

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Dipartimento di Fisica e Astronomia “Galileo Galilei”

Corso di Laurea in Fisica

Tesi di Laurea

Studio delle proprietà optomicrofluidiche dei sistemi goccia
in goccia

Relatore

Prof./Dr. Cinzia Sada

Laureando

Matteo Lazzari

Anno Accademico 2021/2022

*"Per l'ascesi dovemmo perderci
per ritrovarci e poi fidarci,
perchè c'era la stessa luce ad
aspettarci."
-Andrea Visani.*

A Luca e Giorgia.

Indice

1	Capitolo 1: Rifrazione del sistema goccia in goccia	5
1.1	Descrizione del sistema	5
1.2	Analisi $[1 2]_R$	8
1.3	Analisi $[1 c]_R$	11
1.4	Analisi $[1 2]_T[2 3]_R[2 1]_T$	13
2	Capitolo 2: Diffrazione del sistema goccia in goccia	17
2.1	Descrizione del problema	17
2.2	Studio delle casistiche	18
3	Conclusioni	22

Introduzione

Il presente lavoro di tesi si inserisce in un progetto di ricerca che si prefigge di proporre la realizzazione di una piattaforma opto-microfluidica multifunzionale integrata, su uno stesso materiale, in cui sia possibile manipolare ridotte quantità di fluidi e su di essi procedere con l'analisi ottica e composizionale. È stata focalizzata l'attenzione sull'impiego della microfluidica in gocce e sull'analisi ottica in trasmittanza delle gocce stesse in una configurazione particolare cosiddetta "goccia-in-goccia" o "core-shell droplets". Si tratta di un sistema ove una goccia (interna) è contenuta in un'altra goccia e per effetto della immiscibilità dei due fluidi, il sistema rimane stabilmente bifasico. Tali sistemi giocano un ruolo importante in vari settori tra i quali la biologia, la biomedicina e la chimica specialmente quando è di primaria importanza prevenire la contaminazione di un fluido e grazie all'azione di incapsulamento, è possibile garantirne il completo isolamento rispetto l'ambiente esterno.

Tale opportunità è di particolare interesse anche laddove il fluido costitutivo della goccia interna sia in fase gassosa mentre quello della goccia esterna sia liquido, con evidenti applicazioni nell'indagine di gas tossici o nocivi o contaminanti. La microfluidica in goccia si è dimostrata esser interessante strumento per investigare le proprietà di fluidi confinati in volumi dal pL al nL con particolare riferimento alla possibilità di realizzare microreattori chimici. In quest'ultimo caso si studiano reazioni chimiche in ambienti controllati che coinvolgono quantità di soluzioni minime, aspetto molto rilevante specie quando le soluzioni sono nocive, tossiche o presentano contaminanti in genere.

Ad oggi la maggior parte dei sistemi di analisi della dinamica delle reazioni e relativa composizione sono effettuati mediante analisi ottiche che sono realizzate con spettrofotometri accoppiati ai circuiti microfluidici mediante microscopi e sistemi di acquisizione in trasmittanza, fluorescenza anche via imaging. Tali accoppiamenti richiedono strumenti piuttosto ingombranti, limitando quindi la portabilità del sistema. Alcune soluzioni sono state proposte adottando camere multispettrali connesse con smartphones che sebbene molto più compatti richiedono analisi dati complesse e calibrazioni non banali specialmente per l'eliminazione del contributo di background al segnale (complicato quando la sorgente luminosa non è calibrata e a emissione nota).

Una valida alternativa è costituita dalla realizzazione di piattaforme multifunzionali, note come Lab-on-a-Chip in cui tutte le funzioni (come ad esempio la generazione di gocce, illuminazione delle stesse, rilevazione della risposta ottica delle gocce) è integrata su uno stesso materiale. L'obiettivo del presente lavoro di tesi si propone di studiare della risposta di trasmittanza ottica di un sistema goccia-in-goccia di forma ellittica che fluisca in un canale microfluidico delle dimensioni di qualche centinaia di micrometri e sia illuminato da luce trasportata da guide di luce integrate nello stesso substrato in cui è realizzato il canale, nel caso specifico niobato di litio. Tali guide di luce intersecano il canale stesso, permettendo quindi di illuminare e raccogliere per poi rivelare, rispettivamente, la luce trasmessa attraverso il sistema goccia-in-goccia trasversalmente alla direzione di moto del fluido stesso. Il sistema in studio è modellizzabile in prima approssimazione con due ellissi concentriche e mira a mimare la configurazione che si otterrebbe in un micro-reattore chimico dove la reazione avviene in un ambiente controllato protetto da una intercapedine di isolamento. La descrizione dell'interazione luce con goccia-in-goccia richiede di quantificare il contributo di riflettanza, trasmittanza e assorbimento ad ogni interfaccia e di ogni materiale attraversato dalla luce stessa.

È quindi necessario computare il contributo dell'interazione con la goccia esterna, la goccia interna e con le pareti del canale microfluidico in funzione dell'angolo di incidenza della luce su ogni interfaccia. Il problema è particolarmente complesso se si considera che la luce che illumina il sistema goccia-in-goccia è di fatto una sorgente luminosa estesa a qualche micrometro di diametro e il fascio luminoso che esce dalla guida di luce per intercettare la goccia-in-goccia è gaussiano. La forma ellittica delle due gocce concentriche deve quindi esser parametrizzata in modo opportuno per poter descrivere i coefficienti di trasmittanza e riflettanza in modo efficace tanto quanto la scelta di come definire i parametri geometrici che giocano poi un ruolo importante anche nella realizzazione pratica della piattaforma (incluso la posizione trasversale della guida di luce rispetto il canale microfluidico).

È noto infatti che la trasmittanza dipende da vari fattori, tra cui l'indice di rifrazione dei mezzi coinvolti

e la geometria delle superficie che danno luogo a rifrazione. Nel caso specifico non sono trascurabili effetti di interferenza ed effetti di diffrazione che si generano quando il fascio luminoso attraversa mezzi ad indice diverso ma di spessore dell'ordine di qualche micrometro. Il presente lavoro di tesi modella questo sistema complesso con un sistema a fenditure e stima l'impatto della diffrazione sull'intensità della luce trasmessa in tale geometria microfluidica, proponendo una risposta di diffrazione e rifrazione in funzione anche dei parametri geometrici del canale microfluidico, ovvero delle gocce ivi prodotte.

La presente tesi è organizzata nei seguenti capitoli:

- Cap.1: descrive i processi di rifrazione che avvengono all'interno del sistema, con focus sull'analisi delle transmittanze e delle loro variazioni in funzioni dei parametri identificativi delle due gocce;
- Cap.2: descrive i processi diffrattivi del sistema, attraverso la variazione dei parametri caratteristici del sistema.

1 Capitolo 1: Rifrazione del sistema goccia in goccia

Nella seguente sezione si provvederà allo studio, in ottica geometrica, del sistema goccia in goccia descritto nella sezione x , focalizzandosi in particolare sulla variazione della trasmittanza in funzione dei parametri rilevanti che vanno ad individuare la geometria delle due gocce. Verranno analizzati separatamente i diversi casi costruttivi ipotizzati.

1.1 Descrizione del sistema

Il sistema è costituito da un canale microfluidico di altezza $2H$ e larghezza $2L$ e lunghezza LC nel quale scorre una fase continua ove sono disperse delle gocce a forma ellittica in configurazione goccia in goccia: il raggio della goccia interna sia R_3 e quello della goccia esterna sia R_2 .

Le gocce si assumono generate per mescolamento di fasi non miscibili. Sulla parete laterale del canale si affaccia una guida di luce all'altezza $y_0 + H$ rispetto il fondo del canale (detta guida di input per illuminare la goccia).

