

Il caso problematico risulta essere quello di  $O6$ ; siano  $V_i$  e  $r_i$ , con  $i = 1, 2$ , i due punti e le due rette costruibili di partenza per l'assioma  $O6$ ,  $s$  la nuova piega creata da  $O6$  e  $K_{i-1}$  il campo contenente le coordinate di  $V_1$  e  $V_2$  e i coefficienti di  $r_1$  e  $r_2$ .

Si è visto nel lemma precedente che, nel caso in cui  $V_1 = (1, 0)$  e  $r_1 : x = -1$ , allora detto  $V'_2$  il punto ottenuto dalla riflessione di  $V_2$  rispetto a  $s$ , le coordinate di  $V'_2$  stanno in un'estensione  $\overline{K}_{i-1}$  di grado minore o uguale a tre su  $K_{i-1}$ , in quanto le due coordinate di  $V'_2$  dipendono tra loro in modo lineare sul campo  $K_{i-1}$ .

Naturalmente anche la retta  $s$  avrà i coefficienti nel campo  $\overline{K}_{i-1}$  in quanto è ottenibile a partire dai due punti  $V_2$  e  $V'_2$  applicando l'assioma  $O2$ .

Il fatto che  $V_1$  e  $r_1$  siano elementi generici, e non il punto e la retta richiesti nel lemma, non crea troppi problemi in quanto è possibile con un cambio di coordinate riportarsi nel caso opportuno. Da risultati noti di algebra i coefficienti della trasformazione lineare necessari staranno in un'estensione  $\widehat{K}_{i-1}$  di  $K_{i-1}$  di grado minore o uguale a 2.

È possibile quindi continuare la catena di campi che si stanno costruendo aggiungendo due campi che rispettano i requisiti richiesti.

Eliminando le copie dello stessi campi, derivanti dai casi  $K_{i+1} = K_i$ , si ottiene la catena di campi richiesta.

Il viceversa deriva dal fatto che ogni elemento algebrico  $k$  su un certo campo  $K_i$  che soddisfa le ipotesi sarà radice di un polinomio di secondo o terzo grado a coefficienti in  $K_{i-1}$  e quindi è costruibile con gli origami. □

**Corollario 9.2.** *Sia  $u$  un elemento costruibile, allora  $[\mathbb{Q}(u) : \mathbb{Q}] = 2^n 3^m$  per qualche  $n, m \in \mathbb{N}$ .*

**Corollario 9.3.** *Il campo dei numeri origami  $\mathcal{O}$  è il più piccolo sottocampo complesso chiuso per coniugazione e per le operazioni  $a \mapsto \sqrt{a}$  e  $b \mapsto \sqrt[3]{b}$ .*

### 9.3 Relazione con la geometria di Riga e Compasso

Grazie alla possibilità di risolvere equazioni di terzo grado la geometria degli origami permette di poter creare maggiori costruzioni rispetto alla geometria di riga e compasso. Si vedranno ora un paio di esempi di costruzioni non realizzabili con riga e compasso ma costruibili con gli origami.

#### 9.3.1 Duplicazione del cubo

Il problema dell'impossibilità della duplicazione del cubo, ossia la costruzione di un cubo avente volume doppio rispetto a quello di un cubo di spigolo dato, è uno dei tre problemi storicamente più famosi riguardanti la geometria di riga e compasso.

Dato un cubo di lato  $l$  costruibile, il problema è equivalente a capire se  $\sqrt[3]{2}$  risulta essere costruibile o meno.

Ma  $\sqrt[3]{2}$  è soluzione dell'equazione di terzo grado  $x^3 - 2 = 0$  che abbiamo visto essere risolubile con gli origami.

#### 9.3.2 Trisezione di un angolo

Un altro dei problemi irrisolvibili con riga e compasso è la trisezione di un generico angolo  $\beta$ ; in teoria degli origami questo problema è completamente risolubile.

**Proposizione 9.2.** *Sia  $\beta$  un angolo costruibile, allora anche l'angolo  $\frac{\beta}{3}$  è costruibile.*

*Dimostrazione.* Si consideri il caso in cui l'angolo  $\beta$  sia acuto e si vuole ottenere un angolo  $\alpha$  tale che  $\beta = 3\alpha$ .

