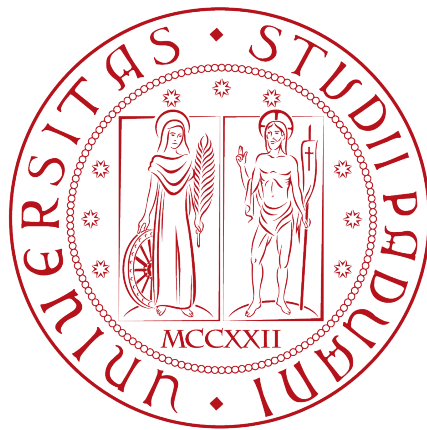


UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

SCUOLA DI SCIENZE
DIPARTIMENTO DI FISICA E ASTRONOMIA
"GALILEO GALILEI"

LAUREA TRIENNALE IN ASTRONOMIA



**La correlazione tra CMB e struttura su
larga scala dell'Universo, come test
dell'accelerazione cosmologica**

Relatore:
Dott. Michele LIGUORI

Laureando:
Marco LUNETTI

Anno Accademico 2017-2018

Indice

1	Introduzione	5
1	Il Principio Cosmologico	5
2	La legge di Hubble	5
2.1	Coordinate comoventi	6
3	La Metrica di Robertson-Walker	7
4	Le equazioni di Friedmann	8
4.1	La prima equazione di Friedmann	8
4.2	L'equazione dei fluidi	10
4.3	La seconda equazione di Friedmann	11
4.4	Considerazioni geometriche	12
5	Parametri cosmologici	12
5.1	Parametro di Hubble	12
5.2	Parametro di decelerazione	13
5.3	Parametro di densità	13
5.4	Relazione tra parametri cosmologici e geometria	14
5.5	Redshift cosmologico	14
6	Alcuni semplici modelli cosmologici	15
6.1	Universo di Milne	15
6.2	Universo di Einstein-de Sitter	16
6.3	Universo aperto	16
6.4	Universo chiuso	16
7	La Costante Cosmologica	17
7.1	Interpretazione di Λ	17
7.2	Modello cosmologico con Λ	18
2	Il Fondo Cosmico Di Microonde	19
1	Proprietà e origine	19
1.1	Disaccoppiamento	19
1.2	Superficie di ultimo scattering	21
2	Anisotropie del CMB	21
2.1	Analisi statistica	22
3	Effetto Sachs-Wolfe	23
3.1	Effetto Sachs-Wolfe Integrato	25

3	Cross-Correlazione CMB-LSS	27
1	Conteggi di sorgenti	27
2	Cross-Correlazione	29
2.1	Correlazione con l'energia oscura	30
2.2	Cross-Correlazione WMAP-NVSS	30
2.3	Risultati di Planck	33
A	Funzioni speciali	35
1	Armoniche Sferiche	35
2	Funzioni di Bessel sferiche	36
3	Trasformata di Fourier	36

Capitolo 1

Introduzione

1 Il Principio Cosmologico

Nel tentativo di trovare un *modello cosmologico* che permetta una completa comprensione dell'Universo, la cosmologia moderna affonda le proprie radici in quello che può essere considerato un naturale prodotto della rivoluzione copernicana, ovvero in un postulato che estende ulteriormente e precisa il principio secondo cui la Terra non occupa alcuna posizione privilegiata all'interno dell'Universo. Tale postulato prende il nome di *principio cosmologico*, e può essere enunciato come segue: *l'Universo appare omogeneo ed isotropo agli occhi di qualunque osservatore*. I due termini fondamentali *isotropia* e *omogeneità* si riferiscono rispettivamente ad un'invarianza per rotazioni e traslazioni spaziali. Ciò significa che da qualunque posizione e in qualunque direzione lo si guardi, l'Universo appare sostanzialmente lo stesso per ogni osservatore. Va sottolineato che tale principio ha validità solo se si considerano scale spaziali sufficientemente grandi (ovvero superiori ad alcune centinaia di Mpc¹). L'utilità e l'importanza del principio cosmologico si riscontrano nel fatto che per ottenere una descrizione compiuta dell'Universo, sono sufficienti misure effettuate dal nostro sistema di riferimento.

2 La legge di Hubble

La scoperta del 1929 di Edwin Hubble rivoluzionò la concezione di Universo dell'epoca, andando contro ai modelli cosmologici in voga, di natura statica. Hubble fornì infatti la prova empirica di un Universo in espansione legando in una semplice relazione la distanza r di una galassia e la sua velocità di recessione v , calcolata tramite il redshift z facilmente misurabile da misure spettroscopiche. Osservando infatti una galassia in allontanamento (come

¹Il *parsec* (pc) è definito come la distanza da cui l'Unità Astronomica è vista perpendicolarmente sotto l'angolo di un secondo d'arco, e vale $1 \text{ pc} = 3.086 \times 10^{16} \text{ m}$. Un suo multiplo è il *megaparsec* (Mpc), che vale $1 \text{ Mpc} = 10^6 \text{ pc}$.

nella maggior parte dei casi), per effetto Doppler si trova che le righe spettrali vengono spostate verso lunghezze d'onda maggiori, ovvero subiscono uno spostamento verso il rosso (da cui il termine redshift). Possiamo dunque definire il redshift z come:

$$z \equiv \frac{\lambda_o - \lambda_e}{\lambda_e},$$

dove λ_o e λ_e sono rispettivamente le lunghezze d'onda osservata ed emessa. Dalla formula relativistica dell'effetto Doppler si ricava infine:

$$z = \sqrt{\frac{1 + v/c}{1 - v/c}} - 1 \approx \frac{v}{c},$$

dove c è la velocità della luce nel vuoto, e l'approssimazione vale nel caso $v \ll c$. Nel caso di una galassia con v negativa (quindi in avvicinamento) si parla di blueshift.

La relazione trovata da Hubble, che prende il nome di *legge di Hubble*, è data da:

$$\mathbf{v} = H_0 \mathbf{r}, \quad (1.1)$$

dove H_0 è il fattore di proporzionalità noto come *costante di Hubble*, misurata in $\text{km s}^{-1}\text{Mpc}^{-1}$.

A causa dei propri moti peculiari, per galassie vicine tale legge non risulta esatta, e devono essere introdotte nuove correzioni, che diventano tanto più trascurabili quanto più lontana si trova la galassia. Escludendo dunque le galassie più vicine ma considerando sempre $v \ll c$, si può finalmente scrivere:

$$v = zc = H_0 r,$$

che rappresenta la relazione tra redshift e distanza della galassia.

2.1 Coordinate comoventi

Dal momento che l'Universo è in espansione uniforme (come verificato dalla legge di Hubble), conviene definire un nuovo sistema di coordinate che segue l'espansione, e rimane quindi invariato nel tempo. Tale sistema di coordinate, indicato con \mathbf{x} , è detto *comovente*. In altri termini, in tale sistema la posizione di diversi osservatori non cambia con il tempo. Il legame tra le vecchie coordinate *fisiche* \mathbf{r} , che non si espandono, e queste nuove coordinate comoventi, si può esprimere con la seguente relazione di proporzionalità:

$$\mathbf{r} = a(t) \mathbf{x}, \quad (1.2)$$

dove $a(t)$ è il *fattore di scala universale*, fondamentale per la descrizione dell'evoluzione dell'Universo. L'omogeneità ci permette di definirlo come sola funzione del tempo. Da una semplice analisi dell'equazione (1.2) si evince che $a(t)$ rappresenta il tasso d'espansione universale, poichè misura direttamente come crescono le distanze fisiche, essendo \mathbf{x} costante.

3 La Metrica di Robertson-Walker

La teoria che ad oggi meglio descrive la gravità è la teoria della Relatività Generale, al cui centro si trova la *metrica* come ente geometrico fondamentale.

In Relatività Speciale l'intervallo spazio-temporale ds^2 è definito dalla metrica di Minkowski $\eta_{\mu\nu}$:²

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$$

con

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Tale metrica si traduce in uno spazio-tempo piatto, mentre in Relatività Generale, come conseguenza del *Principio di Equivalenza*, lo spazio-tempo è *incurvato* dalla gravità.

Si presenta dunque la necessità di individuare una metrica che permetta di interpretare accuratamente la geometria dell'Universo, in modo da poter definire coerentemente un concetto di *distanza* in cosmologia.

In generale, l'intervallo spazio-temporale ds^2 può essere scritto in funzione del tensore metrico $g_{\mu\nu}$ (con segnatura $(-, +, +, +)$) come:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu,$$

dove le componenti di $g_{\mu\nu}$ dipendono nel caso più generale sia dalla posizione che dal tempo, e determinano la curvatura dello spazio a sua volta proporzionale all'intensità del campo gravitazionale.