Nella parete opposta si trova una seconda guida che raccoglie la luce trasmessa e rifratta da tutte le interfacce. Il sistema può essere pensato andando a valutare la sezione trasversale della goccia (ellittica), Fig.1. Nel prosieguo ci si focalizzerà quindi alla soluzione di tale problema.

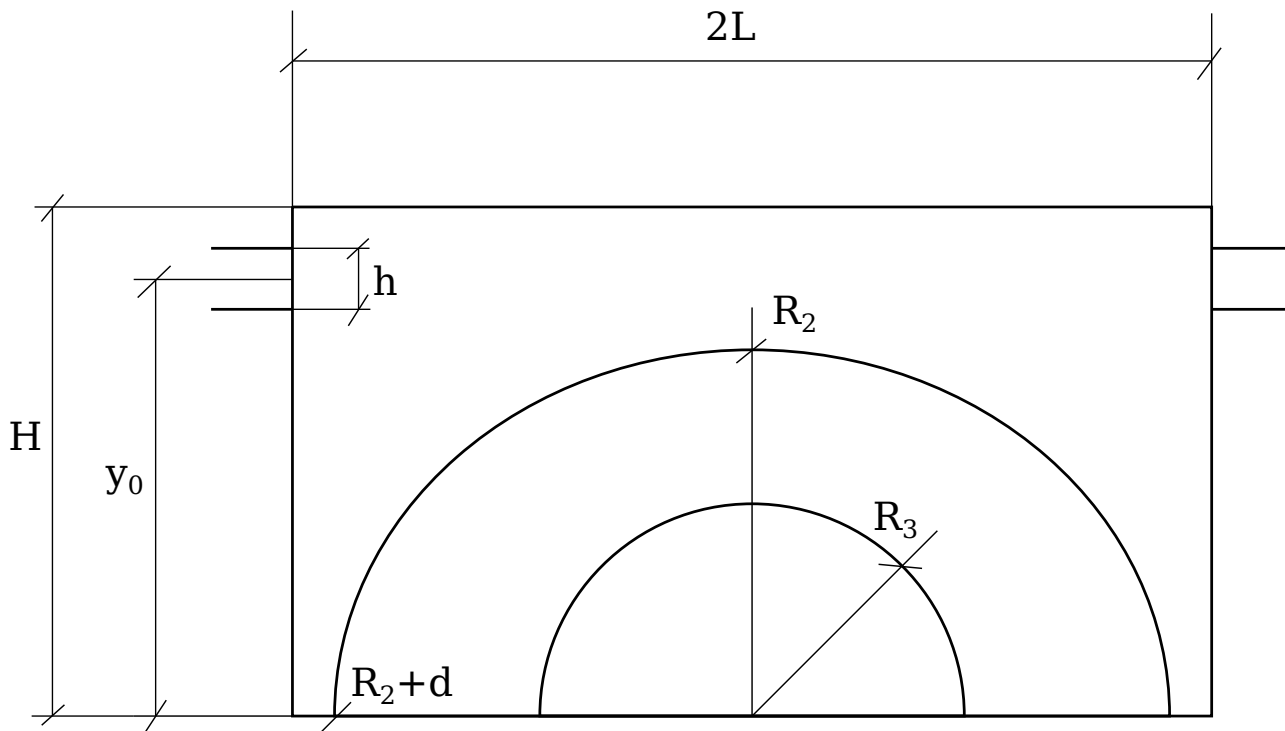


Figura 1: Schema della guida

A partire dai vari parametri costruttivi del canale, visibili in Fig.1, riportiamo in seguito sulla Tab.1 tutte le nomenclature utilizzate. Ricordiamo che quanto mostrato rappresenta una sezione a $z = 0$ lungo x, y .

Riportiamo ora dunque le espressioni matematiche delle rifrazioni e riflessioni che sono promosse all'interfaccia di ogni mezzo rifrangente.

Come riportato in Fig.2 il contatto con l'ellisse per un raggio di angolo θ viene misurato in modo *orario* rispetto alla parallela all'asse x di riferimento avviene mediante un piano di tangenza all'ellisse stessa nel punto (x^*, y^*) . Pertanto il procedimento relativo generale sarà quello qui riportato:

Tabella 1: Parametri del sistema

Identificativo	Parametro
y_0	punto di uscita del raggio dalla guida
L	semi-lunghezza del canale
H	altezza del canale
R_3	raggio sfera interna
R_2	asse principale minore dell'ellisse
$R = R_2 + d$	asse principale maggiore dell'ellisse
n_1	indice di rifrazione del mezzo 1
n_2	indice di rifrazione del mezzo 2
n_3	indice di rifrazione del mezzo 3
n_c	indice di rifrazione del coperchio
h	dimensione caratteristica della guida
θ	angolo di uscita dalla guida rispetto ad x

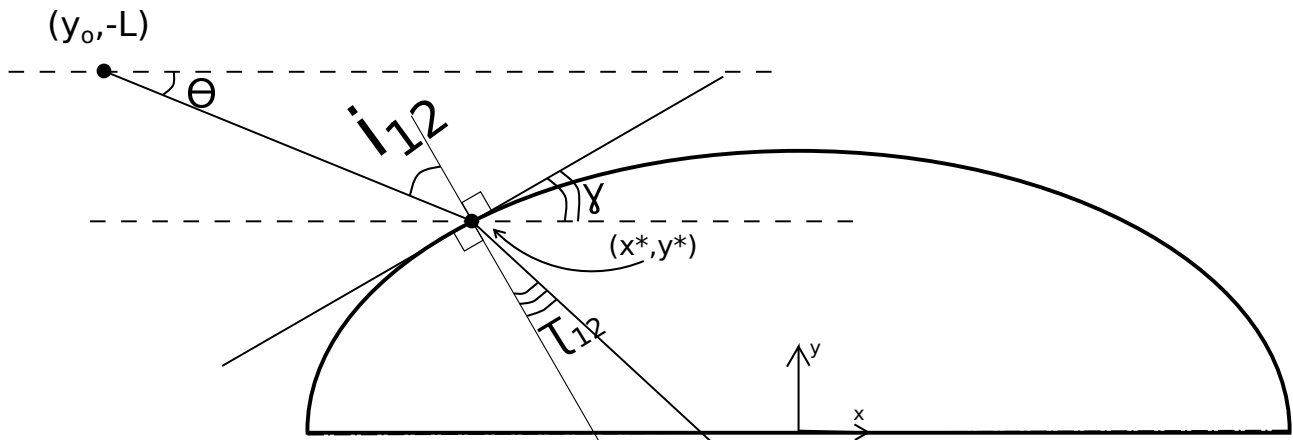


Figura 2: Contatto ellisse-raggio

1. Individuare i punti (x^*, y^*) mediante un sistema che tenga conto della retta passante per $(-L, y_0)$ con coefficiente angolare relativo a θ ;
2. Individuare l'angolo di incidenza i_{12} mediante considerazioni geometriche e conoscendo γ attraverso la parametrizzazione, cartesiana, della curva e il relativo vettore tangente;
3. Calcolare mediante la ben nota *legge di Snell* l'angolo di trasmissione τ_{12} .

Per comodità gli angoli, siano essi di incidenza o rifrazione, sono stati denominati con i in riferimento a quelli di incidenza sulle gocce, con τ a quelli relativi alle trasmissioni. Inoltre il doppio indice va indicare il mezzo di provenienza e quelli di arrivo (τ_{12} raggio proveniente dal mezzo 1 e uscente sul mezzo 2).

