

Università degli Studi di Padova

Dipartimento di Matematica

Corso di Laurea in Matematica

Tesi di Laurea

*Condizioni necessarie e sufficienti per Equilibri di
Nash e un'applicazione*

Relatrice: **Giorgia Callegaro**

Candidato: **Luca Albieri**

Matricola: **1146071**

Data sessione di laurea

Anno Accademico 2019/2020

Indice

1	Introduzione	5
1.1	Equilibri di Nash	7
1.2	Equazioni di Eulero	8
1.3	Giochi potenziali	10
1.4	Il gioco del lago	11
1.5	Programmazione dinamica	11
2	Equazioni di Eulero	15
2.1	Condizioni necessarie	20
2.2	Condizioni sufficienti	23
3	Giochi potenziali	25
3.1	Giochi potenziali tramite problema inverso	25
3.2	Payoff separabile additivamente	34
4	Il gioco del lago	37
4.1	Il modello	37
4.2	Equilibri di Nash per il gioco del lago	40
4.3	Un Potenziale per il gioco del lago	42
4.4	Soluzioni numeriche	44

Capitolo 1

Introduzione

La Teoria dei Giochi è un ramo della Matematica che analizza situazioni di interazione strategica tra più decisori (o giocatori). Noi tratteremo di giochi dinamici, non cooperativi ad informazione completa ed orizzonte temporale infinito. Per giochi dinamici si intendono quei giochi in cui la natura del gioco è intrinsecamente dinamica: le componenti (stati, payoff, insiemi di strategie...) varieranno nel tempo a seconda delle mosse dei giocatori; per non cooperativi si intende che non vi è possibilità tra i giocatori di stringere accordi vincolanti. Essendo il gioco ad informazione completa tutti i giocatori sono a conoscenza dei parametri di gioco (per esempio gli insiemi di strategie e payoff degli altri giocatori). Il nostro obiettivo è quello di introdurre alcuni metodi che permettano di *risolvere* questo tipo di giochi, ovvero di ricavare *Equilibri di Nash*. Mostriamo come è possibile ricavare tali strategie tramite due metodi: le *Equazioni di Eulero* e tramite una *funzione potenziale*. Verrà infine presentato come esempio il *Gioco del lago* nel caso “deterministico”. Mostriamo che si tratta di un gioco potenziale e ricaveremo strategie di equilibrio.

Possiamo pensare ad un gioco con ad un sistema dinamico che evolve nel tempo a seconda delle mosse che i giocatori scelgono di utilizzare. Indicheremo con $J = \{1, \dots, N\}$ l'insieme dei giocatori, con $X \subseteq \mathbf{R}^m$ l'insieme degli *stati di gioco* e con $U_j \subseteq \mathbf{R}^{m_j}$ l'insieme delle *strategie* disponibili per il giocatore j . Il gioco che considereremo è a tempo discreto e a orizzonte temporale infinito, l'insieme degli istanti temporali sarà dunque \mathbf{N} . Ad ogni istante $t \in \mathbf{N}$ è associato uno stato $x_t \in X_t \subseteq X$ detto *stato attuale*, lo *stato iniziale* x_0 è fissato e considerato noto a tutti. I giocatori possono agire sullo stato del gioco attraverso mosse o *controlli* $u_t^j \in U_t^j(x_t)$ con $j \in J$. Gli insiemi X_t e $U_t^j(x_t)$ indicano rispettivamente gli stati che possono essere raggiunti all'istante t tramite una qualche successione di controlli dei giocatori e l'insieme

dei controlli ammissibili per il giocatore j -esimo all'istante t dato lo stato attuale. Introduciamo *strategie* e *multistrategie*.

Definizione 1.1. Chiameremo **strategia** per il giocatore j la sequenza $u^j := \{u_t^j\}_{t \in \mathbf{N}}$. Essa rappresenta la successione di mosse che il giocatore deciderà di utilizzare istante per istante. Indicheremo con U^j l'insieme di strategie per il giocatore j -esimo.

Definizione 1.2. Chiameremo **multistrategia** la N -upla $\mathbf{u} = (u^1, \dots, u^N)$ delle strategie dei vari giocatori. Indicheremo con $\mathbf{U} = U^1 \times \dots \times U^N \subseteq \mathbf{R}^{N \times m_j}$ l'insieme delle multistrategie.

Definizione 1.3. Chiameremo **strategia openloop** una strategia espressa in funzione dello stato iniziale x_0 e dell'istante t :

$$u_t^j = \psi^j(x_0, t)$$

Definizione 1.4. Chiameremo **strategia feedback** una strategia espressa in funzione dello stato attuale x_t :

$$u_t^j = \mu^j(x_t)$$

Osservazione 1.1. I controlli u_t^j che formano la strategia di un giocatore sono scelti nell'insieme $U_t^j(x_t)$ dei controlli ammissibili per il giocatore j -esimo dato lo stato attuale x_t e l'istante t . Indicheremo con $U_t(x_t) = U_t^1(x_t) \times \dots \times U_t^N(x_t)$ l'insieme delle N -uple di controlli utilizzabili dai giocatori all'istante t dato lo stato attuale x_t . L'insieme $\mathbf{U}(x_0)$ indicherà invece l'insieme delle multistrategie ammissibili fissato lo stato iniziale x_0 .

D'ora in avanti $\mathbf{u}^{-j} = (u^1, \dots, u^{j-1}, u^{j+1}, \dots, u^N)$ indicherà la $(N - 1)$ -upla delle strategie di tutti i giocatori tranne il j -esimo, analogamente U^{-j} sarà l'insieme di tali elementi. Commettendo un piccolo abuso di notazione si indicherà con $(\hat{u}^j, \mathbf{u}^{-j})$ la multistrategia $(u^1, \dots, u^{j-1}, \hat{u}^j, u^{j+1}, \dots, u^N)$ in cui è stata cambiata la componente j -esima della multistrategia \mathbf{u} .

Osservazione 1.2. Diamo un piccolo chiarimento sulla notazione: le multistrategie \mathbf{u} saranno indicate in grassetto, le strategie dei giocatori u^j avranno solo un apice che indica il giocatore a cui appartiene tale strategia. Ricordiamo che le strategie sono sequenze di mosse $u^j = \{u_t^j\}_{t \in \mathbf{N}}$, le mosse u_t^j da utilizzare istante per istante secondo la strategia u^j avranno un pedice t che indica l'istante in cui sono collocate all'interno della sequenza.

Una volta che i giocatori hanno deciso le loro strategie abbiamo che lo stato x_t evolverà nel tempo sotto l'influenza dei vari controlli scelti. Per determinare come evolve lo stato di gioco è necessaria, per ogni $t \in \mathbf{N}$, una

funzione $f_t : X_t \times U_t(x_t) \rightarrow X_{t+1}$ che stabilisce quale sia lo stato risultante dalle mosse u_t^1, \dots, u_t^N dato lo stato x_t :

$$x_{t+1} = f_t(x_t, u_t).$$

Chiameremo la funzione f_t *dinamica* del gioco. Se le strategie u^1, \dots, u^N dei giocatori sono fissate allora è possibile determinare l'intera successione $\{x_t\}_{t \in \mathbf{N}}$ di stati che derivano da tali strategie grazie alla dinamica del gioco, chiameremo *cammini* tali successioni di stati.

I giocatori valutano l'efficienza delle loro strategie grazie ad una funzione $P^j : \mathbf{U} \rightarrow \mathbf{R}$ detta *payoff*. Il payoff del giocatore j -esimo sarà dato dalla funzione:

$$P^j(\mathbf{u}) = \sum_{t=0}^{\infty} g_t^j(x_t, u_t).$$

La funzione $g_t^j : X_t \times U_t(x_t) \rightarrow \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$ rappresenta il payoff relativo all'istante t per il giocatore j -esimo. Il payoff di ogni giocatore dipende, in genere, anche dalle scelte di tutti gli altri e dall'intera dinamica.

Osservazione 1.3. *I giocatori scelgono la loro strategia nell'istante iniziale $t = 0$ con x_0 noto. Una volta che hanno deciso la dinamica del gioco è completamente determinata ed è possibile valutare il payoff di ognuno.*

Diamo la definizione di *multistrategia ammissibile* che verrà utilizzata per definire gli Equilibri di Nash.

Definizione 1.5. *Una multistrategia è detta **ammissibile** se $u_t \in U_t(x_t)$ e $x_{t+1} = f_t(x_t, u_t) \quad \forall t \in \mathbf{N}$.*

1.1 Equilibri di Nash

Nei giochi non cooperativi assume notevole importanza il concetto di *Equilibrio di Nash*, venne introdotto per la prima volta dal matematico *John Forbes Nash Jr.* che ne dimostrò l'esistenza in una particolare classe di giochi nel 1950 [6].

Definizione 1.6. *Un **equilibrio di Nash** è una multistrategia ammissibile $\hat{\mathbf{u}}$ tale che per ogni $j \in \{1, \dots, N\}$ e per ogni $u^j \in U^j$ si ha:*

$$P^j(\hat{\mathbf{u}}) \geq P^j(u^j, \hat{\mathbf{u}}^{-j}). \quad (1.1)$$

La proprietà 1.1 viene detta di *miglior risposta* per il giocatore j rispetto a $\hat{\mathbf{u}}^{-j}$. Come si può vedere ogni giocatore è scoraggiato dal cambiare la propria strategia supponendo che gli altri non devino dalla strategia di equilibrio in quanto sicuramente non migliorerebbe il proprio payoff cambiando strategia unilateralmente.

Per ricavare degli equilibri è necessario risolvere un problema di controllo ottimo per ogni giocatore. Introduciamo tale problema dal punto di vista del giocatore j -esimo. Il giocatore j -esimo ricaverà una strategia di miglior risposta $\{\hat{u}_t^j\}_{t \in \mathbf{N}}$ rispetto a $\hat{\mathbf{u}}^{-j}$, ovvero supporrà che tutti gli altri giochino secondo la multistrategia di equilibrio $\hat{\mathbf{u}}^{-j}$ e cercherà una sequenza di controlli ammissibili che massimizzino il proprio payoff. Questa procedura può essere tradotta nel seguente problema di controllo ottimo che indicheremo con \mathcal{P}_j :

$$\sup_{u^j \in U^j} \sum_{t=0}^{\infty} g_t^j(x_t, u_t^j, \hat{\mathbf{u}}^{-j}) \quad (1.2)$$

$$s.a. \quad x_{t+1} = f_t(x_t, u_t^j, \hat{\mathbf{u}}^{-j}). \quad (1.3)$$

Osservazione 1.4. Ricordiamo che $\hat{\mathbf{u}}^{-j}$ viene data per nota dal giocatore j -esimo.

Per ricavare l'intera multistrategia di equilibrio è necessario risolvere gli N problemi \mathcal{P}_j con $j \in J$ simultaneamente. Presenteremo due metodi per ricavare multistrategie di equilibrio: le *Equazioni di Eulero* e i *giochi potenziali*.

1.2 Equazioni di Eulero

Nell'ambito della meccanica classica le Equazioni di Eulero sono equazioni differenziali che descrivono un sistema dinamico conservativo. Definita la funzione lagrangiana \mathcal{L} , che in genere descrive l'energia totale del sistema, le Equazioni di Eulero (a tempo continuo) sono:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = 0 \quad (1.4)$$

in cui $q(t)$ e $\dot{q}(t)$ rappresentano rispettivamente le coordinate generalizzate del sistema e le loro derivate temporali. A partire dalla funzione lagrangiana può essere definito il *funzionale d'azione*:

$$\mathcal{S}(q) = \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L}(q(t), \dot{q}(t), t) dt. \quad (1.5)$$

Si dimostra che le traiettorie $q(t)$ che minimizzano il funzionale \mathcal{S} sono soluzioni delle equazioni (1.4). Nella pratica ciò significa che l'evoluzione del sistema sarà tale da avere il minimo livello di energia possibile, ovvero le soluzioni saranno punti stazionari (minimi) del funzionale d'azione.

Seguendo principi molto simili a quelli che portano alle Equazioni di Eulero in meccanica è possibile ricavare condizioni sulla dinamica indotta da Equilibri di Nash nei giochi dinamici, tali condizioni verranno chiamate *Equazioni di Eulero* per questa analogia. Prima di enunciare tali condizioni è necessario riformulare i problemi \mathcal{P}_j in funzione della dinamica del sistema, questo è possibile supponendo che il giocatore j -esimo riesca a ricavare il proprio controllo u_t^j in funzione di x_t , x_{t+1} e u_t^{-j} :

$$u_t^j = h(x_t, x_{t+1}, u_t^{-j}) \quad (1.6)$$

Nel Capitolo 2¹ vedremo come sia possibile definire la funzione $h : X_t \times X_{t+1} \times U_t^{-j}(x_t) \rightarrow U_t^j(x_t)$. Sottolineiamo ancora una volta che per il giocatore j -esimo le strategie degli altri giocatori sono date per note nella risoluzione dei problemi \mathcal{P}_j , in particolare è equivalente scegliere il controllo u_t^j o lo stato che si intende raggiungere x_{t+1} . Una volta definita la funzione h introdotta poco sopra è possibile esprimere il payoff dei giocatori in funzione della dinamica. Prima di riformulare i problemi \mathcal{P}_j in funzione della dinamica è necessario definire l'insieme dei *cammini ammissibili*.

Definizione 1.7. Dato l'insieme dei controlli $U_t(x_t)$ si può definire l'insieme:

$$\Gamma(x_t) = \{f_t(x_t, u_t) \in X_{t+1} \quad t.c. \quad u_t \in U_t(x_t)\}. \quad (1.7)$$

L'insieme $\Gamma(x_t)$ rappresenta gli stati in X_{t+1} che possono essere raggiunti dallo stato attuale x_t con un qualche $u_t \in U_t(x_t)$.

Definizione 1.8. Una successione di stati $\{x_t\}_{t \in \mathbf{N}}$ che appartiene all'insieme $\Phi(x_0) = \{\{x_t\}_{t \in \mathbf{N}} \quad t.c. \quad x_{t+1} \in \Gamma_t(x_t) \quad \forall t\}$ verrà detta **cammino ammissibile**.

Indicheremo con $\Phi(x_0)$ l'insieme dei cammini ammissibili con stato iniziale x_0 . Sia $\phi = \{x_t\}_{t \in \mathbf{N}}$ un cammino ammissibile, il payoff del giocatore j -esimo in funzione di tale cammino è dato da:

$$\tilde{P}_j(\phi) = \sum_{t=0}^{\infty} G_t^j(x_t, x_{t+1}, u_t^{-j}). \quad (1.8)$$

¹Si vedano i Lemmi (2.1) e (2.2).

E' ora possibile riformulare i problemi di controllo ottimo \mathcal{P}_j introdotti nella Sezione 1.1 in funzione esclusivamente della dinamica e non della strategia del giocatore j -esimo:

$$\sup_{\phi \in \Phi(x_0)} \tilde{P}_j(\phi). \quad (1.9)$$

Indicheremo questo nuovo problema di controllo ottimo con $\tilde{\mathcal{P}}_j$. Le Equazioni di Eulero e una condizione di trasversalità verranno ricavate supponendo che i cammini indotti da le multistrategie di equilibrio siano cammini stazionari per $\tilde{P}_j(\phi)$ similmente a quanto avviene in Meccanica per le traiettorie di equilibrio. Si vedrà prima sotto quali ipotesi le Equazioni di Eulero e la condizione di trasversalità risultano una condizione necessaria per tali cammini, successivamente si verificherà che aggiungendo alcune ipotesi di concavità risulteranno condizioni sufficienti.

1.3 Giochi potenziali

Abbiamo visto nella Sezione 1.1 che la ricerca di multistrategie di equilibrio richiede la risoluzione simultanea degli N diversi problemi di controllo ottimo \mathcal{P}_j . Vista la complessità della ricerca di Equilibri di Nash potrebbe essere utile semplificare il procedimento necessario per ricavarli, ciò è possibile nei *giochi potenziali*. Si tratta di giochi in cui è possibile ridurre la risoluzione degli N problemi \mathcal{P}_j ad uno solo. Diamo la definizione di gioco potenziale dinamico².