Siano  $r_1$  e  $r_2$  le due rette costruibili tali che nella loro intersezione  $P$  sia determinato l'angolo  $\beta$ .

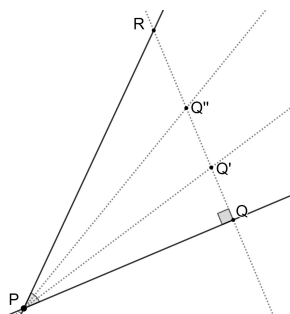
Preso un punto costruibile  $Q$  su  $r_1$  è possibile costruire la retta per  $Q$  e perpendicolare a  $r_1$  e la sua intersezione  $R$  con  $r_2$ .

In particolare si avrà che il rapporto  $|\overline{QR}|/|\overline{PQ}| = \tan(3\alpha)$  che quindi sarà un numero costruibile.

Applicando due volte formula di addizione sul termine  $\tan(3\alpha)$  si ottiene la seguente formula

$$\tan(3\alpha) = \frac{3 \tan \alpha - \tan^3 \alpha}{1 - 3 \tan^2 \alpha}$$

dalla quale, ponendo  $\tan(3\alpha) = k$  e  $\tan \alpha = x$ , si ha  $x^3 - 3kx^2 - 3x + k = 0$ .



Questa equazione è di terzo grado a coefficienti costruibili e quindi ammette una soluzione  $\hat{x} = \tan \alpha$  costruibile. A questo punto è sufficiente costruire sul segmento  $\overline{QR}$  un punto  $Q'$  tale che  $|\overline{QQ'}| = |\overline{PQ}| \cdot \hat{x}$ ; per costruzione l'angolo  $\widehat{QPQ'} = \alpha = \frac{\beta}{3}$ .

Nel caso in cui  $\beta$  non sia acuto è possibile bisecare più volte l'angolo fino ad ottenerne una partizione  $\beta = \bigoplus_{i=1}^n \beta_i$  con  $\beta_i$  acuti, trisecare ogni termine  $\beta_i$  e successivamente sommare tra loro tutti i  $\frac{\beta_i}{3}$  usando il corollario 7.1 a pagina 30.

□

## 9.4 Poligoni costruibili

Avendo appena visto che la geometria degli origami ha la capacità di creare maggiori costruzioni rispetto alla geometria di riga e compasso, ci si aspetta che ci sia la possibilità di costruire un numero maggiore di poligoni regolari. Vale infatti il seguente teorema:

**Teorema 9.2.** *Un  $n$ -agono regolare è costruibile con gli origami se e solo se  $n = 2^a 3^b p_1 \cdots p_m$  con  $a, b \in \mathbb{N}$  e  $p_i$  primi distinti della forma  $p_i = 2^{r_i} 3^{s_i} + 1$ .*

*Dimostrazione.* Si noti innanzitutto che in generale, dato un  $xy$ -agono regolare, considerando un vertice ogni  $y$  è possibile costruire un  $x$ -agono regolare.

Si consideri un  $n$ -agono regolare costruibile e sia  $q^s$ , con  $q$  primo maggiore di 3 e  $s \in \mathbb{N}$ , un divisore di  $n$ ; per l'osservazione appena vista si avrà che è possibile costruire un  $q^s$ -agono regolare, e in particolare è possibile costruire il numero  $\cos \frac{2\pi}{q^s}$ .

Da una nota formula si ha che

$$\left[ \mathbb{Q} \left( \cos \frac{2\pi}{q^s} \right) : \mathbb{Q} \right] = \frac{\phi(q^s)}{2} = \frac{q^{s-1}(q-1)}{2}$$

ma per il corollario 9.2 tale numero può essere diviso solo da 2 o 3. L'unica possibilità è che  $s = 1$  e che  $q = 2^h 3^k + 1$ , e quindi che  $n$  sia della forma richiesta dal teorema.

Per il viceversa sia  $n = 2^a 3^b p_1 \cdots p_m$  con i  $p_i$  come da ipotesi del teorema; i fattori  $2^a$  e  $3^b$  derivano direttamente dalla possibilità di bisecare e trisecare un angolo, perciò la dimostrazione si riduce a verificare che un  $p_1 \cdots p_m$ -agono sia costruibile che è equivalente a provare la costruibilità di  $\cos \left( \frac{2\pi}{p_1 \cdots p_m} \right)$ .

