



UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI PADOVA

DIPARTIMENTO DI FISICA E ASTRONOMIA "Galileo Galilei"

Corso di Laurea in Astronomia

**La formazione di strutture cosmologiche: dal
collasso sferico alla funzione di massa degli
aloni di materia oscura**

Relatore

Dott. Michele Liguori

Laureando

Simone Poli

Matricola n°: 2003412

ANNO ACCADEMICO 2023-2024

Per aspera ad astra

Indice

Introduzione	1
1 Modelli Dinamici Standard	3
1.1 Equazione di Friedmann	3
1.2 L'equazione del fluido	5
1.3 La geometria dell'universo	6
1.3.1 Geometria Piana: $k = 0$	6
1.3.2 Geometria sferica: $k > 0$	7
1.3.3 Geometria Iperbolica: $k < 0$	7
1.4 Modelli cosmologici	8
1.4.1 Universo Einsetein-de Sitter di materia	8
1.4.2 Universo Einstein-de Sitter di radiazione	9
1.4.3 Universo di radiazione e materia	10
1.4.4 Evoluzione con curvatura	10
1.5 Parametri Cosmologici	11
1.5.1 Parametro di Hubble	12
1.5.2 Legge di Hubble	12
1.5.3 Redshift	13
1.5.4 Parametro di Densità	14
2 Il Collasso Sferico	15
2.1 L'evoluzione delle perturbazioni di densità: la teoria lineare	16
2.2 L'evoluzione delle perturbazioni di densità: la virializzazione	19
2.2.1 Conferme della teoria negli ammassi di galassie	20
2.3 Legame tra la teoria lineare e la virializzazione	22

3	Funzione di massa degli aloni di materia oscura	23
3.1	Il campo di densità cosmologico	23
3.1.1	Lo spettro delle fluttuazioni	28
3.2	Funzione di massa degli aloni	30
3.2.1	Il <i>peak formalism</i> e il problema <i>Cloud-in-Cloud</i>	30
3.2.2	<i>Press-Schechter</i>	31
3.2.3	<i>Extended-Press-Schechter</i>	32
4	Programmi Python	34
	Bibliografia	37

Introduzione

Una delle domande fondamentali della cosmologia è come dalla situazione dell'Universo primordiale si sia giunti alla formazione di galassie e ammassi di galassie come li osserviamo oggi. Le attuali teorie sostengono che l'Universo si sarebbe originato da fluttuazioni quantistiche che, a seguito dell'inflazione, si sarebbero amplificate lungo tutto il cosmo, originando fluttuazioni di temperatura e densità, riscontrabili tutt'oggi nella CMB (Cosmic Microwave Background).

La seguente tesi ha come obiettivo quello di fornire una panoramica sul processo di formazione delle strutture cosmologiche, partendo dalle perturbazioni del campo gaussiano di densità. L'elaborato si sviluppa iniziando dal collasso sferico, utilizzando la teoria lineare per descrivere il campo di densità e il limite per il collasso in un alone. Continuando con la funzione di massa degli aloni Press-Schechter che descrive in senso statistico la probabilità di avere un alone di una data massa M al tempo t . Tramite l'utilizzo di Python e del codice CAMB (Code for Anisotropies in the Microwave Background), è stato poi riprodotto il grafico della funzione di massa degli aloni di materia oscura a vari redshift, mostrando così come evolvono le strutture nell'Universo al variare del tempo cosmico. Si è giunti alla conclusione che la formazione di strutture nell'Universo avviene seguendo un modello gerarchico bottom-up.

Capitolo 1

Modelli Dinamici Standard

In questo capitolo si andrà a trattare quelle che sono le equazioni fondamentali della cosmologia, per poi giungere ai modelli cosmologici base. Infine si darà anche una panoramica dei principali osservabili cosmologici che utilizzeremo. Per prima cosa si assume il *Principio Cosmologico*; punto cardine di tutta la cosmologia. Esso afferma che l'Universo è omogeneo e isotropo su larga scala. Questo principio è da considerarsi valido a scale di centinaia di ammassi di galassie, e non a scale minori, dove la materia è raggruppata in stelle, ammassi di stelle, galassie e gruppi di galassie. Per la stesura e struttura di questo capitolo abbiamo utilizzato *An Introduction to Modern Cosmology* [1].

1.1 Equazione di Friedmann

L'equazione di Friedmann è l'equazione che descrive l'espansione dell'universo e per questo è una delle equazioni più importanti di tutta la cosmologia. Può essere derivata utilizzando solo la teoria della gravitazione Newtoniana, anche se per una trattazione più rigorosa è comunque necessaria la Relatività Generale. Consideriamo un osservatore in un mezzo uniforme in espansione con densità di massa ρ -ovvero la densità di massa per unità di volume- e una particella, cioè un volume infinitesimo, di massa m ad una distanza r dal centro. Essendo l'universo omogeneo e isotropo, possiamo considerarne qualsiasi punto come il suo centro, dove è situato l'osservatore. Grazie al *Teorema di Gauss* la particella risentirà solo della forza della materia situata a raggi inferiori, all'interno quindi del guscio sferico di

raggio r . La massa totale racchiusa all'interno della sfera è quindi $M = \frac{4\pi}{3}\rho r^3$, che corrisponde a una forza pari a

$$F = \frac{GMm}{r^2} = \frac{4\pi G\rho r m}{3} \quad (1.1)$$

dove G^1 è la costante di gravitazione universale. Di conseguenza, la particella risentirà di un potenziale gravitazionale pari a

$$U = -\frac{GMm}{r} = -\frac{4\pi G\rho r^2 m}{3} \quad (1.2)$$

L'energia cinetica della particella sarà

$$K = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 \quad (1.3)$$

Dove \dot{r} è la velocità della particella. Dalla conservazione dell'energia

$$U_{tot} = K + U \quad (1.4)$$

possiamo ricavare l'evoluzione di r . Sostituendo troviamo

$$U_{tot} = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 - \frac{4\pi G\rho r^2 m}{3} \quad (1.5)$$

Dato che l'universo è omogeneo e isotropo, questi passaggi si applicano a due particelle qualsiasi. Ciò permette di passare a un sistema di riferimento differente e più agevole, quello delle coordinate comoventi. Poiché l'espansione è uniforme, la relazione tra la distanza reale \vec{r} (anche detta coordinata fisica) e la distanza comovente, che chiameremo \vec{x} , può essere scritta come

$$\vec{r} = a(t)\vec{x} \quad (1.6)$$

dove $a(t)$ è chiamato fattore di scala dell'universo. Quest'ultimo dipende solamente dal tempo per mantenere la proprietà dell'omogeneità, e dice come le separazioni fisiche crescono con esso dato che \vec{x} è fissato per definizione. Sostituendo la (1.6)

¹ $G = 6,67 \times 10^{-11} \frac{m^3}{kg s^2}$

nella (1.5) si trova

$$U_{tot} = \frac{1}{2}m\dot{a}^2x^2 - \frac{4\pi}{3}G\rho a^2x^2m \quad (1.7)$$

che moltiplicando per $2/ma^2x^2$ possiamo riscrivere come

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{kc^2}{a^2} \quad (1.8)$$

con $kc^2 = -2U_{tot}/mx^2$. Questa è l'equazione di Friedmann che descrive l'evoluzione del fattore di scala nel tempo e quindi l'espansione dell'Universo. Si può notare che k è indipendente dal tempo e dallo spazio, poiché vale $k = -2U_{tot}/mc^2x^2$ [lunghezza⁻²]. Un Universo in espansione ha un singolo valore di k lungo la sua storia.

1.2 L'equazione del fluido

Un altro elemento molto importante per la cosmologia è un'equazione che descriva come la densità del materiale ρ , presente nell'Universo si evolva nel tempo. Per fare ciò partiamo dalla prima legge della termodinamica

$$dE + pdV = TdS \quad (1.9)$$

dove V è il volume comovente, p la pressione, E l'energia, T la temperatura e S l'entropia. L'energia è data dall'espressione $E = mc^2$ e il volume ha raggio fisico a , quindi

$$E = \frac{4\pi}{3}a^3\rho c^2 \quad (1.10)$$

che differenziando per dt risulta

$$\frac{dE}{dt} = 4\pi a^2\rho c^2 \frac{da}{dt} + \frac{4\pi}{3}a^3c^2 \frac{d\rho}{dt} \quad (1.11)$$

avendo utilizzato la regola del prodotto. Essendo il tasso di variazione del volume pari a

$$\frac{dV}{dt} = 4\pi a^2 \frac{da}{dt} \quad (1.12)$$

e assumendo poi un'espansione adiabatica reversibile, possiamo porre $dS = 0$ che sostituiamo, insieme alla (1.11) e alla (1.12), all'interno della (1.9) ottenendo quindi

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a} \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) = 0 \quad (1.13)$$

Questa è l'equazione del fluido. Si nota che i primi due termini $\dot{\rho}$ e ρ sono associati all'evoluzione della densità, mentre i termini tra parentesi rappresentano: una diluizione nella densità a causa dell'espansione del volume il primo; e il secondo una perdita di energia associata alla pressione che ha compiuto del lavoro nell'espansione. È naturale, ma importante osservare che l'energia, essendo conservata, non viene persa, ma si accumula nel potenziale gravitazionale.

1.3 La geometria dell'universo

Dalla trattazione completa dell'equazione di Friedmann, utilizzando quindi anche la Relatività Generale, si può vedere come il termine che entra nell'equazione sotto forma di k sia in realtà il valore della curvatura dell'Universo. Questo può essere nullo, positivo o negativo. Ciò, in accordo con il principio cosmologico, dà vita a tre differenti geometrie per l'Universo.