Definizione 1.9. *Un gioco dinamico si dice potenziale se esiste un problema di controllo ottimo la cui soluzione è un Equilibrio di Nash per tale gioco.*

Per individuare giochi potenziali dinamici è necessario definire una successione di funzioni $\{H_t(x_t, u_t)\}_{t \in \mathbf{N}}$ tale che le soluzioni del problema di controllo ottimo 1.10 siano equilibri.

$$\max_{\mathbf{u} \in \mathbf{U}} \sum_{t=0}^{+\infty} H_t(x_t, u_t) \quad (1.10)$$

$$s.a. \quad x_{t+1} = f_t(x_t, u_t)$$

Nel Capitolo 3 vedremo due tipi di giochi potenziali e come sia possibile caratterizzarli. Il primo tipo di giochi potenziali richiederà la risoluzione di un *problema inverso* (si veda la Sezione 3.1). Nel secondo tipo di giochi potenziali che vedremo sarà possibile ricavare una funzione potenziale se il payoff di ogni giocatore risulterà *additivamente separabile*.

²Si veda ([1] p.54)

1.4 Il gioco del lago

Nel Capitolo 4 introdurremo un modello che descrive l'utilizzo dell'acqua di un lago da parte delle comunità che ne usufruiscono. Nel gioco che introdurremo $J = \{1, 2, \dots, N\}$ sarà l'insieme delle comunità, lo stato del sistema x_t sarà dato dal livello di fosforo nel lago, mentre i controlli u_t^j saranno dati dalle quantità di fosforo rilasciate nel lago dalle comunità. Il fosforo infatti è l'elemento principale dei fertilizzanti utilizzati da parte degli agricoltori e può raggiungere il lago tramite corsi d'acqua affluenti oppure venendo trasportato dalle piogge nelle falde acquifere e successivamente nel lago. Un livello troppo elevato di questo elemento nell'acqua può essere problematico in quanto è il principale nutriente di alghe e piante acquatiche. Nel caso in cui queste specie proliferassero eccessivamente potrebbero rendere l'acqua non adatta per i servizi, per la pesca e per la balneazione.

Introdurremo dettagliatamente il modello nel Capitolo 4. Vedremo che le Equazioni di Eulero risultano essere solo una condizione necessaria per le soluzioni di equilibrio, non è quindi assicurato che le soluzioni di tali equazioni siano equilibri. Tuttavia si tratta di un gioco potenziale grazie al Teorema 3.4 (si veda la Sezione 3.2). Trattandosi di un gioco potenziale vedremo che sarà possibile formulare un problema di controllo ottimo le cui soluzioni sono multistrategie di equilibrio. Tale problema di controllo ottimo avrà la seguente forma:

$$\begin{aligned} \max_{\mathbf{u} \in \mathbf{U}} \sum_{t=0}^{+\infty} \beta^t H(x_t, u_t) \\ \text{s.a. } x_{t+1} = f_t(x_t, u_t) \\ u_t \in U_t(x_t) \quad \forall t = 0, 1, \dots; \end{aligned}$$

con x_0 noto. La notazione è la stessa introdotta nella Sezione (1.1): $x_t \in X_t$ rappresenta la variabile di stato, $\mathbf{u} = (u^1, \dots, u^N)$ rappresenta una multistrategia, $u^j = \{u_t^j\}_{t \in \mathbb{N}}$ è la strategia del giocatore j -esimo e $U_t(x_t)$ è l'insieme dei controlli $u_t = (u_t^1, \dots, u_t^N)$ ammissibili dato lo stato u_t .

1.5 Programmazione dinamica

Nel Capitolo 4, dopo aver ricavato una funzione potenziale per il Gioco del Lago, ci troveremo a dover risolvere il problema di controllo ottimo introdotto

nella sezione precedente³:

$$\max_{\mathbf{u} \in \mathbf{U}(x_0)} \sum_{t=0}^{+\infty} \beta^t H(x_t, u_t) \quad (1.11)$$

$$s.a. \quad x_{t+1} = f_t(x_t, u_t)$$

$$u_t \in U_t(x_t) \quad \forall t = 0, 1, \dots;$$

Per risolvere il problema (1.11) ci serviremo della *Programmazione Dinamica*. Si tratta di un metodo risolutivo per problemi di controllo ottimo basato (nel caso a tempo discreto) sull'*Equazione di Bellman*, essa rappresenta una condizione necessaria (e in alcuni casi anche sufficiente) per le soluzioni di un problema di controllo ottimo.

1.5.1 Equazione di Bellman

Ricordiamo che $\mathbf{U}(x_0)$ indica l'insieme delle multistrategie ammissibili considerando lo stato iniziale x_0 . Definiamo la *funzione valore* $\bar{V} : X_0 \rightarrow \mathbf{R}$:

$$\bar{V}(x_0) = \max_{\mathbf{u} \in \mathbf{U}(x_0)} \sum_{t=0}^{+\infty} \beta^t H(x_t, u_t)$$

Enunciamo il principio di ottimalità di Bellman da cui è possibile ricavare l'Equazione di Bellman:

Una strategia ottimale $\{u_t\}_{t \in \mathbf{N}}$ soddisfa la seguente proprietà: qualsiasi sia lo stato iniziale x_0 e la decisione iniziale u_0 la sequenza di decisioni $\{u_t\}_{t > 0}$ deve costituire una strategia ottimale per il problema di controllo ottimo con stato iniziale x_1 conseguente dalla decisione u_0 e dallo stato x_0 .

In virtù del principio di ottimalità è possibile suddividere il problema introdotto nel seguente modo:

$$\max_{u_0 \in U_0(x_0)} \{H(x_0, u_0) + \beta \bar{V}(x_1)\}$$

Lo stato $x_1 = f_0(x_0, u_0)$ è risultante dalla decisione u_0 e dallo stato x_0 . In questo modo abbiamo diviso il problema decisionale evidenziando gli effetti

³Si tratta di un *problema scontato* ovvero un problema di controllo ottimo in cui la dipendenza temporale di H_t è limitata al fattore di sconto β^t . Per questo in questa Sezione e nel Capitolo 4 indicheremo $H_t(x_t, u_t) = \beta^t H(x_t, u_t)$.

della scelta di u_0 sullo stato attuale e definendo un nuovo problema decisionale con stato iniziale x_1 ⁴. Reiterando il ragionamento effettuato sopra considerando lo stato generico x_t e considerando la definizione di funzione valore si ottiene:

$$\bar{V}(x_t) = H(x_t, u_t) + \beta \bar{V}(f_t(x_t, u_t)) \quad (1.12)$$

Grazie alle considerazioni fatte fino a questo punto abbiamo che la funzione valore \bar{V} è soluzione della seguente equazione funzionale, nota come Equazione di Bellman:

$$V(x_t) = \max_{u_t \in \mathbf{U}(x_t)} \{H(x_t, u_t) + \beta V(f_t(x_t, u_t))\} \quad (1.13)$$

Fino a questo punto abbiamo mostrato che l'Equazione di Bellman è una condizione necessaria ma non sufficiente per l'ottimalità. Tuttavia esponiamo ora una condizione sotto la quale l'Equazione di Bellman risulta essere anche condizione sufficiente⁵. Consideriamo la funzione valore dato lo stato iniziale $x = \bar{V}(x_0)$, sia $\{\bar{u}_t\}_{t \in \mathbf{N}}$ una multistrategia ottimale e $\{\bar{x}_t\}_{t \in \mathbf{N}}$ il cammino indotto da tale multistrategia. Se vale la seguente condizione qualsiasi sia x_0 e per ogni stato x_t del cammino:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \bar{V}(\bar{x}_t) = 0, \quad (1.14)$$

allora l'Equazione di Bellman risulta condizione sufficiente.

Osservazione 1.5. *Si noti che la condizione (1.14) è soddisfatta nel caso in cui, per ogni cammino ammissibile $\{x_t\}_{t \in \mathbf{N}}$ e multistrategia $\{u_t\}_{t \in \mathbf{N}}$ che induca un tale cammino:*

$$\left| \sum_{t=0}^{+\infty} \beta^t H(x_t, u_t) \right| < +\infty$$

1.5.2 Iterazione di valore

Non sempre è possibile risolvere analiticamente l'equazione (1.13), introduciamo un metodo numerico che permette di approssimare la funzione valore \bar{V} e la multistrategia ottimale. Data una funzione $V : X \rightarrow \mathbf{R}$ consideriamo il seguente funzionale T che mappa l'insieme delle funzioni da X in \mathbf{R} in se stesso:

$$T(V(x_t)) := \max_{u_t \in \mathbf{U}(x_t)} \{H(x_t, u_t) + \beta V(f_t(x_t, u_t))\}. \quad (1.15)$$

⁴Anziché considerare gli stati x_0 e x_1 , come è stato fatto per semplicità, è possibile considerare genericamente x_t e x_{t+1} .

⁵Si veda [9] Teorema 5.10 p.153

Notiamo che la funzione valore \bar{V} è un punto fisso per il funzionale T :

$$T(\bar{V}(x_t)) = \bar{V}(x_t)$$

E' possibile inoltre dimostrare che il funzionale T è una contrazione rispetto alla norma uniforme se si considerano le funzioni $V : X \rightarrow \mathbf{R}$ limitate⁶. La norma uniforme di una funzione $V : X \rightarrow \mathbf{R}$ ⁷ è data da:

$$\|V\|_\infty := \sup_{x \in X} |V(x)|.$$

Essendo T una contrazione avremmo che soddisferà la seguente proprietà per ogni coppia di funzioni $V_1, V_2 : X \rightarrow \mathbf{R}$ limitate e per una costante $k \in (0, 1)$:

$$\|T(V_1) - T(V_2)\|_\infty \leq k \|V_1 - V_2\|_\infty.$$

A questo punto grazie al Teorema delle Contrazioni si ha che il funzionale T ha un punto fisso ed esso è unico, questo sarà la nostra funzione valore. E' possibile approssimare la funzione valore con un iterazione di punto fisso. Sia data una funzione valore iniziale V_0 (in genere $V_0(x) = 0 \quad \forall x \in X$) si procede secondo il seguente schema iterativo:

$$V_{n+1} = T(V_n) \quad n = 0, 1, \dots$$

Sostituendo la definizione di T si ottiene:

$$V_{n+1}(x_t) = \max_{u_t \in \mathbf{U}(x_t)} \{H(x_t, u_t) + \beta V_n(f_t(x_t, u_t))\}$$

In questo modo abbiamo che la successione di funzioni V_n converge uniformemente a \bar{V} essendo questo un punto fisso per T . Ricavare la funzione valore permette di ottenere anche il controllo ottimale da utilizzare e quindi di risolvere il problema di controllo ottimo (1.11). Conoscendo il valore della funzione valore per ogni $x \in X$ (o una sua approssimazione) è possibile stabilire quale controllo è preferibile utilizzare dato lo stato x .

⁶Si vedano [8] e [9].

⁷Essendo le funzioni considerate limitate la norma di tali funzioni è limitata.

Capitolo 2

Equazioni di Eulero

Richiamiamo i problemi di controllo ottimo \mathcal{P}_j introdotti nella Sezione (1.1) necessari per ricavare strategie di equilibrio.

$$\sup_{u^j \in U^j} \sum_{t=0}^{\infty} g_t^j(x_t, u_t^j, \hat{\mathbf{u}}_t^{-j}), \quad (2.1)$$

$$s.a. \quad x_{t+1} = f_t(x_t, u_t^j, \hat{\mathbf{u}}_t^{-j}). \quad (2.2)$$

Alcune delle principali tecniche utilizzate per risolvere tali problemi sono il *Principio del Massimo* e la *Programmazione Dinamica*. Noi ci concentreremo su un metodo variazionale che porta alle cosiddette *Equazioni di Eulero* e ad una *condizione di trasversalità*. Prima di esporre i risultati di questo Capitolo sono necessari alcuni chiarimenti. In primo luogo il metodo che intendiamo presentare pone condizioni sui *cammini* indotti da multistrategie di equilibrio, sarà quindi necessario riformulare i problemi \mathcal{P}_j in funzione di tali cammini e non più in funzione delle strategie dei giocatori. In secondo luogo, per ricavare tali condizioni verrà utilizzata la derivata direzionale (o di *Gâteaux*) che verrà introdotta con il Lemma (2.3), sarà quindi necessario introdurre tale strumento e le ipotesi necessarie al suo utilizzo.

Osservazione 2.1. *Nei problemi \mathcal{P}_j si davano per note al giocatore j -esimo le strategie di equilibrio di tutti gli altri giocatori. Per questo motivo verrà omessa la variabile $\hat{\mathbf{u}}_t^{-j}$.*

Ipotesi 2.1. *Supponiamo che il giocatore j -esimo sia in grado di decidere il proprio controllo in base alle variabili x_t e x_{t+1} , ovvero che esista $h_t : X_t \times X_{t+1} \rightarrow U_t^j(x_t)$ tale che:*

$$u_t^j = h_t(x_t, x_{t+1}).$$

Per ricavare tale funzione e poter cambiare il setting del nostro problema di controllo ottimo si possono utilizzare due metodi. Il primo sfrutta il *Teorema della Funzione Implicita*, mentre il secondo sfrutta il *Metodo dei moltiplicatori di Lagrange*. Introduciamoli con dei lemmi.

Lemma 2.1. *Consideriamo la funzione $F_t : X_t \times X_{t+1} \times U_t^j(x_t) \rightarrow \mathbf{R}^n$ differenziabile, definita come segue:*

$$F_t(x, y, u) = y - f_t(x, u).$$

Sia $\{\bar{x}_t\}$ la dinamica indotta da una multistrategia ammissibile $(u^j, \mathbf{u}^{-j}) \in U$ (\mathbf{u}^{-j} fissato). Se $\nabla_u f_t(\bar{x}_t, u_t^j)$ ha rango massimo per ogni t allora è possibile definire la funzione implicita $u_t^j = h_t(x_t, x_{t+1})$ per ogni t .

Dimostrazione. Per la Definizione (1.5) di multistrategia ammissibile si ha che $F_t(\bar{x}_t, \bar{x}_{t+1}, u_t^j) = 0$ per ogni t . Ponendo $t = 0$ si ha $F_0(x_0, \bar{x}_1, u_0^j) = 0$, con x_0 fissato. A questo punto si può utilizzare il Teorema della Funzione Implicita per ricavare il controllo u_1^j in funzione di x_1 , a tale scopo è necessario che $\nabla_u F_0(x_0, \bar{x}_1, u) = \nabla_u f_1(x_0, \bar{x}_1, u)$ abbia rango massimo in un intorno di (x_0, \bar{x}_1, u_0^j) . Reiterando questo procedimento si possono ottenere i controlli u_t^j per ogni t fino ad avere la strategia completa del giocatore j . \square

Il secondo metodo che andremo ad introdurre è indispensabile nel caso in cui non possa essere utilizzato il precedente. In particolare nel caso in cui esista più di un $u \in U_t^j(x_t)$ tale che $x_{t+1} = f_t(x_t, u)$ andremo a cercare il controllo che tra questi massimizzi il payoff, a tale scopo utilizzeremo il metodo dei moltiplicatori di Lagrange.

Lemma 2.2. *Definiamo la funzione $G_t^j : X_t \times X_{t+1} \rightarrow \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$ come segue:*

$$G_t^j(x_t, x_{t+1}) = \max_{u \in U_t(x_t)} \{g_t(x_t, u) \quad t.c. \quad x_{t+1} = f_t(x_t, u)\}.$$

Una condizione necessaria affinché tale funzione possa essere definita è che esista un vettore $\lambda \in \mathbf{R}^n$ tale che:

$$\nabla_u g_t(x_t, u) - \lambda \cdot \nabla_u f_t(x_t, u) = 0$$

$$s.a. \quad x_{t+1} = f_t(x_t, u).$$

Dimostrazione. Per ricavare la funzione $G_t^j(x_t, x_{t+1})$ è necessario risolvere il seguente problema di ottimizzazione vincolata:

$$\max_{u \in U_t(x_t)} g_t(x_t, u), \quad s.a. \quad x_{t+1} = f_t(x_t, u).$$

Come ben noto, il metodo dei Moltiplicatori di Lagrange fornisce delle condizioni necessarie per le soluzioni di tale problema. Applicando il metodo si ottengono che le seguenti condizioni:

$$\nabla_u g_t(x_t, u) + \lambda \cdot \nabla_u [x_{t+1} - f_t(x_t, u)] = 0$$

$$x_{t+1} - f_t(x_t, u) = 0$$

Da cui segue direttamente la tesi. \square

Siamo ora in grado di esprimere i problemi di controllo \mathcal{P}_j in funzione del cammino $\{x_t\}_{t \in \mathbf{N}}$. Richiamiamo la definizione di cammino ammissibile data nella Sezione 1.2.

