

Università degli Studi di Padova

DIPARTIMENTO DI FISICA E ASTRONOMIA "GALILEO GALILEI"
Corso di Laurea in Fisica

TESI DI LAUREA

**Condensazione di Bose-Einstein e superfluidità
di un gas di bosoni diluito**

Laureando
Cesare Vianello

Relatore
Prof. Luca Salasnich

Anno Accademico 2021–2022

Sommario

In questo lavoro studiamo un gas omogeneo di bosoni debolmente interagenti in $3D$ nell'approssimazione di un'interazione di contatto, trattando la funzione d'onda come un campo classico. Dimostriamo l'equazione di Gross-Pitaevskii, da cui deduciamo le equazioni di Bogoliubov-de Gennes e lo spettro delle eccitazioni elementari. Su questo basiamo la trattazione della termodinamica del sistema, ricavando il potenziale gran canonico e un'equazione per la frazione condensata a temperatura finita. Nella seconda parte, dopo aver presentato la teoria di Landau della superfluidità, mostriamo come le equazioni per la dinamica del condensato si possano esprimere naturalmente come equazioni idrodinamiche per un fluido con flusso irrotazionale e inviscido (superfluido) e applichiamo teoria di Landau al nostro sistema, calcolandone la frazione superfluida a temperatura finita.

Indice

1	Introduzione	1
2	Condensazione di Bose-Einstein	2
2.1	Equazione di Gross-Pitaevskii	5
2.2	Spettro delle eccitazioni elementari	7
2.3	Proprietà termodinamiche	10
2.4	Frazione condensata	13
3	Superfluidità	17
3.1	Teoria di Landau	18
3.2	Superfluidità del gas di bosoni diluito	20
3.3	Frazione superfluida del gas di bosoni diluito	22
4	Conclusioni	24
	Appendice A	25

1 Introduzione

Il fenomeno della condensazione di Bose-Einstein (BEC) fu predetto inizialmente da Einstein nel 1924 sulla base degli studi di Bose sulla statistica dei fotoni. Egli osservò che in un sistema di particelle che obbediscono alla statistica di Bose e il cui numero totale sia conservato dovrebbe esistere una precisa temperatura al di sotto della quale una frazione finita di particelle occupa lo stato fondamentale di particella singola. La predizione originale di Einstein riguardava un gas non interagente, un sistema da molti contemporanei sospettato di essere patologico. Tuttavia nel 1938 venne osservata per la prima volta una particolare transizione di fase dell'elio-4 liquido, che al di sotto della temperatura di 2.17 K manifestava proprietà estremamente inusuali. Fritz London suggerì che le proprietà di questa nuova fase, detta superfluida, potessero essere conseguenza della BEC in un sistema fortemente interagente; questo suggerimento ha resistito alla prova del tempo ed è alla base della moderna comprensione della superfluidità. L'elio-4 superfluido è dunque il prototipo di condensato di Bose-Einstein e per molti anni è stato l'unica realizzazione sperimentale di tale fenomeno.

L'interazione tra gli atomi di elio è intensa e ciò riduce drasticamente l'occupazione dello stato fondamentale di particella singola, anche a temperatura zero. Di conseguenza è difficile misurare direttamente tale occupazione. Questo spinse la ricerca nella realizzazione di un BEC gassoso, con una frazione condensata più elevata. La difficoltà è che la maggior parte delle sostanze non rimangono gassose a basse temperature, ma formano solidi o, nel caso degli isotopi dell'elio, liquidi, prima di raggiungere la temperatura critica per la BEC. Solo a partire dagli anni '70 ci si rese conto che un sistema gassoso estremamente diluito sarebbe potuto essere mantenuto in una fase metastabile in cui la condensazione in un liquido o solido veniva soppressa e poteva verificarsi la BEC. Lo sviluppo di nuove tecniche basate su trappole magneto-ottiche e su meccanismi di raffreddamento avanzati ha infine consentito nel 1995 ai gruppi guidati da Eric Cornell e Carl Wiemann (Boulder) e Wolfgang Ketterle (MIT) di realizzare la condensazione di Bose-Einstein di gas alcalini di rubidio e sodio, coronando decenni di lavoro sperimentale e aprendo la strada allo studio degli atomi ultrafreddi.

Gli studi sperimentali sono stati preceduti da importanti lavori teorici. In particolare, nel 1941 Landau ha sviluppato la prima teoria consistente della superfluidità, fondata sullo spettro energetico delle eccitazioni elementari del sistema, implementando il modello a due fluidi proposto da László Tisza nel 1940. Qualche anno dopo, nel 1947, Bogoliubov ha sviluppato la prima teoria microscopica dei gas di bosoni debolmente interagenti.

In questa tesi studiamo un gas omogeneo di bosoni debolmente interagenti in $3D$. Ricaveremo per esso i principali risultati "classici" ottenuti originariamente da Landau, Bogoliubov e altri. Differenziandoci dalla trattazione standard del problema, che usa il formalismo di seconda quantizzazione, tratteremo la funzione d'onda Ψ come un campo classico e fonderemo anche la trattazione della termodinamica del sistema e della sua condensazione di Bose-Einstein sullo spettro delle eccitazioni elementari, nello stesso spirito della teoria di Landau della superfluidità. Questo ci consente di affrontare lo studio di entrambi i fenomeni da un punto di vista unitario e utilizzando il formalismo più semplice possibile.

La tesi è organizzata in due capitoli principali e un'appendice. Nel primo capitolo si discute la condensazione di Bose-Einstein. Dopo aver descritto come essa si manifesti nel caso del gas di Bose ideale, si dimostra l'equazione di Gross-Pitaevskii (GP), che descrive lo stato fondamentale di un sistema di bosoni identici usando l'approssimazione di Hartree e un potenziale con la forma di un'interazione di contatto. Dalla GP si ricavano le equazioni di Bogoliubov-de Gennes e da esse lo spettro energetico delle eccitazioni elementari del sistema. Sullo spettro delle eccitazioni si basa la trattazione della termodinamica: si calcola la funzione di partizione e il potenziale gran canonico e si mostra in particolare come da quest'ultimo si ottenga un'equazione per la frazione condensata a temperatura finita. Nel secondo capitolo si discute la superfluidità. Si presenta la teoria macroscopica di Landau e la si applica al caso dei bosoni debolmente interagenti, ricavando un'equazione per la frazione superfluida a temperatura finita. In appendice si trovano calcoli e dimostrazioni da considerare a margine rispetto alla discussione principale ma che meritano di non essere del tutto trascurati.

2 Condensazione di Bose-Einstein

Iniziamo descrivendo come la condensazione di Bose-Einstein si manifesti nel caso del gas di Bose ideale. In seguito presenteremo una definizione di BEC più generale. Si noti che in tutte le tesi considereremo unicamente il caso di bosoni spinless o spin-polarizzati, come si usa negli esperimenti, in modo da non dover introdurre la degenerazione di spin dei livelli energetici.

Gas di Bose ideale in 3D. Un risultato fondamentale della statistica quantistica è che per un sistema di bosoni identici in equilibrio termodinamico alla temperatura T , il valor medio del numero occupazione $N_{\mathbf{k}}$ del \mathbf{k} -esimo autostato di particella singola, associato all'energia $\varepsilon(\mathbf{k})$, segue la di distribuzione di Bose-Einstein [5]

$$\langle N_{\mathbf{k}} \rangle = \frac{1}{e^{\beta[\varepsilon(\mathbf{k})-\mu]} - 1} \quad (2.1)$$

dove, secondo la notazione standard, $\beta \equiv (k_B T)^{-1}$ e μ è il potenziale chimico, il quale deve soddisfare $\mu < \min_{\mathbf{k}} \varepsilon(\mathbf{k}) \equiv \varepsilon(\mathbf{k}_0)$ affinché $\langle N_{\mathbf{k}} \rangle$ sia definito positivo per ogni \mathbf{k} . Nel limite $\mu \rightarrow \varepsilon(\mathbf{k}_0)$ il numero di occupazione $N_0 \equiv \langle N_{\mathbf{k}_0} \rangle$ è divergente; come vedremo, questo comportamento è alla base della condensazione di Bose-Einstein. Il numero totale di bosoni si scrive quindi

$$N = \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{e^{\beta[\varepsilon(\mathbf{k})-\mu]} - 1} = N_0 + \sum_{\mathbf{k} \neq \mathbf{k}_0} \frac{1}{e^{\beta[\varepsilon(\mathbf{k})-\mu]} - 1} \quad (2.2)$$

Nel caso di un sistema omogeneo di bosoni non interagenti (gas di Bose ideale, e nel seguito semplicemente "gas ideale") in una scatola cubica di volume $\mathcal{V} = L^3$, le energie di particella singola sono

$$\varepsilon(\mathbf{k}) = \frac{\hbar^2 \mathbf{k}^2}{2m} = \frac{\hbar^2 \pi^2 \mathbf{n}^2}{2mL^2} \quad (2.3)$$

dove $\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z)$ e $n_i = 1, 2, \dots$. Nel *limite termodinamico* $N \rightarrow \infty$, $\mathcal{V} \rightarrow \infty$, $N/\mathcal{V} = \text{cost.}$, la separazione tra i livelli energetici diventa infinitesima e lo spettro si può considerare continuo con $\varepsilon(\mathbf{k}_0) = 0$. Inoltre essendo $\mathbf{k} = (\pi/L)\mathbf{n}$, con \mathbf{n} che assume valori nel primo ottante, $\sum_{\mathbf{k}} \rightarrow \frac{\mathcal{V}}{(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{k}$. Introdotta la fugacità $z \equiv e^{\beta\mu}$ e denotando con N_T il numero medio di particelle negli stati eccitati ($\mathbf{k} \neq \mathbf{k}_0$) si ha dunque

$$N = N_0 + N_T = \frac{z}{1-z} + \frac{\mathcal{V}}{(2\pi)^3} \int \frac{1}{z^{-1}e^{\beta\varepsilon(\mathbf{k})} - 1} d^3\mathbf{k} \quad (2.4)$$

In particolare, la densità numerica di particelle negli stati eccitati, $n_T \equiv N_T/\mathcal{V}$, è⁽¹⁾

$$\begin{aligned} n_T &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{1}{z^{-1}e^{\beta\varepsilon(\mathbf{k})} - 1} d^3\mathbf{k} = \frac{4\pi}{(2\pi)^3} \int_0^\infty \frac{k^2}{z^{-1}e^{\beta\varepsilon(k)} - 1} dk \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2\beta} \right)^{3/2} \int_0^\infty \frac{x^{1/2}}{z^{-1}e^x - 1} dx = \frac{2}{\sqrt{\pi} \lambda_T^3} \int_0^\infty \frac{x^{1/2}}{z^{-1}e^x - 1} dx = \frac{\text{Li}_{3/2}(z)}{\lambda_T^3} \end{aligned} \quad (2.5)$$

avendo effettuato nel secondo passaggio il cambio di variabili $x = \beta\varepsilon(\mathbf{k})$ e introdotta nel terzo la lunghezza d'onda termica $\lambda_T \equiv \sqrt{2\pi\hbar^2\beta/m}$. La funzione $\text{Li}_{3/2}(z)$ è un caso particolare delle funzioni polilogaritmo

$$\text{Li}_\alpha(z) \equiv \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{z^{-1}e^x - 1} dx \quad (2.6)$$

⁽¹⁾Osserviamo che nel limite termodinamico $\varepsilon = \hbar^2 \mathbf{k}^2 / 2m = \mathbf{p}^2 / 2m$, dove $\mathbf{p} = \hbar \mathbf{k}$ rappresenta il momento di una particella di energia $\varepsilon(\mathbf{k})$, perciò la densità numerica di particelle negli stati eccitati si può anche scrivere

$$n_T = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int \frac{1}{z^{-1}e^{\beta\varepsilon(\mathbf{p})} - 1} d^3\mathbf{p}$$

che sono definite per ogni z eccetto che per z reale e maggiore o uguale a uno, e dove

$$\Gamma(\alpha) \equiv \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx, \quad \Re(\alpha) > 0 \quad (2.7)$$

è la funzione gamma di Eulero, che dà $\Gamma(3/2) = \sqrt{\pi}/2$.

Poiché $\varepsilon(\mathbf{k}_0) = 0$, per il gas ideale $\mu < 0$. Se il numero di particelle è costante, vediamo dalla (2.2) che al crescere della temperatura μ diventa sempre più negativo e z tende a zero; al contrario, abbassando la temperatura μ tende al suo valore limite zero e z tende ad uno. Per comprendere il comportamento del gas a temperature molto basse dobbiamo quindi studiare le funzioni $\text{Li}_\alpha(z)$ nel limite $z \rightarrow 1$. Tali funzioni sono monotone crescenti nell'intervallo $0 \leq z \leq 1$ e il valore massimo che assumono è dato dalla funzione zeta di Riemann

$$\zeta(\alpha) \equiv \text{Li}_\alpha(1) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{e^x - 1} dx \quad (2.8)$$

In questa funzione, per $x \rightarrow 0$ l'integrando si comporta come $x^{\alpha-2}$, perciò $\zeta(\alpha)$ è finito per $\alpha > 1$ mentre diverge per $\alpha \leq 1$. Nel caso della (2.5) $\alpha = 3/2$ e $\zeta(3/2) \simeq 2.61238$. Di conseguenza, la densità numerica di particelle negli stati eccitati è superiormente limitata da $\zeta(3/2)/\lambda_T^3$. A temperature sufficientemente elevate, tali che

$$n\lambda_T^3 = n \left(\frac{2\pi\hbar^2}{mk_B T} \right)^{3/2} \leq \zeta(3/2) \quad (2.9)$$

dove $n \equiv N/V$, il limite non è rilevante e $n_T = n$. Abbassando la temperatura, z cresce finché $n_T = n$ non raggiunge il suo valore limite (in corrispondenza di $z = 1$, cioè $\mu = 0$), cosa che accade a

$$T_c = \frac{2\pi\hbar^2}{mk_B} \left(\frac{n}{\zeta(3/2)} \right)^{2/3} \quad (2.10)$$

Al di sotto di questa temperatura critica, μ è fissato al valore zero e n_T è fissata al valore limite

$$n_T = \frac{\zeta(3/2)}{\lambda_T^3} \propto T^{3/2} \quad (T \leq T_c) \quad (2.11)$$

che risulta inferiore alla densità totale delle particelle e indipendentemente da essa. Ciò significa che una frazione macroscopica (cioè finita anche nel limite termodinamico) di particelle, con densità $n_0 = n - n_T$, occupa lo stato fondamentale e che il numero N_0 di particelle in tale stato può essere arbitrariamente grande. Questo fenomeno, l'*occupazione macroscopica dello stato fondamentale di particella singola* come conseguenza della sola statistica quantistica, che si può far risalire al principio di indistinguibilità delle particelle identiche, è ciò che si chiama condensazione di Bose-Einstein. La frazione di particelle nel condensato è zero per $T \geq T_c$ ⁽²⁾, mentre

$$\boxed{\frac{n_0}{n} = 1 - \frac{\zeta(3/2)}{n} \left(\frac{mk_B T}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} = 1 - \left(\frac{T}{T_c} \right)^{3/2} \quad (T \leq T_c)} \quad (2.12)$$

Criterio di Penrose-Onsager. La discussione precedente assume non solo l'assenza di interazione tra i bosoni, ma anche che il sistema si trovi in equilibrio termodinamico. Vogliamo ora presentare una definizione più generale di BEC, valida anche quando le due suddette condizioni non sono realizzate. La definizione è, a parole, che si ha BEC quando *una frazione*

⁽²⁾ Il fatto che per $T \geq T_c$ n_0 sia zero non significa che a tali temperature non vi siano particelle che occupano lo stato fondamentale, ma solo che la frazione di particelle in questo singolo stato, così come in qualunque altro singolo stato, diventa infinitesima nel limite termodinamico. A qualsiasi temperatura finita lo stato fondamentale è comunque il più probabile, come si vede dalla (2.1).

macroscopica di particelle occupa uno stesso stato di particella singola⁽³⁾, ed è stata formalizzata da Penrose e Onsager (1956) [12, 15]. Consideriamo un sistema di N bosoni identici in D dimensioni, le cui coordinate siano \mathbf{r}_i ($i = 1, \dots, N$), soggetti ad arbitrarie interazioni mutue e ad un arbitrario potenziale esterno. Un generico stato puro a del sistema al tempo t è descritto da una funzione d'onda completamente simmetrica (per la definizione di bosone)

$$\Psi_a(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, t) \equiv \langle \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N | \Psi_a(t) \rangle \quad (2.13)$$

che assumeremo normalizzata a uno. Lo stato più generale del sistema è dato da una “miscela statistica” di stati puri a con probabilità p_a , dove ovviamente $\sum_a p_a = 1$. In tal caso il sistema è descritto dall'operatore densità [9]

$$\hat{\rho}(t) \equiv \sum_a p_a |\Psi_a(t)\rangle \langle \Psi_a(t)| \quad (2.14)$$

il quale soddisfa $\hat{\rho}^\dagger = \hat{\rho}$ e, in particolare, è un osservabile, i cui elementi di matrice rispetto alla base $\{|\mathbf{z}\rangle\} \equiv \{|\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N\rangle\}$ dello spazio degli stati delle N particelle sono

$$\rho(\mathbf{z}, \mathbf{z}', t) \equiv \langle \mathbf{z} | \hat{\rho}(t) | \mathbf{z}' \rangle = \sum_a p_a \Psi_a(\mathbf{z}, t) \Psi_a^*(\mathbf{z}', t) \quad (2.15)$$

A partire da questo possiamo definire un operatore densità ridotto per una particella singola, ad esempio la 1, prendendo la traccia parziale di $\hat{\rho}$ rispetto alle altre particelle, per convenienza moltiplicata per il numero di particelle:

$$\hat{\rho}_1(t) \equiv N \text{Tr}_{2, \dots, N} \hat{\rho}(t) \quad (2.16)$$

Per definizione di traccia parziale, gli elementi di matrice di $\hat{\rho}_1$ rispetto alla base $\{|\mathbf{r}\rangle\}$ dello spazio degli stati di particella singola sono

$$\rho_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) = N \sum_a p_a \int d^D \mathbf{r}_2 \cdots d^D \mathbf{r}_N \Psi_a(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N, t) \Psi_a^*(\mathbf{r}', \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N, t) \quad (2.17)$$

e rappresentano l'ampiezza di probabilità di trovare una particella in \mathbf{r} moltiplicata per l'ampiezza di probabilità di trovarla in \mathbf{r}' , mediata sul comportamento delle altre $N - 1$ particelle; gli elementi diagonali $\rho_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}, t)$ rappresentano dunque la densità di probabilità di trovare una particella nella posizione \mathbf{r} , mediata sul comportamento delle altre $N - 1$ particelle.