Dal fatto che i  $p_i$  siano primi e primi tra loro, e da note formule riguardanti la funzione di Eulero, si osserva che:

$$\begin{aligned} \left[ \mathbb{Q} \left( \cos \left( \frac{2\pi}{p_1 \cdots p_m} \right) \right) : \mathbb{Q} \right] &= \frac{\phi(p_1 \cdots p_m)}{2} = 2^{-1} \phi(p_1) \cdots \phi(p_m) \\ &= 2^{-1} (p_1 - 1) \cdots (p_m - 1) = 2^a 3^b \end{aligned}$$

Per il corollario 9.2 si conclude. □

Questo teorema permette ad esempio la costruzione di un ettagono e un ennagono regolare, figure che non erano costruibili con il solo uso di riga e compasso. Il poligono regolare col più basso numero  $n$  di lati che non risulta costruibile ha  $n = 11$

## 9.5 La dipendenza di alcuni assiomi

Nel paragrafo precedente si era visto che, considerando uno dei due  $O1$  e  $O2$  e l'assioma  $O5$ , si era in grado di dimostrare altri assiomi; in questo paragrafo si vedrà che considerando l'assioma  $O6$  al posto di  $O5$  i risultati saranno ancora migliori.

**Proposizione 9.3.** *In una teoria in cui vale l'assioma  $O6$  le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

- i) Vale l'assioma  $O1$*
- ii) Vale l'assioma  $O2$*

*Dimostrazione.*

*i)  $\Rightarrow$  ii)* Siano  $P$  e  $Q$  due punti costruibili, allora per l'assioma  $O1$  è possibile costruire la retta  $PQ$ .

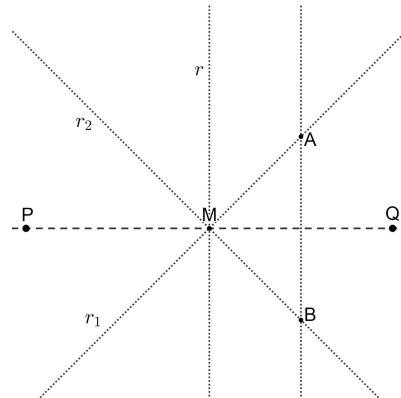
A questo punto è immediato notare che l'asse del segmento  $\overline{PQ}$  corrisponde ad una piega che porta sia  $P$  che  $Q$  sulla retta  $PQ$ , e quindi per l'assioma  $O6$  è costruibile.

*ii)  $\Rightarrow$  i)* Siano  $P$  e  $Q$  due punti costruibili e sia  $r$  l'asse del segmento  $\overline{PQ}$ .

Le due bisettrici  $r_1$  e  $r_2$  tra la retta  $PQ$  e la retta  $r$  saranno costruibili per l'assioma  $O6$ , in quanto entrambe le rette  $r_i$  riflettono i punti  $P$  e  $Q$  sulla retta  $r$ .

Il punto medio del segmento  $\overline{PQ}$ ,  $M$ , sarà quindi costruibile in quanto intersezione delle tre rette  $r, r_1$  e  $r_2$ .

Si può allora costruire l'asse del segmento  $\overline{MQ}$  che intersecherà le rette  $r_1$  e  $r_2$  in due punti costruibili  $A$  e  $B$ . Per motivi di simmetria il segmento  $\overline{AB}$  sarà tale che il suo asse coinciderà con la retta  $PQ$  che sarà quindi costruibile.



□

**Proposizione 9.4.** *In una teoria in cui vale l'assioma  $O6$  e uno tra i assiomi  $O1$  e  $O2$  allora valgono anche i seguenti assiomi:*

- i)  $O3$ : Date due rette costruibili  $r$  e  $s$ , allora è costruibile la piega che porta  $r$  su  $s$ .*
- ii)  $O4$ : Dato un punto costruibile  $P$  e una retta costruibile  $r$ , allora è costruibile la piega passante per  $P$  e perpendicolare ad  $r$ .*
- iii)  $O5$ : Dati due punti costruibili  $P$  e  $Q$  e una retta costruibile  $r$ , allora se esiste una piega passante per  $Q$  e che riflette  $Q$  su  $r$ , allora è costruibile.*
- iv)  $O7$ : Dato un punto costruibile  $P$  e due rette costruibili  $r$  e  $s$ , allora è costruibile una piega perpendicolare a  $s$  e che riflette  $P$  su  $r$ .*

*Dimostrazione.* Per prima cosa si noti che per la proposizione precedente l'assioma  $O6$  insieme ad uno tra  $O1$  o  $O2$  implica che anche l'altro valga.