Definizione 2.1. *Dato l'insieme dei controlli $U_t(x_t)$ si può definire l'insieme:*

$$\Gamma(x_t) = \{f_t(x_t, u_t) \in X_{t+1} \quad t.c. \quad u_t \in U_t(x_t)\}. \quad (2.3)$$

L'insieme $\Gamma(x_t)$ rappresenta gli stati in X_{t+1} che possono essere raggiunti dallo stato attuale x_t con un qualche $u_t \in U_t(x_t)$.

Definizione 2.2. *Una successione di stati $\{x_t\}_{t \in \mathbf{N}}$ che appartiene all'insieme $\Phi(x_0) = \{\{x_t\}_{t \in \mathbf{N}} \quad t.c. \quad x_{t+1} \in \Gamma_t(x_t) \quad \forall t\}$ verrà detta **cammino ammissibile**.*

Osservazione 2.2. *Notiamo che una multistrategia ammissibile induce un cammino ammissibile. L'insieme $\Phi(x_0)$ dipende dallo stato iniziale x_0 noto, conoscendo $U_t(x_t)$ per ogni t si possono determinare tutti i possibili insiemi $\Gamma_t(x_t)$ degli stati raggiungibili con un cammino ammissibile.*

Indicheremo con $\phi = \{x_t^\phi\}_{t \in \mathbf{N}}$ gli elementi dell'insieme $\Phi(x_0)$. Il payoff del giocatore j -esimo può essere espresso ora in funzione del cammino $\phi = \{x_t^\phi\}_{t \in \mathbf{N}}$. Si avrà $\tilde{P}^j : \Phi(x_0) \rightarrow \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$:

$$\tilde{P}^j(\phi) = \sum_{t=0}^{\infty} G_t^j(x_t^\phi, x_{t+1}^\phi), \quad (2.4)$$

in cui $G_t^j(x_t^\phi, x_{t+1}^\phi) = g_t^j(x_t, h_t(x_t, x_{t+1}))$.

Osservazione 2.3. *Ricordiamo che conoscendo x_0 e la multistrategia \mathbf{u} è possibile risalire all'intero cammino indotto da \mathbf{u} grazie alla dinamica del gioco.*

Introduciamo il nuovo problema di ottimizzazione, ora in funzione del cammino:

$$\sup_{\phi \in \Phi(x_0)} \tilde{P}^j(\phi) \quad (2.5)$$

Non è più necessario indicare il vincolo della dinamica in quanto esso è intrinseco al nuovo payoff \tilde{P} . Ricavare un cammino ottimale $\{\hat{x}_t\}_{t \in \mathbf{N}}$ per (2.4) permette al giocatore j -esimo di stabilire quale sia la sua strategia di miglior risposta rispetto a $\hat{\mathbf{u}}_t^{-j}$ tramite la funzione h_t introdotta nei Lemmi (2.1) e (2.2).

Osservazione 2.4. *Per risolvere il problema (2.5) deriveremo il payoff $\tilde{P}^j(\phi)$ (nel senso di Gâteaux) per ricavare cammini interni¹ stazionari. Si ha infatti che una multistrategia di equilibrio $\hat{\mathbf{u}}$ indurrà un cammino $\hat{\phi} = \{\hat{x}_t\}_{t \in \mathbf{N}}$ ottimo per $\tilde{P}^j(\phi)$ e quindi stazionario se interno.*

Ora che abbiamo modificato il setting del problema e il payoff dei giocatori è stato posto in funzione della dinamica del gioco è possibile introdurre la derivata di Gâteaux o *direzionale* e le Ipotesi che permettono la buona definizione del problema (2.5). Si indicherà con ∇_x il gradiente rispetto alla prima variabile vettoriale, mentre ∇_y indicherà quello rispetto alla seconda.

Ipotesi 2.2. *Supponiamo che per ogni $x_0 \in X_0$:*

- $\Phi(x_0) \neq \emptyset$;
- *esista una successione di numeri reali positivi $\{m_t^j(x_0)\}_{t \in \mathbf{N}}$ tale che:*

$$G_t^j(x_t^\phi, x_{t+1}^\phi) \leq m_t^j(x_0) \quad \forall \phi \in \Phi(x_0), \quad \forall t \text{ e } \sum_{t=0}^{\infty} m_t^j(x_0) < +\infty$$
- $\forall \phi \in \Phi(x_0)$ *si abbia che esiste il limite:*

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \sum_{t=0}^T G_t^j(x_t^\phi, x_{t+1}^\phi) \quad (\text{eventualmente } -\infty)$$
- *esista almeno un $\phi \in \Phi(x_0)$ tale che il limite sopra non sia $-\infty$*
- *che la funzione $G_t^j(x, y)$ sia differenziabile nell'interno di $X_t \times X_{t+1}$ $\forall t = 0, 1, 2, \dots$*

A questo punto risulta ben definito il payoff (2.4), inoltre è ben definita la funzione:

$$\bar{P}^j(x_0) = \sup_{\phi \in \Phi(x_0)} \{\tilde{P}^j(\phi)\}.$$

¹si veda la Definizione (2.4)

Il nostro obiettivo è quello di trovare un cammino $\hat{\phi}$ tale che $\bar{P}^j(x_0) = \tilde{P}^j(\hat{\phi})$ per ogni $j \in J$. Per trovare tale cammino vorremmo poter derivare il payoff $\tilde{P}^j(\phi)$ rispetto al cammino $\{x_t\}_{t \in \mathbf{N}}$ per ricavarne dei cammini stazionari; infatti nel caso in cui una multistrategia di equilibrio esista, indurrà un cammino stazionario per $\tilde{P}^j(\phi)$.

Definizione 2.3. *Definiamo **cammino ottimale** un cammino $\hat{\phi} \in \Phi(x_0)$ tale che $\bar{P}^j(x_0) = \tilde{P}^j(\hat{\phi})$.*

Per ricavare tali cammini stazionari ricorriamo alla derivata direzionale o di *Gâteaux*, questo strumento generalizza il concetto di derivata per una funzione definita su di uno spazio vettoriale localmente convesso. Prima di definire tale strumento sono necessarie alcune ipotesi ed osservazioni.

Osservazione 2.5. *Notiamo che l'insieme $\Lambda = \{\lambda = (0, x_1^\lambda, x_2^\lambda, \dots) \text{ t.c. } x_t^\lambda \in \mathbf{R}^n \text{ } t = 1, 2, \dots\}$ delle successioni in \mathbf{R}^n è uno spazio vettoriale. La prima componente di ogni elemento di Λ è nulla in quanto non deve modificare lo stato iniziale x_0 considerato noto.*

Definizione 2.4. *Chiameremo ϕ un **cammino interno** a $\Phi(x_0)$ nella direzione di $\lambda \in \Lambda$ se esiste $\varepsilon_0 > 0$ tale che:*

$$\phi + \varepsilon\lambda \in \Phi(x_0) \quad \forall \varepsilon \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0).$$

Dato un qualche cammino ϕ interno a $\Phi(x_0)$ nella direzione di $\lambda \in \Lambda$, definiamo:

$$\begin{aligned} q_0^j(\varepsilon) &= G_0^j(x_0, x_1^\phi + \varepsilon x_1^\lambda) \\ q_t^j(\varepsilon) &= G_t^j(x_t^\phi + \varepsilon x_t^\lambda, x_{t+1}^\phi + \varepsilon x_{t+1}^\lambda). \end{aligned}$$

Ipotesi 2.3. *Supponiamo che esista un $\varepsilon_0 > 0$ tale che $\sum_{t=0}^{\infty} \frac{dq_t^j(\varepsilon)}{d\varepsilon}$ converga uniformemente per ogni $\varepsilon \in (-\varepsilon_0, +\varepsilon_0)$.*

Osservazione 2.6. *Notiamo che dato ϕ interno a $\Phi(x_0)$ nella direzione di $\lambda \in \Lambda$ è definita una curva $\gamma : [0, \varepsilon_0] \rightarrow \Phi(x_0)$ con $\gamma(\varepsilon) = \phi + \varepsilon\lambda$. Data la curva γ è possibile definire il rapporto incrementale:*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\tilde{P}^j(\gamma(\varepsilon)) - \tilde{P}^j(\gamma(0))}{\varepsilon} = \left[\frac{d\tilde{P}^j(\phi + \varepsilon\lambda)}{d\varepsilon} \right]_{\varepsilon=0}.$$

L'osservazione (2.6) giustifica la definizione che stiamo per dare di derivata di *Gâteaux* con il seguente lemma.

Lemma 2.3. ([1] p.16) *Supponiamo che valgano le Ipotesi (2.2) e (2.3). Consideriamo un cammino $\hat{\phi}$ interno a $\Phi(x_0)$ nella direzione di $\lambda \in \Lambda$ tale che $\tilde{P}^j(\phi) > -\infty$. Un tale cammino esiste per ipotesi, può quindi essere definita la derivata di Gâteaux della funzione $\tilde{P}^j(\phi)$ in $\hat{\phi}$ nella direzione di λ :*

$$\delta \tilde{P}^j(\hat{\phi}, \lambda) = \left[\frac{d\tilde{P}^j(\hat{\phi} + \varepsilon\lambda)}{d\varepsilon} \right]_{\varepsilon=0}. \quad (2.6)$$

Sostituendo (2.4) in (2.6) si ottiene:

$$\begin{aligned} \delta \tilde{P}^j(\hat{\phi}, \lambda) &= \nabla_y G_0^j(x_0, x_1^{\hat{\phi}}) \cdot x_1^\lambda + \\ &+ \sum_{t=1}^{\infty} (\nabla_x G_t^j(x_t^{\hat{\phi}}, x_{t+1}^{\hat{\phi}}) \cdot x_t^\lambda + \nabla_y G_t^j(x_t^{\hat{\phi}}, x_{t+1}^{\hat{\phi}}) \cdot x_{t+1}^\lambda). \end{aligned}$$

Dimostrazione. Essendo la serie $\sum_{t=0}^{\infty} \frac{dq_t^j(\varepsilon)}{d\varepsilon}$ uniformemente convergente in $(-\varepsilon_0, +\varepsilon_0)$ e poiché per $\varepsilon = 0$ il limite $\lim_{T \rightarrow \infty} \sum_{t=0}^T G_t^j(x_t^{\hat{\phi}}, x_{t+1}^{\hat{\phi}})$ è convergente:

$$\frac{d\tilde{P}^j(\hat{\phi} + \varepsilon\lambda)}{d\varepsilon} = \frac{d}{d\varepsilon} \sum_{t=0}^{\infty} q_t^j(\varepsilon) = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{dq_t^j(\varepsilon)}{d\varepsilon}.$$

Notiamo che, per $t = 1, \dots$:

$$\begin{aligned} \frac{dq_0^j(\varepsilon)}{d\varepsilon} &= \nabla_y G_0^j(x_0, x_1^{\hat{\phi}} + \varepsilon x_1^\lambda) \cdot x_1^\lambda \\ \frac{dq_t^j(\varepsilon)}{d\varepsilon} &= \nabla_x G_t^j(x_t^{\hat{\phi}} + \varepsilon x_t^\lambda, x_{t+1}^{\hat{\phi}} + \varepsilon x_{t+1}^\lambda) \cdot x_t^\lambda + \nabla_y G_t^j(x_t^{\hat{\phi}} + \varepsilon x_t^\lambda, x_{t+1}^{\hat{\phi}} + \varepsilon x_{t+1}^\lambda) \cdot x_{t+1}^\lambda. \end{aligned}$$

Ponendo $\varepsilon = 0$ si conclude. □

2.1 Condizioni necessarie

Nella sezione precedente è stato introdotto un Lemma che permette di calcolare la derivata di Gâteaux di $V^j(\phi)$ se dato un cammino interno a $\Phi(x_0)$ in direzione di $\lambda \in \Lambda$. Tuttavia, dato un cammino ottimale $\hat{\phi}$, non è garantito che esso sia interno. Supponiamo che $\bar{\phi} \in \Phi(x_0)$ sia un cammino ottimale, per ricavare condizioni necessarie su tale cammino sono necessarie le seguenti ipotesi:

Ipotesi 2.4. *Supponiamo che per ogni $t = 0, 1, \dots$:*

- $x_{t+1}^{\bar{\phi}}$ sia un punto interno di $\Gamma_t(x_t^{\bar{\phi}})$;
- esista $\varepsilon_t > 0$ tale che $x_{t+1}^{\bar{\phi}} \in \Gamma_t(x)$ se $\|x - x_t^{\bar{\phi}}\| < \varepsilon_t$.

Prima di enunciare le condizioni necessarie dobbiamo introdurre un Lemma che verrà utilizzato nella dimostrazione.

Lemma 2.4. ([3] p.4) *Supponiamo che $\tilde{\phi}$ sia interno a $\Phi(x_0)$ nella direzione di λ e che valga:*

$$\bar{P}^j(x_0) = \tilde{P}^j(\tilde{\phi}).$$

Supponiamo inoltre che valgano (2.2) e (2.3), in modo che sia ben definita la derivata di Gâteaux $\delta\tilde{P}^j(\tilde{\phi}, \lambda)$. Allora si ha che:

$$\delta\tilde{P}^j(\tilde{\phi}, \lambda) = 0.$$

Dimostrazione. Consideriamo la funzione $J : (-\varepsilon_0, \varepsilon) \rightarrow \mathbf{R}$ definita come segue:

$$J(\varepsilon) = \tilde{P}^j(\bar{\phi} + \varepsilon\lambda) = \sum_{t=0}^{\infty} q_t^j(\varepsilon).$$

Poiché valgono le Ipotesi (2.2) e (2.3) essa è continua e derivabile in $(-\varepsilon_0, +\varepsilon_0)$ ed ha un massimo in $\varepsilon = 0$ per il Teorema di Fermat sui punti stazionari si ha che:

$$0 = \left[\frac{d}{d\varepsilon} J(\varepsilon) \right]_{\varepsilon=0} = \delta\tilde{P}^j(\tilde{\phi}, \lambda).$$

□

Teorema 2.1. ([1] p.17) *Sia $\bar{\phi} = \{x_t^{\bar{\phi}}\}$ un cammino ottimale, supponiamo che valgano le Ipotesi (2.4), (2.2). Allora:*

- $\bar{\phi}$ soddisfa le Equazioni di Eulero per ogni $t = 1, 2, \dots$

$$\nabla_y G_{t-1}^j(x_{t-1}^{\bar{\phi}}, x_t^{\bar{\phi}}) + \nabla_x G_t^j(x_t^{\bar{\phi}}, x_{t+1}^{\bar{\phi}}) = 0; \quad (2.7)$$

- *Supponiamo inoltre che $\bar{\phi}$ sia un piano interno nella direzione di $\lambda \in \Lambda$ e che valgano le Ipotesi (2.3). Allora $\bar{\phi}$ e λ soddisfano la condizione di trasversalità:*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \nabla_y G_{t-1}^j(x_{t-1}^{\bar{\phi}}, x_t^{\bar{\phi}}) \cdot x_t^\lambda = 0. \quad (2.8)$$

Dimostrazione. : Siano $x \in \mathbf{R}^n$ e $\tau \geq 1$ un intero. Definiamo il cammino $\varphi_\tau(x) = \{x_t\}$ come segue:

$$\begin{aligned} x_t &= 0 & t \neq \tau \\ x_t &= x & t = \tau. \end{aligned}$$

Grazie alle Ipotesi (2.4) esiste $\varepsilon_\tau > 0$ tale che $x_\tau^{\bar{\phi}} + \varepsilon x \in \Gamma_{\tau-1}(x_{\tau-1}^{\bar{\phi}})$ e $x_{\tau+1}^{\bar{\phi}} \in \Gamma_\tau(x_\tau^{\bar{\phi}} + \varepsilon x)$ per ogni $\varepsilon \in (-\varepsilon_\tau, +\varepsilon_\tau)$, questo equivale a dire che $\bar{\phi}$ è un cammino interno nella direzione di $\varphi_\tau(x)$. Si ha inoltre che per il cammino $\bar{\phi} \in \Phi(x_0)$ e la direzione $\varphi_\tau(x)$ la serie $\sum_{t=0}^{\infty} \frac{dq_t^j(\varepsilon)}{d\varepsilon}$ è uniformemente convergente essendo i suoi termini tutti nulli tranne il τ -esimo, infatti:

$$\begin{aligned} \sum_{t=0}^{\infty} \frac{dq_t^j(\varepsilon)}{d\varepsilon} &= \sum_{t \neq \tau} \frac{d}{d\varepsilon} G_t^j(x_t^{\bar{\phi}}, x_{t+1}^{\bar{\phi}}) + \frac{d}{d\varepsilon} G_{\tau-1}^j(x_{\tau-1}^{\bar{\phi}}, x_\tau^{\bar{\phi}} + \varepsilon x) + \frac{d}{d\varepsilon} G_\tau^j(x_\tau^{\bar{\phi}} + \varepsilon x, x_{\tau+1}^{\bar{\phi}}) = \\ &= \nabla_y G_{\tau-1}^j(x_{\tau-1}^{\bar{\phi}}, x_\tau^{\bar{\phi}} + \varepsilon x) \cdot x + \nabla_x G_\tau^j(x_\tau^{\bar{\phi}} + \varepsilon x, x_{\tau+1}^{\bar{\phi}}) \cdot x. \end{aligned}$$

Tale termine risulta essere finito in quanto per ogni $\varepsilon \in (-\varepsilon_\tau, +\varepsilon_\tau)$ si ha che $x_\tau^{\bar{\phi}} + \varepsilon x \in \Gamma_{\tau-1}(x_{\tau-1}^{\bar{\phi}}) \subseteq X_\tau$. Per ε abbastanza piccolo si ha che tali punti sono interni a X_τ in cui $G_t^j(x, y)$ è differenziabile. Questo dimostra che per $\bar{\phi} \in \Phi(x_0)$ e $\varphi_\tau(x)$ vale (2.3) e quindi è possibile calcolarne la derivata di *Gâteaux*.