Segue direttamente dalla (2.17) che anche $\hat{\rho}_1$ è un osservabile: $\rho_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) = \rho_1^*(\mathbf{r}', \mathbf{r}, t)$. Ciò significa che esso è diagonalizzabile, ossia esiste una base ortonormale $\{|\chi_i\rangle\}$ dello spazio degli stati di particella singola costituita da autovettori di $\hat{\rho}_1$, e quindi si potrà scrivere

$$\hat{\rho}_1(t) = \sum_i u_i(t) |\chi_i(t)\rangle \langle \chi_i(t)| \quad (2.18)$$

o in modo equivalente

$$\rho_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) = \sum_i u_i(t) \chi_i(\mathbf{r}, t) \chi_i^*(\mathbf{r}', t) \quad (2.19)$$

dove u_i è l'autovalore relativo all'autovettore $|\chi_i\rangle$ (all'autofunzione χ_i).

⁽³⁾Questo dovrebbe chiarire perché i condensati di Bose-Einstein suscitino tanto interesse. Il fatto che ogni atomo nel condensato sia descritto dalla stessa funzione d'onda ψ implica che ciascuno di essi si comporti esattamente allo stesso modo (coerenza). Ciò ha come conseguenza, tra l'altro, che effetti essenzialmente invisibili a livello di un singolo atomo possono essere amplificati in modo spettacolare (un esempio è proprio la superfluidità). In questo senso, la condensazione di Bose-Einstein rappresenta un *fenomeno quantistico macroscopico*. Un fenomeno quantistico macroscopico più familiare è il laser. In effetti, possiamo dire che *il condensato di Bose-Einstein è per la materia quello che il laser è per la luce*. In un BEC molti atomi occupano uno stesso stato quantistico e sono descritti da un'onda di materia macroscopica; similmente, nel laser i fotoni hanno tutti la stessa energia, polarizzazione, ecc. e sono descritti da un campo elettrico coerente. La proprietà di coerenza del BEC è stata verificata nel 1997 mediante l'interferenza di due condensati e l'osservazione di frange di interferenza analoghe a quelle che si osservano nell'interferenza di due raggi laser [2, 7].

La definizione di BEC data da Penrose e Onsager consiste proprio in una condizione sugli autovalori di questo operatore densità ridotto. Ritorniamo per un attimo al gas ideale; si è visto che in tal caso si ha BEC quando il numero medio di particelle nello stato fondamentale di particella singola è dello stesso ordine di N . In assenza di mutua interazione la generica funzione d'onda a molti corpi $\Psi_a(\mathbf{z}, t)$ si fattorizza nel prodotto delle funzioni d'onda di ciascuna particella, ciascuna normalizzata a uno:

$$\Psi_a(\mathbf{z}, t) = \psi_a^{(1)}(\mathbf{r}_1, t) \psi_a^{(2)}(\mathbf{r}_2, t) \cdots \psi_a^{(N)}(\mathbf{r}_N, t) \quad (2.20)$$

La (2.17) diviene così

$$\begin{aligned} \rho_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) &= N \sum_a p_a \int d^D \mathbf{r}_2 \cdots d^D \mathbf{r}_N \psi_a^{(1)}(\mathbf{r}, t) \psi_a^{(1)*}(\mathbf{r}', t) |\psi_a^{(2)}(\mathbf{r}_2, t)|^2 \cdots |\psi_a^{(N)}(\mathbf{r}_N, t)|^2 \\ &= N \sum_a p_a \psi_a^{(1)}(\mathbf{r}, t) \psi_a^{(1)*}(\mathbf{r}', t) \end{aligned}$$

e dal confronto con la (2.19) si vede che le autofunzioni di $\hat{\rho}_1$ sono in questo caso le funzioni d'onda di particella singola $\psi_a^{(1)}$ e che i corrispondenti autovalori $u_a = N p_a$ rappresentano il numero medio di particelle nello stato rappresentato da tali funzioni d'onda. Dunque nel caso del gas ideale la condensazione di Bose-Einstein corrisponde al fatto che l'autovalore di $\hat{\rho}_1$ associato allo stato fondamentale di particella singola sia dello stesso ordine di N . La generalizzazione di questa affermazione è evidente, e costituisce la definizione di BEC anche nel caso di un sistema interagente e fuori equilibrio: *Se tutti gli autovalori u_i di $\hat{\rho}_1$ sono infinitesimi rispetto a N , cioè $u_i/N = o(1)$, il sistema è normale (non condensato). Se c'è esattamente un autovalore \bar{u} di $\hat{\rho}_1$ dello stesso ordine di N , cioè $\bar{u}/N = \exp o(1)$, e i rimanenti sono infinitesimi rispetto ad N , il sistema esibisce condensazione di Bose-Einstein.*

Il perché una tale situazione dovrebbe verificarsi in un sistema generico è una questione ancora aperta. Primo, perché dovrebbe esserci un'occupazione macroscopica di un qualsiasi stato di particella singola? Il solo sistema per cui esiste una dimostrazione rigorosa del fatto che la condensazione di Bose-Einstein avviene effettivamente è il gas ideale, di cui si è appena discusso, mentre non esiste una dimostrazione generale che provi che un arbitrario sistema di bosoni deve esibire BEC a $T = 0$. D'altra parte, l'esistenza della fase solida dell'elio-4 (a temperatura molto bassa e pressione elevata, nell'ordine di 65 atm o più) è un chiaro controesempio a tale ipotesi. Secondo, ammettendo che tale occupazione macroscopica si realizzi, perché dovrebbe riguardare un solo stato di particella singola? Questa possibilità è stata presa in considerazione da Penrose e Onsager nella loro definizione, affermando che: *Se ci sono due o più autovalori di $\hat{\rho}_1$ dello stesso ordine di N , e i rimanenti sono infinitesimi rispetto ad N , il sistema esibisce condensazione di Bose-Einstein frammentata.* Si può mostrare che, almeno in approssimazione di campo medio, l'occupazione macroscopica di più di uno stato è energeticamente sfavorevole purché l'interazione efficace a bassa energia sia repulsiva. In casi più generali non è ovvio che si possa escludere la presenza di BEC frammentata [13].

Per queste ragioni, nel seguito noi *assumeremo* che il sistema considerato esibisca condensazione di Bose-Einstein semplice, cioè che si abbia un'occupazione macroscopica di *uno ed un solo* stato di particella singola ψ .

2.1 Equazione di Gross-Pitaevskii

In questa sezione iniziamo la trattazione del gas di bosoni debolmente interagenti ricavandone l'equazione fondamentale della dinamica. Consideriamo un sistema di N bosoni identici in $3D$, i cui gradi di libertà spaziali siano descritti da una funzione d'onda completamente simmetrica, $\Psi(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, t)$, dipendente dalle coordinate \mathbf{r}_i delle particelle e dal tempo, normalizzata a uno. L'evoluzione temporale del sistema è governata dall'equazione di Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\mathbf{z}, t) = \hat{H} \Psi(\mathbf{z}, t) \quad (2.21)$$

dove \hat{H} è l'operatore hamiltoniano del sistema e $\mathbf{r} \equiv (\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)$. Tale equazione si può ottenere dall'applicazione del principio di minima azione all'azione "euclidea"

$$\mathcal{S}[\Psi] = \int_{\tau_0}^{\tau_1} d\tau \int d^{3N} \mathbf{r} \Psi^*(\mathbf{r}, \tau) \left[\hbar \frac{\partial}{\partial \tau} - \hat{H} \right] \Psi(\mathbf{r}, \tau) \quad (2.22)$$

in cui compare il tempo immaginario $\tau = -it$. Infatti, imponendo

$$\delta \mathcal{S} \equiv \frac{d}{d\alpha} \mathcal{S}[\Psi + \alpha \delta \Psi] \Big|_{\alpha=0} = 0, \quad \alpha \in \mathbb{R} \quad (2.23)$$

si trova l'equazione

$$2 \Re \left\{ \int_{\tau_0}^{\tau_1} d\tau \int d^{3N} \mathbf{r} \delta \Psi^*(\mathbf{r}, t) \left[\hbar \frac{\partial}{\partial \tau} - \hat{H} \right] \Psi(\mathbf{r}, \tau) \right\} = 0$$

che è soddisfatta per ogni variazione $\delta \Psi(\mathbf{r}, \tau)$ tale che $\delta \Psi(\mathbf{r}, \tau_0) = \delta \Psi(\mathbf{r}, \tau_1) = 0$ se e solo se $\Psi(\mathbf{r}, \tau)$ soddisfa $\hbar \partial \Psi / \partial \tau = \hat{H} \Psi$, che equivale, tornando al tempo reale $t = i\tau$, alla (2.21).

In generale l'hamiltoniano per il sistema di bosoni sarà

$$\hat{H}(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) = \sum_{i=1}^N \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_i^2 + U(\mathbf{r}_i) \right] + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i}^N V(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \quad (2.24)$$

dove U è il potenziale di confinamento esterno e V il potenziale di interazione tra le particelle.

Nel caso in cui i bosoni siano debolmente interagenti, come in un gas molto diluito, la funzione d'onda a molti corpi Ψ può essere trattata col metodo di Hartree, in cui essa viene approssimata dal prodotto simmetrizzato di funzioni d'onda di particella singola. In particolare, se il sistema è un condensato puro tutti i bosoni occupano lo stesso stato di particella singola $\psi(\mathbf{r}, t)$, normalizzato a uno, sicché

$$\Psi(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, t) = \prod_{i=1}^N \psi(\mathbf{r}_i, t) \quad (2.25)$$

Inoltre l'interazione di una particella in posizione \mathbf{r} con tutte le altre è descritta dal potenziale di campo medio

$$V_{\text{mf}}(\mathbf{r}, t) = (N-1) \int d^3 \mathbf{r}' V(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) |\psi(\mathbf{r}', t)|^2 \quad (2.26)$$

L'azione (2.22) per l'hamiltoniano (2.24) con la funzione d'onda (2.25) è allora

$$\mathcal{S} = N \int_{\tau_0}^{\tau_1} d\tau \int d^3 \mathbf{r} \psi^*(\mathbf{r}, \tau) \left[\hbar \frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 - U(\mathbf{r}) - \frac{N-1}{2} \int d^3 \mathbf{r}' V(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) |\psi(\mathbf{r}', \tau)|^2 \right] \psi(\mathbf{r}, \tau) \quad (2.27)$$

e imponendo $\delta \mathcal{S} = 0$ si trova l'equazione di Hartree per l'evoluzione temporale di $\psi(\mathbf{r}, t)$ [A.1]:

$$i \hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\mathbf{r}, t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + U(\mathbf{r}) + (N-1) \int d^3 \mathbf{r}' V(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) |\psi(\mathbf{r}', t)|^2 \right] \psi(\mathbf{r}, t) \quad (2.28)$$

Sempre pensando ad un gas molto diluito, cioè tale che la distanza media tra le particelle sia molto maggiore del raggio caratteristico del potenziale di interazione, si assume in prima approssimazione che V abbia la forma di un'interazione di contatto:

$$V(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) = g \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \quad (2.29)$$

dove δ è la funzione delta di Dirac e per costruzione $g = \int V(\mathbf{r}) d^3 \mathbf{r}$. È utile esprimere g in termini di una grandezza misurabile sperimentalmente; questo si può fare ricorrendo alla teoria dello scattering, che consente di provare che [A.2]

$$g \simeq \frac{4\pi \hbar^2 a_s}{m} \quad (2.30)$$

dove a_s è un parametro chiamato lunghezza di scattering, misurabile sperimentalmente in quanto legato alle sezioni d'urto. Aver introdotto la lunghezza di scattering ci consente anche di precisare quando il gas si possa considerare molto diluito: è quando $|a_s| \ll d$, dove $d = n^{-1/3}$ è la distanza media tra le particelle, essendo $n = N/\mathcal{V}$ la loro densità numerica. La stessa condizione si può esprimere in termini del *parametro gassoso* $\gamma \equiv |a_s|/d = |a_s|n^{1/3}$, ed è evidentemente $\gamma \ll 1$.

Sostituendo il potenziale (2.29) nella (2.28) otteniamo l'equazione di Gross-Pitaevskii (GP) per un condensato di N bosoni identici debolmente interagenti:

$$\boxed{i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\mathbf{r}, t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + U(\mathbf{r}) + (N-1)g|\psi(\mathbf{r}, t)|^2 \right] \psi(\mathbf{r}, t)} \quad (2.31)$$

Dall'equazione dipendente dal tempo (2.31) ricaviamo, considerando la funzione d'onda nella forma $\psi(\mathbf{r}, t) = \varphi(\mathbf{r})e^{-i\mu t/\hbar}$, l'equazione di Gross-Pitaevskii stazionaria

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + U(\mathbf{r}) + (N-1)g|\varphi(\mathbf{r})|^2 \right] \varphi(\mathbf{r}) = \mu \varphi(\mathbf{r}) \quad (2.32)$$

Moltiplicando la (2.32) per $\varphi^*(\mathbf{r})$ e integrando si ottiene per l'autovalore μ l'espressione

$$\mu = \int d^3\mathbf{r} \varphi^*(\mathbf{r}) \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + U(\mathbf{r}) + (N-1)g|\varphi(\mathbf{r})|^2 \right] \varphi(\mathbf{r}) \quad (2.33)$$

D'altra parte, vediamo dalla forma dell'azione (2.27) con il potenziale (2.29) che l'energia media per il sistema di N bosoni nello stesso autostato di particella singola $\varphi(\mathbf{r})$ è

$$E^{(N)} = N \int d^3\mathbf{r} \varphi^*(\mathbf{r}) \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + U(\mathbf{r}) + \frac{(N-1)}{2}g|\varphi(\mathbf{r})|^2 \right] \varphi(\mathbf{r}) \quad (2.34)$$

mentre per un condensato di $N-1$ bosoni sarebbe

$$E^{(N-1)} = (N-1) \int d^3\mathbf{r} \varphi^*(\mathbf{r}) \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + U(\mathbf{r}) + \frac{(N-2)}{2}g|\varphi(\mathbf{r})|^2 \right] \varphi(\mathbf{r})$$

Ne segue che $E^{(N)} - E^{(N-1)} = \mu$, perciò l'energia μ che compare nella (2.32) ha il significato di potenziale chimico per il sistema di N bosoni.