1.3.1 Geometria Piana: $k = 0$

In geometria piana euclidea due rette parallele rimangono alla stessa distanza costante in ogni loro punto. Ciò porta alle seguenti conclusioni:

- La somma degli angoli di un triangolo vale 180°
- La circonferenza di raggio r vale $2\pi r$

Se questa è la geometria che descrive il nostro Universo, allora è immediato notare come esso si debba estendere all'infinito o il principio di omogeneità verrebbe violato. In questo caso si parla di Universo piatto e viene associato ad un valore di k nullo.

1.3.2 Geometria sferica: $k > 0$

La geometria di una sfera è non-Euclidea, ciò implica:

- la somma degli angoli di un triangolo vale più di 180°
- la circonferenza di un cerchio è meno di $2\pi r$

Nella geometria non-Euclidea la minima distanza tra due punti non è data da una retta, come nel caso della geometria piatta, ma bensì dal segmento di un cerchio massimo sulla sfera. Si sta quindi descrivendo lo spazio tridimensionale in modo analogo alla superficie di una sfera bidimensionale. Si potrebbe pensare che, come per la sfera bidimensionale la visualizzazione della curvatura avviene solo nella terza dimensione spaziale, allo stesso modo la curvatura dello spazio in tre dimensioni ne richieda una quarta, dando vita ad una tri-sfera². Tuttavia così come la curvatura della sfera bidimensionale è una proprietà intrinseca che non richiede dimensioni ulteriori, allo stesso modo vale per la curvatura dello spazio tridimensionale. Questo tipo di Universo viene chiamato comunemente Universo chiuso ed è descritto da un valore di curvatura k positivo. Esso non presenterebbe confini, si estenderebbe all'infinito avendo tuttavia un volume e una superficie finiti, preservando quindi l'isotropia e l'omogeneità.

1.3.3 Geometria Iperbolica: $k < 0$

Questo tipo di geometria, detta appunto iperbolica, è normalmente rappresentata da una forma a sella e rispetta anch'essa omogeneità e isotropia. In una geometria iperbolica due rette parallele divergono allontanandosi sempre più l'una dall'altra. Il comportamento è l'opposto rispetto a quello della geometria sferica:

- la somma degli angoli di un triangolo vale meno di 180°
- la circonferenza di un cerchio è maggiore di $2\pi r$

Il parametro di curvatura k è negativo e si usa per descrivere un Universo aperto. Anche in questo caso, proprio come nella geometria piatta, l'Universo è infinito.

²una sfera in quattro dimensioni spaziali.

1.4 Modelli cosmologici

Si è visto che le geometrie possibili per il nostro Universo sono tre e i cosmologi si riferiscono a queste con i tre valori di k : $-1, 0, +1$. Dalle soluzioni dell'equazione di Friedmann con questi parametri di curvatura si possono trovare vari modelli di Universo. Tuttavia per sapere come questi possano evolvere si deve prima capire che cosa possa essere contenuto in esso. Due sono le possibilità principali che qui verranno esplorate: materia e radiazione. Per materia (non relativistica) si indica tutto quel materiale, o particelle, con pressione trascurabile. Con radiazione invece si fa riferimento alle particelle che si muovono alla velocità della luce, fotoni, dove la loro energia cinetica conferisce una forza di pressione. Combinando i diversi valori di k con diverse miscele di materia e radiazione nell'Universo, si possono creare vari modelli, come ad esempio l'Universo di Milne, avente $k = -1$ e pieno solo di fotoni. Per questa analisi però ci si è concentrati principalmente sul modello di Universo piatto chiamato Universo di Einstein-de Sitter.

1.4.1 Universo Einstein-de Sitter di materia

Si parte con il risolvere l'equazione del fluido, ponendo per prima cosa il valore di pressione $p = 0$. Quindi

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}\rho = 0 \quad \longrightarrow \quad \frac{1}{a^3} \frac{d}{dt}(\rho a^3) = 0 \quad \longrightarrow \quad \frac{d}{dt}(\rho a^3) = 0 \quad (1.14)$$

Integrando si trova che $\rho a^3 = \text{cost}$, allora

$$\rho \propto \frac{1}{a^3} \quad (1.15)$$

Questo ci dice che la densità scala come il volume dell'Universo, risultato che ci si aspettava. Sostituendo ρ e $k = 0$ nell'equazione di Friedmann troviamo

$$\dot{a}^2 = \frac{8\pi G \rho_0}{3} \frac{1}{a} \quad (1.16)$$

Dove ρ_0 è la densità al tempo attuale (t_0). Risolvendo questa equazione differenziale, sapendo che $a_0 = 1$, si arriva al risultato

$$a(t) = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{\frac{2}{3}} \quad ; \quad \rho(t) = \frac{\rho_0}{a^3} = \rho_0 \left(\frac{t_0}{t}\right)^2 \quad (1.17)$$

In questo scenario, l'espansione continua all'infinito

$$H(t) \equiv \frac{\dot{a}}{a} = \frac{2}{3t} \quad (1.18)$$

però il tasso di espansione all'infinito si arresta, come se si avesse una sorta di bilancio tra gravità, che tende a far ricollassare il cosmo, ed espansione.

1.4.2 Universo Einstein-de Sitter di radiazione

Per la radiazione invece vale la legge $p = \frac{\rho c^2}{3}$. L'equazione del fluido in un cosmo dominato dalla radiazione diventa

$$\dot{\rho} + 4\frac{\dot{a}}{a}\rho = 0 \quad (1.19)$$

Utilizzando lo stesso metodo della (1.14) è possibile vedere che si giunge a

$$\rho \propto \frac{1}{a^4} \quad (1.20)$$

e seguendo la stessa analisi

$$a(t) = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{\frac{1}{2}} \quad ; \quad \rho(t) = \frac{\rho_0}{a^4} = \rho_0 \left(\frac{t_0}{t}\right)^2 \quad (1.21)$$

In questo caso, l'espansione è più lenta rispetto al caso dove è la materia a dominare, anche se la dipendenza della densità dal tempo è la stessa. La densità decresce con la quarta potenza del fattore di scala: un fattore tre per l'espansione del volume e il quarto è causato dal fatto che l'energia della radiazione è associata al fattore di scala tramite la frequenza, $E = h\nu$.

1.4.3 Universo di radiazione e materia

Il caso più generale è quello di un Universo contenente entrambe le componenti. Perciò si avranno due equazioni del fluido, una per la materia e una per la radiazione

$$\rho_{mat} \propto \frac{1}{a^3} \quad ; \quad \rho_{rad} \propto \frac{1}{a^4} \quad (1.22)$$

Il problema è che si avrà una sola equazione di Friedmann con $\rho = \rho_{mat} + \rho_{rad}$. Un'accurata risoluzione è complicata, ma dalle equazioni che abbiamo già ricavato è possibile semplificare la trattazione considerando all'occorrenza ognuna delle due componenti come dominante rispetto all'altra. Dalla proporzionalità della densità con il fattore di scala nei due casi, si nota che, nonostante l'espansione sia più lenta quando è la radiazione a dominare, la densità di materia decresce più lentamente di quest'ultima. Ciò significa che per quanto piccola sia la quantità di materia presente nell'Universo, prima o poi diventerà dominante sulla radiazione e si originano conseguentemente due epoche cosmiche: quella dominata dalla radiazione e successivamente quella dominata dalla materia. È possibile riscontrare questo risultato anche nel nostro Universo.

1.4.4 Evoluzione con curvatura

Reintroduciamo ora la possibilità che il parametro k sia diverso da zero. Per questa analisi ci si concentrerà solamente sulle proprietà delle soluzioni e si considererà un Universo dominato solo dalla materia che, come abbiamo visto, è un'assunzione lecita per tempi sufficientemente grandi. Nel caso di $k \neq 0$, tornando alla nostra equazione di Friedmann e ponendo $H = \frac{\dot{a}}{a}$ abbiamo

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{kc^2}{a^2} \quad (1.23)$$

Si nota immediatamente che se k è negativo allora entrambi i termini a destra dell'uguale sono positivi, di conseguenza l'Universo si espande all'infinito. Questa è chiamata espansione libera. La situazione cambia quando invece k è positivo, poiché il termine contenente la curvatura diventa sempre più dominante sul termine della ρ , portando l'espansione a fermarsi in un tempo finito. Sotto la forza della gravità poi, il ricollasso è inevitabile. La situazione del collasso è speculare a quella

dell'espansione e porta a ciò che viene definito come Big Crunch, come mostrato in figura 1.1.

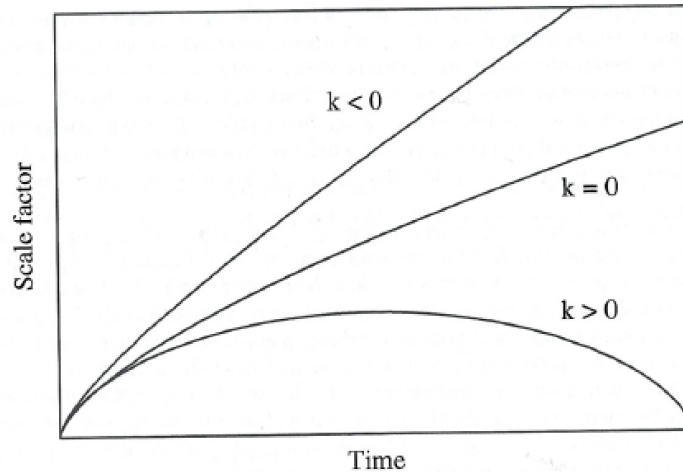


Figura 1.1: Evoluzione del fattore di scala dell'Universo in base al valore di k .

Questi tre comportamenti dipendono dal valore dell'energia totale U_{tot} presente nella derivazione Newtoniana dell'equazione di Friedmann:

- se U_{tot} è positivo, allora l'espansione giunge all'infinito con energia cinetica maggiore di zero ($k < 0$)
- se U_{tot} è zero, allora l'espansione giunge all'infinito con velocità nulla ($k = 0$)
- se U_{tot} è negativo invece, l'Universo non riesce a sfuggire alla sua stessa attrazione gravitazionale e finisce per ricollassare ($k > 0$)

1.5 Parametri Cosmologici

Gli strumenti che abbiamo mostrato fino a questo punto, come l'equazione di Friedmann e l'equazione del fluido, anche se molto utili, non ci danno informazione però sul tipo di Universo in cui ci troviamo. Per fare ciò è necessario ricorrere alla determinazione di alcuni parametri cosmologici, anche detti osservabili cosmologici.