Grazie al Lemma (2.4) e poiché il cammino $\bar{\phi}$ è ottimale e interno si ha:

$$\left[\frac{d\tilde{P}^j(\bar{\phi} + \varepsilon\varphi_\tau(x))}{d\varepsilon} \right]_{\varepsilon=0} = \nabla_y G_{\tau-1}^j(x_{\tau-1}^{\bar{\phi}}, x_\tau^{\bar{\phi}}) \cdot x + \nabla_x G_\tau^j(x_\tau^{\bar{\phi}}, x_{\tau+1}^{\bar{\phi}}) \cdot x = 0.$$

Per l'arbitrarietà di x e τ segue (2.7).

Dimostriamo ora (2.8). Supponiamo che $\bar{\phi}$ sia un cammino ottimale interno nella direzione di $\lambda \in \Lambda$ e supponiamo che valgano le Ipotesi (2.3) per tale cammino e tale direzione. Date tali ipotesi, per il Lemma (2.3) si ha che:

$$\nabla_y G_0^j(x_0, x_1^{\bar{\phi}}) \cdot x_1^\lambda + \sum_{t=1}^{\infty} (\nabla_x G_t^j(x_t^{\bar{\phi}}, x_{t+1}^{\bar{\phi}}) \cdot x_t^\lambda + \nabla_y G_t^j(x_t^{\bar{\phi}}, x_{t+1}^{\bar{\phi}}) \cdot x_{t+1}^\lambda) = 0.$$

Dall'equazione (2.7) otteniamo tuttavia che, per ogni $\tau = 2, 3, \dots$:

$$\nabla_y G_{\tau-1}^j(x_{\tau-1}^{\bar{\phi}}, x_\tau^{\bar{\phi}}) \cdot x_\tau^\lambda + \sum_{t=\tau}^{\infty} (\nabla_x G_t^j(x_t^{\bar{\phi}}, x_{t+1}^{\bar{\phi}}) \cdot x_t^\lambda + \nabla_y G_t^j(x_t^{\bar{\phi}}, x_{t+1}^{\bar{\phi}}) \cdot x_{t+1}^\lambda) = 0.$$

Facendo tendere $\tau \rightarrow +\infty$ si ottiene:

$$\lim_{\tau \rightarrow +\infty} \nabla_y G_{\tau-1}^j(x_{\tau-1}^{\bar{\phi}}, x_{\tau}^{\bar{\phi}}) \cdot x_{\tau}^{\lambda} = 0.$$

□

Osservazione 2.7. *In alternativa la condizione di trasversalità (2.8) può essere riscritta in virtù delle Equazioni di Eulero (2.7):*

$$\lim_{\tau \rightarrow +\infty} \nabla_x G_{\tau}^j(x_{\tau}^{\bar{\phi}}, x_{\tau+1}^{\bar{\phi}}) \cdot x_{\tau}^{\lambda} = 0.$$

2.2 Condizioni sufficienti

Vediamo ora che sotto alcune ipotesi di convessità le Equazioni di Eulero e la condizione di trasversalità sono anche condizioni sufficienti per Equilibri di Nash. Considereremo sempre il problema nella forma (2.4).

Ipotesi 2.5. *Supponiamo che per il problema (2.4) valgano le seguenti per ogni t e per ogni $j \in J$:*

- $G_t^j(x, y)$ sia concava e differenziabile;
- $\Phi(x_0)$ sia un insieme convesso;
- X_t sia un sottoinsieme di $\mathbf{R}_+^n = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_i \geq 0, i = 1, \dots, n\}$;
- per ogni $i = 1, \dots, n$ si abbia $\partial G_t^j / \partial x_i \geq 0$.

Teorema 2.2. ([1] p.18) *Sia $\hat{\varphi} \in \Phi(x_0)$ un cammino ammissibile che soddisfi le Equazioni di Eulero (2.7) e la condizione di trasversalità (2.8). Se valgono le Ipotesi (2.5) allora $\hat{\varphi}$ è un cammino ottimale.*

Dimostrazione. Consideriamo un qualsiasi cammino ammissibile $\varphi = \{x_t\} \in \Phi(x_0)$, essendo G_t^j concava e differenziabile per ogni $t = 0, 1, \dots$ si ha:

$$G_t^j(x_t^{\hat{\varphi}}, x_{t+1}^{\hat{\varphi}}) - G_t^j(x_t, x_{t+1}) \geq \nabla_x G_t^j(x_t^{\hat{\varphi}}, x_{t+1}^{\hat{\varphi}}) \cdot (x_t^{\hat{\varphi}} - x_t) + \nabla_y G_t^j(x_t^{\hat{\varphi}}, x_{t+1}^{\hat{\varphi}}) \cdot (x_{t+1}^{\hat{\varphi}} - x_{t+1}).$$

Essendo la disuguaglianza vera per ogni t , si ha:

$$\Delta_{\tau}(\hat{\varphi}, \varphi) := G_0^j(x_0, x_1^{\hat{\varphi}}) - G_0^j(x_0, x_1) + \sum_{t=1}^{\tau-1} G_t^j(x_t^{\hat{\varphi}}, x_{t+1}^{\hat{\varphi}}) - G_t^j(x_t, x_{t+1}) \geq$$

$$\sum_{t=0}^{\tau-1} \nabla_x G_t^j(x_t^{\hat{\varphi}}, x_{t+1}^{\hat{\varphi}}) \cdot (x_t^{\hat{\varphi}} - x_t) + \nabla_y G_t^j(x_t^{\hat{\varphi}}, x_{t+1}^{\hat{\varphi}}) \cdot (x_{t+1}^{\hat{\varphi}} - x_{t+1}).$$

Grazie alle Equazioni di Eulero (2.7) il termine con $t = \tau - 1$ è l'unico che rimane alla destra della disuguaglianza:

$$\Delta_\tau(\hat{\varphi}, \varphi) \geq \nabla_y G_{\tau-1}^j(x_{\tau-1}^{\hat{\varphi}}, x_\tau^{\hat{\varphi}}) \cdot (x_\tau^{\hat{\varphi}} - x_\tau).$$

Sempre per (2.7) con $t = \tau$:

$$\Delta_\tau(\hat{\varphi}, \varphi) \geq -\nabla_x G_\tau^j(x_\tau^{\hat{\varphi}}, x_{\tau+1}^{\hat{\varphi}}) \cdot (x_\tau^{\hat{\varphi}} - x_\tau).$$

Ora, essendo x_t un vettore ad entrate non negative e poiché $\partial G_t^j / \partial x_i \geq 0$ per ogni $i = 1, \dots, n$:

$$\Delta_\tau(\hat{\varphi}, \varphi) \geq -\nabla_x G_\tau^j(x_\tau^{\hat{\varphi}}, x_{\tau+1}^{\hat{\varphi}}) \cdot x_\tau^{\hat{\varphi}}.$$

A questo punto il cammino $\hat{\varphi}$ soddisfa la condizione di trasversalità (2.8):

$$\lim_{\tau \rightarrow +\infty} \Delta_\tau(\hat{\varphi}, \varphi) \geq \lim_{\tau \rightarrow +\infty} -\nabla_x G_\tau^j(x_\tau^{\hat{\varphi}}, x_{\tau+1}^{\hat{\varphi}}) \cdot x_\tau^{\hat{\varphi}} = 0.$$

Questo dimostra che $\hat{\varphi}$ è un cammino ottimale, essendo:

$$\tilde{P}^j(\hat{\varphi}) - \tilde{P}^j(\varphi) = \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \Delta_\tau(\hat{\varphi}, \varphi) \geq 0.$$

Ciò conclude la dimostrazione. □

Capitolo 3

Giochi potenziali

In questo Capitolo vedremo due tipi di giochi potenziali dinamici, si tratta di giochi in cui è possibile individuare un problema di controllo ottimo le cui soluzioni sono Equilibri di Nash. Richiamiamo la Definizione (1.9) di gioco potenziale.

Definizione 3.1. *Un gioco dinamico si dice potenziale se esiste un problema di controllo ottimo la cui soluzione è un Equilibrio di Nash per tale gioco.*

Come già notato nei Capitoli precedenti la ricerca degli equilibri per un gioco comporta la soluzione di N diversi problemi di controllo ottimo. Vi sono due principali vantaggi nell'identificare giochi potenziali: in primo luogo anziché dover risolvere N problemi è sufficiente risolverne uno solo, inoltre l'esistenza di soluzioni di equilibrio è garantita dall'esistenza di soluzioni per tale problema.

3.1 Giochi potenziali tramite problema inverso

In questa Sezione identificheremo un primo tipo di giochi potenziali tramite quello che viene chiamato *problema inverso*, introduciamo tale metodo. Generalmente in ottimizzazione si cerca di massimizzare/minimizzare una certa funzione e ricavare le soluzioni che la rendono ottima, si tratta in questo caso di un *problema diretto*. Al contrario in un problema inverso è necessario ricavare una funzione i cui massimi/minimi sono soluzioni prefissate. Nel nostro caso vorremmo ricavare una funzione (il *potenziale*) i cui massimi siano soluzioni di equilibrio. Nel gioco che considereremo il numero di giocatori e la dimensione dello spazio degli stati coincidono. Considereremo il seguente

gioco:

$$(\{\Psi_j\}_{j \in J}, \{\tilde{P}_j\}_{j \in J}, J). \quad (3.1)$$

L'insieme $J = \{1, \dots, n\}$ indica l'insieme dei giocatori, Ψ_j indica le strategie del giocatore j -esimo mentre \tilde{P}_j è il payoff di questo giocatore. Analogamente al Capitolo 2 l'insieme $\Phi(x_0)$ è formato dai cammini ammissibili fissato lo stato iniziale x_0 . I payoff $\tilde{P}_j : \Phi(x_0) \rightarrow \mathbf{R}$ sono espressi in funzione della dinamica:

$$\tilde{P}_j(\phi) = \sum_{t=0}^{\infty} G_t^j(x_t^\phi, x_{t+1}^\phi). \quad (3.2)$$

Ricordiamo che, se $\hat{\psi}$ è una soluzione di equilibrio e $\{\hat{x}_t\}_{t \in \mathbf{N}}$ è la dinamica indotta da tale equilibrio, allora $\{\hat{x}_t\}_{t \in \mathbf{N}}$ è soluzione del seguente problema di controllo ottimo per ogni $j \in J$:

$$\max_{\phi \in \Phi(x_0)} \tilde{P}_j(\phi) \quad (3.3)$$

Supponiamo che valgano le Ipotesi (2.2), (2.3) e (2.4) formulate nel Capitolo 2¹; in questo modo, se $\{\hat{x}_t\}_{t \in \mathbf{N}}$ è soluzione di (3.3) allora per il Teorema (2.1) sono verificate le Equazioni di Eulero per ogni $t = 1, 2, \dots$, per ogni $j \in J$:

$$\nabla_y G_{t-1}^j(\hat{x}_{t-1}, \hat{x}_t) + \nabla_x G_t^j(\hat{x}_t, \hat{x}_{t+1}) = 0. \quad (3.4)$$

Inoltre sempre per il Teorema (2.1) è verificata per ogni $j \in J$ la condizione di trasversalità:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \nabla_y G_{t-1}^j(\hat{x}_{t-1}, \hat{x}_t) \cdot \hat{x}_t = 0 \quad (3.5)$$

Ipotesi 3.1. *Supponiamo che il gioco (3.1) rispetti le seguenti ipotesi:*

- 1) *l'insieme degli stati $X_t \subseteq \mathbf{R}^n$ è non vuoto, semplicemente connesso ed aperto per ogni $t = 0, 1, \dots$;*
- 2) *il payoff istantaneo $G_t^j(x, y)$ è di classe C^2 in entrambe le variabili per ogni $j \in J$ e per ogni $t = 0, 1, \dots$;*
- 3) *l'insieme delle strategie Ψ_j che consideriamo permette al giocatore j -esimo di influenzare solo la componente j -esima x_{t+1}^j della dinamica, questo significa che scegliendo ψ_t^j il giocatore sceglie x_{t+1}^j :*

$$x_{t+1}^j = f_t^j(x_t^j, \psi_t^j) \quad \forall j = 0, \dots, n.$$

¹Si tratta delle ipotesi che garantiscono la differenziabilità di \tilde{P}_j nel senso di Gateaux.

Osservazione 3.1. Ricordiamo che la dinamica del gioco è determinata dalla funzione:

$$x_{t+1} = f_t(x_t, \psi_t^1, \dots, \psi_t^n)$$

Essendo f_t una funzione a valori in \mathbf{R}^n indichiamo con f_t^j la sua componente j -esima, analogamente x_t^j indica la componente j -esima di x_t . Una conseguenza importante dell'Ipotesi (3.1.3) è che variazioni di strategia per il giocatore j -esimo comportano variazioni soltanto nella componente j -esima x_t^j della dinamica.

Indicheremo con $\Psi = \Psi_1 \times \dots \times \Psi_n$ l'insieme delle multistrategie con Ψ_j come nell'Ipotesi (3.1.3). Dati i payoff istantanei $G_t^j : X_t \times X_{t+1} \rightarrow \mathbf{R}$ di classe \mathcal{C}^2 con $j \in J$ e $t = 0, 1, \dots$ è possibile definire le successioni di funzioni $\{a_t(x, y)\}_{t \in \mathbf{N}}$ e $\{b_t(x, y)\}_{t \in \mathbf{N}^*}$ di classe \mathcal{C}^1 come segue:

$$a_t(x, y) := \left[\frac{\partial G_t^1(x, y)}{\partial y^1} \cdots \frac{\partial G_t^n(x, y)}{\partial y^n} \right]; \quad (3.6)$$

$$b_t(x, y) := \left[\frac{\partial G_t^1(x, y)}{\partial x^1} \cdots \frac{\partial G_t^n(x, y)}{\partial x^n} \right]. \quad (3.7)$$

Ipotesi 3.2. Date le funzioni a_t e b_t appena introdotte supponiamo che valgano le seguenti ipotesi per ogni $t = 0, 1, \dots$:

- 1) $\nabla_x a_t(x, y) = [\nabla_y b_t(x, y)]^T$;
- 2) le forme $\sum_{j=1}^n \frac{\partial G_{t-1}^j(x, y)}{\partial y^j} dy^j$ e $\sum_{j=1}^n \frac{\partial G_t^j(x, y)}{\partial x^j} dx^j$ sono chiuse, essendo X_t aperto e semplicemente connesso le due forme introdotte risulteranno esatte.