*iii)* Si consideri  $P, Q$  e  $r$  due punti e una retta costruibile e sia  $s$  una piega passante per  $Q$  e che rifletta  $P$  su  $r$ .

Allora  $s$  riflette contemporaneamente il punto  $P$  sulla retta  $r$  e il punto  $Q$  su una qualche retta costruibile passante per  $Q$ , ad esempio  $PQ$ , e quindi per l'assioma  $O6$  è costruibile.

Si noti che, nonostante sia stato applicato solo l'assioma  $O6$ , gli altri due assiomi sono fondamentali per poter affermare che per il punto  $Q$  passi effettivamente almeno una retta costruibile.

*i), ii) e iv)* Una volta dimostrato che vale  $O5$ , questi tre punti derivano direttamente dalla proposizione 8.5 a pagina 41.

□

## Capitolo III

# Conclusione

### 10 Riassunto e possibili studi futuri

Nella seguente tabella sono riepilogati i principali obiettivi raggiunti.

Teoria	Assiomi derivati	Numeri costruibili	$n$ -agoni costruibili
Teoria di Talete $O1 + O2$	$O4$ e $O7$	$\Theta = \mathbb{Q}(i)$	Parzialmente risolto
Teoria di Pitagora $O1 + O2 + O3$	$O4$ e $O7$	$\Pi = Re(i)$ con $Re = \mathbb{F}_{tr} \cap \mathbb{F}_{rc}$	Questione aperta
Teoria di Euclide $O1$ (o equiv. $O2$ ) + $O5$	$O3$ , $O4$ e $O7$	$\mathcal{E} = \mathbb{F}_{rc}$	$n = 2^a p_1 \cdots p_k$ con $p_i = 2^{2^{r_i}} + 1$
Teoria degli Origami $O1$ (o equiv. $O2$ ) + $O6$	$O3$ , $O4$ , $O5$ e $O7$	$\mathcal{O}$ è il più piccolo sottocampo di $\mathbb{C}$ chiuso per coniugazione e per radice di indice 2 o 3	$n = 2^a 3^b p_1 \cdots p_k$ con $p_i = 2^{r_i} 3^{s_i} + 1$

$\mathbb{F}_{rc}$  = Numeri costruibili con riga e compasso

$\mathbb{F}_{tr}$  = Numeri totalmente reali

**Nota:** in tutte e quattro le teorie è possibile sostituire l'assioma  $O2$  con l'operazione di riflessione rispetto ad una piega.

Dalla tabella appare chiaro che lo scopo principale della tesi, ovvero lo studio delle dipendenze tra i sette assiomi H-J-H, è stato pienamente raggiunto.

In particolar modo nell'ultimo paragrafo si è visto come di siano sufficienti i due assiomi  $O1$  e  $O7$  per derivare gli altri cinque.

Altro fatto che risulta dalla tabella è che vi sono ancora due interessanti questioni aperte riguardanti la costruibilità di poligoni regolari. Per quanto riguarda la teoria di Talete, si è completamente risolto il caso dei poligoni inscritti in una circonferenza con raggio razionale mentre è ancora sconosciuta la situazione riguardante i poligoni inscritti in una circonferenza con raggio irrazionale; invece nella teoria di Pitagora il problema è totalmente inesplorato e con buone probabilità necessita di una discreta conoscenza di algebra e di teoria dei numeri per essere risolto.



## 11 Oltre la teoria classica

### 11.1 Teoria della doppia piega

Come si è visto nel paragrafo 9 la teoria degli origami permette di risolvere equazioni di grado non superiore a 4; da questo fatto si è pensato di ampliare questa teoria introducendo la possibilità di realizzare più pieghe contemporaneamente in modo da poter gestire più gradi di libertà.