Riportiamo dunque i conti generici per l'ellisse:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{R^2} + \frac{y^2}{R_2^2} = 1 \\ y - y_0 = -\tan(\theta)(x + L) \end{cases} \quad (1)$$

Sistema che permette di trovare il punto d'incontro tra la retta e l'ellisse espresso come:

$$x_1^* = \frac{\cot^3(\theta) \left(-\sqrt{R_2^2(d + R_2)^2 \tan^4(\theta) (d^2 + 2dR_2 - L^2 + 2Ly_0 \cot(\theta) + \cot^2(\theta) (R_2^2 - y_0^2) + R_2^2)} \right) - L(d + R_2)^2 + y_0(d + R_2)^2 \cot(\theta)}{(d + R_2)^2 + R_2^2 \cot^2(\theta)} \quad (2)$$

$$x_2^* = \frac{\cot^3(\theta) \sqrt{R_2^2(d+R_2)^2 \tan^4(\theta) (d^2 + 2dR_2 - L^2 + 2Ly_0 \cot(\theta) + \cot^2(\theta) (R_2^2 - y_0^2) + R_2^2)} - L(d+R_2)^2 + y_0(d+R_2)^2 \cot(\theta)}{(d+R_2)^2 + R_2^2 \cot^2(\theta)} \quad (3)$$

Chiaramente x_1^* e x_2^* rappresentano le condizioni geometriche di incontro e bisognerà selezionare attraverso le opportune condizioni la corretta soluzione, che ricordiamo essere unica. In particolare imponiamo:

$$y^* \geq 0 \quad (4)$$

Per il fatto che considereremo, rispetto al nostro sdr , solo emisferi superiori per entrambe le superfici, unito al fatto che prendiamo la soluzione minore ossia:

$$x^* = \inf_{\theta \in [0, \pi/2]} \{x_1^*, x_2^*\} \quad (5)$$

Ciò deriva dal semplice posizionamento geometrico del raggio e dalle condizioni di secanza del raggio. In realtà, per quanto genericamente si può pensare al dominio in cui spazza θ quello sopra riportato conviene definire l'angolo minimo e massimo di contatto con l'ellisse, corrispondenti a :

$$\alpha_{\max} = \arctan\left(\frac{y_0}{R_2 + d - L}\right) \quad \alpha_{\min} = \arctan(lim) \quad (6)$$

Dove Lim è l'estremo superiore di esistenza ottenuto dall'equazione di secondo grado. Si procede definendo poi la curva in coordinate cartesiane come:

$$\gamma: [\alpha_{\min}, \alpha_{\max}] \rightarrow R^2 \quad x \mapsto \left(x, R_2 \sqrt{1 - \frac{x^2}{(R_2 + d)^2}} \right)$$

Definendo poi il vettore tangente derivando γ rispetto ad x :

$$\gamma'(x) = (u, v) = \left(1, -\frac{R_2 x}{(R_2 + d)^2 \sqrt{1 - \frac{x^2}{(R_2 + d)^2}}} \right)$$

Da cui si deduce che l'inclinazione del piano tangente ad un punto x appartenente all'ellisse risulta semplicemente essere:

$$\gamma(x) = \arctan \frac{v}{u} = \arctan \left(-\frac{R_2 x}{(R_2 + d)^2 \sqrt{1 - \frac{x^2}{(R_2 + d)^2}}} \right) \quad (7)$$

Si ricava poi, da semplici relazioni geometriche:

$$i_{12} = \frac{\pi}{2} - \gamma - \theta \quad \tau_{12} = \arcsin \left(\frac{n_1 \sin(i_{12})}{n_2} \right) \quad (8)$$

In cui in (8) abbiamo ottenuto gli angoli necessari per valutare la *transmittanza* attraverso i coefficienti di Fresnel, a seconda del tipo di polarizzazione dell'onda incidente. Chiaramente il ragionamento è analogo per la riflessione interna sulla sfera e segue gli stessi step per la risoluzione.

Per la seconda rifrazione, effettuata dal raggio per uscire dalle gocce, sull'ellisse, vale la pena fare una considerazione aggiuntiva. Assumendo difatti il mezzo 1 meno denso del mezzo 2 si ha un angolo massimo che una volta superato non permette più rifrazione ma, di fatto, solo una riflessione totale. Questo angolo è facilmente determinabile mediante *Snell*:

$$\beta_{\max} = \arcsin\left(\frac{n_1}{n_2}\right) \simeq 0.94rad \quad (9)$$

1.2 Analisi [1|2]_R

Nella presente sezione si illustra l'analisi di un generico raggio emesso a $(-L, y_0)$ con angolo di emissione θ . Riportiamo, in Tab.2 i parametri geometrici con cui si è fatta l'analisi:

Tabella 2: Parametri fissi

Grandezza	Quantità [μm]
y_0	49
L	100
H	50
h	1

Segue la caratterizzazione dei mezzi considerati

Tabella 3: Indici di rifrazione dei mezzi

Mezzo	Indice di rifrazione [adm]
1	1.33
2	1.65
3	1.8
<i>Coperchio</i>	1.5

Si riportano quindi gli angoli minimi e massimi di contatto con l'ellisse, Tab. 4, che danno un'idea del range da analizzare per avere il contatto tra il raggio e la goccia. Chiaramente la scansione eseguita al variare dei parametri deve tenere conto delle due condizioni $R_2 < 49 \mu m$ ed $R_2 + d < 50 \mu m$ ricavabili dai parametri costruttivi del canale.

Si può notare, che l'angolo minimo di contatto decresce con l'aumentare del semiasse inferiore dell'ellisse; ciò è coerente con le aspettative. Di seguito si sono riportati in grafico i valori della *trasmissione*, corrispondenti ai coefficienti di Fresnel per un caso di riflessione. Questo si distinguono in p ed s (rispettivamente parallele e perpendicolari) riferiti al tipo di polarizzazione dell'onda entrante. Chiaramente in caso di polarizzazioni più complesse basterà computare i contributi sui singoli coefficienti.

Tabella 4: Range di angoli in funzione dei parametri della goccia esterna

(R_2, d) [μm]	$[\alpha_{\min}, \alpha_{\max}]$
(25,5)	[0.23,0.61]
(25,10)	[0.22,0.65]
(25,15)	[0.22,0.68]
(30,5)	[0.18,0.65]
(30,10)	[0.13,0.73]
(30,15)	[0.18,0.73]
(35,5)	[0.13,0.68]
(35,10)	[0.13,0.73]
(35,15)	[0.18,0.73]
(40,5)	[0.08,0.73]

$$R_p = \frac{\tan(i - \tau)^2}{\tan(i + \tau)^2} \quad R_s = \frac{\sin(i - \tau)^2}{\sin(i + \tau)^2} \quad (10)$$

Come si può notare nei grafici in Fig.3 qualsiasi sia la polarizzazione e la combinazione di parametri scelta risulta un evidente emissione per angoli molto piccoli, decisamente prossimi a α_{\min} . Inoltre la conformazione dei parametri non cambia di molto l'andamento delle due funzioni, le quali restano simili in tutte le casistiche riportate.

Il massimo di riflessione intorno ad α_{\min} è ottimamente approssimabile con 1, inoltre la somiglianza notevole è dovuta al fatto che a *determinare* l'andamento di R_p e R_s è chiaramente R_2 che risulta identico a gruppi di tre per i parametri: di fatto d incide solamente su l'angolo massimo di contatto con l'ellisse, α_{\max} .