Nel seguito considereremo il gas di bosoni in un ambiente omogeneo: $U(\mathbf{r}) = 0$. Lo stato fondamentale, in cui l'energia del sistema è minima, è quello in cui $\varphi(\mathbf{r})$ è costante; in tal caso le (2.33)-(2.34) danno $\mu = (N-1)g|\varphi|^2$ ed $E_0 = (N/2)(N-1)g|\varphi|^2 = (N/2)\mu$. D'altra parte, se $\varphi(\mathbf{r})$ è costante la condizione di normalizzazione $\int d^3\mathbf{r} |\varphi|^2 = 1$ dà $|\varphi|^2 = 1/\mathcal{V}$, dove \mathcal{V} è il volume occupato dal gas. Ne segue che

$$\mu = \frac{(N-1)g}{\mathcal{V}} = \left(1 - \frac{1}{N}\right) gn \underset{(N \gg 1)}{\simeq} gn \quad (2.35)$$

$$E_0 = \frac{N(N-1)g}{2\mathcal{V}} \underset{(N \gg 1)}{\simeq} \frac{N^2g}{2\mathcal{V}} \quad (2.36)$$

2.2 Spettro delle eccitazioni elementari

Il prossimo passo è studiare la dinamica del condensato quando la funzione d'onda $\psi(\mathbf{r}, t)$ si discosta da uno stato stazionario $\varphi(\mathbf{r})e^{-i\mu t/\hbar}$ per una piccola variazione $\delta\psi(\mathbf{r}, t)$. In particolare, se lo stato stazionario in questione è lo stato fondamentale, l'equazione che troveremo per $\delta\psi(\mathbf{r}, t)$ ci consentirà di caratterizzare le eccitazioni elementari del sistema. Sia dunque

$$\psi(\mathbf{r}, t) = e^{-i\mu t/\hbar} [\varphi(\mathbf{r}) + \delta\psi(\mathbf{r}, t)] \quad (2.37)$$

Sostituendo questa espressione nella GP (2.31), considerato che $\varphi(\mathbf{r})$ soddisfa la (2.32) e mantenendo solo i termini lineari in $\delta\psi$, si ottiene per l'evoluzione temporale di $\delta\psi$ l'equazione seguente, che insieme alla propria complessa coniugata costituisce le *equazioni di Bogoliubov-de Gennes*:

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \delta\psi &= \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + U(\mathbf{r}) + 2(N-1)g|\varphi(\mathbf{r})|^2 - \mu \right] \delta\psi + (N-1)g\varphi(\mathbf{r})^2 \delta\psi^* \\ -i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \delta\psi^* &= \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + U(\mathbf{r}) + 2(N-1)g|\varphi(\mathbf{r})|^2 - \mu \right] \delta\psi^* + (N-1)g\varphi^*(\mathbf{r})^2 \delta\psi \end{aligned} \quad (2.38)$$

Nel caso di un ambiente omogeneo, $U(\mathbf{r}) = 0$ e $\varphi(\mathbf{r}) = \text{cost.}$ (stato fondamentale), perciò definite le costanti $C \equiv 2(N-1)g|\varphi|^2 - \mu$ e $K \equiv (N-1)g\varphi^2$ le equazioni assumono la forma

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \delta\psi(\mathbf{r}, t) &= \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + C \right] \delta\psi(\mathbf{r}, t) + K \delta\psi^*(\mathbf{r}, t) \\ -i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \delta\psi^*(\mathbf{r}, t) &= \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + C \right] \delta\psi^*(\mathbf{r}, t) + K^* \delta\psi(\mathbf{r}, t) \end{aligned} \quad (2.39)$$

Questo sistema di equazioni differenziali si può tradurre in un sistema algebrico passando in trasformata di Fourier e sfruttando la nota relazione $\mathcal{F}[f^{(n)}(x)](k) = (ik)^n \mathcal{F}[f(x)](k)$, dove $f^{(n)}$ è la derivata n -esima di f . Prendendo la trasformata di Fourier rispetto alle variabili (\mathbf{r}, t) otteniamo in effetti

$$\begin{pmatrix} \hbar\omega + \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + C & K \\ K^* & -\hbar\omega + \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{F}[\delta\psi](\mathbf{k}, \omega) \\ \mathcal{F}[\delta\psi^*](\mathbf{k}, \omega) \end{pmatrix} = \mathbf{0} \quad (2.40)$$

che ha soluzione non banale se e solo se il determinante della matrice dei coefficienti è uguale a zero, ovvero

$$\left[\hbar\omega + \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + C \right] \left[-\hbar\omega + \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + C \right] - K^* K = 0$$

Ne ricaviamo una relazione di dispersione $\omega = \omega(k)$ da cui segue lo spettro delle eccitazioni elementari

$$\varepsilon_{\mathbf{k}} = \hbar\omega(k) = \sqrt{\left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m} + 2(N-1)g|\varphi|^2 - \mu \right)^2 - [(N-1)g|\varphi|^2]^2} \quad (2.41)$$

(*Notazione.* Nelle equazioni (2.41) e precedenti N denota il numero di particelle nel condensato. Nel seguito tratteremo la situazione in cui solo una frazione delle particelle del sistema si trova nel condensato. Il simbolo N denoterà allora il numero totale di particelle ed n la corrispondente densità numerica, mentre denoteremo con N_0 il numero di particelle nel condensato e con n_0 la corrispondente densità numerica). Con questo cambio di notazione, essendo $|\varphi|^2 = n_0/N_0$, nel limite $N_0 \gg 1$

$$\boxed{\varepsilon_{\mathbf{k}} = \sqrt{\left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m} + 2gn_0 - \mu \right)^2 - (gn_0)^2}} \quad (2.42)$$

Con l'identificazione $\mu = gn_0$, valida nello stesso limite, la (2.42) si riduce allo *spettro di Bogoliubov*, che si può esprimere in tre forme equivalenti che ci saranno utili più avanti:

$$\varepsilon_{\mathbf{k}}(\mu) = \sqrt{\frac{\hbar^2 k^2}{2m} \left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m} + 2\mu \right)} \quad (2.43)$$

$$\varepsilon_{\mathbf{k}}(n_0) = \sqrt{\frac{\hbar^2 k^2}{2m} \left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m} + 2gn_0 \right)} \quad (2.44)$$

$$\varepsilon(p) = \sqrt{\frac{p^2}{2m} \left(\frac{p^2}{2m} + 2mc_s^2 \right)} \quad (2.45)$$

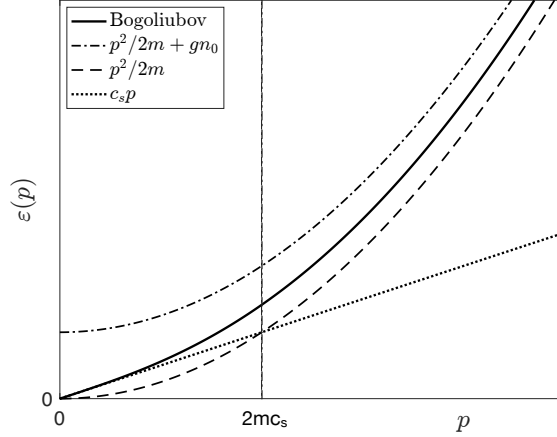


Figura 1: Spettro di Bogoliubov, confrontato con i suoi andamenti asintotici. In assenza di interazione (gas ideale) si avrebbe $\varepsilon(p) = p^2/2m$.

avendo introdotto, per l'ultima equazione, il momento $p \equiv |\mathbf{p}| = \hbar k$ e la grandezza

$$c_s \equiv \sqrt{\frac{g}{m} \left(1 - \frac{1}{N_0}\right) n_0} \underset{(N_0 \gg 1)}{\simeq} \sqrt{\frac{gn_0}{m}} \quad (2.46)$$

che ha le dimensioni di una velocità.

Soffermiamoci sulla funzione (2.45), rappresentata in Figura 1. Nei limiti $p \ll 2mc_s$ e $p \gg 2mc_s$ essa assume due forme semplici:

$$\varepsilon(p) \simeq c_s p \quad \text{se } p \ll 2mc_s \quad (2.47)$$

$$\varepsilon(p) \simeq \frac{p^2}{2m} + gn_0 \quad \text{se } p \gg 2mc_s \quad (2.48)$$

Dunque per piccoli momenti $\varepsilon(p)$ è lineare in p e vale la relazione di dispersione

$$\omega = c_s k \quad (2.49)$$

analoga a quella dei fononi acustici: le eccitazioni del gas di bosoni corrispondenti a piccoli momenti sono onde sonore che si propagano alla velocità c_s . Si noti che tale relazione di dispersione lineare è possibile solo per un gas interagente, seppur debolmente ($c_s \propto \sqrt{g}$). Per grandi momenti, invece, $\varepsilon(p)$ è quadratica in p , e corrisponde all'energia cinetica di una particella di massa m e momento p più un piccolo contributo (costante) di campo medio. La transizione dal regime fononico a quello di particella libera avviene intorno a $p = 2mc_s$.

Tutto questo ha un importante significato fisico. Se consideriamo piccole variazioni dalla configurazione di equilibrio, le eccitazioni elementari del gas di bosoni debolmente interagenti si possono descrivere in termini di un gas di *quasi particelle* non interagenti, di energia $\varepsilon = \hbar\omega$ e momento $p = \hbar k$, che rappresentano uno stato di eccitazione collettiva delle vere particelle che costituiscono il sistema. Le eccitazioni elementari, non esistenti nello stato fondamentale, possono apparire e scomparire individualmente, e poiché il momento angolare di un sistema quantistico può cambiare solo per multipli interi di \hbar esse devono avere un momento angolare intrinseco intero e quindi obbedire alla statistica di Bose-Einstein. In particolare, la loro distribuzione all'equilibrio è

$$f^0 = \frac{1}{e^{\varepsilon/k_B T} - 1} \quad (2.50)$$

Si noti l'assenza del potenziale chimico, dovuta al fatto che il numero di eccitazioni non è una quantità conservata. Infatti, l'energia delle eccitazioni uguaglia la differenza tra l'energia di uno stato eccitato e l'energia dello stato fondamentale del sistema contenente lo stesso numero

di particelle, perciò il numero di eccitazioni dipende dalla temperatura, come il numero di fononi in un solido. Per il gas di quasi particelle si pone quindi per definizione $\mu = 0$ [16].

Vi sono solide evidenze sperimentali a favore di questa descrizione. Nel 2002 lo spettro delle eccitazioni elementari di un condensato gassoso di rubidio è stato misurato direttamente sfruttando lo scattering Raman e si è trovato essere in ottimo accordo con la previsione teorica di Bogoliubov [20].

Interazioni attrattive. Nella definizione della velocità del suono (2.46) si è assunto implicitamente che g fosse positiva, vale a dire che l'interazione tra i bosoni fosse repulsiva. In tal caso c_s è una quantità reale e $\omega(k)$ è anch'essa reale per ogni valore del momento $p = \hbar k$.

Supponiamo invece che g sia negativa, vale a dire che l'interazione tra i bosoni sia attrattiva. In tal caso $c_s = i\sqrt{|g|n_0/m}$ e la relazione di dispersione

$$\hbar\omega = \sqrt{\frac{\hbar^2 k^2}{2m} \left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m} - 2|g|n_0 \right)}$$

è immaginaria per $k < \sqrt{4m|g|n_0}/\hbar \equiv k_*$. Per capire cosa questo implichi, ricordiamo che la soluzione generale per $\delta\psi(\mathbf{r}, t)$ sarà data dalla sovrapposizione (infinita) di onde piane monocromatiche che soddisfano la relazione di dispersione di Bogoliubov, in cui l'ampiezza di ciascuna onda è data dalla trasformata di Fourier di $\delta\psi$ (teorema di inversione di Fourier):

$$\delta\psi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \mathcal{F}[\delta\psi](\mathbf{k}, \omega) e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)} d^3\mathbf{k} d\omega \quad (2.51)$$

Dunque se ω è reale l'ampiezza delle fluttuazioni la cui sovrapposizione dà $\delta\psi$ è limitata e il condensato è stabile. Se invece ω è immaginaria, il comportamento oscillatorio di $\delta\psi$ diventa un comportamento esponenziale: l'ampiezza delle fluttuazioni caratterizzate da $k < k_*$ cresce esponenzialmente nel tempo, perciò il condensato è instabile e collassa.

Questo non significa che un condensato con interazioni attrattive sia sempre instabile e non possa essere realizzato sperimentalmente. In effetti, solo le fluttuazioni di ψ caratterizzate da $k < k_*$ sono instabili. Ricordando la relazione tra vettore d'onda e lunghezza d'onda, $k = 2\pi/\lambda$, e l'espressione di $|g|$ in funzione di $|a_s|$ (2.30), la condizione su k si traduce nella seguente condizione su λ :

$$\lambda > \sqrt{\frac{\pi}{4|a_s|n_0}} \equiv \lambda_* \quad (2.52)$$

Di conseguenza, se il condensato viene confinato in una scatola cubica di spigolo $L = \mathcal{V}^{1/3} < \lambda_*$, esso diventa stabile, perché fluttuazioni instabili con grandi lunghezze d'onda non sono più possibili (per la continuità di ψ). Essendo $n_0 = N_0/L^3$, per L fissata questa condizione di stabilità è soddisfatta se il numero di particelle nel condensato è sufficientemente piccolo:

$$N_0 < \frac{\pi}{4} \frac{L}{|a_s|} \quad (2.53)$$

La previsione per un gas attrattivo confinato in una trappola armonica è qualitativamente analoga, anche se vi sono delle differenze quantitative [21]. Utilizzando un gas di litio-7 confinato in una trappola armonica il collasso del condensato quando N_0 supera un valore critico è stato effettivamente osservato [18].

2.3 Proprietà termodinamiche

La conoscenza dello spettro delle eccitazioni elementari ci consente di affrontare lo studio della termodinamica del gas di bosoni debolmente interagenti. Supponendo che N_0 particelle siano nel condensato e le rimanenti $N - N_0$ siano fuori condensato, scriviamo l'operatore hamiltoniano che rappresenta l'energia del sistema come somma di due contributi. Il primo corrisponde all'energia dello stato fondamentale del sistema; interpretando la parte fuori condensato come

reservoir di particelle che vincola il potenziale chimico del condensato, tale energia è data dal potenziale gran canonico

$$\Omega_0 = E_0 - \mu N_0$$

dove $E_0 = (N_0/2)gn_0$, secondo la (2.36). Il secondo contributo all'hamiltoniano è dato dall'energia delle eccitazioni elementari⁽⁴⁾, cioè dalla somma sui \mathbf{k} del numero di eccitazioni con momento \mathbf{k} per l'energia $\varepsilon_{\mathbf{k}}$, più l'energia di punto zero, la cui origine è analoga a quella dell'energia di punto zero dell'oscillatore armonico. Dunque

$$\hat{H}' = \Omega_0 + \sum_{\mathbf{k}} \left(\hat{N}_{\mathbf{k}} + \frac{1}{2} \right) \varepsilon_{\mathbf{k}} \quad (2.54)$$

dove $\hat{N}_{\mathbf{k}}$ è l'operatore numero tale che, se $|\{N_{\mathbf{k}}\}\rangle$ è lo stato delle eccitazioni espresso mediante i numeri di occupazione, $\hat{N}_{\mathbf{k}}|\{N_{\mathbf{k}}\}\rangle = N_{\mathbf{k}}|\{N_{\mathbf{k}}\}\rangle$, ed $\varepsilon_{\mathbf{k}} = \varepsilon_{\mathbf{k}}(\mu, n_0)$ secondo la (2.42).

La funzione di partizione gran canonica è

$$\mathcal{Z} = \text{Tr} \left(e^{-\beta \hat{H}'} \right) \quad (2.55)$$

e la calcoliamo esplicitamente seguendo [5]:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} &= \sum_{\{N_{\mathbf{k}}\}} \langle \{N_{\mathbf{k}}\} | e^{-\beta \hat{H}'} | \{N_{\mathbf{k}}\} \rangle = \sum_{\{N_{\mathbf{k}}\}} e^{-\beta [\Omega_0 + \sum_{\mathbf{k}} (N_{\mathbf{k}} + \frac{1}{2}) \varepsilon_{\mathbf{k}}]} \\ &= e^{-\beta \Omega_0} \sum_{\{N_{\mathbf{k}}\}} \prod_{\mathbf{k}} e^{-\beta \varepsilon_{\mathbf{k}} (N_{\mathbf{k}} + \frac{1}{2})} = e^{-\beta \Omega_0} \prod_{\mathbf{k}} e^{-\frac{1}{2} \beta \varepsilon_{\mathbf{k}}} \sum_{N=0}^{\infty} e^{-\beta \varepsilon_{\mathbf{k}} N} \\ &= e^{-\beta \Omega_0} \prod_{\mathbf{k}} e^{-\frac{1}{2} \beta \varepsilon_{\mathbf{k}}} \frac{1}{1 - e^{-\beta \varepsilon_{\mathbf{k}}}} \end{aligned} \quad (2.56)$$

Dalla conoscenza della funzione di partizione segue quella del potenziale gran canonico

$$\Omega = -\frac{1}{\beta} \ln \mathcal{Z} = \Omega_0 + \Omega_g^{(0)} + \Omega_g^{(T)} \quad (2.57)$$

dove

$$\Omega_0 = E_0 - \mu N_0 \quad , \quad \Omega_g^{(0)} = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} \varepsilon_{\mathbf{k}} \quad , \quad \Omega_g^{(T)} = \frac{1}{\beta} \sum_{\mathbf{k}} \ln (1 - e^{-\beta \varepsilon_{\mathbf{k}}}) \quad (2.58)$$

ovvero, dividendo per il volume occupato dal sistema:

$$\boxed{\frac{\Omega(\mu, n_0, T)}{\mathcal{V}} = \left(\frac{1}{2} g n_0^2 - \mu n_0 \right) + \frac{1}{2\mathcal{V}} \sum_{\mathbf{k}} \varepsilon_{\mathbf{k}}(\mu, n_0) + \frac{1}{\beta \mathcal{V}} \sum_{\mathbf{k}} \ln \left(1 - e^{-\beta \varepsilon_{\mathbf{k}}(\mu, n_0)} \right)} \quad (2.59)$$

La (2.59) è l'espressione più generale per il potenziale gran canonico del nostro sistema, perché μ e n_0 sono state mantenute come variabili indipendenti. Come vedremo nella prossima sezione, questo ci servirà per ricavare un'equazione per n in funzione di n_0 e T , da cui segue la stima della frazione condensata. Naturalmente, oltre alla frazione condensata, si può essere interessati a caratterizzare con maggiore completezza la termodinamica del sistema, tramite delle relazioni che consentano di esprimere certe variabili termodinamiche in funzione di altre facilmente controllabili. Come noto, nell'ensemble gran canonico le variabili intensive "di controllo" sono μ e T ; in funzione di esse, e del volume, si possono esprimere l'entropia S , la pressione P e il numero di particelle del sistema. A tale scopo il potenziale gran canonico deve

⁽⁴⁾Supporremo che lo spettro delle eccitazioni elementari sia ancora quello di Bogoliubov, nonostante esso sia stato ricavato nel caso di un condensato puro. Questa è evidentemente un'approssimazione, tanto più valida quanto più grande è la frazione condensata (quanto più bassa è la temperatura).

essere espresso in funzione delle sole variabili (μ, T, \mathcal{V}) ; per farlo introduciamo nella (2.59) la condizione $n_0 = \mu/g$, sicché $\Omega_0 = -\mu^2/2g$ e l'espressione di $\varepsilon_{\mathbf{k}}$ diviene la (2.43).

