

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Dipartimento di Fisica e Astronomia “Galileo Galilei”

Corso di Laurea in Fisica

Tesi di Laurea

Bande rotazionali del neon-20 in un modello a cluster

Relatore

Prof. Lorenzo Fortunato

Laureando

Riccardo Masarotti

Anno Accademico 2018/2019

Indice

1	Introduzione	1
1.1	Modelli a cluster	1
1.2	Rotore rigido e bande rotazionali	3
2	Bande rotazionali nel Neon-20	9
2.1	$K^\pi = 0^+$	10
2.2	$K^\pi = 0^-$	11
2.3	$K^\pi = 1^-$	12
2.4	$K^\pi = 2^-$	13
2.5	$K^\pi = 0_2^+$	14
2.6	$K^\pi = 0_3^+$	14
2.7	Considerazioni generali	15
3	Conclusioni	19

Capitolo 1

Introduzione

1.1 Modelli a cluster

Al giorno d'oggi la composizione del nucleo atomico è ben nota e conosciuta: numerosi esperimenti hanno infatti confermato la presenza di due diversi tipi di particelle, i protoni, dotati di carica positiva unitaria, e i neutroni, privi di carica. Le diverse specie atomiche sono identificate in particolare dal numero atomico Z di protoni costituenti il nucleo, mentre il numero N di neutroni individua un particolare isotopo dell'elemento con cui si ha a che fare. Complessivamente tale sistema può essere considerato come formato da $A = Z + N$ nucleoni, ove A rappresenta il numero di massa del nucleo. Potenzialmente è possibile ricavare tutte le proprietà del sistema considerato risolvendo l'equazione di Schrödinger per A corpi, scegliendo un potenziale adatto che rappresenti efficacemente l'interazione tra i singoli nucleoni; in particolare si cercano le soluzioni dell'equazione

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2M} \sum_{i=1}^A \nabla_i^2 + \sum_{j>i}^A V_{ij} \right] \psi_n(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_A) = E_n \psi_n(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_A) \quad (1.1)$$

in cui M rappresenta la massa dell' n -esima particella considerata, approssimativamente uguale per tutti i nucleoni, e V_{ij} indica il potenziale d'interazione tra la i -esima e j -esima particella. Data l'evidente complessità, se non impossibilità di risoluzione dell'equazione assegnata, nel corso del secolo scorso sono stati sviluppati diversi modelli in grado di semplificare notevolmente il problema e allo stesso tempo di fornire risultati soddisfacenti in accordo con i dati sperimentali: si evidenziano ad esempio il modello a particella singola o il modello geometrico collettivo di Bohr e Mottelson. Vi sono però alcuni risultati sperimentali che non possono essere ben descritti adottando le tecniche appena citate nel momento in cui si considerano nuclei leggeri. È in tale situazione che si sviluppa l'idea di considerare il nucleo come un insieme di diversi conglomerati di nucleoni, detti clusters. Un caso particolarmente favorito è quello dei cosiddetti α -cluster in cui i raggruppamenti appena descritti sono particelle α cioè nuclei di ${}^4\text{He}$, caratterizzato da una significativa energia di legame e da un primo stato eccitato piuttosto lontano dal fondamentale che lo rende un sistema difficile da perturbare [8] [9].

Un primo modello fu sviluppato nel 1938 da Hafstad e Teller, nel quale si ritenne opportuno considerare un potenziale di interazione tra le particelle α molto simile a quello di Van der Waals della fisica atomica, quindi caratterizzato da repulsione a piccole distanze e attrazione per lunghezze maggiori, in modo tale da poter spiegare la dipendenza approssimativa dell'energia di legame dal numero di particelle contenute e non dal suo quadrato [11]. Infatti dato un nucleo con numero di massa A vi sono $\frac{A(A-1)}{2} \propto A^2$ legami possibili, ma considerando un'interazione nucleone-nucleone limitata a coppie di particelle entro un volume minore di quello nucleare, il numero di legami effettivi risulta proporzionale ad A e di conseguenza lo stesso vale per l'energia di legame. Come evidenziato anche dagli stessi Hafstad e Teller, si può osservare in figura (1.1) la buona dipendenza lineare dell'energia