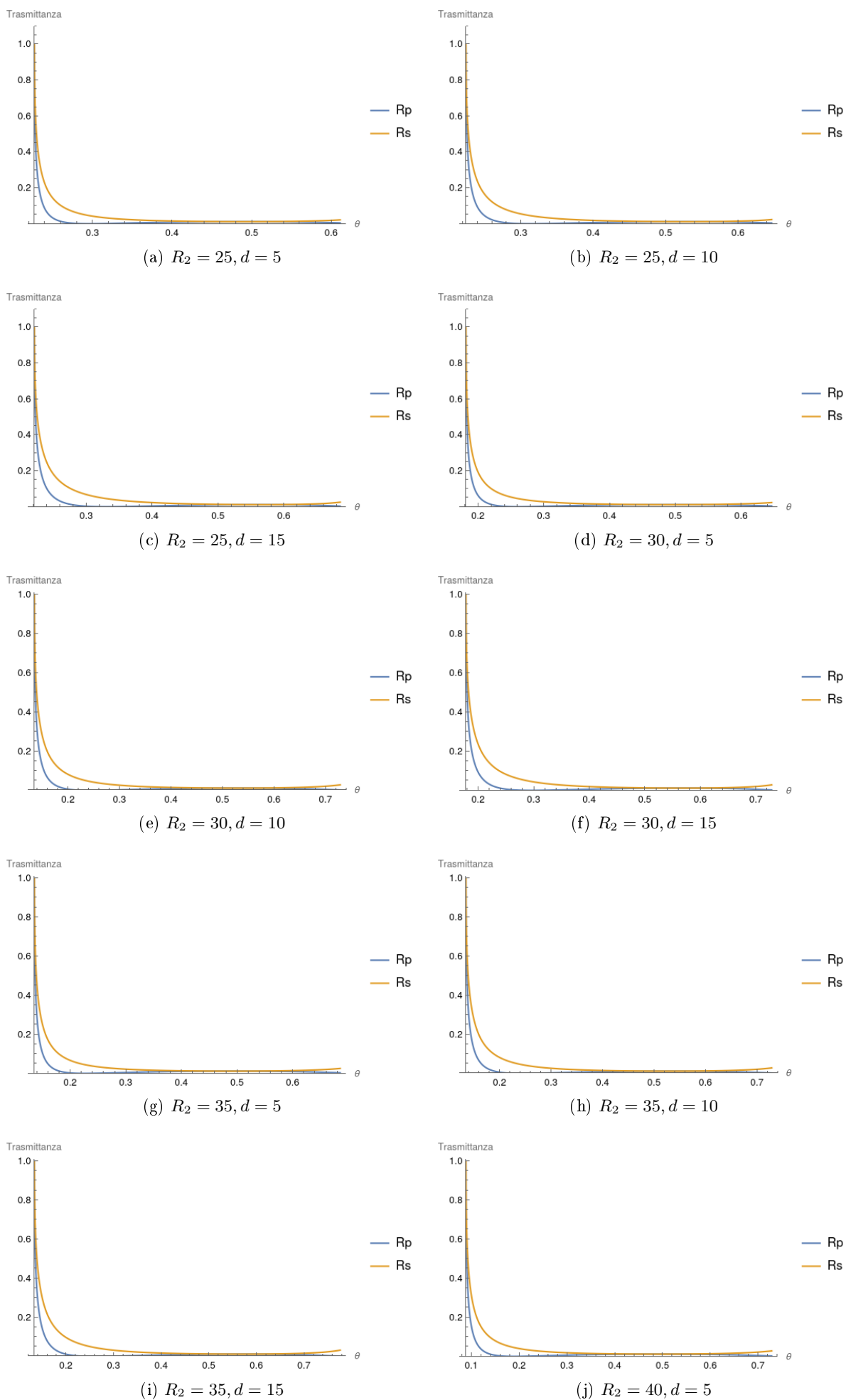


Figura 3: Andamento di delle trasmittanze T_p e T_s al variare dei semiassi della goccia ellittica

1.3 Analisi $[1|c]_{\mathbf{R}}$

Similmente a quanto esposto in precedenza per la trasmittanza, si riporta nel prosieguo l'analisi della risposta in riflettanza delle varie interfacce dei mezzi rifrattivi presi in considerazione nel sistema goccia-in-goccia. Inoltre per la semplicità del sistema è possibile calcolare:

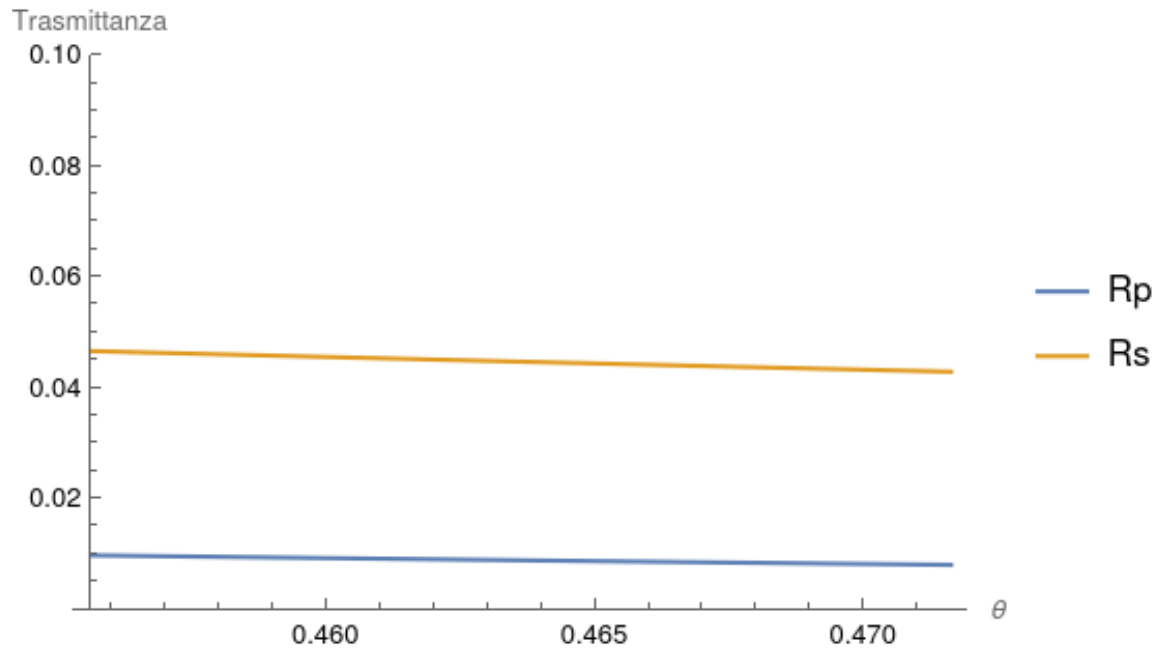
$$\theta_{\min} = \arctan\left(\frac{2H-h}{2L}\right) \quad \text{e} \quad \theta_{\max} = \arctan\left(\frac{2H+h}{2L}\right) \quad (11)$$

Angolo massimo e minimo che si può avere per riuscire ad intercettare la guida in uscita con una sola riflessione sul coperchio. Non dipendendo direttamente dai parametri delle gocce si può passare ad un'analisi diretta, senza introdurre variazioni sui parametri geometrici. Questo ci porta ad esprimere:

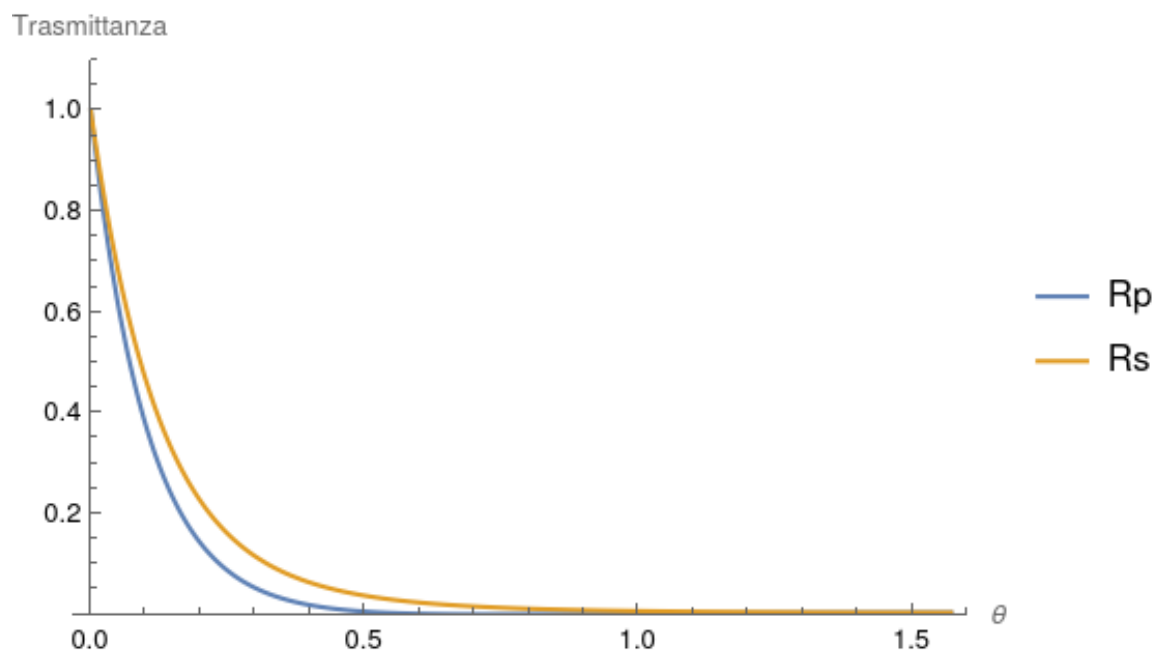
$$\theta_{\min} \simeq 0.456 \quad \text{rad} \quad \theta_{\max} \simeq 0.471 \quad \text{rad} \quad (12)$$

Si nota dunque come il contributo della casistica sia trascurabile per il sistema considerato, in ottica della trasmittanza dei raggi analizzati.

Osservando invece il grafico, Gif.4, nella sua generalità si può osservare come l'andamento sia del tutto simile a quello studiato nella sezione precedente, fatta eccezione per il collocamento del massimo che si ha per $\theta = 0$.



(a) Andamento entro gli angoli prescritti



(b) Andamento globale

Figura 4: Analisi trasmittanza sul coperchio

1.4 Analisi [1|2]_T[2|3]_R[2|1]_T

Passando ora alla risposta rifrattica dei mezzi in gioco bisogna compiere alcune osservazioni preliminari importanti nell'analisi:

- la complessità della soluzione analitica del problema in oggetto, evidenziata nella sezione *Descrizione del sistema*, rende impossibile determinare analiticamente le **trasmittanze** in funzione di θ . Difatti la dipendenza trigonometrica, sempre proporzionale alle tangenti, rende, a livello computazionale, troppo lungo il processo di determinazione del punto di uscita nell'ultima trasmissione, cruciale per calcolarsi l'angolo di uscita;
- la determinazione degli angoli α_{\min} ed α_{\max} fatta per l'ellisse va rifatta anche per la goccia più interna, che segue il profilo, in sezione, di una circonferenza. Ciò va a ridurre ulteriormente i raggi che riescono ad esaudire le condizioni richieste per l'analisi del fenomeno.

Alla luce di quanto sopra evidenziato di è deciso di risolvere numericamente il problema, spazzando un range preciso tra α_{\min} ed α_{\max} .

È inoltre importante ricordare che vi sarà un angolo massimo, per via del fatto che il mezzo 1 è meno denso del mezzo 2, superato il quale non vi sarà trasmissione, quindi comunque non tutti gli angoli analizzati produrranno risultati. In generale si è deciso di dividere in cinque l'intervallo $[\alpha_{\min}, \alpha_{\max}]$ ottenendo dunque cinque θ_i :

$$\theta_i = \alpha_{\min} + i \frac{\alpha_{\max} - \alpha_{\min}}{5} \quad \text{con } i = 1, \dots, 5 \quad (13)$$

Riportiamo quindi, in Tab.5 quanto ottenuto puntualmente in funzione dei parametri:

Chiaramente si è deciso di variare R_2 ed d tenendo R_3 fisso. I coefficienti T_p , T_s sono computati combinando riflessioni e rifrazioni secondo *Fresnel*, con le opportune considerazioni sulle polarizzazioni dell'incidente:

$$T_p = \frac{\sin(2i_{12}) \sin(2\tau_{12}) \tan^2(i_{23} - \tau_{23}) \sin(2i_{21}) \sin(2\tau_{21})}{\sin^2(i_{12} + \tau_{12}) \cos^2(i_{12} - \tau_{12}) \tan^2(i_{23} - \tau_{23}) \sin^2(i_{21} + \tau_{21}) \cos^2(i_{21} - \tau_{21})} \quad (14)$$

$$T_p = \frac{\sin(2i_{12}) \sin(2\tau_{12}) \sin^2(i_{23} - \tau_{23}) \sin(2i_{21}) \sin(2\tau_{21})}{\sin^2(i_{12} + \tau_{12}) \sin^2(i_{23} + \tau_{23}) \sin^2(i_{21} + \tau_{21})} \quad (15)$$

Per analizzare il contributo del raggio della goccia interna nella variazione delle trasmittanze, si è deciso di prendere le combinazioni di parametri, nella Tab.5, per cui esistesse un raggio di uscita. Come prima specificato, questa analisi risulta approssimata.

L'intenzione perciò è quella di capire l'ordine di grandezza dei fenomeni e la loro incidenza nello studio del sistema, non quello di fornire soluzioni esatte; per farlo difatti sarebbe necessario ricavare analiticamente le due trasmittanze.

Il range in cui può variare R_3 è limitato: fisseremo come limite inferiore $5\mu m$, peraltro già analizzati nella Tab.5, mentre il limite superiore sarà R_2 . Sarà ragionevole tenere un limite superiore più piccolo, per garantire il passaggio del raggio.

Per evitare di gestire un sistema di computazione troppo complesso si è deciso di utilizzare un angolo medio di entrata, θ_m , tra i due limite $\alpha_{\min}, \alpha_{\max}$. Si è assolutamente consci della limitatezza dell'approccio, ma si ricorda che l'obiettivo è stabilire un ordine di grandezza del fenomeno associato.

Riportiamo in seguito, Fig.5, anche uno schema del percorso specifico eseguito dal raggio in esame ed i risultati ottenuti, Tab.6.

Tabella 5: Studio delle transmittanze

(R_2, d, R_3)	$[\alpha_{\min}, \alpha_{\max}]$	θ_i	T_p	T_s
(25, 5, 5)	[0.23, 0.61]	0.30	-	-
		0.38	-	-
		0.46	0.00017	0.00019
		0.53	0.0017	0.0019
		0.61	0.0015	0.0018
(25, 10, 5)	[0.22, 0.64]	0.30	-	-
		0.39	-	-
		0.48	-	-
		0.56	-	-
		0.65	0.00032	0.0036
(25, 15, 5)	[0.22, 0.68]	0.31	0.00017	0.0042
		0.40	0.0017	0.0020
		0.49	0.0016	0.0019
		0.59	0.0017	0.0020
		0.68	0.0018	0.0018
(30, 5, 5)	[0.22, 0.68]	0.27	0.00015	0.0021
		0.36	0.0015	0.0022
		0.46	0.0016	0.0020
		0.55	0.0015	0.0019
		0.64	-	-
(30, 10, 5)	[0.22, 0.68]	0.28	0.00014	0.0015
		0.38	-	-
		0.48	-	-
		0.58	-	-
		0.68	-	-
(30, 15, 5)	[0.22, 0.68]	0.29	-	-
		0.40	0.0014	0.0023
		0.51	0.0015	0.0022
		0.62	0.0016	0.0022
		0.73	0.0017	0.0020
(35, 5, 5)	[0.22, 0.68]	0.25	0.0012	0.0015
		0.36	0.0012	0.0025
		0.46	0.0012	0.0025
		0.57	0.0017	0.0020
		0.68	0.0017	0.0020
(35, 10, 5)	[0.22, 0.68]	0.25	0.0017	0.0018
		0.37	0.0017	0.0019
		0.49	0.0014	0.0016
		0.61	-	-
		0.73	-	-
(40, 5, 5)	[0.22, 0.68]	0.21	-	-
		0.34	-	-
		0.47	-	-
		0.60	-	-
		0.72	-	-