Il nostro potenziale gran canonico è scomposto nella somma di tre termini. Chiaramente Ω_0 è una quantità finita, e lo stesso vale per $\Omega_g^{(T)}$, come è noto dalla trattazione del gas ideale. Consideriamo invece il termine $\Omega_g^{(0)}$, che nel limite termodinamico si scrive

$$\frac{\Omega_g^{(0)}}{\mathcal{V}} = \frac{1}{2} \frac{4\pi}{(2\pi)^3} \int_0^\infty dk k^2 \sqrt{\frac{\hbar^2 k^2}{2m} \left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m} + 2\mu \right)}$$

È evidente che questo integrale è divergente per grandi k (divergenza ultravioletta). Per poter procedere è necessario regolarizzare l'integrale, cioè riuscire ad estrarre un'informazione finita da una quantità che a rigore sarebbe infinita. Lo facciamo introducendo un *cutoff* ultravioletto Λ al vettore d'onda. La ragione fisica alla base di questa procedura è che a grandi k corrispondono grandi energie, e non ci aspettiamo che la nostra teoria sia adeguata per descrivere processi ad alta energia. In altre parole, le divergenze emergono in una regione in cui il modello non è applicabile; la soluzione è limitarci alle basse energie, tagliando la parte rimanente dello spettro. Limitando l'integrazione all'intervallo $[0, \Lambda]$ si ottiene analiticamente

$$\begin{aligned} \frac{\Omega_g^{(0)}}{\mathcal{V}} &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\Lambda dk k^2 \sqrt{\frac{\hbar^2 k^2}{2m} \left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m} + 2\mu \right)} \\ &= \frac{8}{15\pi^2} \left(\frac{m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \mu^{5/2} + \frac{1}{120\pi^2 \hbar^3 m} (\hbar^2 \Lambda^2 + 4m\mu)^{3/2} (3\hbar^2 \Lambda^2 - 8m\mu) \end{aligned}$$

ed eliminati i termini divergenti nel limite $\Lambda \rightarrow \infty$ rimane

$$\frac{\Omega_g^{(0)}}{\mathcal{V}} = \frac{8}{15\pi^2} \left(\frac{m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \mu^{5/2} \quad (2.60)$$

Allo stesso risultato si può arrivare in modo più rigoroso [A.3], ma in ogni caso questa rappresenta la correzione oltre il campo medio all'energia dello stato fondamentale del sistema. Sostituendo $\mu = gn_0$ e l'espressione di g in termini di a_s tale energia si scrive esplicitamente

$$\frac{E_0}{\mathcal{V}} = \frac{1}{2} gn_0^2 \left[1 + \frac{128}{15\sqrt{\pi}} \left(a_s n_0^{1/3} \right)^{3/2} \right] \quad (2.61)$$

che è il risultato ottenuto originariamente da Lee, Huang e Yang (1957) [11]. In conclusione, il potenziale gran canonico per unità di volume vale

$$\boxed{\frac{\Omega(\mu, T)}{\mathcal{V}} = -\frac{\mu^2}{2g} + \frac{8}{15\pi^2} \left(\frac{m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \mu^{5/2} + \frac{1}{\beta\mathcal{V}} \sum_{\mathbf{k}} \ln \left(1 - e^{-\beta\varepsilon_{\mathbf{k}}(\mu)} \right)} \quad (2.62)$$

Come anticipato, la termodinamica del sistema segue interamente dalla conoscenza del potenziale gran canonico $\Omega(\mu, T, \mathcal{V})$ dato dalla (2.62), perché esso soddisfa per definizione $d\Omega = -S dT - P d\mathcal{V} - N d\mu$. In particolare, l'entropia è

$$S(\mu, T, \mathcal{V}) = - \left(\frac{\partial \Omega}{\partial T} \right)_{\mu, \mathcal{V}} \quad (2.63)$$

mentre la pressione è

$$P(\mu, T, \mathcal{V}) = - \left(\frac{\partial \Omega}{\partial \mathcal{V}} \right)_{\mu, T} = - \frac{\Omega}{\mathcal{V}} \quad (2.64)$$

dove la seconda uguaglianza segue dall'estensività dell'energia (assicurata per un sistema omogeneo dalla sua additività), cioè dal fatto che Ω sia lineare in \mathcal{V} . Infine la densità numerica di particelle è

$$n(\mu, T, \mathcal{V}) = - \frac{1}{\mathcal{V}} \left(\frac{\partial \Omega}{\partial \mu} \right)_{T, \mathcal{V}} \quad (2.65)$$

2.4 Frazione condensata

Passiamo alla stima della frazione condensata. Il punto di partenza sarà la forma generale del potenziale gran canonico (2.59), in cui μ e n_0 sono trattate, almeno inizialmente, come variabili indipendenti, ed $\varepsilon_{\mathbf{k}} = \varepsilon_{\mathbf{k}}(\mu, n_0)$ secondo la (2.42).

Temperatura zero. Iniziamo considerando il caso $T = 0$. Si ha $\Omega_g^{(T)} = 0$ e $\Omega = \Omega_0 + \Omega_g^{(0)}$, dunque

$$n(n_0, T = 0) = -\frac{1}{\mathcal{V}} \frac{\partial \Omega(\mu, n_0, T = 0)}{\partial \mu} \Big|_{\mu=gn_0} = n_0 + n_g^{(0)}(n_0) \quad (2.66)$$

Sottolineiamo il fatto che la sostituzione $\mu = gn_0$ avviene dopo aver calcolato la derivata. Vale quindi

$$\begin{aligned} n_g^{(0)}(n_0) &= -\frac{1}{\mathcal{V}} \frac{\partial \Omega_g^{(0)}(\mu, n_0)}{\partial \mu} \Big|_{\mu=gn_0} = -\frac{1}{2\mathcal{V}} \sum_{\mathbf{k}} \frac{\partial \varepsilon_{\mathbf{k}}(\mu, n_0)}{\partial \mu} \Big|_{\mu=gn_0} \\ &= \frac{1}{2} \frac{4\pi}{(2\pi)^3} \int_0^\infty dk k^2 \frac{\frac{\hbar^2 k^2}{2m} + gn_0}{\varepsilon_{\mathbf{k}}(n_0)} \end{aligned} \quad (2.67)$$

con $\varepsilon_{\mathbf{k}}(n_0)$ data dalla (2.44). Anche questo integrale presenta una divergenza ultravioletta. Introdotto il cutoff ed eseguita la regolarizzazione come prima si ottiene analiticamente

$$n_g^{(0)} = \frac{1}{3\pi^2} \left(\frac{m}{\hbar^2} gn_0 \right)^{3/2} \quad (2.68)$$

da cui segue

$$n = n_0 \left[1 + \frac{8}{3\sqrt{\pi}} \left(a_s n_0^{1/3} \right)^{3/2} \right] \quad (2.69)$$

e per la frazione condensata

$$\frac{8}{3\sqrt{\pi}} \gamma^{3/2} \left(\frac{n_0}{n} \right)^{3/2} + \frac{n_0}{n} = 1 \quad (2.70)$$

dove $\gamma = a_s n^{1/3}$. Risolvendo numericamente questa equazione si vede che nel caso interagente la frazione condensata è diversa da uno anche a temperatura zero (*quantum depletion*), ed è una funzione decrescente del parametro gassoso (nel caso ideale, $a_s = 0$, si ritrova che a temperatura zero il gas è completamente condensato).

Quando il parametro gassoso è molto piccolo la densità condensata è vicina alla densità totale e si può approssimare $(n_0/n)^{3/2} \simeq 1$, ottenendo la *formula di Bogoliubov* [1, 8, 12]

$$\frac{n_0}{n} \simeq 1 - \frac{8}{3\sqrt{\pi}} \left(a_s n^{1/3} \right)^{3/2} \quad (2.71)$$

Simulazioni Monte Carlo mostrano che essa è quantitativamente valida per $a_s^3 n \lesssim 10^{-3}$, mentre per valori superiori del parametro gassoso la quantum depletion a temperatura zero è ben descritta dalla (2.69) [4].

Temperatura finita. A temperatura finita $\Omega = \Omega_0 + \Omega_g^{(0)} + \Omega_g^{(T)}$, dunque

$$n(n_0, T) = -\frac{1}{\mathcal{V}} \frac{\partial \Omega(\mu, n_0, T)}{\partial \mu} \Big|_{\mu=gn_0} = n_0 + n_g^{(0)}(n_0) + n_g^{(T)}(n_0, T) \quad (2.72)$$

dove

$$\begin{aligned} n_g^{(T)}(n_0, T) &= -\frac{1}{\mathcal{V}} \frac{\partial \Omega_g^{(T)}(\mu, n_0, T)}{\partial \mu} \Big|_{\mu=gn_0} = -\frac{1}{\beta\mathcal{V}} \sum_{\mathbf{k}} \frac{\partial}{\partial \mu} \ln(1 - e^{-\beta\varepsilon_{\mathbf{k}}}) \Big|_{\mu=gn_0} \\ &= -\frac{4\pi}{(2\pi)^3} \int_0^\infty dk k^2 \frac{1}{e^{\beta\varepsilon_{\mathbf{k}}} - 1} \frac{\partial \varepsilon_{\mathbf{k}}(\mu, n_0)}{\partial \mu} \Big|_{\mu=gn_0} \\ &= \frac{4\pi}{(2\pi)^3} \int_0^\infty dk k^2 \frac{\frac{\hbar^2 k^2}{2m} + gn_0}{[e^{\beta\varepsilon_{\mathbf{k}}(n_0)} - 1] \varepsilon_{\mathbf{k}}(n_0)} \end{aligned} \quad (2.73)$$

L'equazione per la densità numerica totale di particelle è quindi

$$n(n_0, T) = n_0 \left[1 + \frac{8}{3\sqrt{\pi}} \left(a_s n_0^{1/3} \right)^{3/2} \right] + \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty dk k^2 \frac{\frac{\hbar^2 k^2}{2m} + gn_0}{[e^{\beta \varepsilon_{\mathbf{k}}(n_0)} - 1] \varepsilon_{\mathbf{k}}(n_0)} \quad (2.74)$$

dove l'ultimo integrale sarà in generale calcolato numericamente [8, 22].

Possiamo ricavare due equazioni analitiche che approssimino la (2.74) nei limiti di piccola temperatura o piccolo parametro gassoso. Con il cambio di variabili $x = \beta \varepsilon_{\mathbf{k}}$ l'equazione (2.73) diventa

$$n_g^{(T)} = \frac{4\pi}{(2\pi)^3} \beta \int_0^\infty dx \frac{dk(x)}{dx} \frac{k^2(x)}{(e^x - 1)x} \left(\frac{\hbar^2 k^2(x)}{2m} + gn_0 \right) \quad (2.75)$$

dove

$$k(x) = \sqrt{\frac{2mgn_0}{\hbar^2}} \sqrt{-1 + \sqrt{1 + \frac{(k_B T)^2 x^2}{g^2 n_0^2}}} \quad (2.76)$$

Nel limite $T \rightarrow 0$,

$$k(x) \simeq \sqrt{\frac{m}{gn_0}} \frac{(k_B T)}{\hbar} x \quad (2.77)$$

Si noti che questa stessa espressione per $k(x)$ si ottiene approssimando lo spettro di Bogoliubov con il suo andamento fononico, $\varepsilon_{\mathbf{k}}(n_0) \simeq \sqrt{gn_0/m} (\hbar k)$: *il limite di bassa temperatura è formalmente equivalente a considerare solo il contributo fononico allo spettro delle eccitazioni.* Con $k(x)$ data dalla (2.77) l'equazione (2.75) si calcola analiticamente:

$$n_g^{(T)} = \frac{(k_B T)^2}{12(gn_0)^{1/2}} \left(\frac{m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \left(1 + \frac{\pi^2 (k_B T)^2}{5(gn_0)^2} \right) + o((k_B T)^5) \quad (2.78)$$

Mantenendo solo il termine $\mathcal{O}((k_B T)^2)$ e sostituendo l'espressione di g in termini di a_s si ottiene per $n(n_0, T)$ l'equazione

$$n(n_0, T) = n_0 \left[1 + \frac{8}{3\sqrt{\pi}} \left(a_s n_0^{1/3} \right)^{3/2} \right] + \frac{1}{24\sqrt{\pi}} \frac{(k_B T)^2}{(a_s n_0)^{1/2}} \left(\frac{m}{\hbar^2} \right)^2 \quad (2.79)$$

che approssima la (2.74) nel limite $T \rightarrow 0$ o $\hbar^2 k^2 \ll 4mgn_0$ (cioè $p \ll 2mc_s$) [1].

Nel limite $g \rightarrow 0$

$$\varepsilon_{\mathbf{k}}(n_0) = \sqrt{\frac{\hbar^2 k^2}{2m} \left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m} + 2gn_0 \right)} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + gn_0 + \mathcal{O}(g^2) \quad (2.80)$$

e l'equazione (2.73) diventa

$$n_g^{(T)} = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty dk k^2 \frac{1}{e^{\beta \left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m} + gn_0 \right)} - 1} = \text{Li}_{3/2} \left(e^{-\beta gn_0} \right) \left(\frac{m}{2\pi \hbar^2} \right)^{3/2} (k_B T)^{3/2} \quad (2.81)$$

da cui segue l'equazione per $n(n_0, T)$

$$n(n_0, T) = n_0 \left[1 + \frac{8}{3\sqrt{\pi}} \left(a_s n_0^{1/3} \right)^{3/2} \right] + \text{Li}_{3/2} \left(e^{-\beta gn_0} \right) \left(\frac{m}{2\pi \hbar^2} \right)^{3/2} (k_B T)^{3/2} \quad (2.82)$$

che approssima la (2.74) nel limite $g \rightarrow 0$.

Quest'ultima equazione ci consente di mettere in luce alcuni fatti importanti:

- Per $g = a_s = 0$, $\text{Li}_{3/2} \left(e^{-\beta gn_0} \right) = \text{Li}_{3/2}(1) = \zeta(3/2)$ e si riottiene il risultato previsto per il gas ideale, dato dalla (2.12). D'altra parte, si vede direttamente sostituendo $g = a_s = 0$ nella (2.74) che essa diventa

$$n = n_0 + \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{1}{e^{\beta \varepsilon_{\mathbf{k}}} - 1} d^3 \mathbf{k}$$

con $\varepsilon_{\mathbf{k}} = \hbar^2 k^2 / 2m$, che è esattamente l'equazione che abbiamo utilizzato per calcolare la frazione condensata del gas ideale.