1.5.1 Parametro di Hubble

Questo parametro definito come

$$H(t) \equiv \frac{\dot{a}}{a} \quad (1.24)$$

rappresenta il tasso di espansione dell'Universo. Il valore di questo parametro al tempo attuale si indica con H_0 ed è anche comunemente detto *costante di Hubble*, anche se non è costante. Le misurazioni attestano questo valore attorno a

$$H_0 = 100h [kms^{-1}Mpc^{-1}] \quad (1.25)$$

dove h è un parametro adimensionale di valore compreso tra i 0.5 e 1.

1.5.2 Legge di Hubble

La legge di Hubble-Lemaître risalente al 1929 afferma l'esistenza di una relazione lineare tra la velocità di recessione -ovvero lungo la linea di vista- di una galassia e la sua distanza

$$v = H_0 d \quad (1.26)$$

con H_0 costante di Hubble. Per ricavarla è necessario partire dalla velocità di recessione che è data da

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \quad (1.27)$$

Visto che si tratta della velocità lungo la linea di vista è possibile riscriverla come

$$\vec{v} = \frac{|\dot{\vec{r}}|}{|\vec{r}|} \vec{r} \quad \vec{r} = a\vec{x} \quad \vec{v} = \frac{\dot{a}}{a} \vec{r} \quad (1.28)$$

Ricordando il modo in cui abbiamo definito il parametro di Hubble ($H \equiv \frac{\dot{a}}{a}$) è evidente che quest'ultima è equivalente a (1.26). Questa legge è stata di grande importanza storica poiché ha permesso ai modelli cosmologici che prevedevano un Big Bang iniziale, di diventare teorie sempre più accreditate, e di scartare i modelli statici di Universo. Anche in questa legge è possibile trovare una conferma del principio cosmologico: il fatto che la velocità di recessione sia proporzionale alla distanza dell'oggetto per l'osservatore, impedisce qualsiasi scelta di punti privilegiati.

1.5.3 Redshift

Il redshift, definito come

$$z = \frac{d\lambda}{\lambda_e} = \frac{\lambda_r - \lambda_e}{\lambda_e} \quad (1.29)$$

è il fenomeno per cui la radiazione elettromagnetica che viene emessa da un oggetto in allontanamento viene ricevuta con una lunghezza d'onda λ maggiore rispetto a quella di emissione. Se un oggetto è in allontanamento, il suo redshift può essere calcolato tramite l'effetto doppler

$$\lambda_r = \sqrt{\frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}}} \lambda_e \quad \longrightarrow \quad z = \sqrt{\frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}}} - 1 \quad (1.30)$$

dove v è la velocità a cui l'oggetto si muove e c è la velocità della luce nel vuoto³. Per velocità molto inferiori a quella della luce può essere approssimato a $z \simeq \frac{v}{c}$, da cui tramite la legge di Hubble ($dv = \frac{\dot{a}}{a} dr$) è possibile ottenere

$$\frac{d\lambda}{\lambda} = \frac{dv}{c} \quad (1.31)$$

con $d\lambda$ positivo, dunque la lunghezza d'onda sta aumentando. Il tempo trascorso tra l'emissione e la ricezione del segnale luminoso è dato da $dt = \frac{dr}{c}$ che sostituito nella precedente fornisce

$$\frac{d\lambda}{\lambda} = \frac{\dot{a}}{a} \frac{dr}{c} = \frac{\dot{a}}{a} dt = \frac{da}{a} \quad (1.32)$$

Integrando entrambi i membri risulta

$$\int \frac{d\lambda}{\lambda} = \int \frac{da}{a} \longrightarrow \ln(\lambda) = \ln(a) + \text{cost} \quad (1.33)$$

e dunque si trova facilmente che $\lambda \propto a$. Questo è un risultato molto importante poiché fornisce una relazione diretta tra il fattore di scala dell'Universo e la lunghezza d'onda, e conseguentemente anche il redshift. Infatti è possibile trovare tale

³ $c = 299.792.458 \text{ m/s}$

relazione utilizzando la (1.29) giungendo a

$$1 + z = \frac{\lambda_r}{\lambda_e} = \frac{a(t_r)}{a(t_e)} \quad (1.34)$$

dove $a(t_r)$ è il fattore di scala al tempo attuale, o di ricezione del segnale, mentre $a(t_e)$ è il fattore di scala al tempo di emissione. Ciò permette, sapendo ad esempio il redshift di una galassia lontana, di calcolare l'espansione dell'Universo: infatti se la λ raddoppia, all'emissione del segnale l'Universo era grande la metà delle sue dimensioni attuali.

1.5.4 Parametro di Densità

Questo è un parametro molto utile per specificare la densità dell'Universo. Partiamo dalla (1.23). Esisterà per un dato valore di H un preciso valore di densità tale che l'Universo è piatto, $k = 0$. Questo valore è noto come *densità critica* ed è dato da

$$\rho_c(t) = \frac{3H^2}{8\pi G} \quad (1.35)$$

essa dipende dal tempo, poiché dipende da $H(t)$. Il parametro di densità è definito come la densità dell'Universo divisa per la densità critica

$$\Omega(t) \equiv \frac{\rho}{\rho_c} \quad (1.36)$$

dove si nota che anch'esso evolve nel tempo. Questo ci dà la possibilità di riscrivere l'equazione di Friedmann in maniera semplificata. Sostituendo all'interno di questa la (1.35) e la (1.36) ottengo

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho_c \Omega - \frac{kc^2}{a^2} = H^2 \Omega - \frac{kc^2}{a^2} \quad (1.37)$$

e riarrangiando

$$\Omega - 1 = \frac{kc^2}{a^2 H^2} \quad (1.38)$$

Si osserva immediatamente che la condizione di piattezza si ha se $\Omega = 1$, ovvero se il valore di densità all'interno dell'Universo è proprio la densità critica.

Capitolo 2

Il Collasso Sferico

Nel paragrafo 1.2 si è visto che è possibile descrivere l'Universo come un fluido avente una densità di materia ρ . Questa era infatti distribuita in modo estremamente uniforme e omogeneo attraverso tutto il cosmo, e solo piccole fluttuazioni si discostavano da questo valore medio di densità. In particolare, come visto nel paragrafo 1.4.3, l'Universo, dopo una fase iniziale dominata dalla radiazione, aveva raggiunto la condizione di prevalenza di materia. Si trovava quindi nell'era matter-dominated in una condizione di piattezza, quindi ben descritto da un Universo di Einstein-De Sitter di materia. Si vuole quindi capire come da piccole fluttuazioni di densità in una distribuzione estremamente omogenea, si sia giunti ad avere strutture su larga scala. Il modello del collasso sferico in cosmologia è un concetto che si riferisce alla formazione di queste strutture, come galassie e ammassi di galassie, a partire dalle piccole fluttuazioni di densità dell'Universo primordiale. Queste fluttuazioni si sono amplificate nel tempo sotto l'effetto della gravità e hanno portato alla formazione di strutture sempre più grandi. Per questo motivo il collasso sferico è un elemento fondamentale nella comprensione dell'evoluzione delle perturbazioni di densità e della distribuzione delle galassie.

2.1 L'evoluzione delle perturbazioni di densità: la teoria lineare

Ponendosi quindi nel caso $k = 0$ e matter-dominated, si segue l'evoluzione di una perturbazione di densità. Di facile osservazione è l'asimmetria nelle evoluzioni del campo di densità poiché le sovradensità possono crescere arbitrariamente, mentre le sottodensità sono legate, e non possono infatti decrescere oltre lo zero. Si considera il caso di un volume sferico con densità $\rho_b + \delta\rho$ ovvero infinitesimamente più grande rispetto alla densità media di background (visto che siamo in un Universo piatto $\rho_b = \rho_c$). Questa perturbazione evolverà come un Universo chiuso con $\Omega_{m,0} = \Omega_{b,0}(1 + \delta)$. Dall'equazione di Friedmann, per questo modello, troviamo

$$\frac{\dot{a}}{a} = H_0(\Omega_{m,0}a^{-3} + (1 - \Omega_{m,0})a^{-2})^{\frac{1}{2}} \quad (2.1)$$

dove $\Omega_{m,0}$ è il parametro di densità iniziale del nostro volume sferico. La condizione affinché avvenga il collasso è $\Omega_{m,0} > 1$, il che implica

$$\delta > \frac{1 - \Omega_{b,0}}{\Omega_{b,0}} \quad (2.2)$$

questa è la condizione sul contrasto di densità δ . Considerando l'intero Universo si osservano i seguenti risultati:

1. se $\Omega_{b,0} > 1$ (universo chiuso) allora la (2.2) è sempre vera. Quindi tutte le sovradensità prima o poi collasserebbero, visto che il cosmo stesso, per tempi sufficientemente lunghi, si contrae aiutando la gravità nella formazione delle strutture.
2. se $\Omega_{b,0} < 1$ (universo aperto) allora esiste un limite espresso proprio dalla (2.2).