Assumendo però come presupposti fondamentali:

1. il Principio Cosmologico;
2. lo stato di espansione uniforme;

è possibile semplificare notevolmente la trattazione, dando così una precisa forma al tensore metrico $g_{\mu\nu}$. È possibile infatti dimostrare che, sotto tali ipotesi, la forma più generale (con curvatura costante) è:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a^2(t)}{1-kr^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2(t)r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2(t)r^2 \sin^2 \vartheta \end{pmatrix},$$

²Viene da qui in poi seguita la convenzione di Einstein per le sommatorie, secondo la quale indici ripetuti vengono sommati. Gli indici spazio-temporali usati assumono i valori $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$, dove a 0 corrisponde la componente temporale.

con intervallo:

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\phi^2) \right], \quad (1.3)$$

dove, per la parte spaziale della metrica (all'interno delle parentesi quadre), sono state utilizzate coordinate polari sferiche (r, ϑ, ϕ) con coordinata radiale comovente r . Il termine k è una costante che misura la curvatura e che può assumere i valori $k = 1, 0, -1$, rappresentanti rispettivamente uno spazio chiuso, piatto e aperto.

Tale metrica prende il nome di *metrica di Robertson-Walker* (RW). È importante sottolineare che questa metrica, nonostante si ponga all'interno della teoria della Relatività Generale, può essere dedotta a partire dalle sole proprietà di simmetria dell'Universo, ovvero a partire dal Principio Cosmologico. Questo rende il risultato estremamente generale e valido, anche nel caso in cui la teoria della Relatività Generale fornisse una descrizione sbagliata della gravità.

Analizzando l'equazione (1.3) si può vedere come per valori della coordinata radiale comovente r sufficientemente piccoli, si può ritrovare il caso limite della metrica di Minkowski. Questo fatto può essere interpretato nel seguente modo: entro un volume sufficientemente piccolo intorno ad un osservatore la curvatura indotta dal contenuto di materia gravitante non influisce nella geometria.

4 Le equazioni di Friedmann

Se con la metrica di Robertson-Walker si è potuto ottenere una descrizione generale della geometria dell'Universo, risulta naturale cercare ora delle equazioni che specificano l'evoluzione temporale del fattore di scala universale $a(t)$. Nonostante sia possibile dedurre tali equazioni inserendo la metrica RW nelle *equazioni di campo* di Einstein, risulta interessante seguire una strada alternativa e ricavarle tramite un approccio Newtoniano.

4.1 La prima equazione di Friedmann

Come punto di partenza si consideri la forza esercitata da un corpo di massa M su un corpo di massa m :

$$F = G \frac{Mm}{r^2},$$

dove r è la distanza tra i due oggetti e G la costante di gravitazione di Newton. Dal semplice confronto con $F = ma$ si vede chiaramente come l'accelerazione di cui risente il corpo attratto gravitazionalmente è indipendente dalla sua massa. Essendo inversamente proporzionale al quadrato della

distanza, F risulta essere conservativa (poichè centrale), e ad essa è quindi associata un'energia potenziale gravitazionale V :

$$V = -G \frac{Mm}{r},$$

dove il segno $-$ sta ad indicare la natura puramente attrattiva della forza gravitazionale.

È necessario enunciare ora un importante risultato ottenuto da Isaac Newton, conseguenza diretta dell'andamento inversamente proporzionale al quadrato: in una distribuzione di materia a simmetria sferica, una particella posta a distanza r risente esclusivamente della forza esercitata dalla materia racchiusa nella sfera di raggio r , e tale forza è quella che la stessa materia eserciterebbe se fosse tutta concentrata nel punto centrale.

Si consideri ora un osservatore in un mezzo che occupa un volume V e ha densità ρ , che si espande uniformemente. Data l'omogeneità e l'isotropia dell'Universo, qualunque suo punto può essere considerato come il suo centro. Sia data ora una particella di massa m a distanza r dal punto scelto. La massa totale della materia è:

$$M = \frac{4\pi}{3} \rho r^3,$$

a cui corrisponde una forza

$$F = G \frac{Mm}{r^2} = \frac{4\pi}{3} G \rho r m$$

ed un energia potenziale

$$V = -G \frac{Mm}{r} = -\frac{4\pi}{3} G \rho r^2 m.$$

L'energia cinetica della particella è:

$$T = \frac{1}{2} m \dot{r}^2,$$

dove, data una qualsiasi funzione $f(t)$, si è definito $\dot{f} \equiv \frac{df}{dt}$. Dal momento che l'energia totale E_{tot} è conservata, si può scrivere:

$$E_{tot} = T + V = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 - \frac{4\pi}{3} G \rho r^2 m = U, \quad (1.4)$$

dove U è una costante ($\dot{U} = 0$) che può però esser diversa per particelle poste a diversa distanza r . Passando ora alle coordinate comoventi precedentemente introdotte

$$\mathbf{r} = a(t) \mathbf{x},$$

e ricordando che $a(t)$ rappresenta il tasso di espansione dell'Universo, si ottiene:

$$U = \frac{1}{2}m\dot{a}^2x^2 - \frac{4\pi}{3}G\rho a^2x^2m.$$

Per definizione $\dot{x} = 0$, quindi moltiplicando entrambi i membri per $\frac{2}{ma^2x^2}$ e riarrangiando i termini, si ricava:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi}{3}G\rho - \frac{kc^2}{a^2}, \quad (1.5)$$

avendo posto

$$kc^2 = -\frac{2U}{mx^2}.$$

La (1.5) è nota come *equazione di Friedmann*. Grazie all'omogeneità si può affermare che il termine k non dipende da x , dato che il resto dell'espressione (1.5) ne è indipendente. Inoltre, data la costanza di U e di x , anche k è indipendente da t .

4.2 L'equazione dei fluidi

L'equazione di Friedmann è risolvibile non appena si conosca $\rho(t)$, ovvero come evolve la densità dell'Universo nel tempo.

Si consideri allora la prima legge della termodinamica applicata ad un volume V comovente di raggio unitario (quindi $x = 1$) in espansione, con pressione p , energia E , temperatura T ed entropia S :

$$dE + p dV = T dS. \quad (1.6)$$

In coordinate fisiche V avrà raggio a :

$$V = \frac{4\pi}{3}a^3$$

in modo che l'energia sia (ricordando che $E = mc^2$):

$$E = \frac{4\pi}{3}a^3\rho c^2.$$

Differenziando E e V :

$$dE = 4\pi a^2\rho c^2 da + \frac{4\pi}{3}a^3 c^2 d\rho,$$

$$dV = 4\pi a^2 da$$

e assumendo che l'espansione sia *reversibile* (ovvero $dS = 0$), si ottiene inserendo il tutto in (1.6) e considerando che la variazione avviene in un tempo dt :

$$\frac{dE}{dt} + p \frac{dV}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow \left(4\pi a^2 \rho c^2 \frac{da}{dt} + \frac{4\pi}{3} a^3 c^2 \frac{d\rho}{dt} \right) + p \left(4\pi a^2 \frac{da}{dt} \right) = 0,$$

e riarrangiando:

$$\dot{\rho} + 3 \frac{\dot{a}}{a} \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) = 0, \quad (1.7)$$

che è nota come *equazione dei fluidi*.

I due contributi che modificano la densità sono quindi:

- l'incremento del volume V ;
- la perdita di energia dovuta al lavoro W svolto dalla pressione p durante l'espansione: $dW = p dV$.

Naturalmente, conservandosi l'energia totale, l'energia persa viene trasformata in energia potenziale gravitazionale. Per poter finalmente risolvere l'equazione (1.7) è necessario introdurre un'*equazione di stato* del tipo $p = p(\rho)$, la cui forma varia in base al tipo di contenuto dominante ad una data epoca (e.g. radiazione, materia barionica).

4.3 La seconda equazione di Friedmann

Una terza equazione, dipendente dalle due già trovate, permette ottenere l'accelerazione del fattore di scala (mentre la prima equazione ne dava la velocità). Derivando rispetto al tempo l'equazione (1.5) si ha:

$$2 \frac{\dot{a}}{a} \frac{a\ddot{a} - \dot{a}^2}{a^2} = \frac{8\pi}{3} G \dot{\rho} + 2kc^2 \frac{\dot{a}}{a^3},$$

e inserendo (1.7):

$$\frac{\ddot{a}}{a} - \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = -4\pi G \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) + \frac{kc^2}{a^2}.$$

Riutilizzando ora (1.5) si trova:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi}{3} G \left(\rho + \frac{3p}{c^2} \right), \quad (1.8)$$

che prende il nome di *equazione dell'accelerazione*. Si può osservare che la presenza di pressione provoca una decelerazione, ma non è legata ad alcuna forza \mathbf{f} . La pressione infatti è indipendente dalla posizione (dato che anche la densità lo è), ed un eventuale gradiente spaziale $\nabla p = \mathbf{f}$ sarebbe necessariamente nullo. Il contributo della pressione è quindi espresso, come visto nel paragrafo precedente, unicamente dal lavoro da essa compiuto durante l'espansione.

4.4 Considerazioni geometriche

È importante osservare che il termine k che compare nelle equazioni di Friedmann altro non è che il termine k di curvatura presente nella metrica di Robertson-Walker (1.3):

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\phi^2) \right].$$

L'equazione (1.5) lega quindi l'evoluzione temporale del fattore di scala, e quindi dell'Universo, alla sua geometria. Mentre non è possibile apprezzare tale fatto seguendo la trattazione Newtoniana, risulta invece evidente con la derivazione general-relativistica, nella quale il punto di partenza è proprio la metrica soprammenzionata. Come notato precedentemente, k è costante, ovvero l'Universo rimane sempre piatto, chiuso o aperto, senza possibilità di passare da una tipologia ad un'altra.³

I valori assunti dal parametro di curvatura e le corrispondenti geometrie sono:

- $k = -1 \implies$ aperto;
- $k = 0 \implies$ piatto;
- $k = 1 \implies$ chiuso.