- Per $g \rightarrow 0$ la frazione condensata tende al valore finito previsto per il gas ideale (alla temperatura considerata) con derivata prima infinita. Infatti,

$$\frac{d}{dg} \left[\frac{n_0}{n}(g) \right] = -\frac{n_0}{n^2(g)} \frac{dn(g)}{dg} \underset{g \rightarrow 0}{\simeq} -\frac{n_0}{n^2(g)} \left[q_1 \frac{d}{dg} \text{Li}_{3/2}(e^{-\beta g n_0}) + q_2 g^{1/2} \right]$$

dove q_1 e q_2 sono dei fattori indipendenti da g . Ricordando la proprietà della funzione polilogaritmo $\frac{d}{dz} \text{Li}_\alpha(z) = z^{-1} \text{Li}_{\alpha-1}(z)$ si ha che

$$\frac{d}{dg} \text{Li}_{3/2}(e^{-\beta g n_0}) = -\beta n_0 \text{Li}_{1/2}(e^{-\beta g n_0}) \xrightarrow{g \rightarrow 0} -\infty$$

e dunque

$$\lim_{g \rightarrow 0} \frac{d}{dg} \left[\frac{n_0}{n}(g) \right] = +\infty$$

Poiché per g grande n_0/n decresce monotonicamente, il fatto che per g molto piccoli n_0/n sia crescente in g implica che *la frazione condensata abbia un massimo globale in corrispondenza di un valore piccolo ma finito del parametro gassoso*.

Migliore approssimazione a temperatura finita. È bene valutare l'impatto che l'aver approssimato lo spettro delle eccitazioni elementari con lo spettro di Bogoliubov ha sui nostri risultati a temperatura finita. Come si è già osservato, c'è da aspettarsi che tale approssimazione diventi via via meno buona al decrescere della frazione condensata, cioè al crescere della temperatura, visto che lo spettro di Bogoliubov è stato ricavato nel caso di un condensato puro. In particolare, possiamo chiederci quale sia la temperatura critica di condensazione di Bose-Einstein T_c prevista dalla (2.74). Ponendo $n_0 = 0$ si ottiene

$$n(T_c) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{1}{e^{\varepsilon_{\mathbf{k}}/k_B T_c} - 1} d^3 \mathbf{k}$$

con $\varepsilon_{\mathbf{k}} = \hbar^2 k^2 / 2m$, che dà, fissata n , esattamente il valore di T_c previsto per il gas ideale. Vi è invece generale consenso sul fatto che l'interazione abbia qualche effetto anche sulla temperatura critica di condensazione [6].

La questione è affrontata in [8], dove si dimostra con tecniche avanzate (Teoria Perturbativa Variazionale) che l'equazione ottimale (in un certo senso) per $n = n(n_0, T)$ è

$$n(n_0, T) = n_0 + \frac{8}{3\sqrt{\pi}} n (a_s n^{1/3})^{3/2} + \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty dk k^2 \frac{\frac{\hbar^2 k^2}{2m} + gn}{[e^{\beta \varepsilon_{\mathbf{k}}(n)} - 1] \varepsilon_{\mathbf{k}}(n)} \quad (2.83)$$

dove

$$\varepsilon_{\mathbf{k}}(n) = \sqrt{\frac{\hbar^2 k^2}{2m} \left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m} + 2gn \right)} \quad (2.84)$$

La (2.74) è da considerarsi come approssimazione per $n_0 \simeq n$ della (2.83), che invece è valida anche per $n_0 \ll n$ (cioè ad alta temperatura). La differenza tra le due sta, in pratica, nella sostituzione di n_0 con n nelle equazioni (2.67) e (2.73) per $n_g^{(0)}$ e $n_g^{(T)}$. Le considerazioni riguardo gli andamenti asintotici della (2.74) si applicano quindi anche alla (2.83):

$$n(n_0, T) = n_0 + \frac{8}{3\sqrt{\pi}} n (a_s n)^{3/2} + \frac{1}{24\sqrt{\pi}} \frac{(k_B T)^2}{(a_s n)^{1/2}} \left(\frac{m}{\hbar^2} \right)^2 \quad (2.85)$$

la approssima nel limite $T \rightarrow 0$ o $\hbar^2 k^2 \ll 4mgn$ (cioè $p \ll 2mc_s$), mentre

$$n(n_0, T) = n_0 + \frac{8}{3\sqrt{\pi}} n (a_s n^{1/3})^{3/2} + \text{Li}_{3/2}(e^{-\beta gn}) \left(\frac{m}{2\pi \hbar^2} \right)^{3/2} (k_B T)^{3/2} \quad (2.86)$$

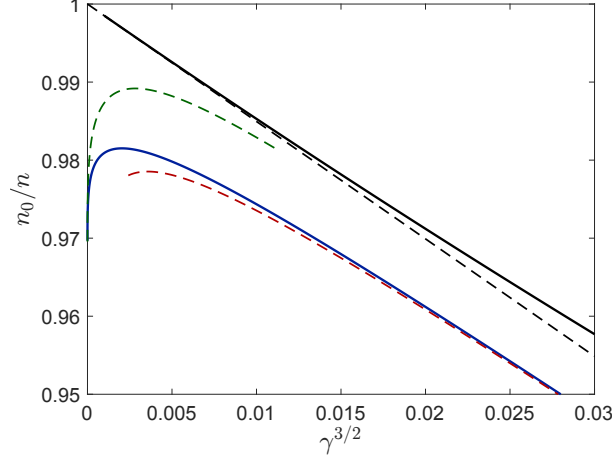


Figura 2: Andamento della frazione condensata in funzione di $\gamma^{3/2} = \sqrt{a_s^3 n}$. In nero i risultati a $T = 0$: in linea continua il risultato ottenuto dalla (2.69); in linea tratteggiata la formula di Bogoliubov (2.71). In blu il risultato della (2.83) a $T = 2$ nK. In rosso e in verde, rispettivamente, le approssimazioni analitiche (2.85) e (2.86) alla stessa temperatura.

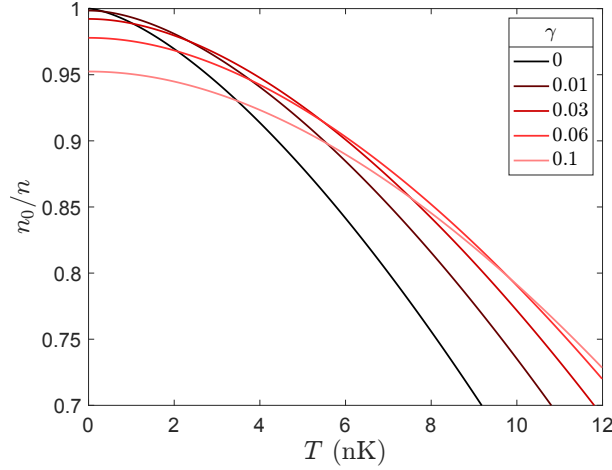


Figura 3: Andamento della frazione condensata in funzione della temperatura.

la approssima nel limite $g \rightarrow 0$. Per $g = a_s = 0$ si riottiene il risultato per il gas ideale e per $g \rightarrow 0$ la frazione condensata tende al valore finito previsto per il gas ideale (alla temperatura considerata) con derivata prima infinita. In particolare la frazione condensata ha un massimo globale in corrispondenza di un valore piccolo ma finito del parametro gassoso.

Applicheremo ora l'equazione (2.83) nel caso realistico di un gas omogeneo di potassio-39 ($m = 6.48 \times 10^{-23}$ g) di densità $n = 3.5 \times 10^{11}$ cm $^{-3}$. In Figura 2 è illustrato l'andamento della frazione condensata in funzione di $\gamma^{3/2}$ a temperatura fissata⁽⁵⁾, mentre in Figura 3 è illustrato l'andamento della frazione condensata in funzione della temperatura per diversi valori del parametro gassoso.

La temperatura critica di condensazione di Bose-Einstein per un gas ideale ($\gamma = 0$) di potassio-39 di densità $n = 3.5 \times 10^{11}$ cm $^{-3}$ è, secondo la (2.10), $T_c \simeq 20.48$ nK. Continuando la curva nera di Figura 3, che corrisponde a $\gamma = 0$, si otterrebbe che essa interseca $n_0/n = 0$ esattamente a tale temperatura. Al crescere del parametro gassoso, vediamo che n_0/n decresce sempre più lentamente con T , perciò per $T \rightarrow T_c$ la frazione condensata residua sarà tanto

⁽⁵⁾È comodo considerare come variabile indipendente la potenza 3/2 del parametro gassoso perché così facendo la frazione condensata a $T = 0$ prevista dalla formula di Bogoliubov è rappresentata da una retta.

più grande quanto più grande è il parametro gassoso. Ne segue che *la temperatura critica di condensazione di Bose-Einstein per un gas debolmente interagente cresce al crescere del parametro gassoso*. Risolvendo numericamente la (2.83) per $n_0 = 0$, al variare del parametro gassoso, troviamo che lo shift di T_c è proporzionale alla radice quadrata del parametro gassoso:

$$T_c = T_c^{(0)} + C\sqrt{a_s n^{1/3}} \quad (2.87)$$

dove $T_c^{(0)}$ è la temperatura critica del gas ideale e C è una costante. In effetti, si può provare analiticamente che le equazioni (2.83)-(2.84) prevedono per lo shift di T_c [8]

$$\frac{\Delta T_c}{T_c^{(0)}} = \frac{4\sqrt{2\pi}}{3\zeta(3/2)^{2/3}} \sqrt{a_s n^{1/3}} + \mathcal{O}(a_s n^{1/3}) \simeq 1.762\sqrt{a_s n^{1/3}} \quad (2.88)$$

Questo risultato tuttavia non è corretto (prova che neanche la (2.83) è adeguata per descrivere cosa accade in prossimità di T_c). Il problema del calcolo teorico di ΔT_c , con metodi decisamente più avanzati, ha attratto numerosi sforzi a partire dagli anni '90 e si è rivelato particolarmente difficile, tant'è che sono stati necessari diversi decenni per raggiungere un consenso sul risultato. Oggi è generalmente accettato che lo shift sia lineare nel parametro gassoso [6]:

$$\frac{\Delta T_c}{T_c^{(0)}} = C_0 a_s n^{1/3}, \quad \text{con } C_0 = 1.29 \pm 0.05 \quad (2.89)$$

3 Superfluidità

Come anticipato nell'Introduzione, il fenomeno della superfluidità è stato scoperto come una fase dell'elio-4 al di sotto del cosiddetto λ -point = 2.17 K (Kapitza, Allen e Misener, 1938). Il termine "superfluidità" non si riferisce ad una singola proprietà del sistema, ma è usato per denotare una varietà di fenomeni. Tra questi, quelli che evidenziano più chiaramente la differenza tra un sistema normale e un sistema superfluido sono quelli legati al flusso, cioè al moto di tali fluidi. A temperatura zero, le caratteristiche fondamentali del flusso superfluido sono le seguenti [13, 16, 17]:

1. *Il flusso superfluido è irrotazionale.* Nel linguaggio del modello a due fluidi, che definiremo più precisamente nella prossima sezione, questa proprietà è espressa dall'equazione

$$\nabla \times \mathbf{v}_s = \mathbf{0} \quad (3.1)$$

dove \mathbf{v}_s è la velocità superfluida. Ne segue che un superfluido non può ruotare come un liquido normale. Ad esempio, se un liquido normale è contenuto in un recipiente e quest'ultimo viene messo in rotazione con velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$, all'equilibrio il liquido sarà trascinato dalle pareti e si troverà anch'esso in rotazione con la stessa velocità angolare. La velocità in un punto del liquido sarà allora $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$, dove \mathbf{r} è il vettore posizione dall'asse di rotazione. In particolare, la *vorticità* $\nabla \times \mathbf{v}$ sarà $\nabla \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = 2\boldsymbol{\omega}$. Ciò non accade nel caso di un superfluido: per velocità angolari sufficientemente piccole, esso non risponde alla rotazione del recipiente e rimane in quiete. Si noti che questo fenomeno è l'analogo dell'effetto Meissner nei superconduttori (in effetti, da un punto di vista moderno, la superconduttività non è altro che la superfluidità di un sistema di cariche).

2. *Il superfluido ha viscosità zero.* Quando un superfluido scorre attraverso un capillare sottile il suo flusso non è rallentato dalle pareti e persiste anche in assenza di una differenza di pressione agli estremi del capillare.

L'assenza di viscosità osservata nell'elio-4 superfluido fu spiegata da Landau, il quale mostrò, come vedremo nella prossima sezione, che se lo spettro delle eccitazioni elementari ha certe caratteristiche il moto del fluido a velocità sufficientemente basse non può dare luogo a dissipazione. L'irrotazionalità, invece, è direttamente legata alla condensazione di Bose-Einstein. Tuttavia, la relazione tra la condensazione di Bose-Einstein e superfluidità è sottile.

In particolare, la frazione condensata non si può, in generale, identificare con la frazione superfluida. Ad esempio, nel caso dell'elio-4 a $T \simeq 0$ si ritiene che la frazione superfluida sia prossima a 1 mentre la frazione condensata sia solo intorno al 10%. Anche nel caso del gas di bosoni debolmente interagenti, vedremo che la frazione superfluida è 1 per $T = 0$, mentre la frazione condensata è inferiore a 1 per via della quantum depletion. Inoltre, un BEC non è necessariamente superfluido: un esempio che discuteremo è il gas Bose ideale, il quale non può sostenere un moto superfluido ad alcuna velocità, per quanto piccola sia la temperatura. Infine, vi sono importanti aspetti *dimensionali*: in dimensione $D < 3$ alcuni sistemi possono mostrare un comportamento superfluido in assenza di un vero condensato.

3.1 Teoria di Landau

In questa sezione riproduciamo la teoria di Landau così come presentata in [10, 16].

Un criterio per il moto superfluido. Consideriamo dapprima un fluido omogeneo a temperatura zero, passante attraverso un capillare a velocità costante \mathbf{v} , misurata nel sistema di riferimento \mathcal{K}' del laboratorio, dove il capillare è in quiete. Se il fluido fosse viscoso, l'attrito con le pareti del capillare e all'interno del fluido stesso porterebbe ad una progressiva dissipazione dell'energia cinetica in calore, cioè al rallentamento del flusso. La stessa situazione si può descrivere nel sistema di riferimento \mathcal{K} inizialmente solidale al fluido, dove quest'ultimo è in quiete mentre le pareti del capillare si muovono con velocità $-\mathbf{v}$. In questo riferimento, in presenza di viscosità si vedrebbe il fluido cominciare a muoversi nello stesso verso del capillare. È chiaro che il trascinarsi del fluido da parte delle pareti non implica il movimento del fluido come un corpo rigido; la comparsa del moto deve iniziare da un'eccitazione graduale. Supporremo quindi che i processi dissipativi legati alla viscosità abbiano luogo tramite la creazione di eccitazioni elementari nel fluido.

Supponiamo che una singola eccitazione con momento \mathbf{p} ed energia $\varepsilon(p)$ nel riferimento \mathcal{K} compaia nel fluido. L'energia della stessa eccitazione in \mathcal{K}' , le cui coordinate sono legate a quelle di \mathcal{K} da una trasformazione di Galileo, è [A.5]

$$\varepsilon' = \varepsilon(p) + \mathbf{p} \cdot \mathbf{v} \quad (3.2)$$

perciò \mathbf{p} e $\varepsilon(p) + \mathbf{p} \cdot \mathbf{v}$ sono rispettivamente le variazioni in momento ed in energia del fluido dovuti alla comparsa dell'eccitazione, calcolate nel riferimento \mathcal{K}' . Questa variazione di energia deve essere negativa se l'effetto della viscosità è dissipativo: $\varepsilon(p) + \mathbf{p} \cdot \mathbf{v} < 0$. Per un dato p , la grandezza a primo membro assume valore minimo quando \mathbf{p} e \mathbf{v} sono antiparalleli; perciò in ogni caso si deve avere $\varepsilon(p) - pv < 0$. Tale disuguaglianza è verificata per almeno qualche valore di p se

$$v > v_c \equiv \min_p \frac{\varepsilon(p)}{p} \quad (3.3)$$

Ciò significa che se la *velocità critica* v_c è diversa da zero, per valori di v sufficientemente piccoli nel fluido non compariranno eccitazioni. Il *criterio di Landau* per la superfluidità è quindi

$$\boxed{v < v_c} \quad (3.4)$$

e garantisce che se la velocità relativa tra il fluido e il capillare è inferiore al valore critico si avrà un flusso senza viscosità.

Geometricamente il rapporto ε/p corrisponde al coefficiente angolare della retta passante per l'origine e per il punto di coordinate (p, ε) . Questo rapporto assume il valore minimo quando tale retta è tangente alla curva $\varepsilon = \varepsilon(p)$ nel punto con minore ε in cui ciò possa avvenire⁽⁶⁾. Perciò la superfluidità è possibile in qualche regime di velocità purché la funzione $\varepsilon = \varepsilon(p)$ non sia tangente all'asse delle ascisse in qualche punto.