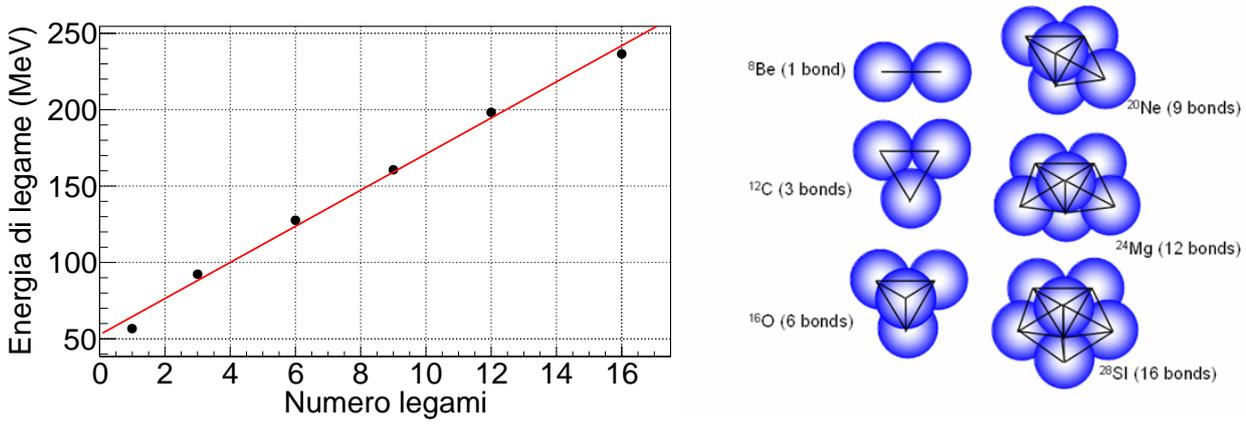


Figura 1.1: α -clusters ed energia di legame in funzione del numero di legami per certe configurazioni geometriche che ne massimizzano il numero, in ordine di massa crescente [8]

di legame dal numero di legami formati per i nuclei visti come costituiti da particelle α . Per il seguente ragionamento ci si riconduce alla referenza [13]. L'assunzione di una struttura a cluster nel nucleo atomico è conseguenza di un processo di "bilanciamento" tra il principio di esclusione di Pauli e l'interazione nucleone-nucleone, a corto raggio ed estremamente attrattiva per $r \approx 10^{-15}$ m, ma repulsiva nel momento in cui $r < 0.4 \cdot 10^{-15}$ m, per cui è necessario che i nucleoni raggiungano una certa distanza reciproca in modo da equilibrare i due contributi. Anche in questa configurazione esiste una debole interazione tra le particelle, che può essere minimizzata per poter raggiungere uno stato energeticamente favorevole. Si considerino 4 nucleoni facenti parte di un nucleo più grande e confinati nel volume nucleare associato; supponendo di trascurare il principio di Pauli, dato il potenziale di interazione tra i nucleoni, vi sarà una probabilità non nulla di trovarli vicini tra loro. Ma ricordando la natura fermionica dei nucleoni non è ovviamente possibile eliminare arbitrariamente il principio di esclusione, il cui effetto è quello di "proibire" l'estrema vicinanza delle particelle considerate, che di conseguenza saranno soggette ad un'interazione molto più debole. Si definisce α -cluster uno stato del nucleo in cui esista una probabilità importante di osservare 4 nucleoni interagenti secondo un potenziale dotato delle caratteristiche appena descritte.