Tornando al modello piatto e risolvendo la (2.1) si trovano soluzioni parametriche in termini dell'angolo di sviluppo

$$\theta = H_0\eta(\Omega_{m,0} - 1)^{1/2} \quad (2.3)$$

dove η è il tempo conforme definito come $\eta = \int_0^t \frac{dt}{a(t)}$. Il raggio e il tempo in funzione di θ della perturbazione saranno

$$r(\theta) = A(1 - \cos \theta) \quad ; \quad t(\theta) = B(\theta - \sin \theta) \quad (2.4)$$

dove

$$A = \frac{r_0}{2} \frac{\Omega_{m,0}}{(\Omega_{m,0} - 1)} \quad ; \quad B = \frac{1}{2H_0} \frac{\Omega_{m,0}}{(\Omega_{m,0} - 1)^{3/2}} \quad (2.5)$$

La dimensione massima si trova imponendo $\frac{dr}{d\theta} = 0$ che ha per soluzione $\theta = 0, \pi, 2\pi$. Si trova dunque

$$r_{max} = 2A = r_0 \frac{\Omega_{m,0}}{\Omega_{m,0} - 1} \quad ; \quad t_{max} = \pi B \quad (2.6)$$

Questo è definito punto di turnaround, ovvero il punto in cui la perturbazione raggiunge la massima espansione per poi ricollassare su sé stessa. Le costanti A e B , e la massa M racchiusa nel volume considerato, sono legate tra loro dalla relazione

$$M = \frac{4\pi}{3} r_0^3 \Omega_{m,0} \rho_c \quad ; \quad A^3 = GMB^2 \quad (2.7)$$

Nel regime lineare, per seguire l'evoluzione della perturbazione di densità basta eseguire uno sviluppo in serie di McLaurin

$$\begin{aligned} \lim_{\theta \rightarrow 0} r(\theta) &= A \left(\frac{1}{2} \theta^2 - \frac{1}{24} \theta^4 \right) \\ \lim_{\theta \rightarrow 0} t(\theta) &= B \left(\frac{1}{6} \theta^3 - \frac{1}{120} \theta^5 \right) \end{aligned}$$

Il primo termine tra parentesi, in entrambi i limiti, esprime l'espansione del background. Quindi si avrà che la sovradensità crescerà come:

$$\frac{r}{r_{max}} \simeq \frac{\theta^2}{4} - \frac{\theta^4}{48} \quad ; \quad \frac{t}{t_{max}} \simeq \frac{1}{\pi} \left(\frac{\theta^3}{6} - \frac{\theta^5}{120} \right) \quad (2.8)$$

che combinate tra loro danno un fattore di scala linearizzato pari a

$$\frac{a_{lin}}{a_{max}} \simeq \frac{1}{4} \left(6\pi \frac{t}{t_{max}} \right)^{2/3} \left[1 - \frac{1}{20} \left(6\pi \frac{t}{t_{max}} \right)^{2/3} \right] \quad (2.9)$$

dove, di nuovo, il primo termine rappresenta l'espansione dell'Universo nel background. Da questa equazione si nota che l'Universo è matter-dominated, infatti il fattore di scala è proporzionale al tempo secondo $a \propto t^{2/3}$, come nella (1.17). I termini tra parentesi quadre danno la teoria lineare per l'evoluzione della perturbazione. In particolare, durante l'espansione e il collasso della fluttuazione, è sempre valida

$$1 + \delta_{lin} = \left(\frac{a_{back}}{a_{lin}} \right)^3 \quad (2.10)$$

Sostituendo questa nella (2.9), e considerando che $(1 + \delta)^{-1/3} \simeq 1 - \frac{1}{3}\delta$ per $\delta \ll 1$, si ottiene

$$\delta_{lin} = \frac{3}{20} \left(6\pi \frac{t}{t_{max}} \right)^{2/3} \quad (2.11)$$

che al punto di *turnaround* ($t = t_{max}$ e $\theta = \pi$) vale

$$\delta_{lin}^{turn} = \frac{3}{20} (6\pi)^{2/3} = 1.06 \quad (2.12)$$

Dopo il turnaround la perturbazione si contrae in modo simmetrico all'espansione finché non collassa per $t = 2t_{max}$, avendo

$$\delta_{lin}^{coll} = \delta_c = \frac{3}{20} (12\pi)^{2/3} = 1.686 \quad (2.13)$$

Questo risultato afferma che, quando si ha un contrasto di densità lineare pari a $\delta_c = 1.686$, si ha una perturbazione sferica che è completamente collassata gravitazionalmente, come un alone. Questo valore è utilizzato anche nel formalismo Press-Schechter che verrà affrontato nel Capitolo 3.

2.2 L'evoluzione delle perturbazioni di densità: la virializzazione

Nella teoria lineare quando il collasso è completo il volume sferico tende a zero. Ciò però non può avvenire realmente poiché non avrebbe significato fisico. In realtà quello che avviene è che l'energia cinetica, man mano che il collasso procede, aumenta ($v \neq 0$) e si raggiunge un equilibrio. Questo meccanismo è detto virializzazione. Dal teorema del viriale è noto:

$$U_{vir} = -2E_k \quad (2.14)$$

Per la conservazione dell'energia $E_{vir} = E_{max}$ quindi

$$E_{max} = U_{vir} + E_k = U_{vir} - \frac{1}{2}U_{vir} = \frac{1}{2} \frac{GM^2}{R_V} \quad (2.15)$$

da cui si ricava che il raggio della struttura virializzata R_V è pari a

$$R_V = \frac{1}{2} R_{max} \quad (2.16)$$

In realtà la struttura collassata non si ferma direttamente al raggio R_V , ma oscilla inizialmente attorno a esso fino all'equilibrio. Essendo una bolla di Universo matter-dominated si ha che la densità è pari a

$$\rho_p(t_{max}) = \rho_b \left(\frac{a_{max}}{a_0} \right)^{-3} \quad (2.17)$$

quindi alla virializzazione si ha

$$\rho_p(t_V) = 8\rho_p(t_{max}) \quad (2.18)$$

il termine 8 compare in quanto il volume scala come la terza potenza del raggio, e questo al tempo della virializzazione è dimezzato rispetto a quello iniziale (2.16). Quindi sfruttando la (2.10) senza utilizzare il regime lineare, si trova il valore di δ

al turnaround pari a

$$1 + \delta^{turn} = \left(\frac{a_{back}}{a_{max}} \right)^3 = \left[\frac{1}{4} \left(6\pi \frac{t}{t_{max}} \right)^{2/3} \right]^3 = \frac{(6\pi)^2}{4^3} \simeq 5,55 \quad (2.19)$$

Mentre al tempo del collasso abbiamo

$$1 + \delta_c^{vir} = 8 \times 4 \times 5,55 \simeq 178 \quad (2.20)$$

dove il termine 8 deriva dalla densità di virializzazione e il 4 dall'espansione del background. La (2.20) è utilizzata per definire quando un oggetto si trova all'equilibrio viriale.

2.2.1 Conferme della teoria negli ammassi di galassie

È possibile esprimere il raggio al punto di turnaround in termini del raggio comovente, si avrà quindi

$$r_{max}^3 = \frac{1}{5,55} \frac{1}{(1 + z_{max})^3} r_{i,com}^3 \quad (2.21)$$

dove $r_{i,com}$ è il raggio comovente al tempo iniziale, mentre z_{max} è il redshift al punto di turnaround. Il raggio virializzato in funzione del raggio comovente sarà

$$r_{vir}^3 = \frac{1}{178} \frac{1}{(1 + z_{vir})^3} r_{i,com}^3 \quad (2.22)$$

dove z_{vir} è il redshift al tempo dell'equilibrio viriale. Il teorema del viriale dice anche che

$$v^2 = \frac{GM}{r_g} \quad (2.23)$$

dove r_g è il raggio corrispondente al potenziale gravitazionale $U = -\frac{GM^2}{r_g}$, mentre M è la massa contenuta inizialmente all'interno del sistema, che è espressa dalla seguente

$$M = \frac{4\pi}{3} \rho_{m,0} r_{i,com}^3 \quad (2.24)$$

Combinando queste equazioni, insieme a quelle dei paragrafi precedenti, è possibile risalire a una relazione che legghi la dispersione di velocità alla massa di un alone:

$$\left(\frac{v}{127\text{km.s}^{-1}}\right)^2 = \left(\frac{M}{10^{12}h^{-1}M_{\odot}}\right)^{2/3} (1 + z_{vir}) \quad (2.25)$$

dove M_{\odot} corrisponde a una massa solare e z_{vir} al redshift al quale l'oggetto ha raggiunto l'equilibrio viriale. Si noti che, grazie al termine $(1 + z_{vir})$ che lega v^2 con $M^{2/3}$, strutture collassate a redshift maggiori, quindi quando l'Universo era più giovane, possiedono una dispersione di velocità maggiore a parità di massa contenuta nell'alone. Infine, se la struttura collassata si trova all'equilibrio idrostatico, è possibile relazionare anche la temperatura alla velocità, $T \propto v^2$, avendo

$$\frac{kT}{7\text{keV}} = \left(\frac{M}{10^{15}h^{-1}M_{\odot}}\right)^{2/3} (1 + z_{vir}) \quad (2.26)$$

dove k è la costante di Boltzmann. Le sovradensità maggiori hanno quindi raggiunto il turnaround e il collasso a tempi precedenti – quando l'Universo era più giovane e denso – rispetto a regioni più estese, aventi di conseguenza sovradensità minori, contenenti la stessa massa. Queste perturbazioni di sovradensità maggiori hanno raggiunto l'equilibrio viriale, secondo la (2.25) e la (2.26), avendo dispersioni di velocità e temperature maggiori a parità di massa. La (2.26) ci dice quale sia la temperatura di un gas contenuto in un alone di massa M . A queste temperature esso emette radiazione nel regime dei raggi-X attraverso il meccanismo del *bremsstrahlung* termico. Questo è proprio ciò che si osserva negli aloni degli ammassi di galassie: l'emissione più intensa avviene nei raggi-X, data dalla presenza di gas in equilibrio idrostatico all'interno di un intenso potenziale gravitazionale. Le temperature tipiche sono dell'ordine di 2-10 keV. Mentre le osservazioni mostrano che le dispersioni di velocità in tre dimensioni delle galassie all'interno dell'ammasso, si aggirano attorno ai $\sigma_{3D} \simeq 1500 \text{ km.s}^{-1}$.