⁽⁶⁾Stiamo affermando che fissato \tilde{p} tale che $\varepsilon(\tilde{p})/\tilde{p} = d\varepsilon(\tilde{p})/d\tilde{p}$ e non si possa avere $d\varepsilon(p)/dp < \varepsilon(\tilde{p})/\tilde{p}$ per alcun valore di p mantenendo soddisfatta la condizione di tangenza, allora $\varepsilon(p)/p \geq \varepsilon(\tilde{p})/\tilde{p}$ per ogni p . Questo è del tutto evidente una volta osservato che la funzione $f(p) = \varepsilon(p)/p$ ha un estremo locale se $\varepsilon(p)/p = d\varepsilon(p)/dp$: infatti $df/dp = [(d\varepsilon(p)/dp)p - \varepsilon(p)]/p^2 = 0$ se $\varepsilon(p)/p = d\varepsilon(p)/dp$.

Modello a due fluidi. Passiamo ora a considerare lo stesso fluido a temperatura finita, seppur piccola. In questo caso il fluido non si trova più nel suo stato fondamentale e contiene delle eccitazioni. I ragionamenti della sezione precedente restano comunque validi, poiché in essi non si è tenuto conto del fatto che il fluido si trovasse inizialmente nello fondamentale: se la condizione (3.4) è soddisfatta, il moto del fluido relativamente alle pareti del capillare non potrà portare alla comparsa di nuove eccitazioni elementari. Supponendo soddisfatta tale condizione, rimane da chiarire l'effetto delle eccitazioni già presenti. In questo senso, assumeremo che le proprietà termodinamiche del fluido siano equivalenti a quelle del gas di eccitazioni non interagenti (quasi particelle) in equilibrio termico; in altri termini, che la differenza nelle proprietà del fluido a temperatura zero e a temperatura finita segua solamente dalla presenza delle quasi particelle di eccitazione termica.

Le quasi particelle possono muoversi, ma il loro moto non è superfluido, perché nulla impedisce loro di urtare contro le pareti del capillare scambiando momento ed energia, e a causa di queste collisioni possono essere create nuove eccitazioni nel fluido, il cui movimento mostrerà allora dissipazione. Le collisioni stabiliscono l'equilibrio termodinamico tra il gas di quasi particelle e le pareti del capillare. All'equilibrio il numero di quasi particelle con una certa energia ε'' nel riferimento \mathcal{K}'' solidale al centro di massa del gas di quasi particelle seguirà la distribuzione

$$N(\varepsilon'') = \frac{1}{e^{\beta\varepsilon''} - 1} \quad (3.5)$$

con il potenziale chimico zero. Lo stesso ragionamento della sezione precedente ci porta ad affermare che se l'energia delle quasi particelle è $\varepsilon(p)$ nel riferimento \mathcal{K} solidale al superfluido, nel riferimento \mathcal{K}'' essa è $\varepsilon(p) + \mathbf{p} \cdot (\mathbf{v}_s - \mathbf{v}_n)$, dove $\mathbf{v}_s - \mathbf{v}_n$ è la velocità del superfluido rispetto al gas di quasi particelle, essendo rispettivamente \mathbf{v}_s e \mathbf{v}_n le velocità di traslazione del superfluido e del gas rispetto al capillare. L'equazione precedente diviene quindi

$$N_{\mathbf{p}} = \frac{1}{e^{\beta[\varepsilon(p) + \mathbf{p} \cdot (\mathbf{v}_s - \mathbf{v}_n)]} - 1} \quad (3.6)$$

L'esistenza di un equilibrio termodinamico caratterizzato dal movimento della parte superfluida e dalla parte normale del fluido “l'una attraverso l'altra”, come descritto da questa equazione, implica che questo movimento non è accompagnato da attrito, cioè dallo scambio di impulso tra le due parti. Questo è consistente con il criterio di Landau, dal momento che $N_{\mathbf{p}}$ è positiva per ogni valore di \mathbf{p} solo se $|\mathbf{v}_s - \mathbf{v}_n|$ è minore della velocità critica.

Secondo questa descrizione, a temperatura finita, se un fluido è in moto all'interno di un capillare con velocità inferiore alla velocità critica, cioè soddisfa il criterio di Landau, si può considerare composto da due componenti: una *componente normale*, costituita dalle quasi particelle già presenti a causa dell'eccitazione termica, che si comporta come un normale fluido viscoso, e una *componente superfluida*, che scorre senza viscosità e con velocità irrotazionale⁽⁷⁾. Dal punto di vista idrodinamico, la densità del fluido si può rappresentare come la somma $\rho = \rho_n + \rho_s$ delle componenti normale e superfluida, aventi velocità \mathbf{v}_n e \mathbf{v}_s rispettivamente, e il momento per unità di volume prende la forma

$$\mathbf{J} = \rho_n \mathbf{v}_n + \rho_s \mathbf{v}_s \quad (3.7)$$

Al passare del tempo, \mathbf{v}_n tende a zero, poiché la componente normale (viscosa) rimane “attaccata” alle pareti del capillare. La densità di momento diviene allora $\mathbf{J} = \rho_s \mathbf{v}_s$, mentre a temperatura zero si avrebbe avuto $\mathbf{J} = \rho \mathbf{v}_s > \rho_s \mathbf{v}_s$. Vediamo quindi che l'effetto delle quasi particelle termiche è di ridurre la “forza” del flusso superfluido.

Frazione superfluida. L'equazione (3.7) permette di scrivere esplicitamente la frazione superfluida ρ_s/ρ di un fluido che soddisfi il criterio di Landau come un funzionale del suo spettro

⁽⁷⁾ Questa descrizione non deve indurre a pensare che il fluido sia una miscela di due componenti fisicamente separabili. Il significato delle due componenti è piuttosto che nel fluido possono prodursi contemporaneamente due moti: uno normale, nel senso che presenta le stesse proprietà del moto di un fluido viscoso, e che riguarda una frazione ρ_n/ρ delle particelle, e l'altro superfluido, che ne riguarda una frazione ρ_s/ρ .

delle eccitazioni elementari. Poniamoci nel riferimento \mathcal{K} in cui il superfluido è in quiete, cioè $\mathbf{v}_s = \mathbf{0}$. Il momento totale del fluido in questo riferimento è $\sum_{\mathbf{p}} N_{\mathbf{p}} \mathbf{p}$, dove la somma è estesa a tutti i momenti posseduti dalle eccitazioni elementari. Nel limite termodinamico $\sum_{\mathbf{p}} \rightarrow \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} \int d^3\mathbf{p}$, sicché il momento totale per unità di volume si scrive

$$\mathbf{J} = \rho_n \mathbf{v}_n = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int N_{\mathbf{p}} \mathbf{p} d^3\mathbf{p} = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int \frac{\mathbf{p}}{e^{\beta[\varepsilon(p) - \mathbf{p} \cdot \mathbf{v}_n]} - 1} d^3\mathbf{p} \quad (3.8)$$

avendo sostituito a $N_{\mathbf{p}}$ l'espressione (3.6). Assumiamo ora che \mathbf{v}_n sia piccola ed espandiamo l'integrando in serie di potenze di \mathbf{v}_n :

$$\frac{1}{e^{\beta[\varepsilon(p) - \mathbf{p} \cdot \mathbf{v}_n]} - 1} = \frac{1}{e^{\beta\varepsilon(p)} - 1} + \frac{\beta e^{\beta\varepsilon(p)} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{v}_n)}{(e^{\beta\varepsilon(p)} - 1)^2} + \mathcal{O}(|\mathbf{v}_n|^2)$$

Il termine di ordine zero dà contributo nullo grazie alla simmetria del dominio di integrazione:

$$\int \frac{\mathbf{p}}{e^{\beta\varepsilon(p)} - 1} d^3\mathbf{p} = \mathbf{0}$$

Il termine di ordine uno dà invece

$$\rho_n \mathbf{v}_n = \frac{\beta}{(2\pi\hbar)^3} \int \mathbf{p} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{v}_n) \frac{e^{\beta\varepsilon(p)}}{(e^{\beta\varepsilon(p)} - 1)^2} d^3\mathbf{p}$$

da cui segue [A.6]

$$\rho_n = \frac{\beta}{3(2\pi\hbar)^3} \int \frac{e^{\beta\varepsilon(p)}}{(e^{\beta\varepsilon(p)} - 1)^2} p^2 d^3\mathbf{p} \quad (3.9)$$

Ricordando che $\rho_s = \rho - \rho_n$, e quindi $\rho_s/\rho = 1 - \rho_n/\rho$, otteniamo infine l'equazione per la frazione superfluida di un generico fluido che soddisfi il criterio di Landau:

$$\boxed{\frac{\rho_s}{\rho} = 1 - \frac{\beta}{3\rho(2\pi\hbar)^3} \int \frac{e^{\beta\varepsilon(p)}}{(e^{\beta\varepsilon(p)} - 1)^2} p^2 d^3\mathbf{p}} \quad (3.10)$$

Questo è il risultato centrale della teoria di Landau. Si tenga presente che esso ha significato solo se le eccitazioni elementari sono ben definite e non interagenti, condizione che è in genere soddisfatta in sistemi omogenei a temperature sufficientemente piccole, mentre è violata a temperature più elevate. Anche a basse temperature, comunque, l'equazione non è applicabile in qualsiasi situazione; ad esempio, in presenza di disordine il concetto di eccitazione elementare non è ben definito e la frazione superfluida andrebbe calcolata seguendo altri metodi.

Al crescere della temperatura una frazione sempre maggiore del fluido diventa normale. Alla *temperatura critica* T_s , in cui si raggiunge $\rho_n = \rho$, la proprietà di superfluidità scompare completamente. A rigore, l'equazione (3.10) non è applicabile in prossimità di T_s , dove le eccitazioni sono numerose e interagiscono tra loro.

3.2 Superfluidità del gas di bosoni diluito

Dallo spettro di Bogoliubov (2.45) si conclude facilmente che il gas di bosoni debolmente interagenti soddisfa il criterio di Landau per la superfluidità e che la velocità critica è data dalla velocità del suono:

$$v_c = \min_p \frac{\varepsilon(p)}{p} = \min_p \sqrt{\frac{1}{2m} \left(\frac{p^2}{2m} + 2mc_s^2 \right)} = c_s \quad (3.11)$$

Si noti invece che per il gas ideale, per il quale $\varepsilon(p) = p^2/2m$, la velocità critica è $v_c = 0$. Ciò implica che esso non possa sostenere un moto superfluido ad alcuna velocità.

Formulazione idrodinamica dell'equazione di Gross-Pitaevskii. Riguardo la relazione tra condensazione di Bose-Einstein e superfluidità, vedremo ora come la GP si possa esprimere in modo naturale come una coppia di equazioni idrodinamiche per un fluido inviscido, con flusso irrotazionale e una peculiare condizione quantistica sul campo di velocità. Definendo i campi scalari reali $n(\mathbf{r}, t)$ e $\theta(\mathbf{r}, t)$ tali che $n(\mathbf{r}, t)$ sia la densità numerica di particelle e $\theta(\mathbf{r}, t) = \theta(\mathbf{r}, t) + 2\kappa\pi$, $\kappa \in \mathbb{Z}$, la funzione d'onda di particella singola $\psi(\mathbf{r}, t)$ si può esprimere nella forma polare

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \sqrt{\frac{n(\mathbf{r}, t)}{N}} e^{i\theta(\mathbf{r}, t)} \quad (3.12)$$

(Si noti che in questo contesto stiamo considerando un condensato puro, perciò n rappresenta la densità condensata). Scritta in questo modo, ψ mantiene sia la corretta normalizzazione che il proprio significato fisico, infatti $\int d^3\mathbf{r} |\psi(\mathbf{r}, t)|^2 = (1/N) \int d^3\mathbf{r} n(\mathbf{r}, t) = 1$ e $|\psi(\mathbf{r}, t)|^2 = n(\mathbf{r}, t)/N$ rappresenta la densità di probabilità di trovare una particella in un intorno di \mathbf{r} al tempo t .

Se moltiplichiamo la GP (2.31) per $\psi^*(\mathbf{r}, t)$ e sottraiamo all'equazione risultante la propria complessa coniugata otteniamo

$$\frac{\partial}{\partial t} |\psi(\mathbf{r}, t)|^2 + \nabla \cdot \left[\frac{\hbar}{2im} (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*) \right] = 0 \quad (3.13)$$

Questa equazione esprime la conservazione locale della probabilità ed ha la stessa forma che si ottiene per l'equazione di Schrödinger lineare:

$$\frac{\partial}{\partial t} |\psi(\mathbf{r}, t)|^2 + \nabla \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (3.14)$$

dove $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ è la densità di corrente di probabilità. Nel nostro caso, usando la (3.12),

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \frac{\hbar}{2im} [\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*] = \frac{\hbar}{m} \frac{n(\mathbf{r}, t)}{N} \nabla \theta(\mathbf{r}, t) \quad (3.15)$$

ha le dimensioni di una velocità per unità di volume e si può esprimere consistentemente come

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \frac{n(\mathbf{r}, t)}{N} \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = |\psi(\mathbf{r}, t)|^2 \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) \quad (3.16)$$

identificando il campo di velocità delle particelle con

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = \frac{\hbar}{m} \nabla \theta(\mathbf{r}, t) \quad (3.17)$$

Le equazioni idrodinamiche di un fluido ideale soggetto ad un potenziale esterno $U(\mathbf{r})$ sono

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot (n\mathbf{v}) = 0 \quad (3.18)$$

$$m \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + m(\nabla \times \mathbf{v}) \times \mathbf{v} + \frac{m}{2} \nabla v^2 + \nabla U + \frac{\nabla P}{n} = \mathbf{0} \quad (3.19)$$

dove P è la pressione del fluido. La prima è l'equazione di continuità che esprime la conservazione del numero di particelle, mentre la seconda è l'equazione di Eulero [3]. Sostituendo (3.12) e (3.17) nella GP (2.31) si ottiene una formulazione alternativa ed equivalente della GP, nella stessa forma di queste equazioni idrodinamiche [A.4]:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot (n\mathbf{v}) = 0 \quad (3.20)$$

$$m \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{m}{2} \nabla v^2 + \nabla U + \nabla \left[g \left(1 - \frac{1}{N} \right) n - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\nabla^2 \sqrt{n}}{\sqrt{n}} \right] = \mathbf{0} \quad (3.21)$$

Come sappiamo, $g(1 - \frac{1}{N})n$ corrisponde al potenziale chimico del condensato uniforme. A temperatura costante, le variazioni del potenziale chimico sono legate alle variazioni di pressione dalla relazione di Gibbs-Duhem $dP = n d\mu$ [5], un risultato che si conferma facilmente per il caso del gas di bosoni uniforme, dato che $\mu = gn$ e $P = -\partial E/\partial \mathcal{V} = n^2 g/2$. Perciò l'equazione (3.21) si scrive anche

$$m \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{m}{2} \nabla v^2 + \nabla U + \frac{\nabla P_u}{n} - \frac{\hbar^2}{2m} \nabla \left(\frac{\nabla^2 \sqrt{n}}{\sqrt{n}} \right) = \mathbf{0} \quad (3.22)$$

dove P_u è la pressione del condensato uniforme. Vediamo che le equazioni (3.22) e (3.19) sono identiche se: (i) $\nabla \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$, ma questa condizione è soddisfatta per definizione dal campo di velocità (3.17); (ii) la pressione del fluido si identifica con la pressione del condensato uniforme più un termine di *quantum pressure* che rappresenta una forza dovuta alle variazioni spaziali del modulo della funzione d'onda ψ .

Le (3.20)-(3.21) descrivono perciò la dinamica di un fluido irrotazionale e inviscido: il condensato ha le proprietà di un superfluido. Il carattere quantistico di questo fluido si manifesta nel termine di quantum pressure ma anche nel campo di velocità $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$, che soddisfa la condizione di quantizzazione di Onsager-Feynman:

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \frac{\hbar}{m} \oint_{\mathcal{C}} \nabla \theta \cdot d\mathbf{r} = \frac{\hbar}{m} \oint_{\mathcal{C}} d\theta = \frac{\hbar}{m} 2\kappa\pi = \kappa \frac{h}{m} \quad (3.23)$$

con $\kappa = 0, 1, 2, \dots$ per ogni circuito \mathcal{C} . Il fatto che \mathbf{v} sia per definizione irrotazionale ma che la sua circuitazione non sia sempre zero, bensì quantizzata in unità di h/m (il suo valore dipende in generale dal circuito scelto, ma è invariante per omotopie di circuiti perché \mathbf{v} è irrotazionale) ha una chiara conseguenza sulla topologia dello spazio \mathcal{X} in cui è definito il campo di velocità: in generale, esso non è semplicemente connesso. I difetti topologici di questo spazio, ovvero i punti dove \mathbf{v} è fondamentalmente mal definita, sono dei *vortici*, attorno ai quali la velocità tangenziale è $v \sim 1/r$. In $3D$ si hanno filamenti di vortici senza estremi nella parte interna di \mathcal{X} : esse formano circuiti chiusi o hanno gli estremi sul bordo di \mathcal{X} . In $2D$ un vortice è una singolarità puntiforme.

Tutto ciò mostra come la proporzionalità della velocità superfluida al gradiente della fase della funzione d'onda del condensato rappresenti la relazione chiave per comprendere il legame tra BEC e superfluidità.