5 Parametri cosmologici

Esistono dei parametri utili a descrivere lo stato e l'evoluzione dinamica dell'Universo, che verranno presentati in questo paragrafo.

5.1 Parametro di Hubble

È interessante cercare di generalizzare l'espressione che lega la distanza \mathbf{r} di una galassia con la sua velocità, ovvero la legge di Hubble, in una relazione del tipo:

$$\mathbf{v} = H(t) \mathbf{r},$$

dipendente dal tempo. Per le coordinate comoventi vale:

$$\mathbf{r} = a(t) \mathbf{x} \implies \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{da}{dt} \mathbf{x},$$

e ricordando che $\mathbf{v} \equiv \frac{d\mathbf{r}}{dt}$, si ha combinando le equazioni:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{da}{dt} \mathbf{x} = H(t) a(t) \mathbf{x},$$

³Ciò è conseguenza diretta del Principio Cosmologico, secondo il quale nell'Universo non esistono posizioni privilegiate.

che è sempre soddisfatta nel momento in cui si ponga

$$H(t) \equiv \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}. \quad (1.9)$$

Quella appena ottenuta è la definizione del *parametro di Hubble*, che esprime quindi il tasso di espansione cosmico al tempo t . Per $t = t_0$, ovvero al tempo attuale, si ottiene nuovamente la costante di Hubble $H_0 \equiv H(t_0)$.

5.2 Parametro di decelerazione

Il seguente parametro è definito nel seguente modo:

$$q(t) \equiv -\frac{a(t)\ddot{a}(t)}{\dot{a}^2}, \quad (1.10)$$

e descrive la decelerazione del fattore di scala, ed è infatti detto *parametro di decelerazione*. Al tempo attuale $t = t_0$ è definito come $q(t_0) = q_0$.

5.3 Parametro di densità

Quest'ultimo parametro è proporzionale alla densità di materia presente nell'Universo, e viene definito come:

$$\Omega(t) \equiv \frac{8\pi G}{3H^2(t)}\rho(t), \quad (1.11)$$

ed è detto *parametro di densità*. Al tempo attuale si scrive $\Omega(t_0) = \Omega_0$. Definendo la *densità critica*⁴ al tempo t come:

$$\rho_c(t) \equiv \frac{3H^2(t)}{8\pi G},$$

si può esprimere il parametro in maniera più sintetica:

$$\Omega(t) = \frac{\rho(t)}{\rho_c}.$$

È possibile ricavare una semplice relazione tra $\Omega(t)$ e $q(t)$:

$$\Omega(t) = 2q(t),$$

interpretabile fisicamente considerando il fatto che ad una maggiore quantità di materia (e quindi ad un maggiore Ω) corrisponde una maggiore attrazione gravitazionale, che opponendosi all'espansione si traduce in un rallentamento di questa (ovvero ad un maggiore q).

⁴Tale parametro rappresenta il valore di densità necessario affinché la geometria dell'Universo sia piatta ($k = 0$), come si può vedere direttamente dall'equazione di Friedmann (1.5) ricordando che $H = \dot{a}/a$.

5.4 Relazione tra parametri cosmologici e geometria

Una volta trovato grazie alle equazioni di Friedmann che la geometria dell'Universo è legata al parametro che ne descrive l'espansione, risulta naturale cercare una relazione tra i parametri cosmologici e il fattore k .

Partendo infatti dall'equazione (1.5) e operando un confronto con le definizioni dei parametri, si trova facilmente che

$$kc^2 = H^2(t)a^2(t)(\Omega(t) - 1),$$

ma essendo k costante è possibile inserire i corrispettivi parametri al tempo attuale:

$$kc^2 = H_0^2 a_0^2 (\Omega_0 - 1).$$

5.5 Redshift cosmologico

L'espansione dell'Universo causa un effetto di redshift legato dall'effetto Doppler, definito *redshift cosmologico*. Per ricavarlo si può partire dalla metrica (1.3), considerando che nel caso di un segnale elettromagnetico l'intervallo spazio-temporale è nullo, ovvero $ds^2 = 0$. Si chiami l'evento corrispondente all'emissione del segnale Q , di coordinate $(r = r_0, \vartheta = \vartheta_0, \phi = \phi_0, t = t_e)$, e l'evento corrispondente all'osservazione O , con coordinate $(r = 0, \vartheta = \vartheta_0, \phi = \phi_0, t = t_0)$. Allora si ha:

$$d\vartheta = 0,$$

$$d\phi = 0,$$

$$ds^2 = 0 = -c^2 dt + a^2(t) \frac{dr^2}{1 - kr^2}$$

$$\Rightarrow c \frac{dt}{a(t)} = - \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}},$$

dove il segno negativo è stato scelto per rendere consistenti gli andamenti del tempo e della coordinata radiale. Integrando da Q ad O :

$$\int_0^{r_0} \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}} = \int_{t_e}^{t_0} \frac{cdt}{a(t)}.$$

Dal momento che il segnale elettromagnetico è costituito da impulsi emessi con periodo dt_e nel sistema di riferimento della sorgente, il secondo impulso emesso a $t_e + dt_e$ verrà osservato a $t_0 + dt_0$ nel sistema dell'osservatore. Essendo la sorgente fissa a distanza comovente $r = r_0$, è possibile riscrivere la precedente equazione anche per il secondo segnale, modificando semplicemente gli estremi di integrazione del secondo membro:

$$\int_0^{r_0} \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}} = \int_{t_e + dt_e}^{t_0 + dt_0} \frac{cdt}{a(t)}.$$

Uguagliando le due precedenti equazioni e spezzando gli integrali negli intervalli $[t_e, t_e + dt_e]$, $[t_e + dt_e, t_0]$, $[t_0, t_0 + dt_0]$, si ottiene:

$$\int_{t_e}^{t_e+dt_e} \frac{cdt}{a(t)} + \int_{t_e+dt_e}^{t_0} \frac{cdt}{a(t)} = \int_{t_e+dt_e}^{t_0} \frac{cdt}{a(t)} + \int_{t_0}^{t_0+dt_0} \frac{cdt}{a(t)}.$$

Semplificando e osservando che $\frac{dt_e}{t_e} \ll 1$ e $\frac{dt_0}{t_0} \ll 1$, si avrà:

$$\frac{dt_e}{a(t_e)} = \frac{dt_0}{a(t_0)},$$

e sapendo che frequenza ν e tempo t sono inversamente proporzionali:

$$\frac{\nu_e}{\nu_0} = \frac{dt_0}{dt_e} = \frac{a(t_0)}{a(t_e)}.$$

Dalla definizione di redshift

$$z \equiv \frac{\nu_e - \nu_0}{\nu_0}$$

segue quindi che:

$$\frac{\nu_e}{\nu_0} = \frac{dt_0}{dt_e} = \frac{a(t_0)}{a(t_e)} = z + 1.$$

Il redshift cosmologico è quindi legato all'espansione dell'Universo, contrariamente al redshift precedentemente considerato che derivava dall'effetto Doppler relativistico.

6 Alcuni semplici modelli cosmologici

Vengono esaminati di seguito alcuni semplici modelli cosmologici derivanti dalle equazioni di Friedmann.

6.1 Universo di Milne

Corrisponde al più semplice caso, nel quale $\rho = 0$ (composto da particelle di massa nulla) e $k = -1$. Integrando l'equazione di Friedmann si ottiene un andamento del fattore di scala del tipo:

$$a(t) = \pm ct,$$

ovvero un'espansione (o contrazione) lineare uniforme e monotona.

6.2 Universo di Einstein-de Sitter

In questo caso lo spazio-tempo ha curvatura nulla $k = 0$ (è piatto) in espansione, con $\rho \neq 0$. Integrando (1.5) si ottiene:

$$a(t) = a_0 \left(\frac{t}{t_0} \right)^{\frac{2}{3}} \Rightarrow a(t) \propto t^{\frac{2}{3}} \quad (\text{dominato da materia}).$$

Si osserva che per $t \rightarrow \infty$ la derivata prima $\dot{a} \rightarrow 0$, mentre diverge per $t \rightarrow 0$. Inoltre, a $t = 0$ il fattore di scala diventa 0. Si verifica che a tale istante, detto del *Big Bang*, i parametri dinamici e termodinamici divergono.

Nel caso in cui la densità sia dominata dalla radiazione invece che dalla materia (ciò avviene ad alti redshift per i quali $k = 0$) il fattore di scala evolve come:

$$a(t) = a_0 \left(\frac{t}{t_0} \right)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow a(t) \propto t^{\frac{1}{2}} \quad (\text{dominato da radiazione}),$$

con un andamento diverso quindi da quello del modello di Einstein-de Sitter, e che si applica nelle prime fasi espansive.