Osservazione 3.2. Consideriamo la multistrategia di equilibrio $\hat{\psi} \in \Psi$ e il cammino $\{\hat{x}_t\}_{t \in \mathbf{N}}$ indotto da $\hat{\psi}$. Grazie all'equazione (3.4) il cammino $\{\hat{x}_t\}_{t \in \mathbf{N}}$ è soluzione della seguente equazione per ogni $j \in J$:

$$\frac{\partial G_{t-1}^j}{\partial y^j}(\hat{x}_{t-1}, \hat{x}_t) + \frac{\partial G_t^j}{\partial x^j}(\hat{x}_t, \hat{x}_{t+1}) = 0. \quad (3.8)$$

Ora è facile dedurre da (3.8) che, per come sono definite $a_t(x, y)$ e $b_t(x, y)$, il cammino $\{\hat{x}_t\}_{t \in \mathbf{N}}$ è soluzione della seguente equazione:

$$\mathbf{F}_t(\hat{x}_{t-1}, \hat{x}_t, \hat{x}_{t+1}) = a_{t-1}(\hat{x}_{t-1}, \hat{x}_t) + b_t(\hat{x}_t, \hat{x}_{t+1}) = 0. \quad (3.9)$$

Partendo dall'equazione (3.9) mostreremo come sia possibile identificare un gioco potenziale risolvendo un problema inverso. Il nostro obiettivo è quello

di ricavare una successione di funzioni $\{H_t(x, y)\}_{t \in \mathbf{N}}$, con $H_t : X_t \times X_{t+1} \rightarrow \mathbf{R}$ di classe \mathcal{C}^2 , tale che le soluzioni del problema (3.10) siano cammini $\hat{\phi} = \{\hat{x}_t\}_{t \in \mathbf{N}}$ indotti da Equilibri di Nash.

$$\max_{\phi \in \Phi(x_0)} \sum_{t=0}^{+\infty} H_t(x_t, x_{t+1}) \quad (3.10)$$

3.1.1 Soluzione del problema inverso

Introduciamo ora gli strumenti teorici che ci permetteranno di caratterizzare i giochi potenziali. Procederemo come segue: in primo luogo mostreremo come e sotto quali ipotesi sia possibile definire la successione $\{H_t(x, y)\}_{t \in \mathbf{N}}$ introdotta nel problema (3.10), poi mostreremo che sotto alcune ipotesi di concavità il cammino di equilibrio $\{\hat{x}_t\}_{t \in \mathbf{N}}$ è soluzione del problema (3.10) e infine mostreremo che le soluzioni di tale problema di controllo ottimo sono cammini indotti da Equilibri di Nash. Questo dimostrerà che il gioco che stiamo considerando è un gioco potenziale, in quanto abbiamo ricavato un unico problema di controllo ottimo le cui soluzioni sono soluzioni di equilibrio. Per definire la successione $\{H_t(x, y)\}_{t \in \mathbf{N}}$ saranno utilizzate le Ipotesi (3.1.1) e (3.1.2) mentre per dimostrare che le soluzioni del problema (3.10) sono equilibri sarà indispensabile l'Ipotesi (3.1.3).

Teorema 3.1. ([1] p.47) *Sia $\mathbf{F}_t : X_{t-1} \times X_t \times X_{t+1} \rightarrow \mathbf{R}^n$ una funzione \mathcal{C}^1 per ogni $t = 1, 2, \dots$. Allora le seguenti condizioni sono equivalenti:*

- 1) *per ogni $t = 0, 1, \dots$ esiste una funzione $H_t : X_t \times X_{t+1} \rightarrow \mathbf{R}$ di classe \mathcal{C}^2 tale che:*

$$\mathbf{F}_t(x, y, z) = \nabla_y H_{t-1}(x, y) + \nabla_x H_t(y, z); \quad (3.11)$$

- 2) *per ogni $t = 0, 1, \dots$ esistono due funzioni $a_t : X_t \times X_{t+1} \rightarrow \mathbf{R}^n$ e $b_t : X_t \times X_{t+1} \rightarrow \mathbf{R}^n$ di classe \mathcal{C}^1 tali che:*

a) $\mathbf{F}_t(x, y, z) = a_{t-1}(x, y) + b_t(y, z);$

b) $\nabla_x a_t(x, y) = [\nabla_y b_t(x, y)]^T;$

c) $\sum_{i=1}^n a_{t-1}^i(x, \cdot) dy_i$ e $\sum_{i=1}^n b_t^i(\cdot, y) dx_i$ sono forme esatte.

Dimostrazione. L'implicazione 1) \Rightarrow 2) segue definendo per $t = 1, 2, \dots$:

$$a_{t-1}(x, y) = \nabla_y H_{t-1}(x, y) \quad b_t(y, z) = \nabla_x H_t(y, z).$$

Chiaramente questo verifica la condizione 2.a) e le funzioni a_{t-1} e b_t risultano \mathcal{C}^1 essendo H_t di classe \mathcal{C}^2 per ogni t , inoltre questa ipotesi implica 2.b) per il Teorema di Schwarz (hessiana simmetrica se la funzione è \mathcal{C}^2). Essendo H_t di classe \mathcal{C}^2 e per la definizione data di a_{t-1} si ha che:

$$\frac{\partial a_{t-1}^i(x, y)}{\partial y_j} = \frac{\partial^2 H_{t-1}}{\partial y_j \partial y_i} = \frac{\partial^2 H_{t-1}}{\partial y_i \partial y_j} = \frac{\partial a_{t-1}^j(x, y)}{\partial y_i}.$$

Questo mostra che $\sum_{i=1}^n a_{t-1}^i(x, \cdot) dy_i$ è una forma chiusa e quindi esatta essendo il dominio aperto e semplicemente connesso. Con lo stesso procedimento si può mostrare che lo è anche $\sum_{i=1}^n b_t^i(\cdot, y) dx_i$.

Proviamo ora l'implicazione 2) \Rightarrow 1). Definiamo per ogni t la funzione H_t come segue:

$$H_0(x, y) = \int_{y'}^y a_0(x, s) ds$$

$$H_t(x, y) = \int_{x'}^x b_t(s, y) ds + \int_{y'}^y a_t(x', s) ds \quad t = 1, 2, \dots$$

Gli estremi di integrazione $x' \in X_t$ e $y' \in X_{t+1}$ sono fissati a piacere. Calcoliamo $\nabla_y H_t(x, y)$. Essendo le funzioni a_{t-1} e b_t di classe \mathcal{C}^1 si ha:

$$\begin{aligned} \nabla_y H_t(x, y) &= \nabla_y \left[\int_{x'}^x b_t(s, y) ds + \int_{y'}^y a_t(x', s) ds \right] = \\ &= \int_{x'}^x [\nabla_y b_t(s, y)]^T ds + \nabla_y \left[\int_{y'}^y a_t(x', s) ds \right] = \\ &= \int_{x'}^x \nabla_x a_t(s, y) ds + a_t(x', y) = \\ &= a_t(x, y) - a_t(x', y) + a_t(x', y) = a_t(x, y). \end{aligned} \quad (3.12)$$

L'uguaglianza:

$$\nabla_y \left[\int_{y'}^y a_t(x', s) ds \right] = a_t(x', y)$$

è giustificata dalla seguente considerazione: essendo $a_t(x, y)$ di classe \mathcal{C}^1 , si ha per ogni $i = 1, \dots, n$:

$$\frac{\partial}{\partial y_i} \left[\int_{y'}^y a_t(x', s) ds \right] = a_t^i(x', y)$$

Abbiamo indicato con y_i la componente j -esima di $y \in \mathbf{R}^n$. Per il Teorema del Differenziale Totale, essendo tutte le derivate parziali continue in y , si ha che $H_t(x, y)$ è differenziabile in y e vale (3.12). Essendo $a_t(x, y)$ di classe \mathcal{C}^1 la funzione $H_t(x, y)$ è \mathcal{C}^2 . Con un procedimento simile si dimostra che $\nabla_x H_t(x, y) = b_t(x, y)$. Questo conclude la dimostrazione. \square

Consideriamo le funzioni a_t e b_t definite in (3.6) e (3.7) e definiamo la funzione di classe \mathcal{C}^1 $\mathbf{F}_t : X_{t-1} \times X_t \times X_{t+1} \rightarrow \mathbf{R}^n$:

$$\mathbf{F}_t(x, y, z) := a_{t-1}(x, y) + b_t(y, z) \quad (3.13)$$

Grazie al Teorema (3.1) e poiché per le funzioni a_t e b_t valgono le Ipotesi (3.2) possiamo definire la successione di funzioni $\{H_t(x, y)\}_{t \in \mathbf{N}}$ come segue:

$$H_0(x, y) = \int_{y'}^y a_0(x, s) ds; \quad (3.14)$$

$$H_t(x, y) = \int_{x'}^x b_t(s, y) ds + \int_{y'}^y a_t(x', s) ds \quad t = 1, 2, \dots \quad (3.15)$$

La funzione $H_t(x, y)$ non è unica in quanto data una successione di costanti $\{h_t\}_{t \in \mathbf{N}}$ con $h_t \in \mathbf{R}$ per ogni t , si ha che $H_t + h_t$ soddisfa l'equazione (3.11).

Osservazione 3.3. Ricordiamo che, per quanto detto nell'Osservazione (3.2), un cammino di equilibrio $\{\hat{x}_t\}_{t \in \mathbf{N}}$ è soluzione dell'equazione (3.9). Per il Teorema (3.1) questo implica che $\{\hat{x}_t\}_{t \in \mathbf{N}}$ è soluzione dell'equazione per ogni $t = 1, 2, \dots$:

$$\nabla_y H_{t-1}(\hat{x}_{t-1}, \hat{x}_t) + \nabla_x H_t(\hat{x}_t, \hat{x}_{t+1}) = 0 \quad (3.16)$$

Ora per quanto visto nel Teorema (2.2)² visto nel Capitolo 2 se fossero verificate ipotesi analoghe alle Ipotesi (2.5) e valesse la condizione di trasversalità:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \nabla_x H_t(\hat{x}_t, \hat{x}_{t+1}) \cdot \hat{x}_t = 0, \quad (3.17)$$

²Si tratta di un enunciato che stabilisce quali sono le condizioni sufficienti affinché un cammino $\{x_t\}_{t \in \mathbf{N}}$ sia ottimale per problemi analoghi al (3.10).

avremmo che il cammino di equilibrio $\{\hat{x}_t\}_{t \in \mathbf{N}}$ è soluzione del problema (3.10). Osserviamo inoltre che la funzione $H_t(x, y)$ è concava in entrambe le variabili se la matrice (3.18) è semidefinita negativa.

$$\begin{pmatrix} \nabla_x b_t(x, y) & \nabla_y b_t(x, y) \\ \nabla_x a_t(x, y) & \nabla_y a_t(x, y) \end{pmatrix} \quad (3.18)$$

Queste considerazioni giustificano il seguente teorema.

Ipotesi 3.3. Supponiamo che le seguenti ipotesi valgano per ogni $t = 0, 1, \dots$:

- La matrice (3.18) è semidefinita negativa;
- $\Gamma(\hat{x}_t) \subseteq \mathbf{R}_+^n$; ³
- $H_t(x, y)$ è una funzione crescente in x .

Teorema 3.2. ([1] p. 46) Sia $\mathbf{F}_t : X_{t-1} \times X_t \times X_{t+1} \rightarrow \mathbf{R}^n$ una funzione di classe \mathcal{C}^1 che soddisfi le condizioni (2.a), (2.b) e (2.c) del Teorema (3.1). Consideriamo un cammino $\{\hat{x}_t\}_{t \in \mathbf{N}}$ con $\hat{x}_0 = x_0$ fissato che soddisfi per ogni $t = 1, 2, \dots$ l'equazione:

$$\mathbf{F}_t(\hat{x}_{t-1}, \hat{x}_t, \hat{x}_{t+1}) = 0. \quad (3.19)$$

Inoltre consideriamo una funzione $H_t(x, y)$ definita come nel Teorema (3.1) che soddisfi le Ipotesi (3.3) e tale che soddisfi la condizione di trasversalità per ogni t :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \nabla_x H_t(\hat{x}_t, \hat{x}_{t+1}) \cdot \hat{x}_t = 0. \quad (3.20)$$

Allora il cammino $\{\hat{x}_t\}_{t \in \mathbf{N}}$ è soluzione del problema (3.10).

Dimostrazione. Grazie al Teorema (3.1) si ha che esiste una funzione $H_t(x, y)$ di classe \mathcal{C}^2 tale che per ogni t :

$$\mathbf{F}_t(x_{t-1}, x_t, x_{t+1}) = \nabla_y H_{t-1}(x_{t-1}, x_t) + \nabla_x H_t(x_t, x_{t+1}).$$

Poiché il cammino $\{\hat{x}_t\}_{t \in \mathbf{N}}$ soddisfa l'equazione (3.19) per ogni $t = 1, 2, \dots$ si ha che $\{\hat{x}_t\}_{t \in \mathbf{N}}$ è soddisfatta l'Equazione di Eulero:

$$\nabla_y H_{t-1}(\hat{x}_{t-1}, \hat{x}_t) + \nabla_x H_t(\hat{x}_t, \hat{x}_{t+1}) = 0. \quad (3.21)$$

³Si tratta degli stati che possono essere raggiunti all'istante t con un qualsiasi controllo ammissibile come definito nel Capitolo 2 in (2.1). Essenzialmente significa che gli stati raggiungibili sono vettori ad entrate non negative.

Consideriamo un cammino ammissibile $\{\tilde{x}_t\}_{t \in \mathbf{N}} \in \Phi(x_0)$ con $\tilde{x}_0 = x_0$, per le Ipotesi (3.3) e poiché H_t è differenziabile si ha per ogni t :

$$H_t(\hat{x}_t, \hat{x}_{t+1}) - H_t(\tilde{x}_t, \tilde{x}_{t+1}) \geq \nabla_x H_t(\hat{x}_t, \hat{x}_{t+1}) \cdot (\hat{x}_t - \tilde{x}_t) + \nabla_y H_t(\hat{x}_t, \hat{x}_{t+1}) \cdot (\hat{x}_{t+1} - \tilde{x}_{t+1}). \quad (3.22)$$

Definiamo ora:

$$\Delta_T := \sum_{t=0}^{T-1} H_t(\hat{x}_t, \hat{x}_{t+1}) - H_t(\tilde{x}_t, \tilde{x}_{t+1}).$$

Grazie alla disuguaglianza (3.22) si ha:

$$\Delta_T \geq \sum_{t=0}^{T-1} \nabla_x H_t(\hat{x}_t, \hat{x}_{t+1}) \cdot (\hat{x}_t - \tilde{x}_t) + \nabla_y H_t(\hat{x}_t, \hat{x}_{t+1}) \cdot (\hat{x}_{t+1} - \tilde{x}_{t+1}).$$

Poiché vale l'Equazione (3.21) (analogamente a quanto visto nella dimostrazione del Teorema (2.2)) l'unico termine che rimane alla destra della disuguaglianza è il $(T-1)$ -esimo:

$$\Delta_T \geq \nabla_y H_{T-1}(\hat{x}_{T-1}, \hat{x}_T) \cdot (\hat{x}_T - \tilde{x}_T).$$

Sempre grazie a (3.21) con $t = T$:

$$\Delta_T \geq -\nabla_x H_T(\hat{x}_T, \hat{x}_{T+1}) \cdot (\hat{x}_T - \tilde{x}_T).$$

Per le Ipotesi (3.3):

$$\Delta_T \geq -\nabla_x H_T(\hat{x}_T, \hat{x}_{T+1}) \cdot \hat{x}_T.$$

Infine la condizione di trasversalità (3.20) implica che:

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \nabla_x H_T(\hat{x}_T, \hat{x}_{T+1}) \cdot \hat{x}_T \geq 0.$$

Questo dimostra che il cammino $\{\hat{x}_t\}_{t \in \mathbf{N}}$ è soluzione di (3.10) e quindi conclude la dimostrazione. \square

Fino a questo punto abbiamo dimostrato che i cammini di equilibrio sono soluzione del problema (3.10). Tuttavia per dimostrare che il gioco che stiamo considerando è un gioco potenziale dobbiamo dimostrare che *tutte* le soluzioni di (3.10) sono cammini di equilibrio. Introduciamo un lemma che verrà utilizzato nella dimostrazione del prossimo teorema. Analogamente a quanto fatto in precedenza per le strategie si indicherà con $x^{-j} \in \mathbf{R}^{n-1}$ la variabile $x \in \mathbf{R}^n$ privata della sua componente j -esima x^j .