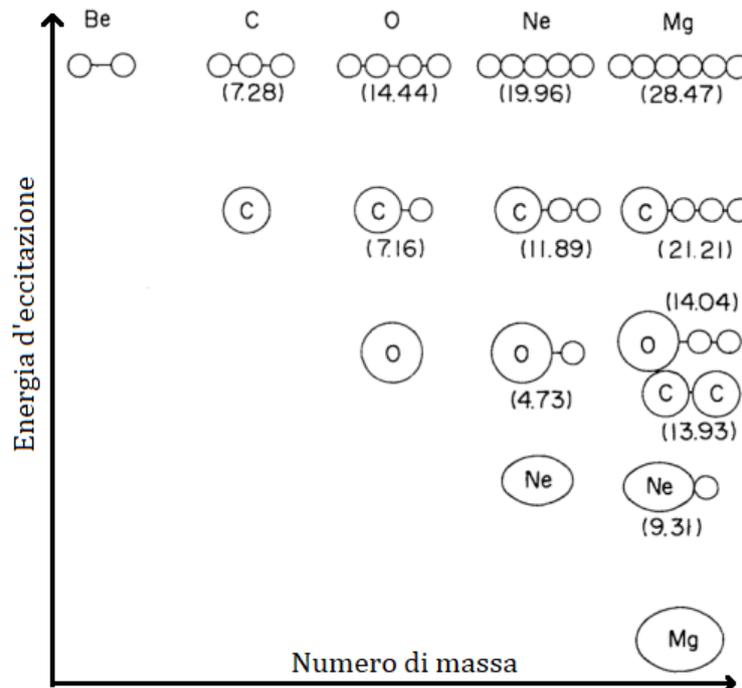


Figura 1.2: Diagramma di Ikeda: i numeri indicano l'energia necessaria in MeV per l'ottenimento della struttura raffigurata a partire dal nucleo nel suo stato fondamentale [12]

Un articolo storicamente significativo in cui il modello α -clusters si è rivelato utile è quello pubblicato da Haruhiko Morinaga nel 1956: data l'incongruenza dei dati sperimentali con il modello a shell nel caso di $4n$ -nuclei, si tentò di fornire un'interpretazione degli stati 0^+ come stati rotazionali. In particolare è rilevante il caso del ^{12}C , in cui si osserva uno stato 0^+ a 7.65 MeV: trattandolo come una catena lineare di tre particelle α , la teoria prevedeva uno stato 2^+ attorno a 9.70 MeV e un 4^+ a 14.18 MeV, effettivamente rivelati [9] [14].

In tale ambito è necessario ricordare il contributo di Kiyomi Ikeda, con i diagrammi da lui elaborati nel 1968. La proposta avanzata comportava la comparsa delle strutture molecolari nel nucleo al raggiungimento dell'energia di soglia per il decadimento α . Il diagramma in figura (1.2) evidenzia le possibili configurazioni molecolari relativamente ai primi nuclei leggeri α -coniugati, in un piano (A, E_{ex}) con E_{ex} energia di eccitazione [9] [12].

1.2 Rotore rigido e bande rotazionali

Un ulteriore semplice modello nucleare in grado di fornire una giustificazione teorica ad alcune caratteristiche degli stati eccitati è quello del rotore rigido, in cui si suppone fissato il centro di massa. Di conseguenza le rotazioni attorno agli assi del sistema di riferimento rappresentano le uniche libertà di movimento concesse. Gli argomenti seguenti sono stati tratti dalla [10]. Matematicamente, da un punto di vista classico, i gradi di libertà del rotore rigido sono gli angoli di Eulero che notoriamente descrivono l'orientamento degli assi del sistema di riferimento intrinseco del corpo nello spazio. L'energia cinetica rotazionale in tal caso è

$$E = \sum_{k=1}^3 \frac{J'^2_k}{2J_{kk}} \quad (1.2)$$

in cui J' è il momento angolare totale relativo al sistema di riferimento intrinseco mentre J_{kk} la k -esima componente diagonale del tensore d'inerzia, quindi il momento d'inerzia associato all'asse di rotazione k . La traduzione quantistica del problema considerato implica la sostituzione del J' con l'operatore quantistico \hat{J}' momento angolare totale, comportando la nascita di due problematiche. La prima è legata al fatto che la relazione per l'energia cinetica rotazionale dipende dagli operatori nel sistema di riferimento *body-fixed*, i quali generalmente non coincidono con quelli *space-fixed*, se non eventualmente nell'istante iniziale in cui questi possono essere considerati coincidenti, situazione non più verificata nel momento in cui viene eseguita una rotazione. I suddetti \hat{J}' obbediscono alle regole di commutazione

$$[\hat{J}'_x, \hat{J}'_y] = -i\hbar\hat{J}'_z \quad (1.3)$$

$$[\hat{J}'_y, \hat{J}'_z] = -i\hbar\hat{J}'_x \quad (1.4)$$

$$[\hat{J}'_z, \hat{J}'_x] = -i\hbar\hat{J}'_y \quad (1.5)$$

Si nota come rispetto alle relazioni individuate nel sistema di riferimento *space-fixed*, per il quale gli operatori del momento angolare totale sono denotati con \hat{J}_i , queste differiscano per il segno, poiché cambia il modo in cui la seconda rotazione agisce. Ad esempio $\hat{J}_x\hat{J}_y$ effettua una rotazione attorno all'asse y , seguita da una attorno all'asse x , mentre nel caso *body-fixed* il secondo operatore agisce rispetto all'asse x' , già ruotato a causa della prima trasformazione. Tuttavia è utile ricordare che $\hat{J}'^2 = \hat{J}^2$, poiché è una quantità scalare che si dimostra essere indipendente dall'orientamento del sistema di riferimento considerato.