6.3 Universo aperto

È il caso con $\rho > 0$ e $k = -1$. L'equazione (1.5) indica che in tali condizioni il fattore di scala mantiene una derivata positiva $\dot{a}^2 > 0$ per ogni valore di t , ovvero un'espansione infinita. Per valori del fattore di scala molto grandi (ovvero al crescere di t) comincia a dominare il termine kc^2 , diventando così la soluzione $\dot{a}^2(t) = \pm c$ e facendo tendere dunque ad un modello di Milne.

6.4 Universo chiuso

Corrisponde al caso con $\rho > 0$ e $k = 1$. Sempre dalla (1.5) si ottiene che, in seguito ad un'espansione, per tempi sufficientemente avanzati, $\dot{a}^2(t_c) = 0$, corrispondente ad un particolare valore:

$$a(t_c) = a_c = \frac{8\pi}{3c^2} G \rho_0 a_0^3.$$

Per $t > t_c$ la derivata seconda cambia segno e il fattore di scala comincia a decrescere raggiungendo nuovamente il valore 0 ad un certo tempo (detto del *Big Crunch*).

È utile osservare che qualunque sia il valore di k , il primo addendo dell'equazione di Friedmann tende a dominare per valori sufficientemente piccoli di $a(t)$, e quindi la soluzione (univoca) coincide in questo limite con il modello Einstein-de Sitter. Quest'ultimo rappresenta quindi il modello di riferimento per epoche antiche dell'Universo.

7 La Costante Cosmologica

Credendo l'Universo fosse di natura statica, Einstein decise di introdurre un termine nelle proprie equazioni di campo che compensasse gli effetti dovuti alla curvatura dello spazio-tempo. Tale bilanciamento risulta però essere instabile a piccole perturbazioni, rendendo di fatto impossibile applicare un simile modello alla realtà. La presenza del nuovo termine Λ , detto *costante cosmologica*, è oggi giustificata dalle osservazioni dell'accelerazione dell'Universo. Le equazioni di Friedmann prendono dunque la forma:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi}{3}G\rho - \frac{kc^2}{a^2} + \frac{\Lambda}{3} \quad ,$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi}{3}G\left(\rho + \frac{3p}{c^2}\right) + \frac{\Lambda}{3} \quad .$$

È conveniente introdurre il parametro di densità della costante cosmologica:

$$\Omega_\Lambda = \frac{\Lambda}{3H^2} \quad ,$$

e correggendo la relazione trovata precedentemente si trova:

$$kc^2 = H_0^2 a_0^2 (\Omega_m + \Omega_\Lambda - 1) \quad ,$$

dove è stato rinominato il parametro $\Omega \equiv \Omega_m$ riferito alla materia gravitante. Le più recenti misure suggeriscono valori quali:

$$\Omega_m \simeq 0.3 \quad , \quad \Omega_\Lambda \simeq 0.7 \quad .$$

7.1 Interpretazione di Λ

È utile descrivere Λ come un fluido di densità ρ_Λ e pressione p_Λ . Definendo:

$$\rho_\Lambda = \frac{\Lambda}{8\pi G} \quad (\text{da cui } p_\Lambda = -\rho_\Lambda c^2) \quad ,$$

la seconda equazione di Friedmann diventa:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi}{3}G\left(\rho + \rho_\Lambda + \frac{3p_\Lambda}{c^2}\right) \quad ,$$

da cui:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi}{3}G(\rho - 2\rho_\Lambda) \quad .$$

Essendo la pressione p_Λ negativa, si capisce come la costante cosmologica agisca con un effetto opposto a quello della gravità.

7.2 Modello cosmologico con Λ

Risolvendo le equazioni di Friedmann con la costante cosmologica si può ricavare l'evoluzione del fattore di scala nel momento in cui Λ diventa il termine dominante, ovvero:

$$a(t) \propto \exp \left[\left(\frac{\Lambda}{3} \right)^{\frac{1}{2}} t \right].$$

Tale andamento risulta essere valido per bassi redshift, per i quali quindi gli effetti della costante cosmologica diventano dominanti.

Capitolo 2

Il Fondo Cosmico Di Microonde

1 Proprietà e origine

Teorizzato nel 1948 da George Gamow come conseguenza del disaccoppiamento della materia dalla radiazione, il *fondo cosmico di microonde* (abbreviato in CMB¹) rappresentava un test osservativo decisivo per la conferma della teoria del Big Bang. L'effettiva scoperta avvenne nel 1965 ad opera di Arno Penzias e Robert Wilson. Il CMB rappresenta un canale d'informazione diretto sull'Universo primordiale, ed è quindi di importanza cruciale per la cosmologia moderna.

Il CMB è la componente fotonica dominante nell'Universo, contribuendo in altissima percentuale all'energia di radiazione totale su tutte le lunghezze d'onda, come si evince da Fig.2.1. Caratterizzato da un accurato spettro di corpo nero con temperatura $T_0 = 2.725 \pm 0.001$ K e picco a $\lambda \approx 2$ mm, presenta inoltre un elevato grado di isotropia angolare, essendo le fluttuazioni di temperatura di intensità minore di una parte su 100000.

1.1 Disaccoppiamento

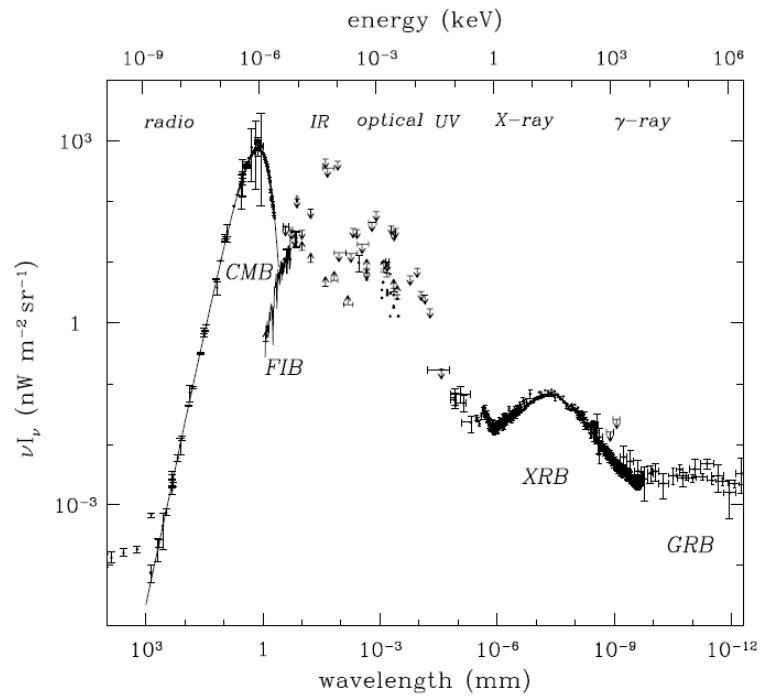
È facile dimostrare che la densità di radiazione ρ_γ evolve nel tempo secondo $\rho_\gamma \propto a(t)^{-4}$. Sapendo che

$$\rho_\gamma = \varepsilon_\gamma / c^2 \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_\gamma = \rho_\gamma c^2,$$

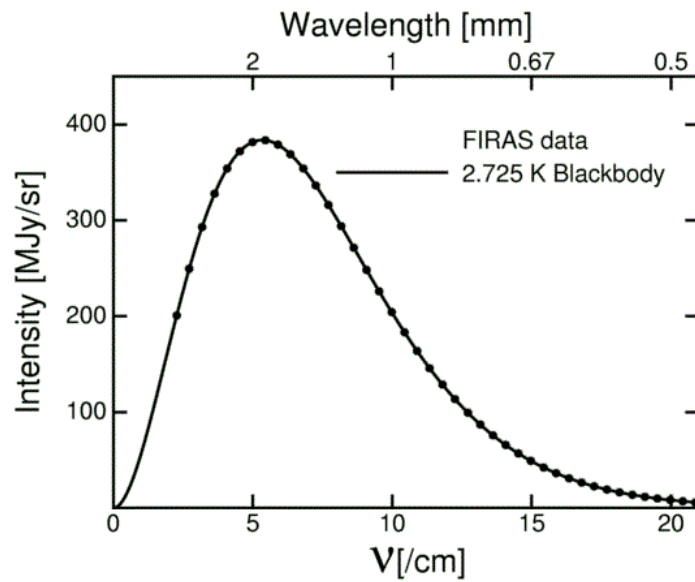
e ricordando la legge di Steffan-Boltzmann

$$\varepsilon_\gamma = \int_0^\infty d\nu \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3}{\exp \frac{h\nu}{k_B T} - 1} = \alpha T^4 \quad , \quad \alpha = \frac{\pi^2 k_B^4}{15 \hbar^3 c^3},$$

¹Cosmic Microwave Background



(a) Viene qui mostrato lo spettro dei diversi fondi cosmici su un largo intervallo di frequenza.



(b) Viene qui presentato lo spettro del fondo cosmico nelle microonde, misurato dallo spettrofotometro FIRAS montato su COBE, con barre d'errore talmente piccole da non essere distinguibili.