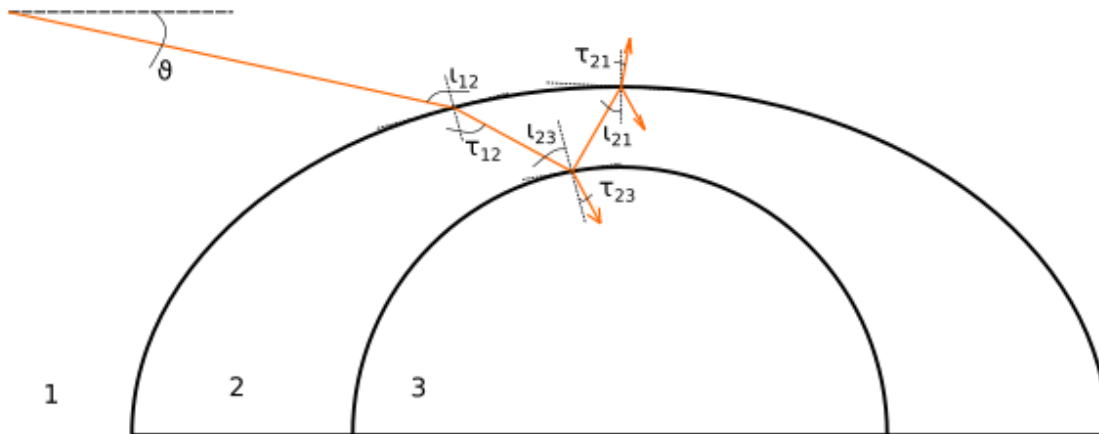


Figura 5: Andamento raggio

Alla luce dei risultati ottenuti, che ricordiamo essere rilevanti in **ordine di grandezza**, notiamo che con i parametri impostati le trasmittanze dei raggi sono sempre inferiori a 10^{-2} .

Ciò mette in evidenza come il fenomeno sia marginale in quanto l'intensità di un eventuale raggio uscente è sempre, circa, 100 volte minore di quello entrante. Inoltre non si è fatta alcuna considerazione sull'angolo, o gli angoli, idoneo all'arrivo sulla guida di uscita: compiendola sicuramente troveremmo un range ancora minore disponibile per il fenomeno.

Tabella 6: Andamento delle transmittanze al variare di R_3

(R_2, d)	θ_m	R_3	T_p	T_s
(25, 5)	0.42	10	0.0015	0.0022
		15	0.0017	0.0020
		20	-	-
(25, 10)	0.43	10	0.0019	0.0018
		15	0.0019	0.0018
		20	-	-
(25, 15)	0.45	10	-	-
		15	-	-
		20	-	-
(30, 5)	0.45	10	0.0019	0.0018
		15	0.0017	0.0020
		20	-	-
		25	-	-
(30, 10)	0.43	10	0.0018	0.0018
		15	0.0019	0.0018
		20	0.0018	0.0017
		25	-	-
(30, 15)	0.45	10	-	-
		15	-	-
		20	-	-
		25	-	-
(35, 5)	0.41	10	0.0018	0.0018
		15	0.0017	0.0020
		20	0.0018	0.0019
		25	-	-
		30	-	-
(35, 10)	0.43	10	0.0018	0.0018
		15	0.0019	0.0018
		20	0.0019	0.0017
		25	0.0019	0.0018
		30	-	-
(40, 5)	0.41	10	0.0019	0.0018
		15	0.0019	0.0018
		20	0.0019	0.0018
		25	0.0019	0.0018
		30	-	-

2 Capitolo 2: Diffrazione del sistema goccia in goccia

Nella sezione seguente analizzeremo il sistema dal punto di vista del fenomeno della diffrazione. Questo tipo di descrizione risulta utile dal momento che consideriamo un $\lambda = 0.632 \mu\text{m}$, ossia un raggio con lunghezza d'onda non trascurabile nei confronti delle dimensioni effettive del sistema.

Questo comporta, in generale, la necessità di introdurre correzioni al metodo di analisi dello scorso capitolo, fondato sull'ottica geometrica.

Considereremo un'onda geometrica come rappresentativa del nostro sistema.

2.1 Descrizione del problema

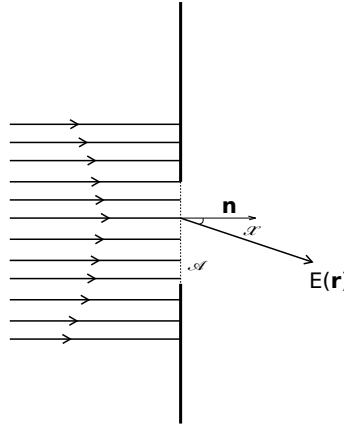


Figura 6: Schema dell'onda rifratta

Utilizzando la formula di diffrazione di *Rayleigh-Sommerfeld*, con riferimento alla Fig.6, otteniamo la seguente formula per il campo elettrico:

$$E(\vec{r}) = \frac{1}{i\lambda} \int \int_{\mathcal{A}} \frac{\exp(ikr')}{r'} E(\vec{0}) \cos(\chi) d\Sigma \quad (16)$$

Introduciamo un nuovo sistema di coordinate $\xi = (0, \eta, \zeta)$ sulla fenditura e denotando con (x, y, z) un punto che dista $|\vec{r}|$ sussiste la relazione:

$$\vec{r}^2 = x^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2 \quad \cos(\chi) = \frac{x}{r}$$

L'integrale precedente può essere riscritto nelle nuove coordinate come:

$$E(L, y, z) = \frac{L}{i\lambda} \int \int_{\mathcal{A}} \frac{\exp(ikr)}{r^2} E(\vec{0}, \eta, \zeta) d\eta d\zeta \quad (17)$$

Ricordando che, nel sistema di riferimento fissato all'inizio, ci ritroviamo la guida in uscita a $x = L$. Sviluppando in serie di *Taylor* r e troncando al secondo termine, in ottica di approssimazione di onde sferiche virtuali (detta anche approssimazione di *Fresnel*), si ottiene che:

$$L \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{y - \eta}{L} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{z - \zeta}{L} \right)^2 \right]$$

Dunque:

$$E(L, y, z) \approx \frac{\exp(ikL)}{i\lambda L} \int \int_{\mathcal{A}} E(\vec{0}, \eta, \zeta) \exp^{i\frac{\pi}{\lambda L}((y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2)} d\eta d\zeta \quad (18)$$

Assumendo ora un'onda piana, in uscita dalla prima guida, uniforme di ampiezza E_0 possiamo facilmente computare il *coefficiente di diffrazione* come

$$\mathcal{D} = \frac{I(L, y, z)}{I_0} = \left| \int \int_A \exp^{i \frac{\pi}{\lambda L} ((y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2)} d\eta d\zeta \right|^2 \quad (19)$$

Lo studio si riduce dunque alla considerazione dei tre profili di fenditura, che convenzionalmente porremo a $x = 0$, e alle successive integrazioni. Per maggiore chiarezza i tre profili saranno: circolare, corona circolare, e dal circolare al coperchio; come si può notare da Fig.7.