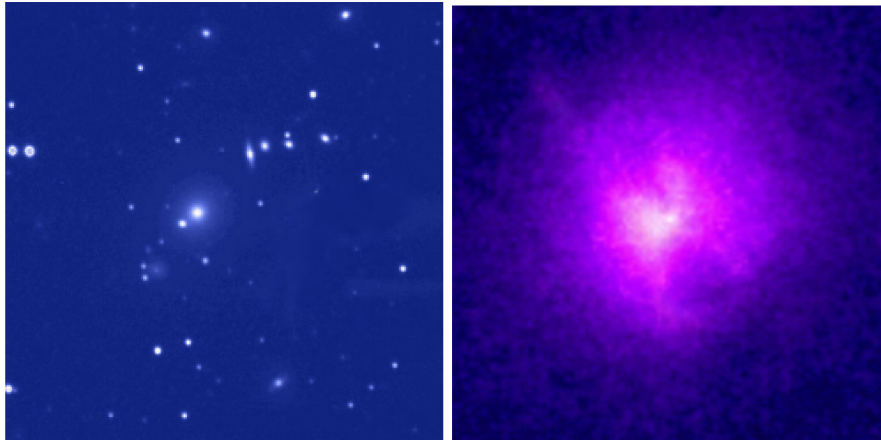


Figura 2.1: *A sinistra*: l'ammasso di galassie dell'Hydra nell'ottico. L'ammasso ha un redshift medio pari a $z = 0,054$ e contiene svariate centinaia di galassie. *A destra*: la stessa regione osservata con il telescopio spaziale Chandra nell'X. È evidente il gas caldo con una temperatura $T \simeq 4 \times 10^7 K$, manifestazione dell'intenso potenziale gravitazionale [2].

2.3 Legame tra la teoria lineare e la virializzazione

I risultati della (2.20) portano ad osservare che, seguendo l'evoluzione della perturbazione tramite le equazioni di Friedmann, ci si discosta molto dal regime lineare. Infatti con la teoria lineare si è trovato un valore di contrasto di densità pari a $\delta_c = 1,686$ per un oggetto collassato, mentre con la virializzazione si è trovato un valore di $1 + \delta_c^{vir} \simeq 178$. La teoria lineare è dunque sbagliata per seguire l'evoluzione della singola perturbazione, ma dato che si può avere una mappa completa tra questa e la teoria non lineare, è possibile comunque utilizzare la prima, più facile dal punto di vista analitico. La teoria non lineare, anche se predice esattamente il comportamento di una perturbazione, non fornisce nessuna informazione sul campo di densità. Al contrario, la teoria lineare rimane valida su tutto il campo gaussiano randomizzato, rendendo possibile sfruttare il suo potere statistico per determinare quante volte si supera il valore di soglia δ_c . E quando si trova un oggetto con δ_c si sa che una struttura si è formata e si trova all'equilibrio viriale.

Capitolo 3

Funzione di massa degli aloni di materia oscura

Nel capitolo precedente si è osservato come nella teoria lineare sia possibile avere una caratterizzazione statistica del campo, espressa tramite il contrasto di densità ed è stato mostrato come il valore di contrasto di densità limite per avere una struttura collassata, come un alone, sia $\delta_c = 1,686$. Sapendo poi come evolvono le perturbazioni e la densità nel campo, sarebbe possibile calcolare quante volte viene superato il valore di soglia δ_c , in modo da conoscere la probabilità di avere strutture di una determinata massa presenti nell'Universo. È questa l'idea alla base dell' *halo mass function*.

3.1 Il campo di densità cosmologico

La densità evolve come $\rho(a) = \rho_p D_+(a)$, dove D_+ è chiamato *growth factor*, in funzione del fattore di scala, e quindi del tempo. Nella teoria lineare, di conseguenza, il campo di densità evolve come $\delta(\vec{x}, t) = D_+(t)\delta_0(\vec{x})$, dove le regioni con $\delta(\vec{x}, t) > \delta_c$ collasseranno in aloni di materia oscura al tempo t . Ma è possibile anche riformulare il risultato nel seguente modo: le regioni con

$$\delta_0(\vec{x}) > \frac{\delta_c}{D_+(t)} \tag{3.1}$$

collassero in aloni al tempo t . Nel primo caso abbiamo il valore critico che rimane costante mentre il campo di densità evolve nel tempo, le perturbazioni crescono e zone sottodense tendono a zero. Nel secondo caso invece è il campo a rimanere stazionario ed è invece il valore di soglia che diminuisce con il tempo: $\delta = \delta(\vec{x})$ e $\delta_c = \delta_c(t)$. Questo secondo punto di vista è ciò che viene utilizzato nel formalismo Press-Schechter. Si assume il principio ergodico¹ sul campo, ciò implica che

$$\langle \delta \rangle = \frac{1}{V} \int \delta(\vec{x}) d^3\vec{x} \quad (3.2)$$

dove V è il volume dell'Universo che contiene la condizione al contorno di periodicità del campo. Si sta assumendo che il campo sia periodico all'interno del volume considerato. Di conseguenza, la varianza sarà espressa come

$$\sigma^2 = \langle \delta^2 \rangle = \frac{1}{V} \int \delta^2(\vec{x}) d^3\vec{x} \quad (3.3)$$

che rappresenta il quadrato delle ampiezze delle fluttuazioni. Si introduce ora la funzione di correlazione² ξ , ovvero una funzione che descrive se le galassie sono più concentrate ($\xi > 0$) o più disperse ($\xi < 0$) della media. Nello spazio reale, indicato dalla variabile \vec{r} , abbiamo:

$$\xi(\vec{r}) = \langle \delta(\vec{x})\delta(\vec{x} + \vec{r}) \rangle \quad (3.4)$$

Questa rappresenta il secondo momento del campo di densità. Essendo però il campo gaussiano, quest'ultimo è descritto interamente dal secondo momento che è proprio la funzione di correlazione. Se si esegue la trasformata di Fourier di questa funzione si ottiene lo spettro di potenza $P(k)$ nello spazio di Fourier. Quindi

$$\xi(\vec{r}) = \frac{V}{(2\pi)^3} \int P(k) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} d^3\vec{k} \quad (3.5)$$

¹L'ergodicità è un concetto matematico e statistico utilizzato per descrivere il comportamento di un sistema o processo nel tempo. In un sistema ergodico, le proprietà statistiche osservate da una singola traiettoria sono rappresentative delle proprietà osservate quando si considerano traiettorie multiple e parallele. Si riferisce a un sistema in cui il comportamento medio nel tempo è lo stesso del comportamento medio su tutti i possibili risultati.

²La funzione di correlazione è una funzione che quantifica il grado di relazione di una o più variabili tra loro o in due punti differenti.

dove V è il volume di normalizzazione. Ora, per l'isotropia assunta nel principio cosmologico, anche lo spettro di potenza sarà isotropo: infatti si nota che il termine k all'interno dell'integrale non compare come vettore, ma come modulo. Ciò vale anche per la funzione di correlazione, quindi d'ora in poi si considererà solo il modulo di \vec{r} . Introducendo le coordinate polari allineate con l'asse polare nella direzione di k , si ricava la parte angolare dell'integrale (3.5) nello spazio di Fourier. Essendo $\xi(r)$ reale si ha $e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} = \cos(kr \cos \theta)$ e quindi

$$\xi(r) = \frac{V}{(2\pi)^3} \int dk k^2 \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-1}^1 d(\cos \theta) P(k) \cos(kr \cos \theta) \quad (3.6)$$

da cui calcolando si trova

$$\xi(r) = \frac{V}{(2\pi)^3} \int P(k) \frac{\sin kr}{kr} 4\pi k^2 dk \quad (3.7)$$

Si definisce spettro di potenza adimensionale

$$\Delta^2(k) \equiv \frac{V}{(2\pi)^3} 4\pi k^3 P(k) \quad (3.8)$$

dove è facile vedere $\Delta^2(k) = \frac{d\langle \delta^2 \rangle}{dnk} \propto k^3 P(k)$. Dalla (3.7) si trova la relazione che lega la funzione di correlazione allo spettro di potenza adimensionale:

$$\Delta^2(k) = \frac{2}{\pi} k^3 \int_0^\infty \xi(r) \frac{\sin kr}{kr} r^2 dr \quad (3.9)$$

Lo spettro di potenza adimensionale è quindi una rappresentazione della potenza per unità di volume nello spazio di Fourier [3]. Questo significa che fornisce informazioni sulla distribuzione delle fluttuazioni di densità nell'Universo su diverse scale spaziali. È possibile ora esprimere la varianza del campo di densità in termini di $\xi(0)$:

$$\sigma^2 = \xi(0) = \frac{V}{(2\pi)^3} \int P(k) d^3\vec{k} = \frac{V}{2\pi^2} \int P(k) k^2 dk = \int \frac{\Delta^2(k)}{k} dk \quad (3.10)$$

Ciò che si sta facendo è dividere il campo di densità in volumi e si fa la media di questi grazie al principio ergodico. Si ottiene così la varianza del campo, quanti-

tà molto importante poiché è questa che porta informazioni, a differenza di $\delta(x)$. Tornando al campo di densità, è possibile filtrare quest'ultimo tramite una funzione detta *window function* $W(\vec{x}; R)$ che ha lo scopo di smussare il campo. Ogni filtro può essere rappresentato in termini di un raggio caratteristico R , o della massa associata $M = \gamma_f \bar{\rho} R^3$, dove γ_f è una costante che dipende dalla forma del filtro.