Figura 2.1

si può dedurre che

$$T \propto \frac{1}{a(t)} \propto (1+z).$$

Questo risultato permette quindi di dire che l'Universo si raffredda espandendosi. Si comprende a questo punto come nell'Universo primordiale, quindi per redshift sufficientemente alti, l'energia dei fotoni fosse di gran lunga superiore ai 13.6 eV necessari a ionizzare un atomo di idrogeno. In tali condizioni si può quindi vedere l'Universo come composto da un plasma di elettroni liberi e nucleoni, ed inoltre, dal momento che la radiazione interagisce fortemente con elettroni liberi attraverso lo scattering di Thomson, si ha che il cammino libero medio dei fotoni è molto corto, rendendo di fatto l'Universo *opaco* alla radiazione. Raggiunta una temperatura $T_{\text{rec}} \simeq 3000 \text{ K}$ (per $z_{\text{rec}} \simeq 1100$), i fotoni non ebbero più sufficiente energia per ionizzare e cominciarono a formarsi atomi di idrogeno (fase di *ricombinazione*). In un breve intervallo di tempo tutti gli elettroni si legarono ai nucleoni, e i fotoni, interagendo meno efficacemente con gli atomi, furono in grado di proseguire il loro viaggio indisturbati. Quest'ultima fase prende il nome di *disaccoppiamento*.

1.2 Superficie di ultimo scattering

L'epoca del disaccoppiamento può essere considerata come la superficie di un'enorme sfera centrata nella nostra posizione, chiamata *superficie di ultimo scattering*. È su tale superficie che si originano i fotoni del CMB osservati. Non essendo la nostra una posizione privilegiata, per ogni altro osservatore posto in un diverso punto dell'Universo esisterà una diversa sfera centrata in tale punto, ed esisterà quindi una diversa superficie di ultimo scattering.

2 Anisotropie del CMB

Per quanto piccole, il CMB presenta delle fluttuazioni di temperatura, che possono essere divise in due gruppi: anisotropie *primarie* ed anisotropie *secondarie*. Le anisotropie primarie sono causate da disomogeneità presenti sulla superficie di ultimo scattering, mentre le anisotropie secondarie sono dovute a processi a cui vengono sottoposti i fotoni nel percorso che compiono dall'istante della loro emissione all'osservazione. Il contributo dominante nella fluttuazione globale di temperatura è dato dalle anisotropie primarie. Le tre quantità che influenzano la temperatura dei fotoni sono:

- fluttuazioni del potenziale gravitazionale $\delta\phi$;
- fluttuazioni di densità δ ;
- velocità \mathbf{v} della Terra.

L'effetto della velocità rientra nell'effetto Doppler dovuto al moto relativo della Terra rispetto al sistema di riferimento in cui il CMB è perfettamente isotropo. Le variazioni di densità, ovvero compressioni ed espansioni, si traducono sulla superficie di ultimo scattering in un riscaldamento ed un raffreddamento del plasma. L'effetto che però più interessa ai fini di questa tesi è quello dovuto alla gravità, detto *effetto Sachs-Wolfe* (SW), di cui l'*effetto Sachs-Wolfe Integrato* (ISW) ne è un caso particolare.

2.1 Analisi statistica

Per effettuare uno studio statistico delle anisotropie definiamo:

$$\frac{\delta T}{T}(\vartheta, \phi) \equiv \frac{T(\vartheta, \phi) - \langle T \rangle}{\langle T \rangle} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} a_{\ell m} Y_{\ell m}(\vartheta, \phi),$$

dove si è utilizzata l'espansione in armoniche sferiche, definite come:

$$Y_{\ell m}(\vartheta, \phi) = \sqrt{\frac{2\ell + 1}{4\pi} \frac{(\ell - m)!}{(\ell + m)!}} P_{\ell}^m(\cos \vartheta) e^{im\phi}$$

con $P_{\ell}^m(\cos \vartheta)$ polinomi di Legendre. Il termine $\langle T \rangle$ rappresenta il valor medio di T . Le armoniche sferiche sono funzioni ortonormali:

$$\int_{4\pi} d\Omega Y_{\ell m}(\vartheta, \phi) Y_{\ell' m'}^*(\vartheta, \phi) = \delta_{\ell\ell'} \delta_{mm'} \quad (d\Omega = \sin \vartheta d\vartheta d\phi),$$

dove l'asterisco denota il complesso coniugato. Si ricava facilmente l'espressione per i coefficienti $a_{\ell m}$:

$$a_{\ell m} = \int_{4\pi} d\Omega \frac{\delta T}{T}(\vartheta, \phi) Y_{\ell m}^*(\vartheta, \phi).$$

Tali coefficienti rappresentano la fluttuazione su scale angolari $\Delta\theta \sim \pi/\ell$. I primi quattro termini dell'espansione non sono legati a fluttuazioni intrinseche della temperatura; il termine di monopolo, dato da $(\ell = 0, m = 0)$, descrive la temperatura media; il termine di dipolo, dato da $(\ell = 1, m = -1, 0, 1)$, descrive l'effetto Doppler precedentemente menzionato.

Si definisce lo *spettro di potenza angolare* come:

$$C_{\ell} = \frac{1}{2\ell + 1} \sum_{m=-\ell}^{\ell} |a_{\ell m}|^2 = \langle |a_{\ell m}|^2 \rangle,$$

che è indipendente dall'orientazione descritta da m e rappresenta l'intensità del multipolo di momento ℓ . Nel seguito saranno presi in considerazione piccoli valori di ℓ , a cui corrispondono grandi scale angolari $\Delta\theta$. È importante

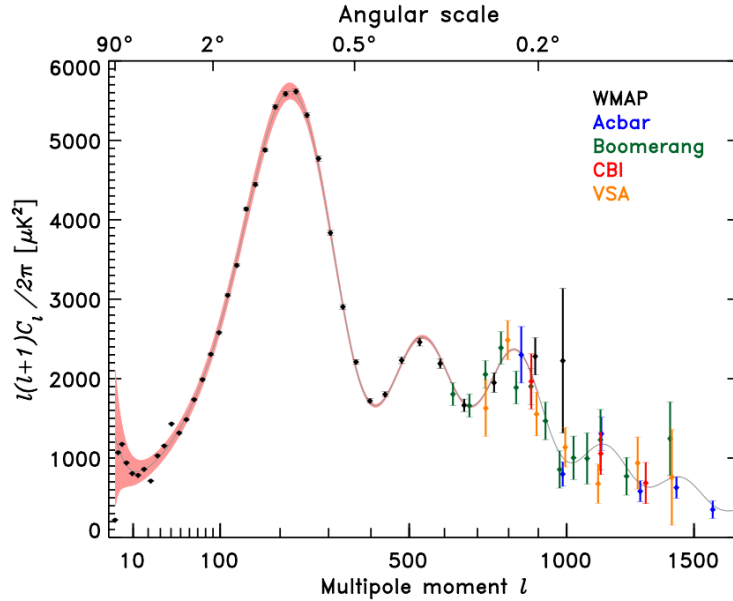


Figura 2.2: Viene qui mostrato lo spettro di potenza angolare del CMB.

osservare che il simbolo $\langle \cdot \rangle$ denota, dal punto di vista teorico, una media calcolata tra tutti i possibili osservatori nel nostro Universo, che, assumendo valida l'*ipotesi ergodica*, è equivalente alla media sull'insieme statistico. Dal momento che i valori che m assume nel calcolo della media sono soltanto $2\ell + 1$, emerge un limite inferiore all'errore legato a C_ℓ , chiamato *varianza cosmica* e descritto da:

$$\left(\frac{\Delta C_\ell}{C_\ell} \right)^2 = \frac{2}{2\ell + 1},$$

che diventa tanto più grande quanto più $\ell \rightarrow 0$. È possibile osservare tale limite in Figura 2.2, denotato con la fascia rossa.

3 Effetto Sachs-Wolfe

Le fluttuazioni di temperatura relative all'effetto Sachs-Wolfe sono dovute a due diversi effetti che si cancellano parzialmente:

- redshift (o blueshift) gravitazionale;
- dilatazione del tempo.