3.3 Frazione superfluida del gas di bosoni diluito

Applicheremo ora i risultati della teoria di Landau al gas omogeneo di bosoni debolmente interagenti per ricavare esplicitamente un'equazione per la frazione superfluida. Useremo la versione "migliorata" dello spettro delle eccitazioni, data dalla (2.84), in cui compare la densità totale n al posto della densità condensata n_0 . Così facendo, la frazione superfluida non risulta dipendente dalla densità condensata. La densità normale n_n è, adattando la (3.9),

$$n_n = \frac{\beta \hbar^2}{3m(2\pi)^3} \int \frac{e^{\beta \varepsilon_{\mathbf{k}}(n)}}{(e^{\beta \varepsilon_{\mathbf{k}}(n)} - 1)^2} k^2 d^3 \mathbf{k} \quad (3.24)$$

da cui segue la frazione superfluida

$$\boxed{\frac{n_s}{n} = 1 - \frac{\beta \hbar^2}{3mn(2\pi)^3} \int \frac{e^{\beta \varepsilon_{\mathbf{k}}(n)}}{(e^{\beta \varepsilon_{\mathbf{k}}(n)} - 1)^2} k^2 d^3 \mathbf{k}} \quad (3.25)$$

dove l'integrale sarà in generale calcolato numericamente.

Similmente a quanto visto per la frazione condensata, possiamo ricavare un'equazione analitica che approssimi la (3.25) nel limite di piccola temperatura. Con il cambio di variabili $x = \beta \varepsilon_{\mathbf{k}}$ l'equazione (3.24) diventa

$$n_n = \frac{\beta \hbar^2 (4\pi)}{3m(2\pi)^3} \int_0^\infty dx \frac{dk(x)}{dx} \frac{e^x}{(e^x - 1)^2} k^4(x) \quad (3.26)$$

con $k(x)$ data dalla (2.76). Nel limite $T \rightarrow 0$, $k(x) \simeq \sqrt{\frac{m}{gn}} \frac{(k_B T)}{\hbar} x$ e si ottiene

$$n_n = \frac{2\pi^2}{45} \left(\frac{m}{\hbar^2}\right)^{3/2} \frac{(k_B T)^4}{(gn)^{5/2}} + o((k_B T)^5) \quad (3.27)$$

Sostituendo $c_s = \sqrt{gn/m}$ quest'ultima equazione si riduce a

$$\rho_n = mn_n = \frac{2\pi^2}{45\hbar^3} \frac{(k_B T)^4}{c_s^5} \quad (3.28)$$

che è il risultato ottenuto originariamente da Landau approssimando nella (3.24) lo spettro delle eccitazioni con il suo andamento fononico [10]. Utilizzando la (3.27) e sostituendo l'espressione di g in termini di a_s otteniamo per la frazione superfluida l'equazione

$$\frac{n_s}{n} = 1 - \frac{1}{720\sqrt{\pi}} \left(\frac{m}{\hbar^2}\right)^4 \frac{(k_B T)^4}{n(a_s n)^{5/2}} \quad (3.29)$$

che approssima la (3.25) nel limite $T \rightarrow 0$ o $\hbar^2 k^2 \ll 4mgn$ (cioè $p \ll 2mc_s$).

La Figura 4 mostra l'andamento della frazione superfluida in funzione della temperatura per $\gamma = 0.08$, sempre considerando un gas di potassio-39 di densità $n = 3.5 \times 10^{11} \text{ cm}^{-3}$, confrontato con l'andamento della frazione condensata che si ottiene per lo stesso valore del parametro gassoso e con la (3.29).

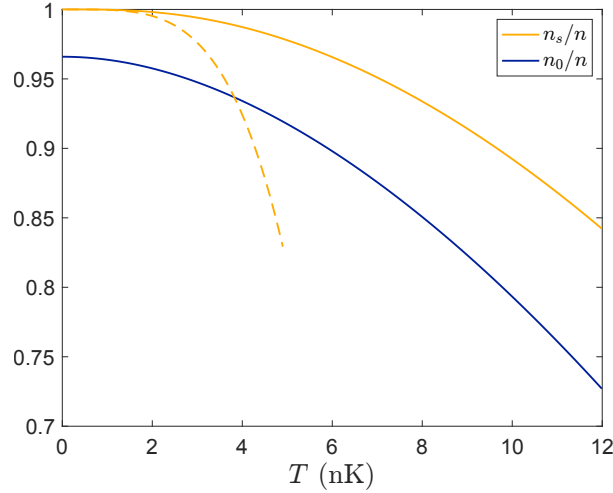


Figura 4: Andamento della frazione superfluida e condensata in funzione della temperatura per $\gamma = 0.08$. In linea tratteggiata l'approssimazione analitica (3.29) per $T \rightarrow 0$.

Infine è interessante osservare che *per il gas ideale in 3D, la frazione superfluida è uguale alla frazione condensata. In particolare $T_s = T_c$.* Abbiamo visto infatti che per $T \leq T_c$ ($\mu = 0$) la densità di particelle negli stati eccitati è

$$n_T = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int \frac{1}{e^{\beta\varepsilon(p)} - 1} d^3\mathbf{p} = \eta\beta^{-3/2} \quad (3.30)$$

dove $\eta \equiv m\zeta(3/2)(2\pi\hbar^2)^{-3/2}$ è una costante. Per la (3.9) la densità normale è invece

$$n_n = \frac{\beta}{3m(2\pi\hbar)^3} \int \frac{e^{\beta\varepsilon(p)}}{(e^{\beta\varepsilon(p)} - 1)^2} p^2 d^3\mathbf{p}$$

che essendo $\varepsilon(p) = p^2/2m$ si può anche scrivere

$$n_n = \frac{2}{3} \frac{\beta}{(2\pi\hbar)^3} \int \frac{e^{\beta\varepsilon(p)} \varepsilon(p)}{(e^{\beta\varepsilon(p)} - 1)^2} d^3\mathbf{p} = -\frac{2}{3} \beta \frac{\partial n_T}{\partial \beta} \quad (3.31)$$

Ma

$$-\frac{2}{3}\beta \frac{\partial n_T}{\partial \beta} = -\frac{2}{3}\beta \left(-\frac{3}{2}\eta\beta^{-5/2} \right) = \eta\beta^{-3/2} = n_T$$

perciò $n_n = n_T$ e di conseguenza $n_s = n_0$ (essendo $n = n_0 + n_T = n_n + n_s$). Questo risultato sembrerebbe contraddire l'osservazione precedente secondo cui il gas ideale, avendo spettro delle eccitazioni $\varepsilon(p) = p^2/2m$, non soddisfa il criterio di Landau per alcun valore della velocità e dunque non dovrebbe essere superfluido. La contraddizione è solo apparente: lo stato fondamentale del gas ideale è effettivamente superfluido (la frazione superfluida è uguale alla frazione condensata) ma è instabile per qualsiasi moto del fluido, per quanto lento esso possa essere [17]. Questa instabilità è conseguenza della natura parabolica dello spettro delle eccitazioni e si può far risalire all'assenza di compressibilità in un gas ideale [5]. Si tratta dunque di un comportamento altamente patologico, che non si osserva nel caso reale di un gas interagente: per quanto debole, l'interazione darà sempre luogo a compressibilità e velocità del suono finite, sicché sarà finita anche la velocità critica definita da Landau.

4 Conclusioni

Sono stati presentati nelle pagine precedenti diversi aspetti della fisica di un gas ultrafreddo di bosoni debolmente interagenti, nel caso particolare di un ambiente omogeneo tridimensionale. Abbiamo ricavato l'equazione di Gross-Pitaevskii e mostrato che essa si può esprimere in modo naturale nella forma di equazioni idrodinamiche per un fluido ideale (cioè non viscoso) e con velocità irrotazionale, condizione che segue direttamente dalla proporzionalità di tale velocità, che si identifica con la velocità superfluida, al gradiente della fase della funzione d'onda del condensato. Da questa relazione, centrale per la comprensione del legame tra condensazione di Bose-Einstein e superfluidità, segue anche una peculiare condizione di quantizzazione sulla circuitazione della velocità superfluida, da cui si deduce l'esistenza di vortici quantizzati che rappresentano uno dei fenomeni più interessanti in tema di superfluidità.

Si è ricavato lo spettro delle eccitazioni elementari del sistema e lo si è utilizzato per arrivare a delle equazioni esplicite per la frazione condensata e la frazione superfluida, le quali mostrano che l'effetto dell'interazione tra i bosoni è di indurre la quantum depletion della frazione condensata, uno shift della temperatura critica di condensazione e far sì che la frazione superfluida sia tipicamente superiore alla frazione condensata.

Un risultato significativo, a nostra conoscenza non precedentemente evidenziato in letteratura, è che al contrario di quanto accade a temperatura zero, a temperatura finita la frazione condensata non è una funzione globalmente monotona nel parametro gassoso $\gamma \equiv a_s n^{1/3}$, ma presenta un massimo globale in corrispondenza di un valore finito $\gamma = \gamma_*$, valore che cresce al crescere della temperatura. Questo aspetto, che in un primo momento potrebbe apparire controintuitivo, risulta del tutto chiaro se si pensa che l'interazione tra i bosoni è causa della quantum depletion a temperatura zero e allo stesso tempo uno shift *positivo* della temperatura critica di condensazione, sicché la verifica sperimentale di questi fatti costituisce anche una verifica (indiretta) della non-monotonia suddetta.

L'autore desidera ringraziare sinceramente il prof. Luca Salasnich per la sua costante disponibilità e incoraggiamento, e il prof. Axel Pelster per le utili discussioni nelle fasi conclusive di scrittura della tesi.

Appendice A

A.1 Equazione di Hartree

$$\begin{aligned}
\frac{\delta S}{N} &= \frac{d}{d\alpha} \int_{\tau_0}^{\tau_1} d\tau \int d^3\mathbf{r} [\psi^*(\mathbf{r}, \tau) + \alpha \delta\psi^*(\mathbf{r}, \tau)] \times \\
&\quad \left[\hbar \frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 - U(\mathbf{r}) - \frac{N-1}{2} \int d^3\mathbf{r}' V(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) [\psi^*(\mathbf{r}', \tau) + \alpha \delta\psi^*(\mathbf{r}', \tau)] \times \right. \\
&\quad \left. [\psi(\mathbf{r}', \tau) + \alpha \delta\psi(\mathbf{r}', \tau)] \right] [\psi(\mathbf{r}, \tau) + \alpha \delta\psi(\mathbf{r}, \tau)] \Big|_{\alpha=0} \\
&= 2 \Re \left\{ \int_{\tau_0}^{\tau_1} d\tau \int d^3\mathbf{r} \delta\psi^*(\mathbf{r}, \tau) \left[\hbar \frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 - U(\mathbf{r}) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{N-1}{2} \int d^3\mathbf{r}' V(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) |\psi(\mathbf{r}', \tau)|^2 \right] \psi(\mathbf{r}, \tau) \right\} \\
&\quad - \frac{N-1}{2} \int_{\tau_0}^{\tau_1} d\tau \int d^3\mathbf{r} \psi^*(\mathbf{r}) \psi(\mathbf{r}) \int d^3\mathbf{r}' V(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) 2 \Re [\delta\psi^*(\mathbf{r}') \psi(\mathbf{r}')] \\
&= 2 \Re \left\{ \int_{\tau_0}^{\tau_1} d\tau \int d^3\mathbf{r} \delta\psi^*(\mathbf{r}, \tau) \left[\hbar \frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 - U(\mathbf{r}) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{N-1}{2} \int d^3\mathbf{r}' V(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) |\psi(\mathbf{r}', \tau)|^2 \right] \psi(\mathbf{r}, \tau) \right\} \\
&\quad + 2 \Re \left\{ \int_{\tau_0}^{\tau_1} d\tau \int d^3\mathbf{r}' \delta\psi^*(\mathbf{r}', \tau) \left[-\frac{N-1}{2} \int d^3\mathbf{r} V(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) |\psi(\mathbf{r}, \tau)|^2 \right] \psi(\mathbf{r}', \tau) \right\}
\end{aligned}$$

e se $V(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) = V(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ la somma dei due addendi dà

$$\begin{aligned}
\delta S &= 2N \Re \left\{ \int_{\tau_0}^{\tau_1} d\tau \int d^3\mathbf{r} \delta\psi^*(\mathbf{r}, \tau) \left[\hbar \frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 - U(\mathbf{r}) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - (N-1) \int d^3\mathbf{r}' V(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) |\psi(\mathbf{r}', \tau)|^2 \right] \psi(\mathbf{r}, \tau) \right\}
\end{aligned}$$

sicch  $\delta S = 0$ per ogni $\delta\psi(\mathbf{r}, \tau)$ tale che $\delta\psi(\mathbf{r}, \tau_0) = \delta\psi(\mathbf{r}, \tau_1) = 0$ se e solo se $\psi(\mathbf{r}, \tau)$ soddisfa un'equazione che, tornando al tempo reale $t = i\tau$,   l'equazione di Hartree.

La condizione sulla simmetria del potenziale   certamente verificata, perch  l'operatore \hat{V} deve risultare completamente simmetrico per lo scambio di due particelle identiche per essere un osservabile fisico (postulato di simmetrizzazione).

A.2 Espressione di g in termini della lunghezza di scattering

Nella teoria dello scattering elastico [9, 21] si dimostra che gli stati di scattering stazionari $\psi_k^{(\text{scatt})}(\mathbf{r})$ hanno l'andamento asintotico

$$\psi_k^{(\text{scatt})}(\mathbf{r}) \underset{r \rightarrow \infty}{\simeq} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + f(\mathbf{k}', \mathbf{k}) \frac{e^{ikr}}{r} \quad (\text{A.1})$$

dove $f(\mathbf{k}', \mathbf{k})$   l'ampiezza di scattering, legata alla sezione d'urto da $d\sigma/d\Omega = |f(\theta, \varphi)|^2$, con $\mathbf{k} = k \hat{\mathbf{u}}$ il vettore d'onda incidente, $\mathbf{k}' = k \hat{\mathbf{u}}'$ il vettore d'onda diffusa e k tale che $\hbar^2 k^2 / 2m_*$ sia l'energia cinetica della particella fittizia di massa m_* , la massa ridotta del sistema di due particelle che interagiscono, nel riferimento del centro di massa. Nel caso di un potenziale centrale, $f(\mathbf{k}', \mathbf{k})$ pu  essere sviluppata in armoniche sferiche, che si riducono ai polinomi di Legendre $P_\ell(\cos \theta)$ grazie alla simmetria azimutale:

$$f(\mathbf{k}', \mathbf{k}) = \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell + 1) f_\ell(k) P_\ell(\cos \theta) \quad (\text{A.2})$$

L'onda piana incidente $e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$ si pu  sviluppare in termini delle funzioni di Bessel sferiche $j_\ell(kr)$ e dei polinomi di Legendre:

$$e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = \sum_{\ell=0}^{\infty} i^\ell (2\ell + 1) j_\ell(kr) P_\ell(\cos \theta) \quad (\text{A.3})$$

Nel limite per $r \rightarrow \infty$ le $j_\ell(kr)$ hanno l'andamento asintotico

$$j_\ell(kr) \underset{r \rightarrow \infty}{\simeq} \frac{\sin(kr - \ell\frac{\pi}{2})}{kr} = \frac{e^{i(kr - \ell\pi/2)} - e^{-i(kr - \ell\pi/2)}}{2ikr} \quad (\text{A.4})$$

da cui segue che

$$e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \underset{r \rightarrow \infty}{\simeq} \sum_\ell (2\ell + 1) P_\ell(\cos\theta) \left(\frac{e^{ikr} - e^{-i(kr - \ell\pi)}}{2ikr} \right) \quad (\text{A.5})$$

Dunque $e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$ è data da una somma di termini, ciascuno dei quali è equivalente alla sovrapposizione di due onde sferiche, una entrante ed una uscente, sfasate di $\ell\pi$, moltiplicate per un polinomio di Legendre che modifica la sfericità del fronte d'onda. Sostituendo (A.2) e (A.5) nell'equazione (A.1) otteniamo

$$\psi_k^{(\text{scatt})}(\mathbf{r}) \underset{r \rightarrow \infty}{\simeq} \sum_\ell (2\ell + 1) P_\ell(\cos\theta) \left[\frac{e^{ikr} (1 + 2ikf_\ell(k)) - e^{-i(kr - \ell\pi)}}{2ikr} \right] \quad (\text{A.6})$$