Con questa idea Alperin e Lang, [2], hanno definito la teoria origami della doppia piega. Grazie allo stesso metodo utilizzato per dimostrare la completezza della teoria a singola piega, illustrato nel paragrafo 4 di questa tesi, hanno stilato una lunga lista di assiomi che, per costruzione, rappresentano tutte le possibili operazioni realizzabili con due pieghe. Tramite l'uso questi assiomi è possibile risolvere equazioni di quinto grado o costruire poligoni regolari irrealizzabili con la teoria a singola piega.

Tuttavia il numero di nuovi assiomi aggiunti, oltre il centinaio, rende molto complessa l'analisi di questa teoria, inoltre questa modalità di assiomatizzazione presenta gli stessi problemi riscontrati nel caso della singola piega, ovvero l'impossibilità di verificare a priori la dipendenza o meno dei diversi assiomi. Oltre a ciò, la creazione di una doppia piega simultanea risulta decisamente complicata da un punto di vista costruttivo, relegando questa teoria geometrica ad uno studio puramente teorico.

### 11.2 Origami piatti

Nonostante la maggior parte degli origami occupi uno spazio tridimensionale, esiste una categoria di costruzioni, come ad esempio biglietti o buste, il cui sviluppo risulta approssimativamente bidimensionale; tali origami sono detti *origami piatti* o, usando il termine inglese, *flat origami*.

Se si apre una costruzione origami riportandola al foglio di carta quadrato di partenza, quello che risulterà non sarà un foglio liscio come quello da cui si era partiti ma presenterà impresse le diverse pieghe realizzate durante la costruzione.

Tale foglio viene detto *crease pattern* o *modello di piega* ed è tuttora oggetto di studio da parte di numerosi matematici.

In particolare molti lavori affrontano il problema di capire se è possibile determinare se una figura origami sarà piatta senza effettivamente svilupparla, ma limitandosi ad analizzare il suo *crease pattern*.

Questi studi interessano vari campi come la geometria elementare, la teoria dei grafi e la teoria della complessità computazionale, e risultano piuttosto interessanti in ambito ingegneristico e applicativo.

### 11.3 Origami circolari

Nell'ultimo decennio, una volta dimostrato che i sette assiomi H-J-H completavano la teoria degli origami, alcuni studiosi hanno pensato di modificare la lista degli assiomi aggiungendone alcuni che permettevano la possibilità di tracciare circonferenze e intersecare tali circonferenze con le pieghe per creare nuovi punti.

Come è stato evidenziato nel paragrafo 8, tali assiomi non aggiungono nulla al campo di numeri costruibili, né sono effettivamente indipendenti dagli assiomi di H-J-H. Tuttavia utilizzando tali "assiomi", che in definitiva possono essere considerati semplici proposizioni, è possibile creare costruzioni molto interessanti e semplificare di molto le dimostrazioni fatte con il solo uso delle pieghe.

## Bibliografia

- [1] R.C.Alperin, *A mathematical theory of origami constructions and numbers*, New York J. Math, **6** (2000), pp 119-133.
- [2] R.C.Alperin-R.J.Lang, *One-, two-, and multi-fold origami axioms*, in Origami4 - Pasadena, CA, 2006, International Meeting of Origami in Science, Mathematics, and Education, 2009, pp 371–393.
- [3] R.C.Alperin, *Trisections and Totally Real Origami*, American Math. Monthly, vol.112, **N.3**, marzo 2005, pp 200-211.
- [4] D.Auckly-J.Cleveland, *Totally real origami and impossible paper folding*, Amer. Math. Monthly **102**, 1995, pp 215–226.
- [5] W.W.R.Ball, *A short account of the history of mathematics*, Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1888.
- [6] M.Berni, *Problemi di costruibilità*, L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate **2**, vol.33B, aprile 2010, pp 112–138.
- [7] R.Harbin, *Origami*, Sansoni Enciclopedie pratiche, 1971 , pp 112–138.
- [8] A.M.Gleason, *Angle Trisection, the Heptagon, and the Triskaidecagon*, The American Mathematical Monthly, vol.95, **N. 3**, marzo 1988, pp. 185-194.
- [9] T.Hull, *A note on “impossible” paperfolding*, Amer. Math. Monthly **103**, 1996, pp 242–243.
- [10] T.Hull, *Solving Cubics With Creases: The Work of Beloch and Lill*, The American Mathematical Monthly, vol.118, **N. 4**, aprile 2011, pp. 307-315.
- [11] H.Huzita-B.Scimemi, *The algebra of paper-folding (origami)*, Origami Science and Technology — Ferrara, Italy 1989, Proc. First Inter. Meet. Origami Science and Technology, H. Huzita, ed., selfpublished, Ferrara, 1990, pp 205–222.
- [12] J.Justinl, *Résolution par le pliage de l'équation du troisième degré et applications géométriques*, L'Ouvert: Journal of the APMEP of Alsace and the IREM of Strasbourg **42**, 1986, pp 9–19.
- [13] J.L.Krier, *Mathematics and Origami: The Ancient Arts Unite*, 2007
- [14] R.J.Lang, *Origami and Geometric Constructions*, 2003
- [15] D.H.Lehmer, *A note on trigonometric algebraic numbers*, Amer. Math. Monthly **40**, 1933, pp 165–166.
- [16] J.C.Lucero, *On the Elementary Single-Fold Operations of Origami: Reflections and Incidence Constraints on the Plane*, Forum Geometricorum, vol. 17, 2017, pp 207–221.