Un fotone emesso in corrispondenza di una buca (risp. cresta) di potenziale, generata da fluttuazioni di densità nel plasma, sarà costretto a perdere (risp. acquisire) energia per uscire dalla buca (risp. cresta). Dalla Relatività

Generale si sa che vale in termini di frequenza:

$$\frac{\delta\nu}{\nu} = \frac{\delta\phi}{c^2},$$

ma sapendo che $\nu \propto T$, si ottiene:

$$\frac{\delta T_1}{T} = \frac{\delta\nu}{\nu} = \frac{\delta\phi}{c^2},$$

che è il primo contributo. Per valutare il secondo contributo bisogna ricordare che in corrispondenza di una buca di potenziale il tempo scorre più lentamente, e ciò porta ad osservare un'epoca più antica e quindi con una temperatura maggiore. Si ha che:

$$\frac{\delta t}{t} = -\frac{\delta\phi}{c^2}.$$

Questo significa che il fotone raggiungerà una temperatura $T_{\text{rec}} \simeq 3000$ K per un valore del fattore di scala $a + \delta a > a$. Prendendo in considerazione un'evoluzione del fattore di scala del tipo $a \propto t^{\frac{2}{3}}$, è possibile scrivere:

$$\frac{\delta a}{a} = \frac{2}{3} \frac{\delta t}{t} = -\frac{2}{3} \frac{\delta\phi}{c^2}.$$

Dall'istante di emissione all'istante di osservazione il redshift sarà diminuito a causa dell'espansione di:

$$\frac{\delta z}{z} = -\frac{\delta a}{a},$$

da cui:

$$\frac{\delta T_2}{T} = -\frac{\delta z}{z} = \frac{\delta a}{a} = -\frac{2}{3} \frac{\delta\phi}{c^2}.$$

In totale si avrà:

$$\frac{\delta T}{T} = \frac{\delta T_1}{T} + \frac{\delta T_2}{T} = \frac{\delta\phi}{c^2} - \frac{2}{3} \frac{\delta\phi}{c^2} = \frac{1}{3} \frac{\delta\phi}{c^2}.$$

Si può ora ricavare l'andamento dello spettro di potenza per l'effetto Sachs-Wolfe. Si può dimostrare che vale:

$$C_\ell^{SW} = \frac{1}{2\ell + 1} \sum_{m=-\ell}^{\ell} |a_{\ell m}|^2 = \frac{4\pi}{25} \int_0^\infty \frac{dk}{k} \mathcal{P}(k) j_\ell(kx)^2,$$

dove $j_\ell(x)$ è la funzione di Bessel sferica. Dall'espressione si nota chiaramente la dipendenza dallo spettro di potenza primordiale $\mathcal{P}(k)$. Scegliendo dunque $\mathcal{P}(k) = \text{cost.} = A^2$, si ottiene:

$$C_\ell^{SW} = A^2 \frac{4\pi}{25} \int_0^\infty \frac{dk}{k} j_\ell(kx)^2 = \frac{A^2}{25} \frac{2\pi}{\ell(\ell + 1)},$$

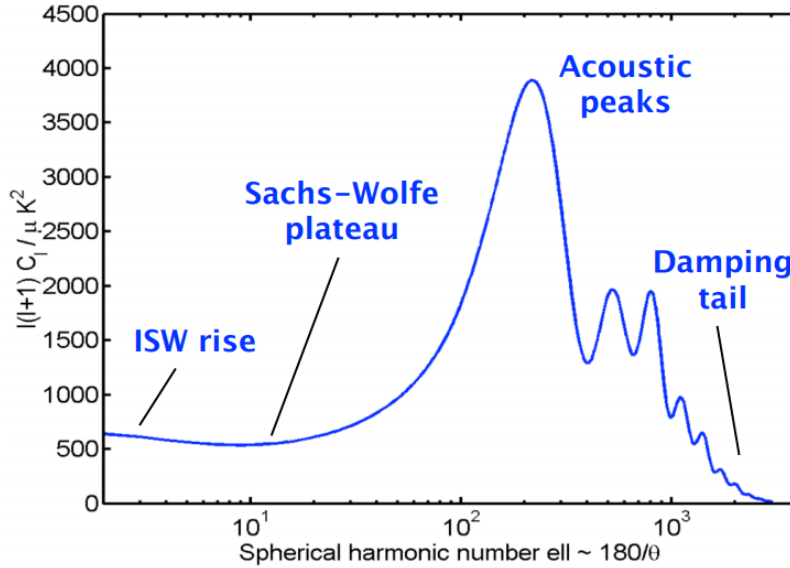


Figura 2.3: Si può qui notare come per piccoli ℓ , in corrispondenza del *Sachs-Wolfe plateau*, lo spettro di potenza tenda ad appiattirsi. Il rialzamento per $\ell \rightarrow 0$ è dovuto all'effetto Sachs-Wolfe Integrato.

poiché

$$\int_0^\infty \frac{dk}{k} j_\ell(kx)^2 = \frac{1}{2\ell(\ell+1)}.$$

Lo spettro di potenza presenta quindi, per piccoli valori di ℓ , un andamento del tipo:

$$C_\ell^{SW} \sim \frac{1}{\ell(\ell+1)} \Leftrightarrow \frac{\ell(\ell+1)}{2\pi} C_\ell^{SW} = \text{cost.}$$

3.1 Effetto Sachs-Wolfe Integrato

In seguito alla loro emissione sulla superficie di ultimo scattering, i fotoni interagiscono con la materia attraverso la gravità. In un Universo in espansione accelerata (con $\Omega_\Lambda > 0$), le buche di potenziale incontrate dai fotoni durante il loro percorso variano nel tempo, provocando una graduale diminuzione del potenziale gravitazionale locale ϕ (si veda Figura 2.4). Questa variazione del potenziale viene poi trasmessa ai fotoni che entrando nella buca subiscono un blueshift, ma uscendo risentono di un redshift di minore intensità.

Si definisce come nuova coordinata temporale il *tempo conforme* $d\eta = dt/a(t)$; si dimostra che la fluttuazione di temperatura complessiva dovuta alla va-

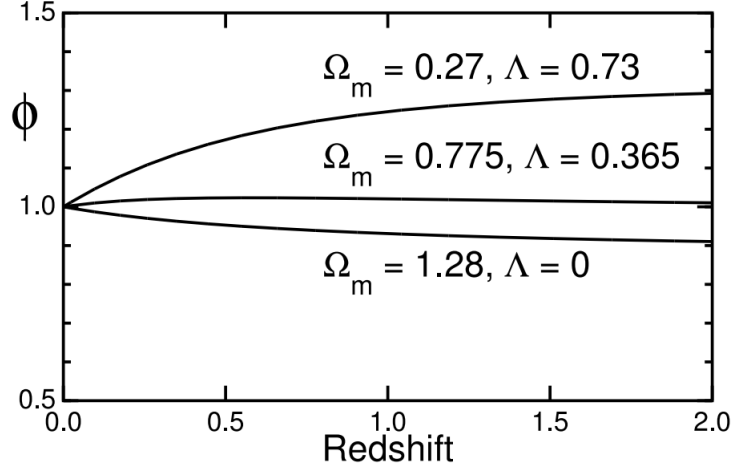


Figura 2.4: Viene qui riportato l'andamento del potenziale gravitazionale ϕ come funzione del redshift z per diversi modelli cosmologici, normalizzati all'unità per $z = 0$. Il parametro Λ è il parametro di densità dell'energia oscura Ω_Λ .

riazione temporale del potenziale ϕ è:

$$\frac{\delta T}{T}(\hat{n}) = -\frac{2}{c^2} \int_{\eta_0}^{\eta_{\text{dec}}} d\eta \frac{\partial \phi}{\partial \eta}(\eta \hat{n}), \quad (2.1)$$

dove l'integrale è valutato da oggi ($\eta = \eta_0$) alla superficie di ultimo scattering a $z = z_{\text{dec}}$ ($\eta = \eta_{\text{dec}}$) lungo la linea di vista, identificata dal versore \hat{n} . Tale effetto prende il nome di effetto Sachs-Wolfe Integrato, ed è tanto più importante quanto più è dominante l'espansione dell'Universo. Per tale motivo l'ISW è più presente a bassi redshift (e prende il nome di *late ISW*), per i quali l'Universo è dominato dalla costante cosmologica. Dal momento che quest'ultimo effetto si riferisce a tutto l'Universo a bassi redshift, quelle interessate sono le grandi scale angolari (ovvero $\ell \rightarrow 0$). Si può osservare infatti come per ℓ molto piccoli lo spettro di potenza sia rialzato rispetto all'andamento costante legato al SW ordinario.

L'effetto Sachs-Wolfe Integrato è di grande interesse per la cosmologia moderna in quanto fornisce uno strumento per la misurazione degli effetti dinamici dell'energia oscura sulla formazione ed evoluzione delle strutture cosmiche.² Nel prossimo capitolo verrà analizzata proprio questa correlazione.

²Non essendo l'energia oscura dinamicamente accoppiata alla materia oscura o barionica, essa può contribuire soltanto modificando il fattore di scala $a(t)$, il quale poi interviene nella formazione delle strutture cosmiche.

Capitolo 3

Cross-Correlazione CMB-LSS

L'effetto Sachs-Wolfe Integrato è di debole intensità anche per scale angolari molto piccole, e per tale motivo viene facilmente mascherato dalla varianza cosmica, fattore che rende arduo il compito di misurare tale effetto. Nonostante ciò, essendo un'anisotropia secondaria, l'ISW è dovuto ad interazioni tra fotoni e gravità che prendono luogo durante il viaggio del fotone nell'Universo. Si sa che il potenziale gravitazionale è legato alla distribuzione di materia tramite l'equazione di Poisson (in coordinate comoventi):

$$\nabla^2\phi = 4\pi G a^2 \delta\langle\rho\rangle, \quad (3.1)$$

dove $\delta(\mathbf{x})$ è la fluttuazione di densità frazionaria nel punto \mathbf{x} definita come:

$$\delta(\mathbf{x}) = \frac{\rho(\mathbf{x}) - \langle\rho\rangle}{\langle\rho\rangle} = \frac{\delta\rho}{\rho}.$$

Proprio perchè il potenziale ϕ è collegato alla distribuzione di materia dalla (3.1) e al CMB tramite (2.1), è possibile mettere in relazione l'ISW con la distribuzione di materia, della quale la distribuzione di sorgenti è un tracciante. La distribuzione di sorgenti è data dai cataloghi dei conteggi di sorgenti, che campionano diverse porzioni di cielo a diversi intervalli di profondità (espressa attraverso il redshift).