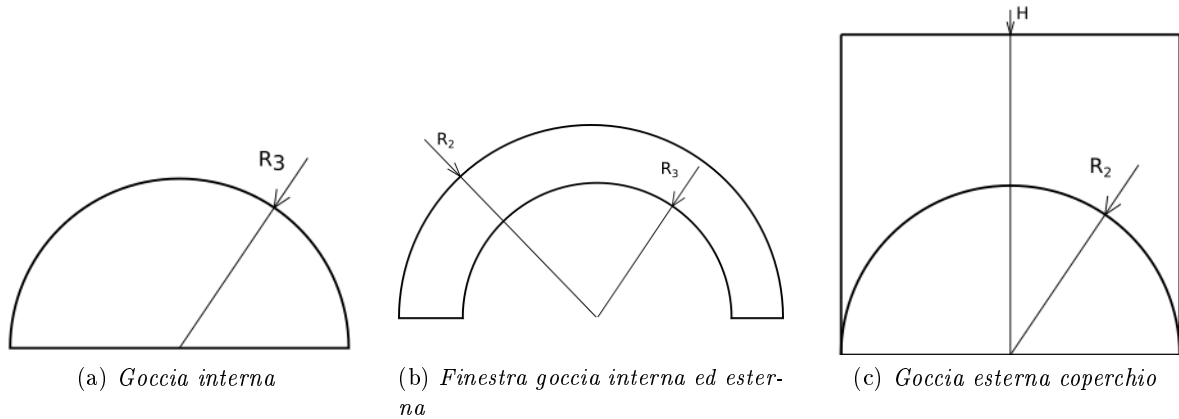


Figura 7: Schematizzazione delle tre fessure considerate

Le sezioni ricordiamo essere sviluppate lungo il piano (y, z) . Chiaramente il considerare la goccia esterna come circolare in sezione su piani paralleli a quello soprariportato è un'approssimazione, che potrà essere raffinata mediante la modifica del profilo attraverso l'introduzione di parametri di eccentricità.

A fini di utilità e comodità di calcolo si riporta l'integrale finale soprascritto in funzione dei cosiddetti *integrali di Fresnel*, definiti come:

$$\mathcal{C}(z) = \int_0^z \cos(\pi/2t^2) dt \quad \mathcal{S}(z) = \int_0^z \sin(\pi/2t^2) dt \quad (20)$$

2.2 Studio delle casistiche

Partendo dal profilo della goccia interna si va ad eseguire un'integrazione del coefficiente precedente lungo la sezione:

$$\mathcal{D} = \left| \int_{\frac{z-R_3}{\beta}}^{\frac{z+R_3}{\beta}} \exp^{i \frac{\pi v^2}{2}} dv \int_{\frac{y}{\beta}}^{\sqrt{R_3^2 - (z-\beta v)^2}} \exp^{i \frac{\pi u^2}{2}} du \right|^2 \quad (21)$$

Dove si sono fatte le seguenti sostituzioni:

$$u = \sqrt{\frac{2}{\lambda L}} (\eta - y) \quad v = \sqrt{\frac{2}{\lambda L}} (\zeta - z) \quad \beta = \sqrt{\lambda}$$

Riportiamo dunque il grafico ottenuto, Fig.8, impostando come parametri $(R_3, \lambda) = (10, 0.632)$. Come si può notare l'effetto di diffrazione in caso di raggi paralleli non va ad incidere nella zona per noi rilevante ($y = 49$).

Proseguendo il calcolo sulla corona circolare è molto simile a quello precedentemente eseguito, se non per via di estremi di integrazione più complessi da valutare. Andremo infatti a spezzare l'integrale

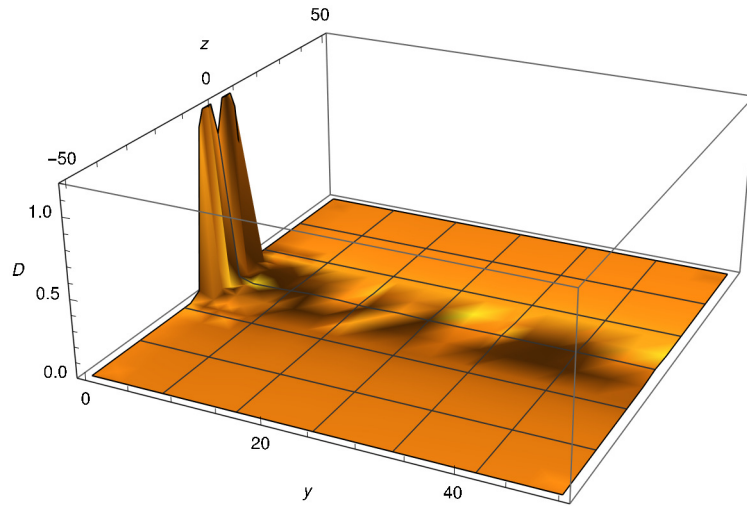


Figura 8: Andamento diffrazione per la goccia piú interna

lungo tre singole regioni: le due estremali, in cui andremo da $y = 0$ al profilo della goccia superiore e quella centrale compresa tra i due profili circolari di raggio R_3 ed R_2 .

Segue dunque:

$$\mathcal{D} = \left| \int_{\frac{z-R_2}{\beta}}^{\frac{z-R_3}{\beta}} \exp^{i\frac{\pi v^2}{2}} dv \left(\int_{\frac{y}{\beta}}^{\sqrt{R_2^2-(z-\beta v)^2}} \exp^{i\frac{\pi u^2}{2}} du + \int_{\sqrt{R_3^2-(z-\beta v)^2}}^{\sqrt{R_2^2-(z-\beta v)^2}} \exp^{i\frac{\pi u^2}{2}} du + \int_{\frac{y}{\beta}}^{\sqrt{R_3^2-(z-\beta v)^2}} \exp^{i\frac{\pi u^2}{2}} du \right) \right|^2 \quad (22)$$

Riportiamo dunque l'andamento, Fig.9, ottenuto con la scelta di parametri $(R_3, R_2, d) = (10, 35, 5)$.

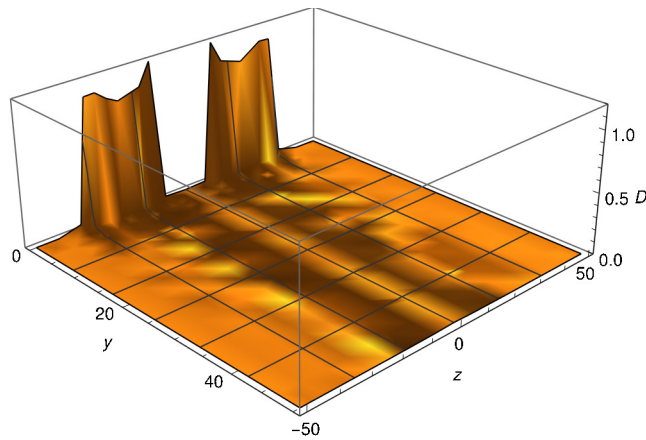


Figura 9: Andamento diffrazione corona circolare

Notiamo come anche in questo caso l'intensità diffratta non va ad interessare la zona relativa alla guida di uscita.