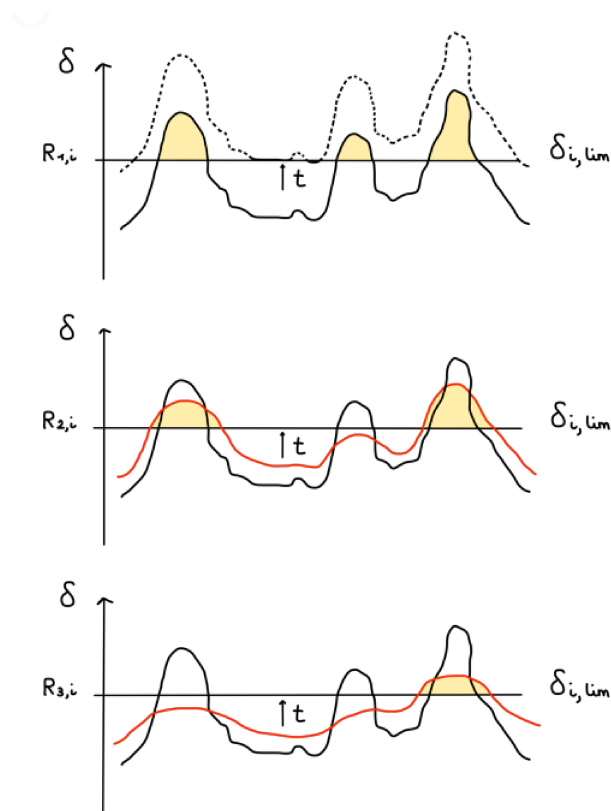


Figura 3.1: La figura rappresenta il campo di densità smussato con 3 filtri differenti con raggi $R_1 < R_2 < R_3$, corrispondenti a 3 modi di Fourier $k_1 > k_2 > k_3$. L'evoluzione temporale avviene secondo il verso della freccia t e le strutture collassate in aloni sono evidenziate in giallo [4].

Come mostrato in figura, le strutture aventi raggi inferiori, e quindi masse inferiori, collassano prima rispetto a quelle ottenute utilizzando un filtro con un raggio maggiore. Perciò prima si formano strutture di dimensioni inferiori e successivamente quelle più grandi. Questo meccanismo è noto come formazione gerarchica di strutture.

Una volta filtrato il campo risulta poi

$$\delta(\vec{x}; R) \equiv \int \delta(\vec{x}') W(\vec{x} - \vec{x}'; R) d^3\vec{x}' \quad (3.11)$$

dove $\int W(\vec{x}; R) d^3\vec{x} = 1$, ovvero il filtro deve essere normalizzato. Visto che la (3.11) altro non è che una convoluzione nello spazio reale, per il *Teorema di convoluzione* possiamo prendere il prodotto delle trasformate di Fourier delle funzioni stesse:

$$\delta(\vec{k}; R) = \int \delta(\vec{x}; R) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} d^3\vec{x} = \delta(\vec{k}) \tilde{W}(kR) \quad (3.12)$$

dove $\tilde{W}(kR)$ è la trasformata del filtro $W(\vec{x}; R)$ e dove la condizione di normalizzazione rimane valida per la trasformata. Allo stesso modo della (3.3) definiamo la varianza del campo smussato come

$$\sigma^2(R) = \langle \delta^2(\vec{x}; R) \rangle = \frac{1}{2\pi^2} \int P(k) \tilde{W}^2(kR) k^2 dk \quad (3.13)$$

Ma visto che il filtro può essere espresso in termini di R o M , allora $\sigma^2(R) = \sigma^2(M)$. Quindi possiamo esprimere la varianza in funzione della massa

$$\sigma^2(M) = \left\langle \left(\frac{M(\vec{x}; R) - \langle M(\vec{x}; R) \rangle}{\langle M(\vec{x}; R) \rangle} \right)^2 \right\rangle \quad (3.14)$$

dove $M(\vec{x}; R) = V_R \int \rho(\vec{x}') W(\vec{x} - \vec{x}'; R) d^3\vec{x}'$ con V_R volume del filtro. [5] Se il campo viene smussato con un filtro top-hat di raggio $R = 8h^{-1} Mpc$, il valore della varianza estrapolata linearmente a $z = 0$ definisce un parametro cosmologico:

$$\sigma_8 = \langle \delta_{lin}^2(\vec{x}; R) \rangle^{1/2} = \left(\frac{1}{2\pi^2} \int P_{lin}(k) \tilde{W}_{TH}^2(kR) k^2 dk \right)^{1/2} \quad (3.15)$$

questo è utilizzato per descrivere la normalizzazione dello spettro di potenza e ha un valore riportato nel *Planck 2018 results. VI. Cosmological parameters* [6] pari a $\sigma_8 = 0.811 \pm 0.006$. Più il valore di questo parametro è grande, maggiori saranno le fluttuazioni primordiali, che si traducono in una formazione di strutture più precoce.

3.1.1 Lo spettro delle fluttuazioni

I modelli inflazionari predicono la forma funzionale dello spettro di potenza delle fluttuazioni di densità primordiali. Secondo questi modelli esse sarebbero indipendenti dalla scala di grandezza considerata. Ciò risiede nel fatto che quest'ultime sarebbero state generate da fluttuazioni quantistiche durante l'inflazione stessa, dando luogo a strutture che mantengono le stesse caratteristiche statistiche a diverse scale di grandezza. La forma risulta quindi:

$$P(k) \propto k^n \quad (3.16)$$

dove l'indice spettrale n funge da bilancio tra le potenze a piccole e grandi scale. Se si filtra il campo con una *window function* di grandezza R , ovvero $k = 1/R$ nello spazio di Fourier, si trova una varianza pari a

$$\sigma^2 = \langle \delta^2 \rangle \propto \int_0^{1/R} k^n 4\pi k^2 dk \propto R^{-(n+3)} \quad (3.17)$$

Dal momento che $M \propto R^3$, in termini della massa si ha

$$\delta_{rms} = \sqrt{\langle \delta^2 \rangle} \propto M^{-\gamma/6} \quad (3.18)$$

dove $\gamma = n + 3$. Data la relazione esistente tra spettro di potenza e funzione di correlazione, espressa nella (3.9), una legge di potenza per il primo, implica la stessa tendenza per il secondo. Dunque la funzione di correlazione può essere espressa come:

$$\xi(r) = \left(\frac{r}{r_0} \right)^{-\gamma} \quad (3.19)$$

con r_0 pari alla distanza dove la probabilità di trovare una galassia è doppia rispetto al caso di una distribuzione completamente omogenea di galassie. Sostituendo la (3.19) nella (3.9) si ottiene

$$\Delta^2(k) = \frac{2k^2 r_0^\gamma}{\pi} \int r^{1-\gamma} \sin kr dr \quad (3.20)$$

dove risolvendo l'integrale si trova: $\Delta^2(k) = \beta(kr_0)^\gamma$ con $\gamma < 3$ ($n < 0$). Analizzando quindi il significato dei possibili valori dell'indice n si nota come la con-

dizione di omogeneità dell'Universo su larghe scale implica che $\gamma > 0$ ($n > -3$), poiché $\xi(r) \rightarrow 0$ per r grandi. Un valore di $n = 0$ indica la stessa potenza su tutte le scale spaziali, caso noto come *white noise*, portando lo spettro di potenza ad essere Poissoniano. La funzione di correlazione misurata per le galassie assume la forma

$$\xi_g(r) \simeq \left(\frac{r}{5h^{-1}Mpc} \right)^{-1,8} \quad (3.21)$$

corrispondente a $n \simeq -1,2$. Esiste però una dipendenza di r_0 dal tipo morfologico delle galassie, questo perché le galassie ellittiche tendono ad essere più ravvicinate tra loro, formando ammassi, rispetto alle spirali. L'indice spettrale più rilevante è $n = 1$, noto come *scale-invariant spectrum* (o Zeldovich spectrum). Un indice pari a $n = 1$ è uno dei risultati predetti dalla teoria dell'inflazione, che trova conferma nello spettro di potenza $P(k)$ su larga scala della CMB. [3]

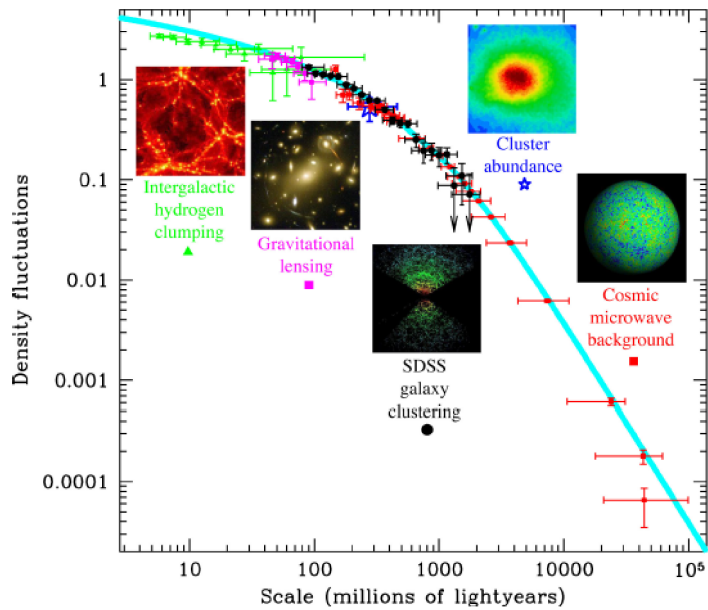


Figura 3.2: Lo spettro di potenza delle fluttuazioni di densità dell'Universo. L'asse-y mostra le fluttuazioni di densità, $\Delta^2(k) \propto k^3 P(k)$ (3.8), mentre l'asse-x è la dimensione comovente ($1 \text{ Mpc} \sim 3,3 \text{ Mly}$). Sono stati utilizzati dei traccianti differenti in base alle dimensioni. La curva azzurra mostra il fit dei dati con i parametri del modello cosmologico standard Λ CDM (Figure credit: Max Tegmark, MIT).