1 Conteggi di sorgenti

Come accennato, i conteggi di sorgenti, in particolare di galassie, sono un tracciante della distribuzione di materia sottostante. Questo significa mettere in relazione una distribuzione discreta di galassie con una distribuzione continua di materia (oscura). Dal momento che la materia oscura interagisce solo gravitazionalmente, e le osservazioni compiute sono fatte in base all'emissione di onde elettromagnetiche, non è ancora chiara la precisa relazione che intercorre tra materia barionica (luminosa) e materia oscura sottostante.

Definendo la distribuzione di galassie (discreta) δn , si può scrivere:

$$\delta n = b \delta \rho,$$

dove b è il cosiddetto *fattore di bias*, che in generale è funzione della densità e dei vari processi fisici che stanno alla base della formazione delle strutture. Ciò nonostante, nella maggior parte dei casi l'assunzione $b = \text{cost.}$ è una buona approssimazione.

Per tenere conto di questo bias, si può esprimere la densità numerica di sorgenti per steradiante, $n(z, \hat{n})$, tramite:

$$n(z, \hat{n}) dz d\Omega = \frac{dN}{dz} [1 + b(z) \delta(z, \hat{n})] dz d\Omega,$$

dove $\frac{dN}{dz}$ è il numero medio di sorgenti per steradiante a redshift z . Allora, la fluttuazione del numero di sorgenti nella direzione \hat{n} sarà dato da:

$$\delta N(\hat{n}) = \int dz b(z) \frac{dN}{dz} \delta(z, \hat{n}). \quad (3.2)$$

Per ottenere quindi un risultato valido è importante individuare la distribuzione di sorgenti complessiva $\frac{dN}{dz}$ che permetta di interpolare al meglio la funzione di autocorrelazione del catalogo. A titolo d'esempio, è riportata in Figura 3.1 tale distribuzione per il catalogo NVSS¹, trovata dividendo le sorgenti in due classi distinte in base alla forma spettrale $S \propto \nu^{-\alpha}$, caratterizzate in particolare una da *spettri piatti* ($\alpha \approx 0$) e l'altra da *spettri con pendenza* ($\alpha \approx 0.8$).

L'altro parametro di cui si necessita è il fattore di bias b . Questo termine può essere determinato una volta fissati i parametri cosmologici dall'ampiezza della funzione di autocorrelazione:

$$C^{\text{NN}}(\vartheta) = \langle \delta N(\hat{n}) \delta N(\hat{n}') \rangle,$$

che è a sua volta funzione dei coefficienti angolari C_ℓ^{NN} che definiscono lo spettro di potenza angolare, la cui espressione è:

$$C_\ell^{\text{NN}} = 4\pi \int \frac{dk}{k} \Delta_\delta^2(k) [f_\ell^{\text{N}}(k)]^2,$$

dove $\Delta_\delta^2(k) = k^3 P_\delta(k) / 2\pi^2$ è lo spettro di potenza logaritmico delle fluttuazioni di densità, ovvero $P_\delta(k) = \langle |\delta(k)|^2 \rangle$. Il termine $\delta(k)$ è la trasformata di Fourier del campo di fluttuazioni reale $\delta(x)$:

$$\delta(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-ikx} \delta(x).$$

¹ Acronimo di "NRAO VLA Sky Survey".

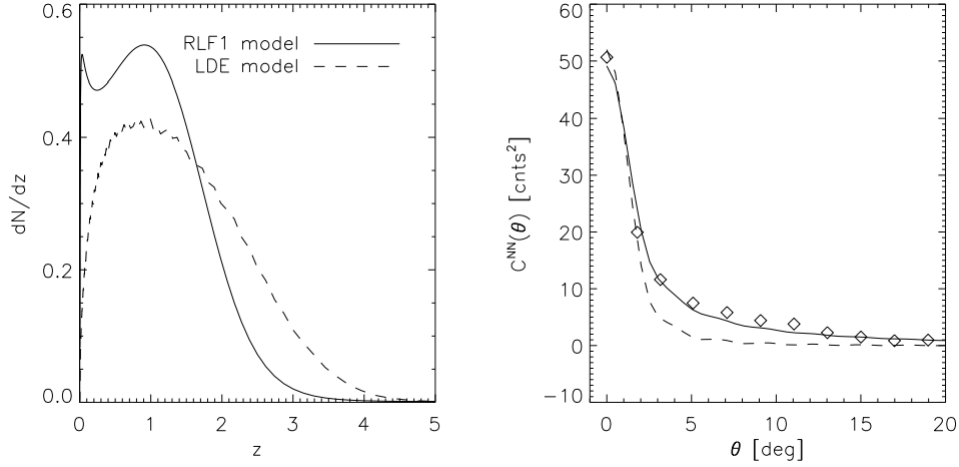


Figura 3.1: È qui presentato (a sinistra) il modello di dN/dz utilizzato per la distribuzione di sorgenti del catalogo NVSS trovato da Dunlop & Peacock. È inoltre rappresentato il modello "luminosity/density evolution" (LDE) che però non fornisce un buon fit della funzione di autocorrelazione $C^{NN}(\vartheta)$ (nel pannello di destra).

Infine, la funzione $f_\ell^N(k)$ è la cosiddetta *funzione filtro*, che è rappresentata da:

$$f_\ell^N(k) = b \int dz \frac{dN}{dz} D(z) j_\ell(k\eta),$$

con $j_\ell(x)$ funzione di Bessel sferica. Il fattore $D(z)$ è il *fattore di crescita* (in inglese *growth factor*), e permette di descrivere l'evoluzione temporale di $\delta(\mathbf{x}, z)$ (o analogamente di $\delta(\mathbf{k}, z)$ nello spazio di Fourier). Infatti si ha:

$$\delta(\mathbf{x}, z) = D(z) \delta(\mathbf{x}, 0),$$

$$\delta(\mathbf{k}, z) = D(z) \delta(\mathbf{k}, 0).$$

Nella situazione considerata il fattore di crescita è detto *lineare*², e ad esempio, in un Universo di Einstein-de Sitter di materia si ha $D(z) \propto a(z)$, dove $a(z)$ è il fattore di scala, mentre in un universo dominato da Λ il fattore di crescita viene soppresso.

2 Cross-Correlazione

A questo punto è possibile definire la funzione di correlazione tra i conteggi del catalogo e le anisotropie del CMB, in modo da calcolarne lo spettro:

$$C_\ell^{NT} = \langle a_{\ell m}^N a_{\ell m}^{T*} \rangle = 4\pi \int \frac{dk}{k} \Delta_\delta^2(k) f_\ell^N(k) f_\ell^T(k),$$

²Il termine fa riferimento al fatto che lo studio del sistema è effettuato in regime lineare.

espressione ricavabile combinando la (2.1) e la (3.2). Le funzioni sono rispettivamente le funzioni filtro del catalogo (menzionata precedentemente) e dell'effetto ISW, la seconda derivabile in maniera analoga alla prima. Infatti, partendo dall'equazione di Poisson in coordinate comoventi (3.1) ed calcolando la trasformata di Fourier, si ottiene la seguente espressione per il potenziale (nello spazio di Fourier):

$$\phi(k, \eta) = -\frac{3}{2}\Omega \left(\frac{H_0}{k}\right)^2 g(\eta) \delta(k),$$

dove è stata definita la funzione:

$$g(\eta) \equiv \frac{D(\eta)}{a(\eta)},$$

nota come *fattore di soppressione di crescita lineare*. Da qui si ottiene:

$$f_\ell^T(k) = 3\Omega \left(\frac{H_0}{k}\right)^2 \int d\eta \frac{dg}{d\eta} j_\ell(k\eta).$$

2.1 Correlazione con l'energia oscura

Una volta misurata la cross-correlazione tra il catalogo di conteggi e le anisotropie dovute all'ISW, è possibile identificare i parametri cosmologici che permettono di ottenere il miglior fit. In questo modo è possibile trovare dei vincoli sul parametro di densità dell'energia oscura Ω_Λ , come mostrato in Figura 3.2.

2.2 Cross-Correlazione WMAP-NVSS

Il ragionamento sopra esposto è stato applicato ad esempio ai dati del *Wilkinson Microwave Anisotropy Probe* (WMAP) e al catalogo NVSS. In Figura 3.3 vengono mostrati i principali risultati trovati.

Analizzando i risultati si osserva che la correlazione è ben presente, e porta ad affermare che vi è un intervallo di confidenza di 2.2σ che la densità di energia oscura sia positiva (Ω_Λ). Inoltre, con il test del χ^2 è stato trovato come valore $\Omega_\Lambda = 0.68$, un valore consistente anche con altri risultati provenienti da altre derivazioni.