Lemma 3.1. ([1] p.55) Consideriamo i payoff istantanei $G_t^j : X_t \times X_{t+1} \rightarrow \mathbf{R}$ e le funzioni a_t e b_t definite in (3.6) e (3.7) con $j \in J$ e $t = 0, 1, \dots$. Supponiamo che siano soddisfatte le Ipotesi (3.1) e (3.2). Allora per ogni $t = 0, 1, \dots$ e $j \in J$ esiste una funzione $g_t^{-j} : \mathbf{R}^{n-1} \times \mathbf{R}^{n-1} \rightarrow \mathbf{R}$ di classe \mathcal{C}^2 tale che:

$$H_t(x, y) = G_t^j(x, y) - g_t^j(x^{-j}, y^{-j}). \quad (3.23)$$

Dimostrazione. Il Teorema (3.1) implica l'esistenza della funzione H_t data da:

$$H_0(x, y) = \int_{\bar{y}}^y a_0(x, s) ds;$$

$$H_t(x, y) = \int_{\bar{y}}^y a_t(\bar{x}, s) ds + \int_{\bar{x}}^x b_t(s, y) ds \quad t = 1, 2, \dots$$

con \bar{x} e \bar{y} fissati. Dimostriamo ora l'esistenza della funzione g_t^j , lo faremo dimostrando che la differenza $G_t^j - H_t$ non dipende da x^j e y^j . Osserviamo che per le Definizioni (3.6), (3.7) e per quanto visto nella dimostrazione del Teorema (3.1) si ha per ogni $t = 0, 1, \dots$ e $j \in J$:

$$\frac{\partial}{\partial x^j} [G_t^j(x, y) - H_t(x, y)] = b_t^j(x, y) - \frac{\partial}{\partial x^j} H_t(x, y) = 0. \quad (3.24)$$

Analogamente per la Definizione (3.7) si ha:

$$\frac{\partial}{\partial y^j} [G_t^j(x, y) - H_t(x, y)] = a_t^j(x, y) - \frac{\partial}{\partial y^j} H_t(x, y) = 0. \quad (3.25)$$

Da (3.24) e (3.25) deduciamo che la differenza $G_t^j - H_t$ non dipende da (x^j, y^j) , esiste quindi una funzione $g_t^j(x, y)$ tale che:

$$H_t(x, y) = G_t^j(x, y) - g_t^j(x^{-j}, y^{-j}).$$

□

Possiamo ora dimostrare che, sotto le Ipotesi (3.1), (3.2) e (3.3), il gioco (3.1) è un gioco potenziale.

Teorema 3.3. ([1] p.55) Consideriamo il gioco (3.1) per cui valgano le Ipotesi (3.1), (3.2) e (3.3). Allora tale gioco è un gioco potenziale.

Dimostrazione. Consideriamo il seguente problema di controllo ottimo:

$$\max_{\phi \in \Phi(x_0)} \sum_{t=0}^{+\infty} H_t(x_t, x_{t+1}); \quad (3.26)$$

con $\{H_t(x, y)\}_{t \in \mathbf{N}}$ definita come in (3.14) e (3.15), questo è possibile grazie al Teorema 3.1. Proviamo che una soluzione di tale problema è un equilibrio. Sia $\hat{\phi} = (\hat{\phi}_1, \dots, \hat{\phi}_n)$ la multistrategia che induce il cammino ottimale $\{\hat{x}_t\}_{t \in \mathbf{N}}$ per il problema 3.26. Proviamo che $\hat{\phi}$ soddisfa la proprietà di miglior risposta per ogni $j \in J$. Fissato il giocatore j -esimo, definiamo $\tilde{\psi} = (\hat{\phi}_1, \dots, \hat{\phi}_{j-1}, \tilde{\psi}_j, \hat{\phi}_{j+1}, \dots, \hat{\phi}_n)$ per qualche $\tilde{\psi}_j \in \Psi_j$ e sia $\{\tilde{x}_t\}_{t \in \mathbf{N}}$ la dinamica associata a $\tilde{\psi}$. Grazie all'Ipotesi (3.2.3) le due strategie inducono la stessa dinamica eccetto che per la componente j -esima:

$$\tilde{x}_t^i = \hat{x}_t^i \quad \forall \quad i \neq j, \forall \quad t = 1, 2, \dots$$

Grazie al Lemma (3.1) si ha:

$$\begin{aligned} & H_t(\hat{x}_t, \hat{x}_{t+1}) - H_t(\tilde{x}_t, \tilde{x}_{t+1}) = \\ & = G_t^j(\hat{x}_t, \hat{x}_{t+1}) - g_t^j(\hat{x}_t^{-j}, \hat{x}_{t+1}^{-j}) - G_t^j(\tilde{x}_t, \tilde{x}_{t+1}) + g_t^j(\tilde{x}_t^{-j}, \tilde{x}_{t+1}^{-j}) = \\ & = G_t^j(\hat{x}_t, \hat{x}_{t+1}) - G_t^j(\tilde{x}_t, \tilde{x}_{t+1}). \end{aligned}$$

L'ultima uguaglianza è giustificata dal fatto che le due dinamiche $\{\hat{x}_t\}_{t \in \mathbf{N}}$ e $\{\tilde{x}_t\}_{t \in \mathbf{N}}$ sono identiche eccetto che per la j -esima componente, ovvero $\tilde{x}_t^{-j} = \hat{x}_t^{-j}$. Sommando su $t \in \mathbf{N}$ otteniamo:

$$\sum_{t=0}^{+\infty} H_t(\hat{x}_t, \hat{x}_{t+1}) - \sum_{t=0}^{+\infty} H_t(\tilde{x}_t, \tilde{x}_{t+1}) = \sum_{t=0}^{+\infty} G_t^j(\hat{x}_t, \hat{x}_{t+1}) - \sum_{t=0}^{+\infty} G_t^j(\tilde{x}_t, \tilde{x}_{t+1}) \quad (3.27)$$

Per l'ottimalità di $\{\hat{x}_t\}_{t \in \mathbf{N}}$ e per l'uguaglianza (3.27) abbiamo:

$$\sum_{t=0}^{+\infty} G_t^j(\hat{x}_t, \hat{x}_{t+1}) \geq \sum_{t=0}^{+\infty} G_t^j(\tilde{x}_t, \tilde{x}_{t+1}). \quad (3.28)$$

E' stata quindi verificata la proprietà di miglior risposta: se il giocatore j -esimo devia dalla propria strategia $\hat{\phi}_j$ unilateralmente (quindi supponendo che gli altri giocatori scelgano la strategia $\hat{\phi}_i$ per ogni $i \neq j$) ha una perdita in termini di payoff. Questo conclude la dimostrazione in quanto abbiamo dimostrato che le soluzioni del problema 3.26 sono Equilibri di Nash e quindi il gioco 3.1 è un gioco potenziale. \square

3.2 Payoff separabile additivamente

Nella Sezione precedente abbiamo considerato un gioco in cui i giocatori valutavano le proprie strategie dalla dinamica $\{x_t\}_{t \in \mathbf{N}}$; i payoff erano quindi

espressi in funzione di quest'ultima. In questa Sezione considereremo invece un gioco in forma strategica:

$$(\{\Psi_j\}_{j \in J}, \{P_j\}_{j \in J}, J); \quad (3.29)$$

in cui $\{\Psi_j\}_{j \in J}$ è l'insieme delle strategie per i giocatori, $\{P_j\}_{j \in J}$ è l'insieme dei payoff e $J = \{1, \dots, N\}$ è l'insieme dei giocatori. Sia $f_t : X_t \times \Psi_t \rightarrow X_{t+1}$ la dinamica del gioco. Essendo il gioco in forma strategica i payoff dei giocatori sono espressi in funzione delle multistrategie $\psi = (\psi^1, \dots, \psi^N)$ e non della dinamica $\{x_t\}_{t \in \mathbf{N}}$ come nella Sezione precedente:

$$P(\psi) = \sum_{t=0}^{+\infty} g_t^j(x_t, \psi_t) \quad (3.30)$$

Teorema 3.4. ([1] p.58) Consideriamo il gioco (3.29). Supponiamo che le funzioni $g_t^j : X_t \times \Psi_t \rightarrow \mathbf{R}$ siano della forma:

$$g_t^j(x_t, \psi_t) = H_t(x_t, \psi_t) + r_t^j(\psi_t^{-j}) \quad (3.31)$$

per qualche $H_t : X_t \times \Psi_t \rightarrow \mathbf{R}$ e $r_t^j : \Psi_t^{-j} \rightarrow \mathbf{R}$. Allora il gioco (3.29) è un gioco potenziale.

Dimostrazione. Consideriamo il problema di controllo ottimo:

$$\max_{\psi \in \Psi} \sum_{t=0}^{+\infty} H_t(x_t, \psi_t) \quad (3.32)$$

$$s.a. \quad x_{t+1} = f_t(x_t, \psi_t)$$

con $H_t(x_t, u_t)$ dato da (3.31). Mostriamo che una multistrategia $\hat{\psi} = (\hat{\psi}_1, \dots, \hat{\psi}_N)$ soluzione di questo problema è un equilibrio. Sia $\{\hat{x}_t\}_{t \in \mathbf{N}}$ la dinamica associata a $\hat{\psi}$. Definiamo $\tilde{\psi} = (\hat{\psi}_1, \dots, \hat{\psi}_{j-1}, \tilde{\psi}_j, \hat{\psi}_{j+1}, \dots, \hat{\psi}_N)$ e indichiamo con $\{\tilde{x}_t\}_{t \in \mathbf{N}}$ la dinamica corrispondente. Verifichiamo la proprietà di miglior risposta della strategia $\hat{\psi}$ per il giocatore j , essendo questa multistrategia tale da massimizzare (3.32), si ha:

$$\sum_{t=0}^{+\infty} H_t(\hat{x}_t, \hat{\psi}(t)) \geq \sum_{t=0}^{+\infty} H_t(\tilde{x}_t, \tilde{\psi}(t)).$$

Sostituendo da 3.31 si ottiene:

$$\sum_{t=0}^{+\infty} g_t^j(\hat{x}_t, \hat{\psi}(t)) - r_t^j(\hat{\psi}^{-j}(t)) \geq \sum_{t=0}^{+\infty} g_t^j(\tilde{x}_t, \tilde{\psi}(t)) - r_t^j(\tilde{\psi}^{-j}(t)).$$

Essendo $\hat{\psi}^{-j}(t) = \tilde{\psi}^{-j}(t)$ per ogni t otteniamo:

$$\sum_{t=0}^{+\infty} g_t^j(\hat{x}_t, \hat{\psi}(t)) \geq \sum_{t=0}^{+\infty} g_t^j(\tilde{x}_t, \tilde{\psi}(t)).$$

Abbiamo quindi verificato la proprietà di miglior risposta per la multistrategia $\hat{\psi}$. Questo dimostra che le soluzioni del problema 3.32 sono Equilibri di Nash. \square

Capitolo 4

Il gioco del lago

In questo Capitolo introdurremo un modello che descrive l'utilizzo dell'acqua di un lago da parte delle comunità che ne usufruiscono. Verranno utilizzati risultati visti nei capitoli precedenti per ricavare una funzione potenziale e multistrategie di equilibrio. Nel gioco che introdurremo lo stato del sistema sarà dato dal livello di fosforo nel lago, mentre i controlli saranno dati dalle quantità di fosforo rilasciate nel lago dalle comunità. Il fosforo infatti è l'elemento principale dei fertilizzanti utilizzati da parte degli agricoltori e può raggiungere il lago tramite corsi d'acqua affluenti oppure venendo trasportato dalle piogge nelle falde acquifere e successivamente nel lago. Un livello troppo elevato di questo elemento nell'acqua può essere problematico in quanto è il principale nutriente di alghe e piante acquatiche. Nel caso in cui queste specie proliferassero eccessivamente potrebbero rendere l'acqua non adatta per i servizi, per la pesca e per la balneazione.

4.1 Il modello

Introduciamo il modello deterministico del *gioco del lago* tratto da [2]. Si tratta di un gioco dinamico non cooperativo ad orizzonte temporale infinito. Indicheremo con $J = \{1, 2, \dots, N\}$ l'insieme delle comunità, con $X_t := [0, x_M]^1$ l'insieme degli stati x_t ammissibili all'istante t e infine con $U^j(x_t) = (0, +\infty)$ l'insieme dei controlli possibili per la comunità j -esima dato lo stato x_t^2 . Le strategie delle singole comunità, ovvero le sequenze di controlli $\{u_t^j\}_{t \in \mathbb{N}}$ verranno indicate con \mathbf{u}^j e \mathbf{U}^j sarà l'insieme di tali elementi. Indicheremo invece con $\mathbf{U} = \mathbf{U}^1 \times \dots \times \mathbf{U}^N$ l'insieme delle multistrategie. In questo

¹L'insieme degli stati considerati rimane invariato nel tempo.

²L'insieme dei controlli utilizzabili dalle comunità in realtà è indipendente dal tempo e dallo stato corrente x_t .

modello x_t rappresenterà il livello di fosforo nel lago all'istante t , mentre u_t^j sarà la quantità di fosforo rilasciata nel lago durante il periodo $[t, t + 1)$ da parte della comunità j -esima. Il valore x_M indicherà la quantità di fosforo massima ammessa nel lago. Prendiamo per noto il valore iniziale di fosforo x_0 . Il payoff per la comunità j -esima è dato da:

$$P^j(\mathbf{u}) = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left(\frac{N}{c_j} \log u_t^j - x_t^2 \right). \quad (4.1)$$

Con la variabile di stato soggetta alla dinamica:

$$x_{t+1} = bx_t + \frac{x_t^q}{1 + x_t^q} + \sum_{j=1}^N u_t^j. \quad (4.2)$$

Indicheremo questo gioco con \mathcal{F} . Analizziamo il modello e i suoi parametri. Il payoff (4.1) presenta due fattori: $\frac{N}{c_j} \log u_t^j$ rappresenta l'utilità portata dagli scarichi di fosforo nel lago³, mentre $-x_t^2$ rappresenta il costo associato al livello di fosforo nell'acqua⁴. Il parametro $\beta \in (0, 1)$ indica un *fattore di impazienza*⁵, N indica il numero di comunità che usufruiscono del lago per i servizi. I valori c_j con $j \in J$ indicano il valore che la comunità j -esima assegna alla pulizia dell'acqua: comunità con forte interesse ad usufruire direttamente del lago (per il turismo ad esempio) avranno valori c_j più alti rispetto alle altre comunità.

Osservazione 4.1. *Facciamo notare che, nonostante l'utilità $\log u_t^j$ del payoff della comunità j -esima dipenda solo dal controllo della rispettiva comunità, il valore complessivo del payoff dipende dalla dinamica del sistema e quindi dalle strategie di tutte le comunità.*

4.1.1 La dinamica

Studiamo ora la dinamica del sistema (4.2):

$$x_{t+1} = bx_t + \frac{x_t^q}{1 + x_t^q} + \sum_{j=1}^N u_t^j. \quad (4.3)$$

Si suppone che in ogni periodo solo una porzione b del fosforo presente nel periodo precedente rimanga nel lago, mentre viene aggiunta la quantità

³Questa utilità indica i guadagni in termini economici associata alla coltivazione.