3.2 Funzione di massa degli aloni

A questo punto dell'elaborato l'obiettivo è quello di, sfruttando le proprietà statistiche del campo di densità, associare una massa alle regioni dove è noto che un alone di materia oscura si è formato e ha raggiunto l'equilibrio viriale. In questo modo si ricava la funzione di massa degli aloni.

3.2.1 Il *peak formalism* e il problema *Cloud-in-Cloud*

Dalla trattazione descritta nel capitolo 2 e nel paragrafo 3.1 è noto come all'interno del volume che raggiunge il valore limite di contrasto di densità, si sarà formato un alone di massa M , con $M = \gamma_f \bar{\rho} R^3$. Sia quindi il campo di densità smussato con un filtro di massa M , l'obiettivo è misurare quelle regioni dove $\delta_M = \delta_c(t)$ al tempo t . L'idea è calcolare la densità numerica dei picchi del campo di densità smussato, che superano la soglia $\delta_c(t)$, nota come *peak formalism*, in modo da ottenere la funzione di massa degli aloni. Secondo questo formalismo la densità numerica degli aloni di massa maggiore di M è pari alla densità numerica dei picchi sopra il valore di soglia al tempo t :

$$n(> M) = n_{pk}(> \delta_M) \quad (3.22)$$

Essa venne presentata per la prima volta nel paper noto come “BBKS” del 1986 [7]. Nonostante l'apparente semplicità di questo formalismo, fu chiaro che presenta un grave problema nell'associazione diretta tra picchi di δ_M e aloni di massa M . Si consideri lo stesso campo di densità smussato, però con due filtri di masse M_1 ed M_2 , dove $M_2 > M_1$, e l'elemento δ_m associato con un picco sia di $\delta_1 = \delta(\vec{x}; M_1)$, sia di $\delta_2 = \delta(\vec{x}; M_2)$:

- se $\delta_2 < \delta_1$ allora si nota come δ_m sia prima elemento dell'alone di M_1 al tempo t_1 e poi parte dell'alone di M_2 al tempo $t_2 > t_1$
- se $\delta_2 > \delta_1$ allora δ_m non sarà mai parte di un alone di massa M_1 , ma allo stesso tempo è parte di un alone più grande di massa M_2

Si ha che, contrariamente all'ipotesi iniziale del *peak formalism* non tutti i picchi diventano aloni. Questo è noto come problema *Cloud-in-Cloud*

3.2.2 Press-Schechter

A causa del problema *Cloud-in-Cloud* il *peak formalism* venne abbandonato in favore di quello che è noto come *Press-Schechter formalism*. Questo, espresso nell'omonimo paper del 1974 [8], postula che: la probabilità che $\delta_m > \delta_c(t)$ sia pari alla frazione di massa che allo stesso tempo t è contenuta in aloni di massa $> M$. Essendo il campo di densità gaussiano, la probabilità di avere un alone al tempo t sarà data da:

$$F(> M, t) = P(\delta_M > \delta_c) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_M} \int_{\delta_c}^{\infty} \exp\left(-\frac{\delta_M^2}{2\sigma_M^2}\right) d\delta_M \quad (3.23)$$

$$F(> M, t) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{\delta_c}{2\sigma_M}\right) \quad (3.24)$$

dove $\delta_c = \delta_c(t)$ ed $\operatorname{erfc}(x) = 1 - \operatorname{erf}(x)$ con $\operatorname{erf}(x)$ che rappresenta la funzione degli errori di Gauss. Se si calcola però il $\lim_{M \rightarrow 0} \sigma_M = \infty$ si trova che $\operatorname{erfc}(0) = 1$, quindi solo la metà di tutta la materia è condensata negli aloni. È logico pensare che solo regioni sovradense collasseranno in aloni, il problema è che anche regioni inizialmente sottodense hanno probabilità finita di essere comprese in sovradensità se si considera un alone di dimensioni maggiori. Questo problema venne risolto inserendo a mano un fattore 2, $F(> M, t) = 2 P(\delta_M > \delta_c)$, in modo da far risultare la predizione corretta. Di conseguenza, è possibile calcolare il numero di aloni per volume con massa compresa M ed $M + dM$:

$$n(M, t)dM = \frac{\bar{\rho}}{M} \frac{\partial F(> M)}{\partial M} dM \quad (3.25)$$

dove $\frac{\partial F(> M)}{\partial M}$ indica la frazione di massa contenuta in aloni, mentre la moltiplicazione per $\bar{\rho}$ dà la massa totale per unità di volume. Aggiungendo il fattore 2 e sviluppando i calcoli si ottiene

$$n(M, t)dM = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\bar{\rho}}{M^2} \frac{\delta_c}{\sigma_M} \exp\left(-\frac{\delta_M^2}{2\sigma_M^2}\right) \left| \frac{d \ln \sigma_M}{d \ln M} \right| dM \quad (3.26)$$

La (3.26) rappresenta la funzione di massa degli aloni Press-Schechter. Grazie a questa relazione è possibile quindi calcolare quanti aloni di materia oscura si siano formati ad un certo redshift, e con quale massa.

3.2.3 *Extended-Press-Schechter*

Esiste un modo alternativo di calcolare la funzione di massa degli aloni che non soffre né del problema *Cloud-in-Cloud*, né del fattore 2 aggiunto a mano della Press-Schechter. Questo metodo basato sulla teoria dell'*excursion sets* venne presentato per la prima volta in un paper del 1991 [9]. Per semplicità si definisce $S \equiv \sigma^2(M)$ come variabile di massa, dove S decresce monotonicamente con M . Per ogni valore della massa filtro M , ovvero per ogni S , si associa un $\delta_S = \delta_M(\vec{x})$. In questo modo possiamo ad ogni punto associare una traiettoria nello spazio (S, δ_S) . Se come filtro per il campo viene utilizzato un filtro *sharp k-space*, allora la sovradensità nello spazio reale sarà:

$$\delta_S(\vec{x}) = \int d^3k \tilde{W}_{sk}(kR) \delta_{k,0} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} = \int_{k < k_c} d^3k \delta_{k,0} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \quad (3.27)$$

dove $k_c = 1/R$ è la dimensione del filtro *sharp k-space* e $\delta_{k,0}$ sono i modi di Fourier della sovradensità estrapolata linearmente al tempo presente δ_0 . Il motivo per cui si sceglie di smussare il campo di densità con questo particolare tipo di filtro risiede nelle proprietà che possiede. Infatti all'aumentare di S si aggiungono, per un campo gaussiano, nuovi modi indipendenti. In particolare un incremento $\Delta\delta_S$, dovuto a un incremento ΔS , è una variabile stocastica gaussiana e perciò indipendente dal valore originale di δ_S . Questo rende la traiettoria, o random walk, Markoviana³. Nella Figura 3.3 è possibile notare anche come ogni traiettoria parta nell'origine $(S, \delta_S) = (0,0)$ poiché per $S \rightarrow 0$, $M \rightarrow \infty$ quindi $\delta_S \rightarrow 0$. Si consideri quindi una sovradensità δ_0 smussata con una massa M_1 corrispondente a $S_1 = \sigma^2(M_1)$. Per le ipotesi della Press-Schechter gli elementi di massa delle traiettorie $\delta_S > \delta_c$ a S_1 risiedono in aloni di materia oscura di massa $M > M_1$. Di conseguenza, nessuna delle traiettorie A e B risiedono in un alone, ma sempre in accordo alla PS, l'elemento è associato a un alone di massa $M > M_4 > M_1$. È chiaro che si è di fronte a un assurdo.

Il problema delle ipotesi del formalismo Press-Schechter è che non considera traiettorie come B, ma prende in considerazione solo quelle traiettorie che, una volta

³Una random walk Markoviana è una traiettoria dove lo stato futuro del sistema è dipendente solo dallo stato immediatamente precedente e non dalla sequenza di eventi che hanno portato a quello stato.

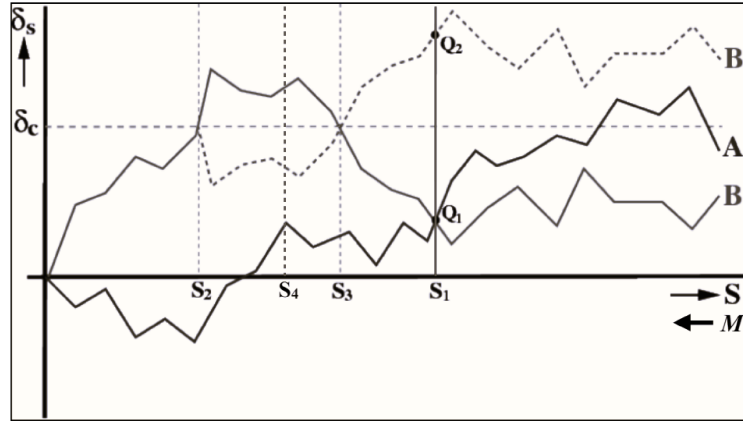


Figura 3.3: La figura rappresenta tre esempi di traiettorie markoviane nel piano (S, δ_S) , in particolare per la natura della random walk markoviana la traiettoria B' è la simmetrica di B e risulta a essa equiprobabile.

superato il valore di soglia, rimangono al di sopra. Tuttavia a causa della proprietà markoviane della random walk, B ha una traiettoria simmetrica ed equiprobabile B' . Il che porta a considerare due volte le traiettorie che in S_1 hanno superato il valore δ_c , introducendo contemporaneamente una spiegazione naturale al fattore 2 introdotto nel paragrafo 3.2.2. Le ipotesi della Press-Schechter vengono quindi corrette nella teoria nota come *Extended-Press-Schechter* (EPS) che postula che: la frazione delle traiettorie che attraversano la barriera $\delta_S = \delta_c(t)$ ad un $S > S_1 = \sigma^2(M_1)$ è uguale alla frazione di massa che al tempo t risiede in aloni con masse pari a $M < M_1$. Considerando che $F(< M_1) = 1 - F(> M_1)$ si trova che la funzione di massa nella EPS è

$$n(M, t)dM = -\frac{\bar{\rho}}{M} \frac{\partial F(< M)}{\partial M} dM = -\frac{\bar{\rho}}{M} \frac{\partial F_{FU>(> S)} \frac{dS}{dM}}{\partial S} dM \quad (3.28)$$

da cui si ritrova la (3.26). È possibile quindi ricavare quante galassie e ammassi di galassie ci si aspetta siano presenti nell'Universo in funzione del tempo e della massa. Tuttavia anche questo formalismo presenta delle limitazioni: esso predice la massa racchiusa negli aloni in senso statico, basandosi sul modello del collasso sferico, ma ulteriori studi hanno dimostrato come il collasso avviene invece in modo ellissoidale. Inoltre il filtro utilizzato per il campo di densità in realtà non è localizzato spazialmente, nonostante gli aloni di materia oscura sono invece localizzati.