- [17] M.Lill, *Résolution graphique des équations numériques de tous les degrés à une seule inconnue, et description d'un instrument inventé dans ce but*,  
Nouvelles Annales de mathématiques, vol. 6, 1867, pp. 359-362.
- [18] M.Lill, *Résolution graphique des équations algébriques qui ont des racines imaginaires*,  
Nouvelles Annales de mathématiques, vol. 7, 1868, pp. 363-367.
- [19] P.Magrone-V.Talamanca, *Folding cubic roots: Margherita Piazzolla Beloch's contribution to elementary geometric constructions*,  
16th Conference on Applied Mathematics APLIMAT, 2017.
- [20] J.S.Milne, *Fields and Galois Theory*,  
dispensa, versione 4.40, marzo 2013.
- [21] I.Niven-H.S.Zuckerman-H.L.Montgomery, *An introduction to the theory of numbers*,  
John Wiley and sons inc., 5° edizione, 1991.
- [22] P.Persic, *Abel's Proof: An Essay on the Sources and Meaning of Mathematical Unsolvability*,  
The MIT Press, 2003.
- [23] M.Riaz, *Geometrical solutions of algebraic equations*,  
Amer. Math. Monthly **69**, 1962, pp 654–658
- [24] P.Tangsupphathawat, *Algebraic trigonometric values at rational multipliers of  $\pi$* ,  
Acta et Commentationes Universitatis Tartuensis de Mathematica, vol. 18, **1** , giugno 2014.
- [25] B.Scimemi, *Geometria sintetica*,  
Coop. Libreria Editrice Università di Padova, 2012.
- [26] T.Sundara, *Geometric Exercises in Paper Folding*,  
Chicago, The Open Court publishing company, 3° edizione, 1917.

## **Ringraziamenti**

Il primo ringraziamento va al mio relatore, il prof. Ciraulo, che mi ha seguito e aiutato con grande entusiasmo durante la stesura della tesi.

Ringrazio inoltre i miei genitori che mi hanno sostenuto in questo lungo e non facile percorso universitario senza mai perdere la fiducia in me e senza farmi pesare il mio "lieve" ritardo nei tempi, e i miei fratelli che, con l'immane ironia che ci contraddistingue, non hanno mai lesinato sulle parole di conforto e sostegno quando ne avevo bisogno.

Un grazie di cuore alla mia ragazza, Rachele, che mi ha incoraggiato, aiutato a tenere duro, e soprattutto mi ha supportato e sopportato nei miei immane momenti di rabbia e sconforto.

Sono inoltre grato ai professori incontrati in questi due anni di magistrale che mi hanno fatto gustare una matematica sempre più affascinante, e a tutti i professori incontrati nei miei anni scolastici, il cui esempio e insegnamento ha spinto a intraprendere questa carriera universitaria.

Infine vorrei ringraziare tutti i miei amici, da quelli d'infanzia a quelli più recenti, i compagni di corso, i compagni di squadra, gli amici del circolo di scacchi e le persone conosciute in questi ultimi anni che, a suon di risate, mi hanno sostenuto e accompagnato in questi ultimi due anni, rendendo ogni giorno più sopportabile la pressione dello studio.