⁴Questo costo è principalmente a danno delle comunità limitrofe al lago che sfruttano il bacino idrico per attività turistiche.

⁵Noi considereremo un valore $\beta = 0.997$

$U_t = \sum_{j=1}^N u_t^j$. Tra un periodo e l'altro, tuttavia, una percentuale del fosforo presente nell'acqua si sedimenta sul fondo del lago. I sedimenti possono essere reintrodotti nell'acqua a causa dell'effetto delle onde: questo fenomeno è rappresentato dal termine $\frac{x_t^q}{1+x_t^q}$ con $q > 1$. Vediamo ora cosa succede nel caso in cui non vi siano scarichi, ovvero se $U_t = 0$ per ogni t . La dinamica che si ottiene è:

$$x_{t+1} = bx_t + \frac{x_t^q}{1+x_t^q}.$$

Supponendo $q = 2^6$, come faremo in seguito, si ha che la dinamica del sistema dipende dal parametro b e dal livello iniziale di fosforo x_0 . Troviamo i punti fissi per la dinamica, essi sono le soluzioni dell'equazione:

$$x_t = bx_t + \frac{x_t^2}{1+x_t^2}. \quad (4.4)$$

Supponiamo inizialmente che, se è possibile trovare una soluzione, questa non sia nulla. In questo caso è possibile dividere l'equazione (4.4) per x_t e si ottiene l'equazione (dopo alcuni semplici passaggi algebrici):

$$(1-b)(1+x_t^2) - x_t = 0 \quad (4.5)$$

Si osserva che l'equazione (4.5) ha soluzioni solo per $b \geq 1/2$. Per $b = 1/2$ si ha che x_t tende a 1 qualsiasi sia x_0 . Per valori di $b > 1/2$ si hanno due punti fissi per la dinamica. Il primo stabile:

$$x_S^* = \frac{1 + \sqrt{1 - 4(1-b)^2}}{2(1-b)}; \quad (4.6)$$

e il secondo instabile:

$$x_I^* = \frac{1 - \sqrt{1 - 4(1-b)^2}}{2(1-b)}. \quad (4.7)$$

Per valori di x_0 minori di x_I^* si ha che x_t tende a zero, altrimenti tende a x_S^* . Superando il livello x_I^* di fosforo si giunge quindi ad uno stato irreversibile. Infatti, anche non immettendo più fosforo nel lago, è impossibile scendere al di sotto di tale livello. Queste caratteristiche della dinamica rappresentano un fattore di interesse per le diverse comunità che usufruiscono del lago: una comunità che ha forte interesse nello sfruttare l'acqua per i servizi, il turismo o la pesca sarà interessata a non avvicinarsi al livello x_I^* (se lo stato iniziale

⁶Si tratta di un valore medio per laghi poco profondi.

ne è al di sotto), mentre le comunità agricole trarranno maggior profitto da un lago che ha già un valore $x_0 > x_I^*$ e quindi anche immettendo una qualsiasi quantità di fosforo esso tenderà a x_S^* (rinunciando ad immetterne per un po di tempo). Possiamo indicare i due punti fissi con i termini eutrofico (per quello stabile) e oligotrofico (per quello instabile), questi due termini indicano ordinatamente l'abbondanza o la scarsità di nutrienti per le alghe. Per valori di $b < 1/2$ si ha che l'unico punto fisso della dinamica è $x^* = 0$ essendo soluzione dell'equazione (4.4). Noi considereremo d'ora in poi $b = 0.45$, in questo modo qualsiasi sia lo stato iniziale è possibile ridurre il livello di fosforo a piacimento rinunciando a introdurne nel lago per un po di tempo.

4.2 Equilibri di Nash per il gioco del lago

Vediamo in questa Sezione i metodi introdotti nei Capitoli precedenti per ricavare multistrategie di equilibrio. In primo luogo richiameremo la definizione di equilibrio e, dopo aver descritto i problemi di controllo ottimo necessari per ricavare tali multistrategie, formuleremo le Equazioni di Eulero per \mathcal{F} e vedremo come sia possibile ricavare una funzione potenziale per tale gioco. Noteremo che le Equazioni di Eulero costituiscono solo una condizione necessaria e non sufficiente in quanto non sono soddisfatte le Ipotesi 3.22. Sarà possibile tuttavia ricavare una funzione potenziale grazie al Teorema 3.4, l'esistenza di equilibri sarà garantita dall'esistenza di multistrategie che massimizzano la funzione potenziale. Richiamiamo la Definizione (1.6) di equilibrio.

Definizione 4.1. *Un Equilibrio di Nash per \mathcal{F} è una multistrategia ammissibile $\tilde{\mathbf{u}} = (\tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_N)$ tale che per ogni $j \in \{1, \dots, N\}$ e per ogni strategia del giocatore j -esimo $u^j = \{u_t^j\}_{t \in \mathbf{N}}$ con $u_t^j \in U^j(x_t)$ per ogni t :*

$$P^j(\tilde{\mathbf{u}}) \geq P^j(u^j, \tilde{\mathbf{u}}^{-j}). \quad (4.8)$$

Formuliamo i problemi di controllo ottimo \mathcal{P}_j introdotti nella Sezione 1.1 per il gioco \mathcal{F} .

Osservazione 4.2. *Nel resto della Sezione si indicherà con U_t la quantità totale di fosforo versata nel lago dalle comunità all'istante t . Come già indicato nella Sezione precedente u_t^j indica la quantità di fosforo versata dalla comunità j -esima all'istante t , indicheremo con $U_t^j = U_t - u_t^j$ ovvero la quantità di fosforo versata da tutte le comunità eccetto la j -esima. Ricordiamo che, per quanto riguarda la ricerca di equilibri, la comunità j -esima da per note le strategie \mathbf{u}_i con $i \neq j$ delle altre comunità. Nel nostro caso conoscere $\mathbf{u}_i = \{u_t^i\}_{t \in \mathbf{N}}$ per ogni $i \neq j$ implica conoscere la quantità U_t^j per ogni $t = 0, 1, \dots$.*

Per ricavare soluzioni di equilibrio è necessario risolvere contemporaneamente N problemi di controllo ottimo come introdotto nella Sezione 1.1. Richiamiamo tale problema nel caso del gioco \mathcal{F} :

$$\max_{\mathbf{u}^j \in \mathbf{U}^j} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t (v^j(u_t^j) - x_t^2); \quad (4.9)$$

rispettando i vincoli della dinamica del sistema, con $U_t^j = U_t - u_t^j$:

$$x_{t+1} = bx_t + \frac{x_t^q}{1 + x_t^q} + (u_t^j + U_t^j). \quad (4.10)$$

Osservazione 4.3. Per semplicità indicheremo con $v_t^j = \frac{N}{c_j} \log u_t^j$ il fattore di utilità della comunità j -esima.

4.2.1 Equazioni di Eulero

Ricavando il controllo del giocatore j -esimo dalla dinamica del gioco si ottiene:

$$u_t^j = x_{t+1} - (B(x_t) + U_t^j); \quad (4.11)$$

con $B(x_t) = bx_t + x_t^q/(1 + x_t^q)$. Il payoff 4.9 in funzione della dinamica è dato da:

$$V^j(\phi) = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left(\frac{N}{c_j} \log(x_{t+1} - B(x_t) - U_t^j) - x_t^2 \right). \quad (4.12)$$

Le Equazioni di Eulero (2.7) per la comunità j -esima diventano quindi:

$$\frac{N}{c_j} \left(\frac{1}{x_t - B(x_{t-1}) - U_{t-1}^j} - \frac{\beta B'(x_t)}{x_{t+1} - B(x_t) - U_t^j} \right) - 2\beta x_t = 0. \quad (4.13)$$

La condizione di trasversalità (2.8) diventa invece:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\beta^{t-1} x_t}{x_t - B(x_{t-1}) - U_{t-1}^j} = 0. \quad (4.14)$$

Ricordiamo che $\frac{\partial}{\partial x}$ indica la derivata rispetto alla prima variabile di $G_t^j(x_t, x_{t+1})$. Osserviamo ora che:

$$\frac{\partial G_t^j}{\partial x}(x_t, x_{t+1}) = -\frac{\beta B'(x_t)}{x_{t+1} - B(x_t) - U_t^j} - 2\beta x_t \leq 0. \quad (4.15)$$

Deduciamo da (4.15) che non sono verificate le Ipotesi 2.5 del Teorema 2.2, in particolare è richiesto che $\frac{\partial G_t^j}{\partial x}(x_t, x_{t+1}) \geq 0$. Le Equazioni di Eulero non possono essere quindi condizione sufficiente per soluzioni di equilibrio.

4.3 Un Potenziale per il gioco del lago

In questa Sezione applicheremo il Teorema (3.4) per ricavare un potenziale per \mathcal{F} . Notiamo che il Teorema (3.3) non è adatto al gioco \mathcal{F} in quanto il numero di variabili di stato e il numero di giocatori coincidono solo nel caso in cui vi sia una sola comunità. Osserviamo che il payoff (4.9) rispetta le Ipotesi del Teorema (3.4), infatti per ogni $t = 0, 1, \dots$:

$$\beta^t(v^j(u_t^j) - x_t^2) = \beta^t\left(\sum_{i=1}^N v^i(u_t^i) - \sum_{i \neq j} v^i(u_t^i) - x_t^2\right). \quad (4.16)$$

Da cui deduciamo che un potenziale per \mathcal{F} è dato da:

$$H(x_t, u_t) = \sum_{i=1}^N v^i(u_t^i) - x_t^2. \quad (4.17)$$

Osservazione 4.4. *D'ora in avanti supporremo che i costi $c_j = 1$ per ogni $j \in J$.*

4.3.1 Risoluzione del problema

Dopo aver ricavato una funzione potenziale per il Gioco del lago è possibile formulare il nuovo problema di controllo ottimo le cui soluzioni sono Equilibri di Nash, indicheremo tale problema con \mathcal{P} . Supporremo che esista un valore massimo di fosforo x_M tollerabile per il lago⁷, nel nostro caso sarà $x_M = 2$, di poco superiore al valore di saturazione del lago $1/(1-b)$ ⁸. I controlli ammissibili per le comunità saranno dati da $U^j(x_t) = (0, +\infty)$ ⁹ per ogni j e per ogni t . Il problema diventa così:

$$\begin{aligned} & \max_{\mathbf{u} \in \mathbf{U}} \sum_{t=0}^{+\infty} \beta^t H(x_t, u_t) \\ & \text{s.a.} \quad x_{t+1} = bx_t + \frac{x_t^q}{1+x_t^q} + \sum_{j=1}^N u_t^j \\ & \quad x_t \in [0, x_M], \quad u_t^j \in (0, +\infty) \quad \forall t = 0, 1, \dots \quad \forall j \in J \end{aligned}$$

⁷Permettere al valore x_t di divergere non sembra un'eventualità molto appetibile

⁸Ricordiamo che $b = 0.45$.

⁹Chiaramente non sono concessi flussi di fosforo che facciano eccedere il valore x_M , tuttavia per comodità supponiamo solo che i flussi siano strettamente positivi senza specificare un limite superiore.

Per risolvere tale problema ci serviremo della *Programmazione Dinamica* come introdotto nella Sezione 1.5. Prima di formulare l'Equazione di Bellman per il nostro problema mostriamo che si tratta di una condizione sufficiente per l'ottimalità, ovvero le soluzioni di tale equazione sono multistrategie ottimali per il problema \mathcal{P} e quindi Equilibri di Nash. Ricordiamo che una condizione che garantisce la sufficienza delle Equazioni di Bellman è data da¹⁰:

$$\left| \sum_{t=0}^{+\infty} \beta^t H(x_t, u_t) \right| < +\infty \quad (4.18)$$

per ogni cammino ammissibile $\{x_t\}_{t \in \mathbf{N}}$ e multistrategia $\{u_t\}_{t \in \mathbf{N}}$ che induca un tale cammino. Mostriamo che tale condizione è verificata nel nostro caso. In primo luogo osserviamo che necessariamente $u_t^j \leq x_M$ per ogni $t = 0, 1, \dots$ e $j \in J$ in quanto se non fosse così i controlli delle comunità permetterebbero di eccedere il livello massimo x_M . Grazie a questa osservazione abbiamo:

$$\left| \sum_{i=1}^N v^i(u_t^i) - x_t^2 \right| \leq \left| \sum_{i=1}^N v^i(x_M) \right| + |x_M^2|$$

Ricordando che $\beta \in (0, 1)$, otteniamo:

$$\left| \sum_{t=0}^{+\infty} \beta^t \left(\sum_{i=1}^N v^i(u_t^i) - x_t^2 \right) \right| \leq \sum_{t=0}^{+\infty} \beta^t \left(\sum_{i=1}^N |v^i(u_t^i) - x_t^2| \right) \leq \sum_{t=0}^{+\infty} \beta^t \left(\sum_{i=1}^N |v^i(x_M)| + |x_M^2| \right) < +\infty.$$

Abbiamo quindi mostrato che vale la condizione (4.18) e quindi che l'Equazione di Bellman è una condizione sufficiente. A questo punto sappiamo che le soluzioni dell'equazione:

$$V(x_t) = \max_{u_t \in U(x_t)} \{H(x_t, u_t) + \beta V(x_{t+1})\}. \quad (4.19)$$

sono multistrategie ottimali. Dato che gli insiemi dei controlli per le comunità sono aperti è possibile formulare la seguente condizione del primo ordine per ogni $j \in J$:

$$\frac{\partial H(x_t, u_t)}{\partial u_t^j} + \beta \frac{\partial V(f_t(x_t, u_t))}{\partial u_t^j} = 0. \quad (4.20)$$

Osserviamo ora che $c_j = 1$ per ogni $j \in J$ e che $\partial f_t(x_t, u_t^j) / \partial u_t^j = 1$ per ogni $t = 0, 1, \dots$ e per ogni $j \in J$. L'equazione (4.20) diventa quindi:

$$\frac{N}{u_t^j} + \beta \frac{\partial V(x_{t+1})}{\partial x} = 0,$$

¹⁰Si veda l'Osservazione 1.5 nella Sezione 1.5.

da cui è facile dedurre che $u_t^j = u_t^i$ per ogni $i \neq j$ e per ogni $t = 0, 1, \dots$. In questo modo abbiamo mostrato che è possibile esprimere il nostro problema di controllo in funzione di una sola variabile di controllo (noi considereremo u_t^1 per semplicità) anziché una per ogni comunità. Il problema di controllo riformulato in funzione di u_t^1 diventa:

$$\begin{aligned} & \max_{u^1 \in \mathbf{U}^1} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t (N^2 \log(u_t^1) - x_t^2) \\ & \text{s.a. } x_{t+1} = bx_t + \frac{x_t^2}{1+x_t^2} + Nu_t^1 \\ & x_t \in [0, x_M], \quad u_t^1 \in (0, +\infty) \quad \forall t = 0, 1, \dots \end{aligned}$$

L'Equazione di Bellman associata a questo problema è la seguente:

$$V(x_t) = \max_{u_t^1 \in U_t^1(x_t)} \{N^2 \log(u_t^1) - x_t^2 + \beta V(f_t(x_t, u_t^1))\}$$

4.4 Soluzioni numeriche

In questa sezione utilizzeremo il metodo dell'iterazione di valore introdotto nella Sezione 1.5 per risolvere il problema \mathcal{P} per diversi valori di N e ricaveremo così delle soluzioni di equilibrio. Ricordiamo che la funzione valore $\bar{V}(x)$ è un punto fisso per il funzionale:

$$T(V(x)) = \max_{u_t^1 \in U_t^1(x_t)} \{N^2 \log(u_t^1) - x_t^2 + \beta V(f_t(x_t, u_t^1))\} \quad (4.21)$$

Si può dimostrare che la funzione T che mappa l'insieme $S = \{V : X \rightarrow \mathbf{R} \text{ t.c. } V \text{ limitata}\}^{11}$ in se stesso è una contrazione ([2] p.1578). Grazie a questa considerazione è possibile sfruttare il seguente algoritmo per approssimare V data una funzione $V_0 \in S$ arbitraria¹²:

$$V_{n+1} = T(V_n) \quad (4.22)$$

Si ha che V_n converge alla funzione valore V , da cui è possibile ricavare la strategia ottimale. La velocità di convergenza dell'algoritmo dipende dalla funzione iniziale V_0 e dal fattore di sconto β , si può infatti dimostrare che¹³:

$$\|V_n - \bar{V}\|_{\infty} \leq \beta^n \|V_0 - \bar{V}\|_{\infty}$$

¹¹Ricordiamo che vale la proprietà (4.18) qualsiasi sia lo stato iniziale x_0 e per ogni multistrategia ammissibile.