Capitolo 4

Programmi Python

In questo capitolo si esporrà il lavoro svolto per graficare la funzione di massa degli aloni di materia oscura Press-Schechter. Le operazioni sono state eseguite con Python 3.8. Per cominciare era fondamentale, per il calcolo della σ_M (equazione 3.13), ricavare lo spettro di potenza della materia. Per fare ciò si è adottato CAMB: un codice che integra le equazioni di evoluzione delle perturbazioni cosmologiche con lo scopo principale di ottenere lo spettro di potenza angolare del CMB. Nel processo, si può calcolare anche lo spettro di potenza della materia, al variare del modello cosmologico [10]. È stato creato un programma che, prendendo come input i dati del satellite Planck (*Planck 2018 results*) tramite la funzione `get_matter_power_spectrum()`, calcolasse lo spettro di potenza della materia lineare e non, per diversi redshift. Il risultato per $z = 0$ è riportato in figura 4.1.

Per il calcolo del Growth Factor, fondamentale per la $\delta_c(t)$ presente nella funzione di massa, è stata utilizzata la seguente relazione:

$$D_+(a) = \frac{5\Omega_m}{2} \frac{H(a)}{H_0} \int_0^a \frac{da'}{\left(a' \frac{H(a')}{H_0}\right)^3} \quad (4.1)$$

dove Ω_m è il parametro di densità, H_0 è la costante di Hubble e $H(a)$ è il parametro di Hubble in funzione del fattore di scala a . Per quest'ultimo si è utilizzata l'espressione

$$H(a) = H_0 \sqrt{\Omega_m a^{-3} + \Omega_\Lambda} \quad (4.2)$$

con $\Omega_\Lambda = 1 - \Omega_m$. Poiché l'integrale nella (4.1) è un integrale numerico, è stata

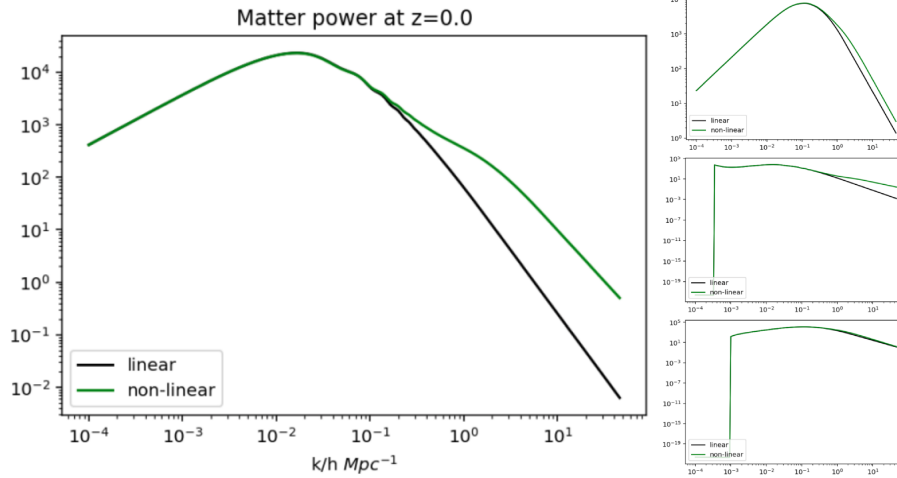


Figura 4.1: La figura rappresenta lo spettro di potenza della materia a $z = 0$ espresso in termini di k/h . Sulla destra si notano gli spettri di potenza della materia per vari modelli cosmologici, rispettivamente dall'alto al basso: CDM cosmology con $\Omega_b = 0.05$ e $\Omega_{CDM} = 0.95$, geometria sferica ($k = 1$) e geometria iperbolica ($k = -1$).

applicata la regola di Simpson per il calcolo, vista la miglior precisione rispetto a quella del Trapezio. Dai dati estrapolati a vari redshift utilizzando questi due algoritmi si è calcolata la funzione di massa Press-Schechter. Definendo $\nu \equiv \delta_c(t)/\sigma(M)$ è stata utilizzata la seguente equazione:

$$n(M, t) = \frac{\bar{\rho}}{M^2} f_{PS}(\nu) \left| \frac{d \ln(\nu)}{d \ln(M)} \right| \quad f_{PS} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \nu e^{-\nu^2/2} \quad (4.3)$$

dove $\delta_c(t) = 1.686/D_+(t)$. Siccome in questa espressione appare una derivata numerica, è stato necessario calcolare una derivata centrale per limitare gli errori di arrotondamento. Questa derivata è stata calcolata con uno step di $h \simeq 10^{-5}$. Il risultato ottenuto tramite il programma Python è mostrato in figura 4.2.

Nel grafico, sono presenti varie curve corrispondenti alla Press-Schechter calcolata a diversi valori di redshift. È evidente l'evoluzione nel tempo degli aloni che crescono in massa al passare del tempo cosmico: man mano che l'Universo evolve, aloni di dimensioni sempre maggiori superano il valore di soglia critico per il collasso, formando strutture sempre più massive. Questo meccanismo è noto come formazione gerarchica delle strutture. A dimostrazione di come l'evoluzione delle galassie e degli ammassi all'interno del nostro Universo segua un andamento

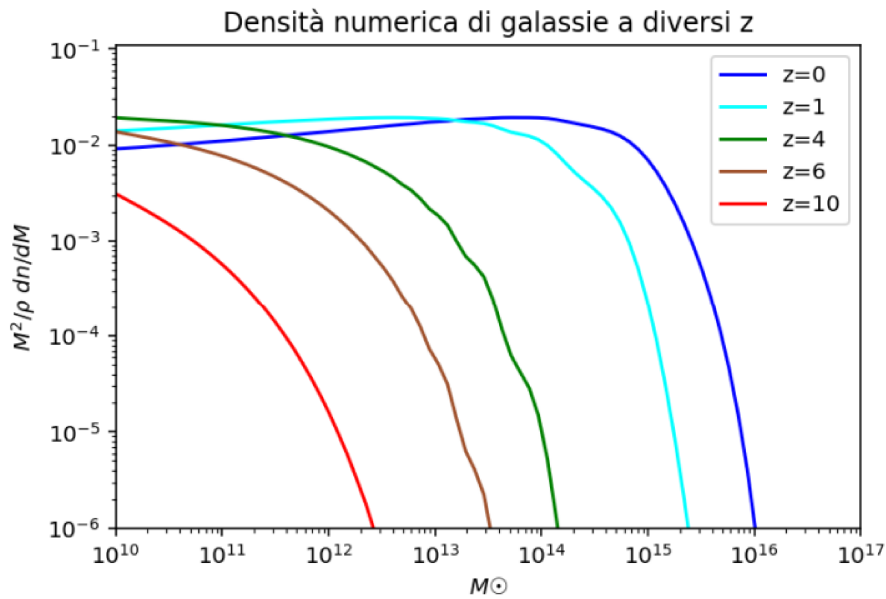


Figura 4.2: La figura mostra la densità numerica degli aloni di materia oscura Press-Schechter graficata per diversi valori di redshift.

bottom-up: cioè le prime strutture a collassare sono quelle più piccole, in seguito si generano via via strutture sempre più massive. La scoperta della formazione gerarchica ha permesso di scartare modelli di formazione con un andamento opposto, detti top-down, teorizzati negli'anni '70 -'80, dove invece le prime formazioni erano ammassi di grandi dimensioni. Questi a seguito della formazione andavano incontro ad un processo di frammentazione generando galassie con masse più modeste.

Bibliografia

- [1] A. Liddle, *An Introduction to Modern Cosmology*. John Wiley & Sons, 2015.
- [2] M. Pettini, *Clusters of Galaxy: spherical collapse and virialization*. University of Cambridge, 2020.
- [3] M. Pettini, *LARGE SCALE STRUCTURE*. University of Cambridge, 2018.
- [5] F. van den Bosch, *Theory of Galaxy Formation*. Yale University, 2024.
- [6] P. collaboration: N. Aghanim et al., «Planck 2018 results. VI. Cosmological parameters,» *A & A 641, A6 (2020)*, 2020.
- [7] K. N. S. A. S. Bardeen J. M. Bond J. R., «The statistics of peaks of Gaussian random fields,» *Astrophysical Journal, Part 1 (ISSN 0004-637X), vol. 304, May 1, 1986, p. 15-61. SERC-supported research.*, 1986.
- [8] P. Press W. H. & Schechter, «Formation of Galaxies and Clusters of Galaxies by Self-Similar Gravitational Condensation,» *Astrophysical Journal*, 1974.
- [9] E. G. K. N. Bond J. R. Cole S., «Excursion set mass functions for hierarchical Gaussian fluctuations,» *Astrophysical Journal*, 1991.

Sitografia

- [4] «[Cosmology 09/01/2024] 12: Press-Schechter halo mass function.» (), indirizzo: <https://www.youtube.com/watch?v=RwjNzHHJPwo>.
- [10] «Code for Anisotropies in the Microwave Background.» (), indirizzo: <https://camb.info/>.