Rimane dunque lo studio relativo alla *finestra* compresa tra la goccia più esterna ed il coperchio. L'integrazione risulta più semplice che nel caso precedente e riporta a:

$$\mathcal{D} = \left| \int_{\frac{z+R_2}{\beta}}^{\frac{z-R_2}{\beta}} \exp^{i\frac{\pi v^2}{2}} dv \int_{\sqrt{R_2^2-(z-\beta v)^2}}^H \exp^{i\frac{\pi u^2}{2}} du \right|^2 \quad (23)$$

Da cui si ritrova l'andamento in Fig.10

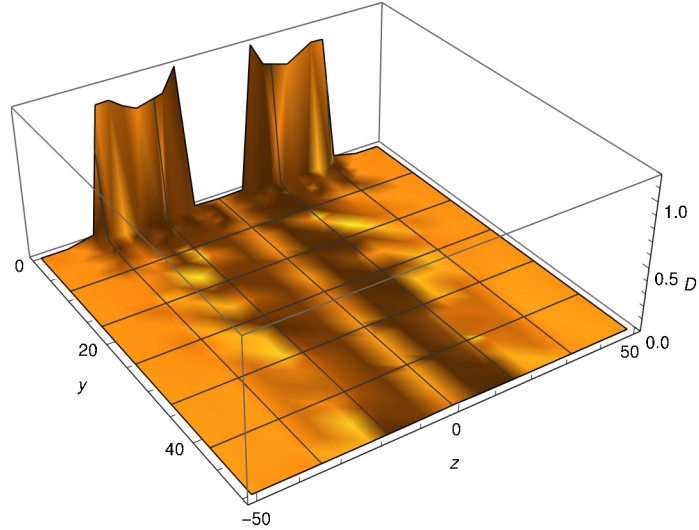


Figura 10: Andamento diffrazione goccia-coperchio

Osservando invece la variazione del fenomeno in funzione delle dimensioni della goccia interna, nello specifico $R_3 = 15, 20, 25 \mu m$ si ottiene l'andamento riportato nei tre grafici Fig.11.

Non si notano effetti significativi nella zona di interesse $y = 49 \mu m$.

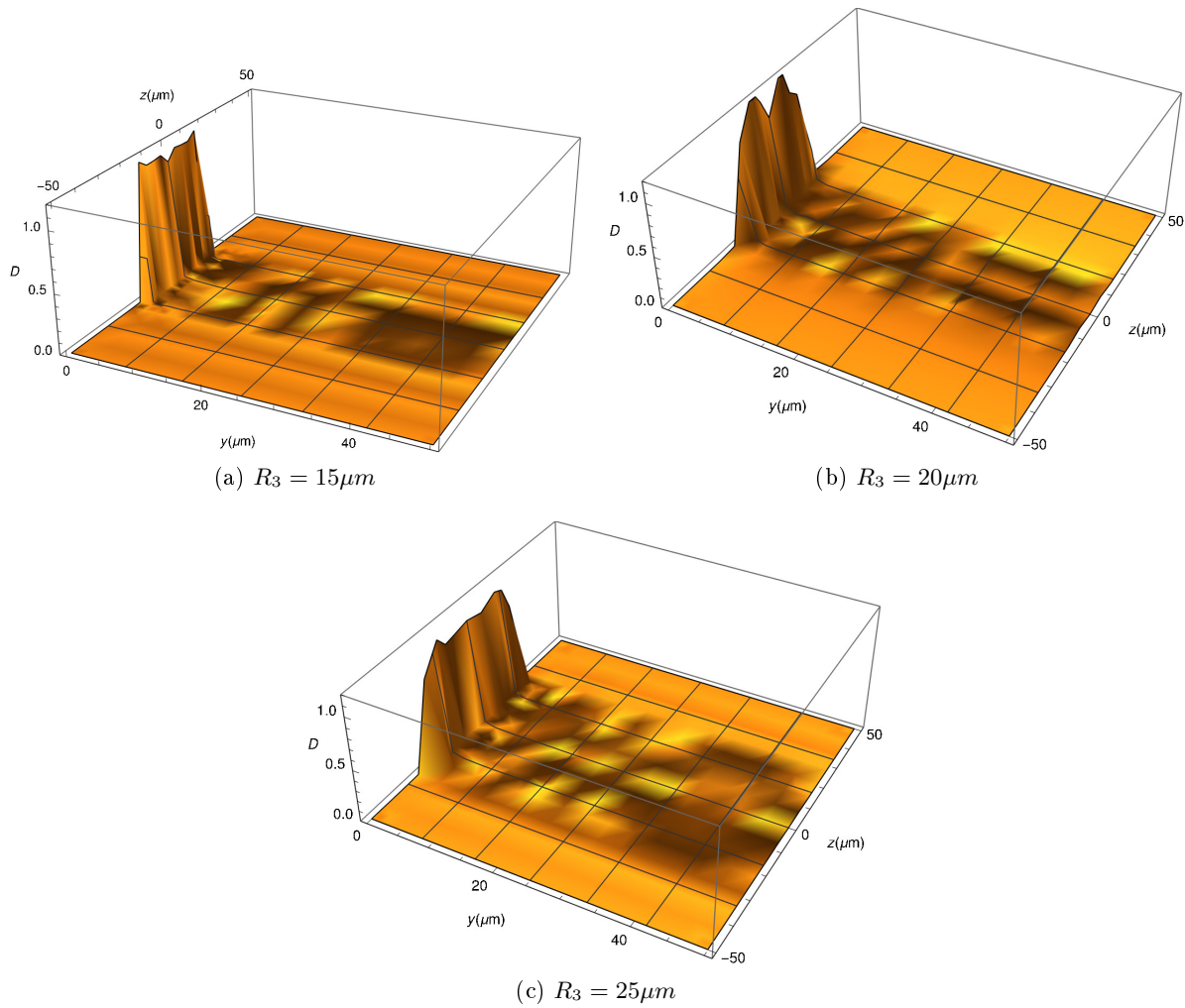


Figura 11: Variazione di \mathcal{D} su R_3

3 Conclusioni

L'obiettivo generale dello studio era dunque la valutazione dei fenomeni ottici, geometrici e diffrattivi, in un sistema goccia-in-goccia. Per computare le equazioni ci si è avvalsi di un software dedicato, *Mathematica*, data la complessità intrinseca degli stessi.

Per la parte geometrica sono stati fatti variare i parametri fondamentali delle due gocce, R_2, d, R_3 , in un range preciso, i cui estremi sono stati determinati a partire dalla condizione di contatto con la goccia. Si è dunque eseguito un campionamento di cinque angoli per ciascuna combinazione dei parametri, eseguita anch'essa in modo discreto. I principali risultati sono la trasmittanza di valore basso, il raggio uscente ha un'intensità di circa 100 volte minore dell'entrante, per un ampio spettro di parametri scelti per il sistema.

Per la parte diffrattiva si è computato il coefficiente *diffrattivo* a partire dalle tre zone selezionate e si sono computati i grafici sull'andamento in (x, y) . In questo caso l'analisi porta a dei risultati evidenti ai piedi della guida, ma non nella zona interessata, in cui y è circa l'altezza della guida in uscita.

Al termine delle analisi effettuate si può concludere che, entro le approssimazioni fatte, non emergono comportamenti rilevanti in entrambe le strategie di comprensione dei fenomeni. Ricordando peraltro che l'analisi impostata non mirava ad una descrizione completa ed esauriente della situazione ma piuttosto a stabilire un ordine di grandezza degli effetti studiati, si può asserire come le tecniche di analisi non evidenzino nessuna interazione rilevante, nell'ordine del percento, tra l'onda entrante e il sistema goccia in goccia.

Sicuramente interessante potrebbe essere variare i parametri costruttivi del canale, riuscendo a meglio isolare la componente geometrica, o diffrattiva, ponendosi nel limite di trascurare una delle due. Valutando poi singolarmente i fenomeni:

- dal punto di vista ottico-geometrico interessante sarebbe proseguire con un'analisi, mediante strumenti adeguati, dei raggi entranti le gocce. Le casistiche difatti sono troppo frammentate, mediante vari limiti sugli angoli di contatto e di uscita, per poter finalizzare efficacemente un'analisi di singola casistica, come peraltro evidenziato nella relativa sezione;
- dal punto di vista diffrattivo potrebbe essere interessante porre a livello teorico uno studio di finestre multiple, rappresentando quindi le varie sezioni nei piani paralleli con $x = cost$, andando a studiare i meccanismi di diffrazioni multiple a livello integrale.

Si è consapevoli infine che le approssimazioni fatte sono tali da rendere quanto sopra analizzato una delimitazione di dove potrebbe essere interessante concentrarsi in futuro, piuttosto che una risposta esaustiva all'interazione tra i due fenomeni.