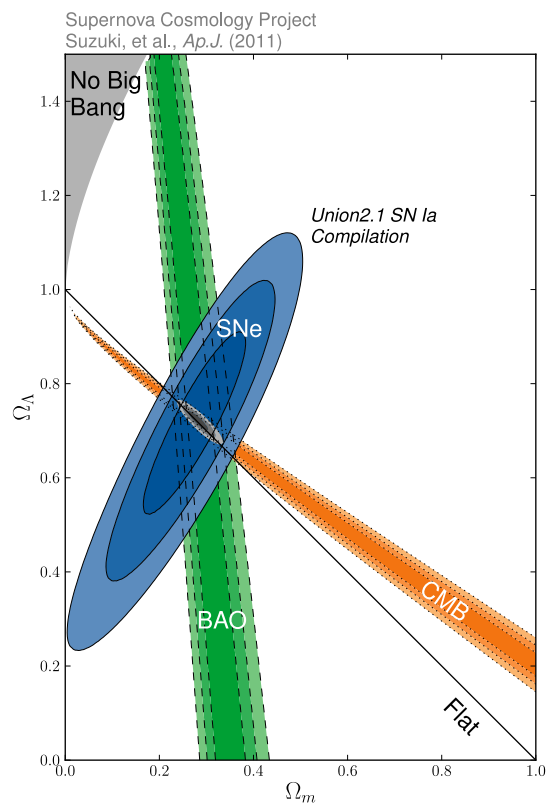


Figura 3.2: Viene qui riportato il grafico che mostra le zone di confidenza dei parametri Ω_m e Ω_Λ . Come si può osservare, oltre ai vincoli trovati analizzando il CMB, è possibile utilizzare altri mezzi, come ad esempio le Supernovae di tipo Ia.

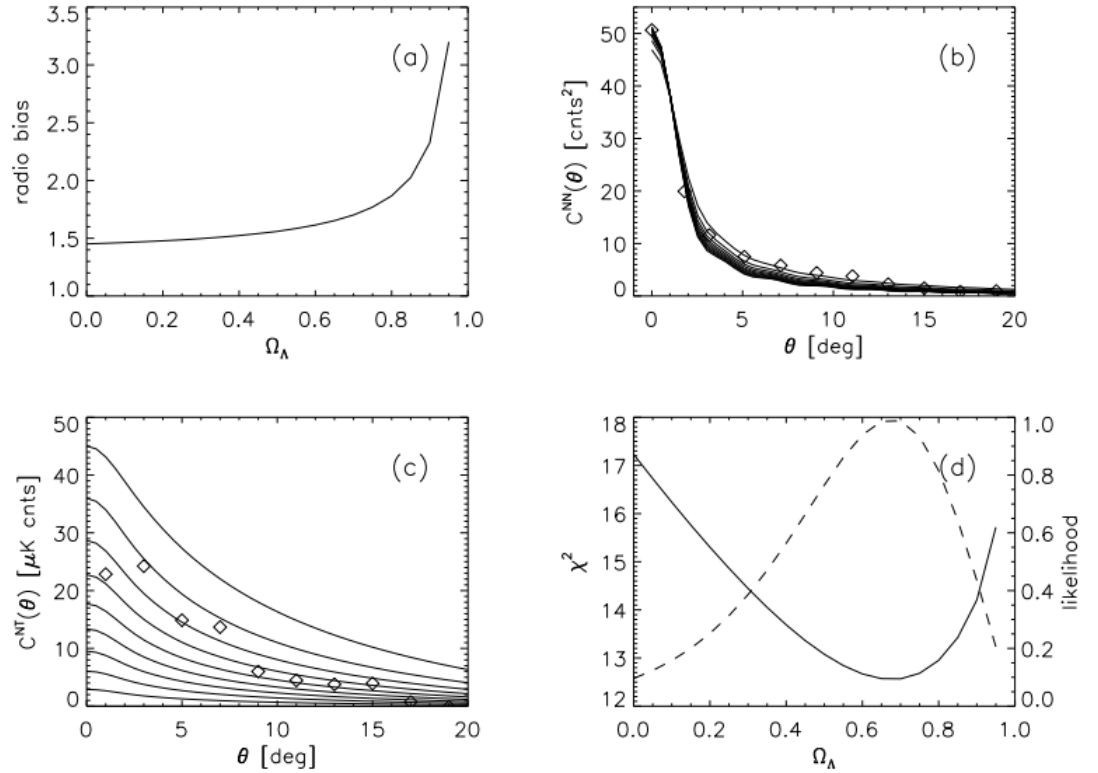


Figura 3.3: Vengono qui riportate diverse quantità in funzione di Ω_Λ . In (a) viene mostrato il fattore di bias per sorgenti radio calcolato b_r . In (b) viene riportato un confronto tra la funzione di autocorrelazione $C^{NN}(\vartheta)$ del catalogo NVSS per diversi valori di Ω_Λ con la funzione di autocorrelazione misurata (quadrati). In (c) è riportata la funzione di cross-correlazione $C^{NT}(\vartheta)$ per diversi valori di Ω_Λ , e viene comparata con quella misurata (quadrati). Infine, in (d) viene riportato il valore della funzione χ^2 , minimizzata per trovare il valore di Ω_Λ che permettesse di costruire il miglior fit di $C^{NT}(\vartheta)$.

Appendice A

Funzioni speciali

Vengono riportate di seguito brevi richiami riguardo a particolari funzioni utili per la comprensione dell'elaborato.

1 Armoniche Sferiche

Le *armoniche sferiche* sono le autofunzioni della parte angolare del Laplaciano, ovvero:

$$\left[\frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right] Y_{\ell m}(\vartheta, \phi) = -\ell(\ell+1) Y_{\ell m}(\vartheta, \phi). \quad (\text{A.1})$$

Dal momento che il campo di fluttuazioni di temperatura del CMB è definito sulla sfera (ovvero è funzione di (ϑ, ϕ)), in analogia con l'espansione in serie di Fourier, è possibile espanderlo in armoniche sferiche.

Queste funzioni sono ortonormali:

$$\int_{4\pi} d\Omega Y_{\ell m}(\vartheta, \phi) Y_{\ell' m'}^*(\vartheta, \phi) = \delta_{mm'} \delta_{\ell\ell'}, \quad (\text{A.2})$$

dove

$$d\Omega = \sin \vartheta d\vartheta d\phi.$$

Risulta di una certa utilità anche il seguente *teorema dell'addizione* delle armoniche sferiche, che afferma che:

$$\sum_{m=-\ell}^{\ell} Y_{\ell m}(\hat{n}) Y_{\ell m}^*(\hat{n}') = \frac{2\ell+1}{4\pi} P_{\ell}(\hat{n} \cdot \hat{n}'), \quad (\text{A.3})$$

dove $P_{\ell}(x)$ è polinomio di Legendre di grado ℓ , definito come la soluzione dell'equazione differenziale:

$$\frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{dP_{\ell}(x)}{dx} \right] + \ell(\ell+1) P_{\ell}(x) = 0.$$

Un'espressione alternativa è data dalla *formula di Rodriguez*:

$$P_\ell(x) = \frac{1}{2^\ell \ell!} \frac{d^\ell}{dx^\ell} (x^2 - 1)^\ell.$$

2 Funzioni di Bessel sferiche

Le *funzioni di Bessel sferiche* sono le soluzioni dell'equazione differenziale:

$$\frac{d^2 j_\ell(x)}{dx^2} + \frac{2}{x} \frac{d j_\ell(x)}{dx} + \left[1 - \frac{\ell(\ell+1)}{x^2} \right] j_\ell(x) = 0 \quad (\text{A.4})$$

Esiste la seguente relazione che lega le funzioni sferiche di Bessel con i polinomi di Legendre:

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^1 dt P_\ell(t) e^{ixt} = \frac{j_\ell(x)}{(-i)^\ell}.$$

Invertendo la relazione precedente, si trova un'utile espansione in onde piane:

$$e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} = \sum_{\ell=0}^{\infty} i^\ell (2\ell+1) j_\ell(kx) P_\ell(\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{x}}).$$

3 Trasformata di Fourier

La *trasformata di Fourier* è definita come:

$$f(\mathbf{k}) = \int_{-\infty}^{+\infty} d^3\mathbf{x} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} f(\mathbf{x}), \quad (\text{A.5})$$

mentre l'*antitrasformata di Fourier* è data da:

$$f(\mathbf{x}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} f(\mathbf{k}). \quad (\text{A.6})$$

Da qua è possibile quindi definire lo spettro di potenza come:

$$\langle \delta(\mathbf{k}) \delta(\mathbf{k}') \rangle \equiv (2\pi)^3 P(k) \delta_D^{(3)}(\mathbf{k} + \mathbf{k}'),$$

dove il simbolo $\delta_D^{(3)}$ denota la *Delta di Dirac tridimensionale*.

Bibliografia

- [1] Crittenden, R.G., Turok, N. 1996, *Phys.Rev.Lett.*76:575
- [2] Dodelson, S. 2003, *Modern Cosmology*, Academic Press, Elsevier Inc., San Diego
- [3] Franceschini, A. 2013, *Corso di Cosmologia. Laurea Triennale in Astronomia.*, Padova
- [4] W. Hu's Tutorials: <http://background.uchicago.edu/index.html>
- [5] Liddle, A. 2003, *An Introduction to Modern Cosmology*, Wiley, Chichester, West Sussex
- [6] Nolta, M.R. et al. 2004, *Astrophys.J.*608:10-15
- [7] White, M., Hu, W. 1997, *Astron.Astrophys.*321:8-9