Dal confronto tra (A.6) e (A.5) deduciamo che, a grandi distanze dal centro di interazione, il cambiamento negli stati stazionari della particella incidente a causa dello scattering è interamente contenuto nella modifica del coefficiente di ciascuna onda sferica uscente per un fattore $1 + 2ikf_\ell(k)$. Esso è in effetti un fattore di fase, perché la conservazione locale della probabilità

$$\frac{\partial}{\partial t} |\psi(\mathbf{r}, t)|^2 + \nabla \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = 0$$

dà per uno stato stazionario $\nabla \cdot \mathbf{j} = -\partial |\psi(\mathbf{r}, t)|^2 / \partial t = 0$; ciò significa che il flusso di probabilità incidente è uguale a quello uscente, sicché deve valere $|1 + 2ikf_\ell(k)|^2 = 1$. Perciò definiamo esplicitamente

$$e^{2i\delta_\ell(k)} \equiv 1 + 2ikf_\ell(k) \quad (\text{A.7})$$

A basse energie, cioè nel caso di un gas ultrafreddo, il contributo dominante allo sfasamento è dato dall'onda parziale con $\ell = 0$ (onda s), che si usa per definire la lunghezza di scattering a_s come

$$a_s \equiv -\lim_{k \rightarrow 0} \frac{\delta_0(k)}{k} \quad (\text{A.8})$$

Dunque nel limite per $k \rightarrow 0$,

$$f(\mathbf{k}', \mathbf{k}) \simeq f_0(k) = \frac{e^{2i\delta_0(k)} - 1}{2ik} = \frac{1}{k \cot \delta_0(k) - ik} \quad (\text{A.9})$$

e $\cot \delta_0 \simeq 1/\delta_0 \simeq -1/(a_s k)$, da cui

$$f(\mathbf{k}', \mathbf{k}) \simeq \frac{1}{-(1/a_s) - ik} \simeq -a_s \quad (\text{A.10})$$

Inoltre, nel caso di un debole potenziale d'interazione si può esprimere $f(\mathbf{k}', \mathbf{k})$ tramite l'approssimazione di Born [9]

$$f(\mathbf{k}', \mathbf{k}) \simeq f^{(\text{B})}(\mathbf{k}', \mathbf{k}) = -\frac{m_*}{2\pi\hbar^2} \int d^3\mathbf{r} e^{-i(\mathbf{k}' - \mathbf{k})\cdot\mathbf{r}} V(\mathbf{r}) \quad (\text{A.11})$$

il che ci permette di scrivere

$$a_s \underset{\substack{k \rightarrow 0 \\ |V| \rightarrow 0}}{\simeq} \frac{m_*}{2\pi\hbar^2} \int d^3\mathbf{r} e^{-i(\mathbf{k}' - \mathbf{k})\cdot\mathbf{r}} V(\mathbf{r}) \quad (\text{A.12})$$

Sostituendo $V(\mathbf{r}) = g\delta(\mathbf{r})$ e considerato che nel nostro caso $m_* = m/2$ otteniamo infine

$$g \simeq \frac{4\pi\hbar^2 a_s}{m} \quad (\text{A.13})$$

A.3 Correzione di Lee, Huang e Yang

Un modo più rigoroso per ricavare la correzione di Lee, Huang e Yang consiste nell'utilizzare approssimazioni "di ordine superiore" per l'energia di punto zero delle eccitazioni elementari e l'ampiezza di scattering [14, 19]. La derivazione standard della teoria di Bogoliubov per il gas di bosoni debolmente interagenti, che usa il formalismo di seconda quantizzazione, mostra che l'espressione per l'energia dello stato fondamentale non è quella da noi assunta,

$$E_0 = \frac{N_0^2 g}{2\mathcal{V}} + \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} \varepsilon_{\mathbf{k}}$$

bensì contiene due (contro)termini aggiuntivi, che emergono durante la trattazione dall'applicazione delle regole di commutazione bosoniche, e si scrive [16]

$$E_0 = \frac{N_0^2 g}{2\mathcal{V}} + \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} \left[\varepsilon_{\mathbf{k}} - \frac{\hbar^2 k^2}{2m} - gn_0 \right] \quad (\text{A.14})$$

Ne segue che il potenziale gran canonico a $T = 0$ si scrive nel limite termodinamico

$$\frac{\Omega_0 + \Omega_g^{(0)}}{\mathcal{V}} = -\frac{\mu^2}{2g} + \frac{1}{2} \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} \left[\varepsilon_{\mathbf{k}}(\mu) - \frac{\hbar^2 k^2}{2m} - \mu \right] \quad (\text{A.15})$$

dove $\varepsilon_{\mathbf{k}}(\mu) = \sqrt{\frac{\hbar^2 k^2}{2m} \left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m} + 2\mu \right)}$. Tuttavia l'integrale è ancora divergente nell'ultravioletto.

Il problema si risolve calcolando l'ampiezza di scattering ad un ordine superiore rispetto all'approssimazione di Born, ottenendo l'equazione [9]

$$\frac{4\pi \hbar^2 a_s}{m} = \tilde{V}(|\mathbf{k}|=0) - \frac{m}{\hbar^2} \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{\tilde{V}(-\mathbf{k})\tilde{V}(\mathbf{k})}{k^2} + \dots \quad (\text{A.16})$$

dove

$$\tilde{V}(\mathbf{k}) = \int d^3 \mathbf{r} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} V(\mathbf{r}) = \int d^3 \mathbf{r} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} g \delta(\mathbf{r}) = g \quad (\text{A.17})$$

sicché

$$\frac{4\pi \hbar^2 a_s}{m} = g - g^2 \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{m}{\hbar^2 k^2} \quad (\text{A.18})$$

Identifichiamo il primo membro di questa equazione con l'espressione "rinormalizzata" dell'intensità di interazione: $4\pi \hbar^2 a_s/m \equiv g_r$. Dividendo ambo i membri per $g_r g$ si ottiene dunque in prima approssimazione

$$\frac{1}{g_r} \simeq \frac{1}{g} + \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{m}{\hbar^2 k^2} \quad (\text{A.19})$$

e sostituendo questa espressione nella (A.15) si trova

$$\frac{\Omega_0 + \Omega_g^{(0)}}{\mathcal{V}} = -\frac{\mu^2}{2g_r} + \frac{1}{2} \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} \left[\varepsilon_{\mathbf{k}}(\mu) - \frac{\hbar^2 k^2}{2m} - \mu + \frac{m\mu^2}{\hbar^2 k^2} \right] \quad (\text{A.20})$$

Ora l'integrale è convergente e dà proprio la correzione di Lee, Huang e Yang all'energia dello stato fondamentale:

$$\frac{\Omega_0 + \Omega_g^{(0)}}{\mathcal{V}} = -\frac{\mu^2}{2g_r} + \frac{8}{15\pi^2} \left(\frac{m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \mu^{5/2} \quad (\text{A.21})$$

A.4 Formulazione idrodinamica dell'equazione di Gross-Pitaevskii

Sostituendo la (3.12) nella GP (2.31) otteniamo

$$\begin{aligned} i\hbar \left[\frac{\partial(\sqrt{n})}{\partial t} \frac{e^{i\theta}}{\sqrt{N}} + \sqrt{\frac{n}{N}} \frac{\partial(e^{i\theta})}{\partial t} \right] &= \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + U + (N-1)g \frac{n}{N} \right] \sqrt{\frac{n}{N}} e^{i\theta} \\ \Rightarrow \frac{i\hbar e^{i\theta}}{2\sqrt{n}\sqrt{N}} \frac{\partial n}{\partial t} - \hbar \sqrt{\frac{n}{N}} e^{i\theta} \frac{\partial \theta}{\partial t} &= -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \left[\sqrt{\frac{n}{N}} e^{i\theta} \right] + \left[U + (N-1)g \frac{n}{N} \right] \sqrt{\frac{n}{N}} e^{i\theta} \end{aligned}$$

da cui, calcolando il laplaciano a secondo membro,

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \left[\sqrt{\frac{n}{N}} e^{i\theta} \right] = -\frac{\hbar^2}{2m} \left[\frac{\nabla^2 \sqrt{n}}{\sqrt{n}} - (\nabla \theta)^2 + i \left(\nabla^2 \theta + \frac{\nabla n \cdot \nabla \theta}{n} \right) \right] \sqrt{\frac{n}{N}} e^{i\theta}$$

e dividendo tutto per $\sqrt{n/N}e^{i\theta}$,

$$\left[-\hbar \frac{\partial \theta}{\partial t}\right] + i \left[\frac{\hbar}{2n} \frac{\partial n}{\partial t}\right] = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\nabla^2(\sqrt{n})}{\sqrt{n}} + \frac{\hbar^2}{2m} (\nabla \theta)^2 + U + (N-1)g \frac{n}{N}\right] - i \frac{\hbar^2}{2m} \left[\frac{\nabla \cdot (n \nabla \theta)}{n}\right]$$

Una volta identificata la velocità secondo l'equazione (3.17), l'uguaglianza delle parti immaginarie del primo e secondo membro conduce all'equazione di continuità (3.20), mentre l'uguaglianza delle parti reali conduce all'equazione dinamica (3.21). L'equazione di continuità si può anche ricavare direttamente dalla legge di conservazione della probabilità (3.14).

A.5 Trasformazione di Galileo dell'energia delle quasi particelle

Sia $L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t)$ la lagrangiana della quasi particella nel riferimento \mathcal{K} . Le coordinate affini di \mathcal{K}' sono legate a quelle di \mathcal{K} dalla trasformazione di Galileo

$$\mathbf{r}' = \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{r} + \mathbf{v}t$$

che si estende alle velocità come

$$\dot{\mathbf{r}}' = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{r}} \dot{\mathbf{r}} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \dot{\mathbf{r}} + \mathbf{v}$$

essendo $\partial \mathbf{u} / \partial \mathbf{r} = \mathbb{1}$. Questa trasformazione di coordinate ammette estensione ai momenti canonici:

$$p'_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}'_i} = \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{r}_j} \frac{\partial \dot{r}_j}{\partial \dot{r}'_i} = \sum_j \left(\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}}{\partial \dot{\mathbf{r}}'}\right)^T_{ij} p_j = \sum_j \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{r}}\right)^{-T}_{ij} p_j \quad \text{da cui} \quad \mathbf{p}' = \mathbf{p}$$

Nel formalismo hamiltoniano la trasformazione di Galileo si scrive quindi

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \mathbf{v}t, \quad \mathbf{p}' = \mathbf{p}$$

Essa è canonica e coniuga l'hamiltoniana l'hamiltoniana $H(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = \mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{r}} - L$ all'hamiltoniana

$$H'(\mathbf{r}', \mathbf{p}', t) = H(\mathbf{r}' - \mathbf{v}t, \mathbf{p}', t) + \mathbf{p}' \cdot \mathbf{v}$$

Infatti, risulta:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}}' &= \dot{\mathbf{r}} + \mathbf{v} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) + \mathbf{v} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}(\mathbf{r}' - \mathbf{v}t, \mathbf{p}', t) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}'}(\mathbf{p}' \cdot \mathbf{v}) = \frac{\partial H'}{\partial \mathbf{p}'}(\mathbf{r}', \mathbf{p}', t) \\ \dot{\mathbf{p}}' &= \dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = -\frac{\partial H'}{\partial \mathbf{r}'}(\mathbf{r}', \mathbf{p}', t) \end{aligned}$$

L'hamiltoniana rappresenta l'energia della quasi particella, perciò se essa è ε in \mathcal{K} allora è $\varepsilon' = \varepsilon + \mathbf{p} \cdot \mathbf{v}$ in \mathcal{K}' .

A.6 Densità normale

Scrivendo $\mathbf{p} = p \hat{\mathbf{n}}$, l'integrale $\int \mathbf{p}(\mathbf{p} \cdot \mathbf{v}_n) F(p) d^3 \mathbf{p}$ diventa $\int \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{v}_n \cdot \hat{\mathbf{n}}) p^2 F(p) d^3 \mathbf{p}$. Scegliamo un sistema di coordinate tale che \mathbf{v}_n sia diretta lungo l'asse z : $\mathbf{v}_n = (0, 0, v_n)$. Allora $\mathbf{v}_n \cdot \hat{\mathbf{n}} = v_n \cos \theta$ e $\hat{\mathbf{n}} = (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta)$. Ne segue che

$$\begin{aligned} &\int \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{v}_n \cdot \hat{\mathbf{n}}) p^2 F(p) d^3 \mathbf{p} \\ &= v_n \left[\int p^2 F(p) \sin \theta \cos \theta \cos \varphi d^3 \mathbf{p}, \int p^2 F(p) \sin \theta \cos \theta \sin \varphi d^3 \mathbf{p}, \int p^2 F(p) \cos^2 \theta d^3 \mathbf{p} \right] \end{aligned}$$

e sostituendo $d^3 \mathbf{p} = p^2 \sin \theta dp d\theta d\varphi$ si trova

$$\int \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{v}_n \cdot \hat{\mathbf{n}}) p^2 F(p) d^3 \mathbf{p} = \left(0, 0, \frac{v_n}{3} 4\pi \int [p^2 F(p)] p^2 dp\right) = \frac{\mathbf{v}_n}{3} \int p^2 F(p) d^3 \mathbf{p}$$

In conclusione

$$\rho_n \mathbf{v}_n = \frac{\beta}{(2\pi\hbar)^3} \frac{\mathbf{v}_n}{3} \int \frac{e^{\beta\varepsilon(p)}}{(e^{\beta\varepsilon(p)} - 1)^2} p^2 d^3 \mathbf{p}$$

Riferimenti bibliografici

- [1] J. O. Andersen, *Theory of the weakly interacting Bose gas*, Rev. Mod. Phys. **76**, 599 (2004).
- [2] M. R. Andrews, C. G. Townsend, H.-J. Miesner, D. S. Durfee, D. M. Kurn, W. Ketterle, *Observation of Interference Between Two Bose Condensates*, Science **275**, 5300 (1997).
- [3] R. Feynman, R. Leighton, M. Sands, *The Feynman Lectures on Physics, Vol. II* (Basic Books, 2011).
- [4] S. Giorgini, J. Boronat, J. Casulleras, *Ground state of a homogeneous Bose gas: A diffusion Monte Carlo calculation*, Phys. Rev. A **60**, 5129 (1999).
- [5] M. Kardar, *Statistical Mechanics of Particles* (Cambridge University Press, 2007).
- [6] V. A. Kashurnikov, N. V. Prokof'ev, B. V. Svistunov, *Critical Temperature Shift in Weakly Interacting Bose Gas*, Phys. Rev. Lett. **87**, 120402 (2001).
- [7] W. Ketterle, H.-J. Miesner, *Coherence properties of Bose-Einstein condensates and atom lasers*, Phys. Rev. A **56**, 3291 (1997).
- [8] H. Kleinert, S. Schmidt, A. Pelster, *Quantum phase diagram for homogeneous Bose-Einstein condensate*, Ann. Phys. (Leipzig) **14**, No. 4, 214–230 (2005).
- [9] L. D. Landau, E. M. Lifshitz, *Course of Theoretical Physics, Vol. 3. Quantum Mechanics: Non-Relativistic Theory* (Butterworth-Heinemann, 1981).
- [10] L. D. Landau, E. M. Lifshitz, *Course of Theoretical Physics, Vol. 9. Statistical Physics: Theory of the Condensed State* (Butterworth-Heinemann, 1980).
- [11] D. T. Lee, K. Huang, C. N. Yang, *Eigenvalues and Eigenfunctions of a Bose System of Hard Spheres and Its Low-Temperature Properties*, Phys. Rev. **106**, 1135 (1957).
- [12] A. J. Leggett, *Bose-Einstein condensation in the alkali gases: Some fundamental concepts*, Rev. Mod. Phys. **73**, 307 (2001).
- [13] A. J. Leggett, *Superfluidity*, Rev. Mod. Phys. **71**, 318 (1999).
- [14] A. R. P. Lima, A. Pelster, *Beyond mean-field low-lying excitations of dipolar Bose gases*, Phys. Rev. A **86**, 063609 (2012).
- [15] O. Penrose, L. Onsager, *Bose-Einstein Condensation and Liquid Helium*, Phys. Rev. **104**, 576 (1956).
- [16] C. J. Pethick, H. Smith, *Bose-Einstein Condensation in Dilute Gases* (Cambridge University Press, 2008).
- [17] D. Pines, P. Nozières, *The Theory of Quantum Liquids* (Westview Press, 1999).
- [18] C. A. Sackett, J. M. Gerton, M. Welling, R. G. Hulet, *Measurements of Collective Collapse in a Bose-Einstein Condensate with Attractive Interactions*, Phys. Rev. Lett. **82**, 876 (1999).
- [19] L. Salasnich, F. Toigo, *Zero Point Energy of Ultracold Atoms*, Phys. Rep. **640**, 1 (2016).
- [20] J. Steinhauer, R. Ozeri, N. Katz, N. Davidson, *Excitation Spectrum of a Bose-Einstein Condensate*, Phys. Rev. Lett. **88**, 120407 (2002).
- [21] H. T. C. Stoof, K. B. Gubbels, D. B. M. Dickerscheid, *Ultracold Quantum Fields* (Springer, 2009).
- [22] A. Tononi, A. Cappellaro, L. Salasnich, *Condensation and superfluidity of dilute Bose gases with finite-range interaction*, New J. Phys. **20**, 125007 (2018).