¹²Noi considereremo $V_0(x) = 0$ per ogni $x \in [0, x_M]$.

¹³Si veda [9] p.150

Grazie a questa proprietà è sufficiente scegliere un numero di iterazioni abbastanza elevato per ottenere la precisione desiderata, nel nostro caso sono state compiute 10000 iterazioni di valore. Per approssimare le soluzioni è stato implementato l'algoritmo di iterazione di valore con Python 3.7.2 per Windows 10. La funzione valore \bar{V} è stata stimata su una griglia di 1000 punti equispaziati in $[0, 2]$. Ad ogni iterazione:

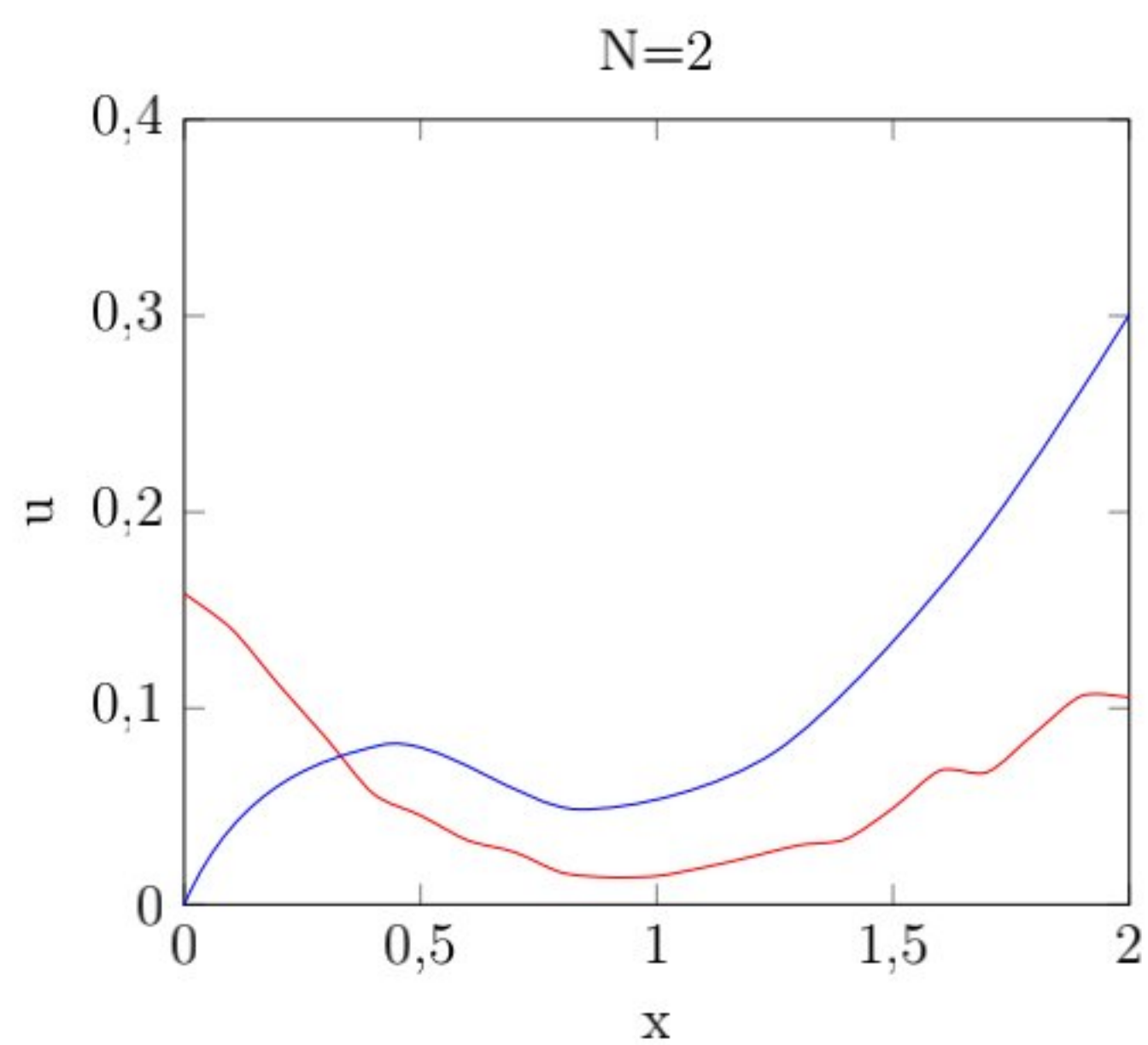
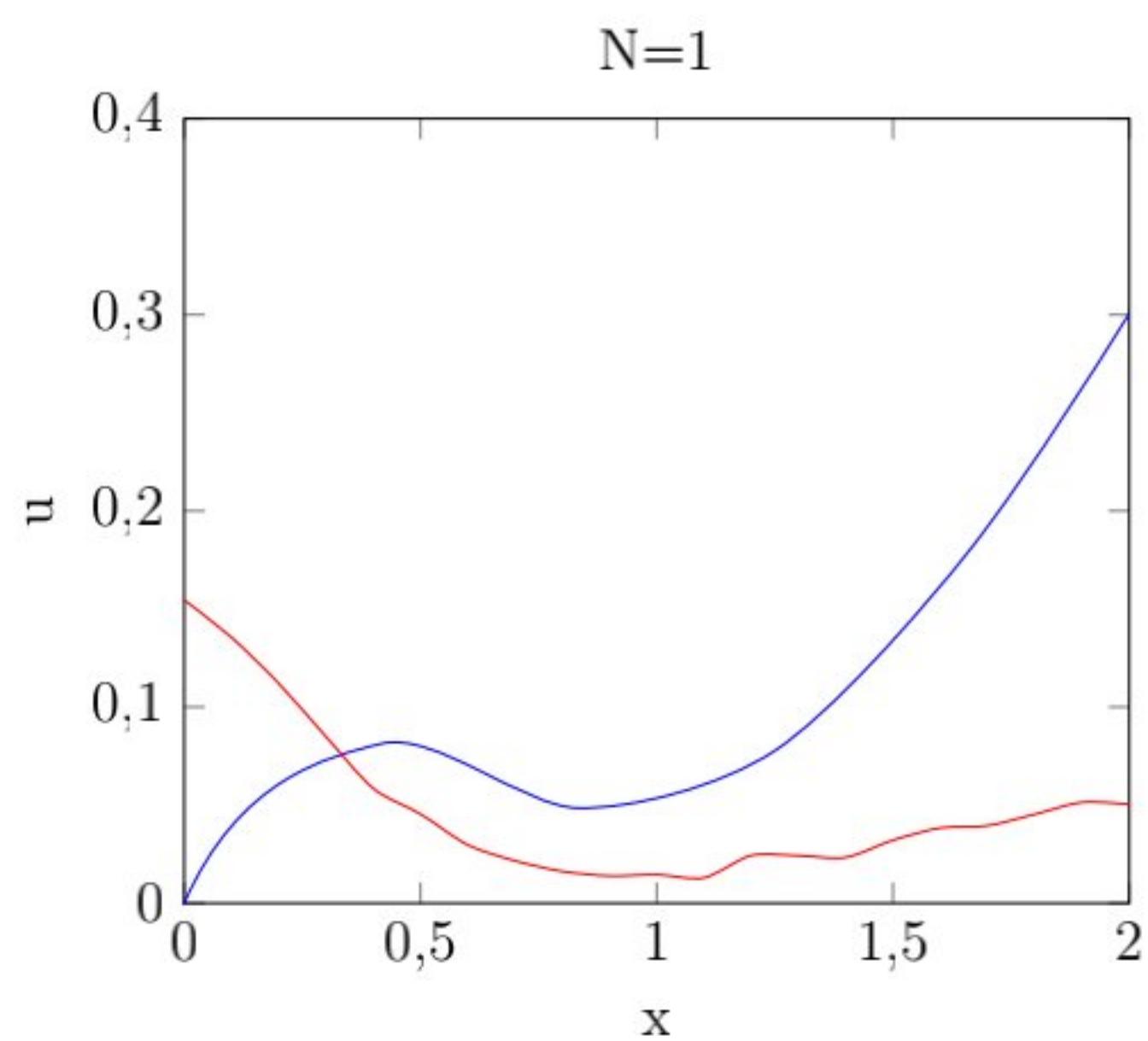
$$V_{n+1}(x_t) = \max_{u_t \in (0, +\infty)} \{N^2 \log(u_t^1) - x_t^2 + \beta V_n(f_t(x_t, u_t))\}$$

il controllo ottimale viene salvato e si aggiorna valore di \bar{V} per poi ripetere il procedimento. Una volta che è stato raggiunto il numero di iterazioni desiderato il programma riporta la strategia ottimale associata alla funzione valore approssimata. La strategia che si ottiene è di tipo feedback in quanto esprime i valori $u_t^j = \mu^j(x_t)$ in funzione dello stato x_t . E' tuttavia possibile ottenere una strategia di tipo openloop in modo ricorsivo conoscendo lo stato iniziale x_0 :

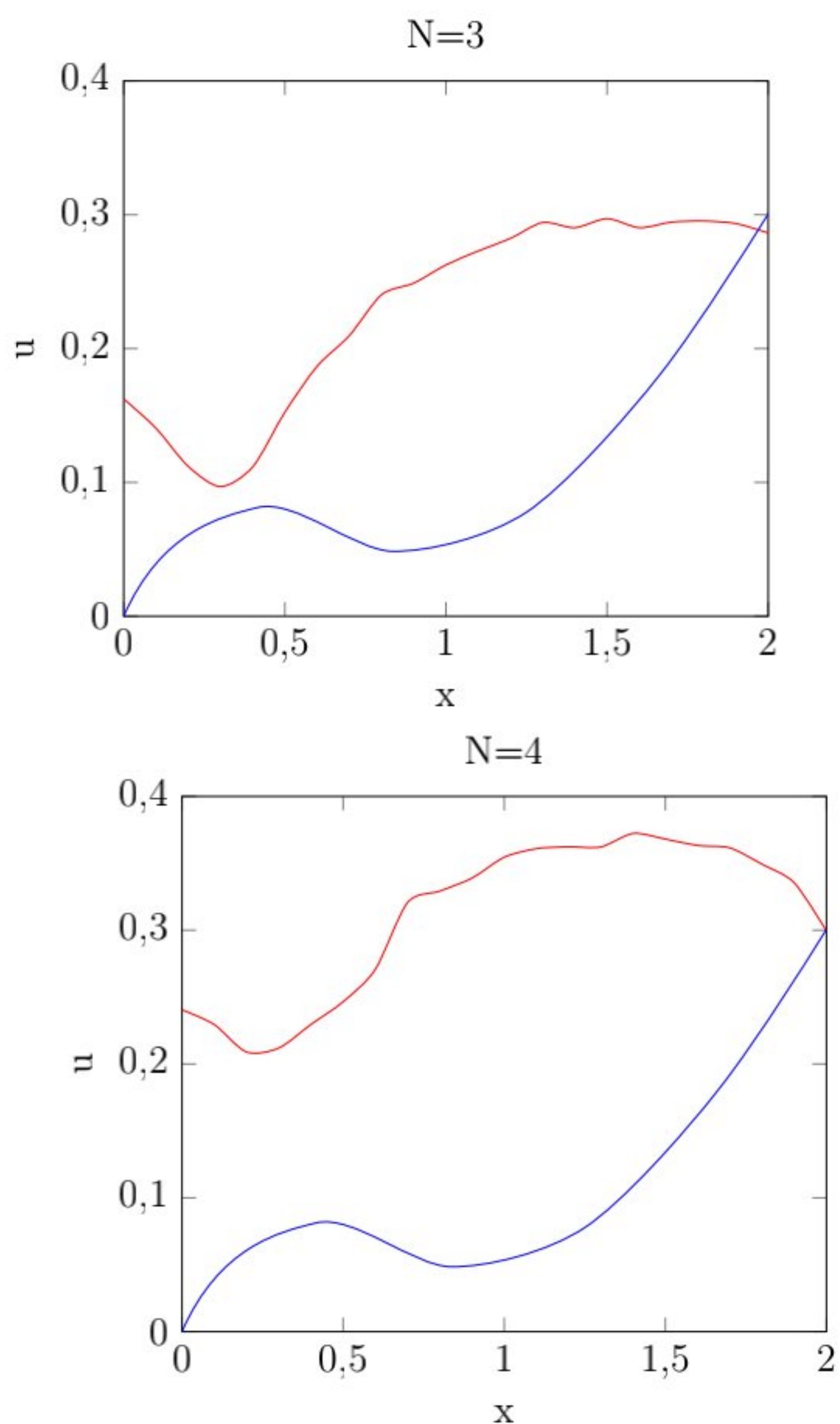
$$u_{t+1}^j = \mu^j(f_t(x_t, u_t^j)) \quad t = 0, 1, \dots$$

4.4.1 Grafici delle soluzioni

Riportiamo ora i grafici delle soluzioni di equilibrio per giochi con diversi valori di N . L'asse orizzontale indica il livello di fosforo attuale, mentre quello verticale indica la quantità di fosforo totale versata dalle comunità, data questa è possibile ricavare le singole strategie. Nei seguenti grafici la linea tracciata in blu indicherà il livello di scarichi di fosforo che lascia invariato il livello attuale, mentre la linea rossa indicherà la strategia ottimale. Nel caso in cui il grafico della strategia starà al di sopra della linea rossa, il livello di fosforo x_t tenderà ad aumentare mentre tenderà a farlo diminuire nel caso contrario. Le intersezioni tra il grafico in blu e la strategia rappresentano i punti fissi della dinamica che consegue dalle strategie di equilibrio. Abbiamo quindi che la dinamica tenderà ai punti fissi qualsiasi sia lo stato iniziale x_0 .



Per $N = 1$ e $N = 2$ la dinamica tende ad un punto fisso inferiore (circa 0.34), in questo caso l'interesse privato delle comunità e quello ecologico coincidono. Aumentando il numero di comunità questo non rimane vero.



Per $N = 3$ e $N = 4$ si nota che la strategia tende a far aumentare il livello di fosforo fino al livello di saturazione e si ha un punto fisso superiore vicino al limite massimo x_M . Si tratta di un fenomeno conosciuto come “*tragedy of commons*”: lo sfruttamento di una risorsa comune da parte di più enti può condurre ad uno stato non socialmente ottimale a causa delle preferenze individuali dei singoli enti.

Bibliografia

- [1] *D.González – Sánchez, O.Hernández – Lerma* (2013). *Discrete-Time Stochastic Control and Dynamic Potential Games*, Springer.
- [2] *W.D.Dechert, S.I.O'Donnell* (2006). *The stochastic lake game: A numerical solution*, *Journal of Economic Dynamics and Control* **30** p.1569-1587.
- [3] *W.H.Fleming, R.W.Rishel*, (1975) *Deterministic and Stochastic Optimal Control*, Springer.
- [4] *D.Monderer, L.S.Shapley*, (1996) *Potential Games*, *Games and Economic Behavior* **14** p.124-143.
- [5] *F.Patrone*, (2006) *Decisori (razionali) interagenti*, Edizioni Plus .
- [6] *J.F.Nash, Jr*, (1950) *Equilibrium Points in n-person Games*, *PNAS* **36** p.48-49.
- [7] *M.E.Slade*, (1994) *What does an oligopoly maximize*, *Journal of Industrial Economics* **42** p.45-61.
- [8] *D.P.Bertsekas*, (1995) *Dynamic Programming and Optimal Control*, Athena Scientific
- [9] *G.Sorgen*, (2015) *Dynamic Economic Analysis, Deterministic Models in Discrete Time*, Cambridge University Press