Classicamente un corpo può essere liberamente ruotato attorno a un qualsiasi asse principale: nel caso di una configurazione caratterizzata da simmetria rotazionale rispetto a tutti gli assi principali, quale ad esempio quella di una sfera, la rotazione non può essere percepita. Quantisticamente l'invarianza rotazionale che caratterizza la superficie sferica si estende all'invarianza dello stato quantistico del

corpo considerato: pertanto in tale situazione nessuna rotazione è ammessa e non esistono eccitazioni rotazionali. Più in generale, non sono ammesse rotazioni attorno a qualsiasi asse di simmetria. Detto ciò, l'introduzione di asimmetrie nella struttura nucleare, tramite l'adozione di modelli a clusters, comporta un'ulteriore possibilità di eccitazione energetica per il nucleo, rotazionale oltre che vibrazionale. Per poter introdurre il concetto di banda rotazionale è opportuno ricordare le relazioni di trasformazione a cui sono soggetti gli stati. Definiamo un set di angoli di Eulero $\boldsymbol{\theta} = (\alpha, \beta, \gamma)$. A partire da una terna di assi cartesiani (x, y, z) destogira, il sistema di riferimento ruotato si otterrà mediante tre diversi passaggi:

- una rotazione di angolo α attorno all'asse z , che produce la terna (x', y', z') ;
- una rotazione di angolo β attorno all'asse y' , che produce la terna (x'', y'', z'') ;
- una rotazione di angolo γ attorno all'asse z'' ;

Complessivamente l'operatore di rotazione si può indicare come

$$\hat{R}(\boldsymbol{\theta}) = e^{-\frac{i}{\hbar}\gamma\hat{J}''_z} e^{-\frac{i}{\hbar}\beta\hat{J}'_y} e^{-\frac{i}{\hbar}\alpha\hat{J}_z} \quad (1.6)$$

che si può semplificare dal momento che

$$e^{-\frac{i}{\hbar}\beta\hat{J}'_y} = e^{-\frac{i}{\hbar}\alpha\hat{J}_z} e^{-\frac{i}{\hbar}\beta\hat{J}_y} e^{\frac{i}{\hbar}\alpha\hat{J}_z} \quad e^{-\frac{i}{\hbar}\gamma\hat{J}''_z} = e^{-\frac{i}{\hbar}\beta\hat{J}'_y} e^{-\frac{i}{\hbar}\alpha\hat{J}_z} e^{-\frac{i}{\hbar}\gamma\hat{J}_z} e^{\frac{i}{\hbar}\alpha\hat{J}_z} e^{\frac{i}{\hbar}\beta\hat{J}'_y} \quad (1.7)$$

producendo

$$\hat{R}(\boldsymbol{\theta}) = e^{-\frac{i}{\hbar}\alpha\hat{J}_z} e^{-\frac{i}{\hbar}\beta\hat{J}_y} e^{-\frac{i}{\hbar}\gamma\hat{J}_z} \quad (1.8)$$

L'espressione precedentemente ottenuta comportava l'esecuzione delle rotazioni attorno ad assi appartenenti a diversi sistemi di riferimento, risultando complessa da applicare. Come visto, si è giunti ad una semplificazione del problema ritornando al sistema di riferimento iniziale, effettuando la rotazione assegnata attorno al versore stabilito e successivamente riapplicando la trasformazione degli assi.

Dalla [15], considerando gli operatori \hat{J}^2 e \hat{J}_z , è possibile descrivere una base in termini dei numeri quantici j ed m , $|j, m\rangle$, con $m = -j, -j+1, -j+2, \dots, j-2, j-1, j$. Scrivendo uno stato $|\psi(t)\rangle$ nella base appena descritta si ha

$$|\psi(t)\rangle = \sum_j \sum_m |j, m\rangle \langle j, m|\psi(t)\rangle \quad (1.9)$$

Nel caso generale per un $|j, m\rangle$ ruotato la relazione descritta diventa

$$\hat{R}(\alpha, \beta, \gamma) |j, m\rangle = \sum_{\mu=-j}^j |j, \mu\rangle \langle j, \mu| \hat{R}(\alpha, \beta, \gamma) |j, m\rangle \quad (1.10)$$

Nella somma compare la cosiddetta matrice \mathcal{D} di Wigner definita da

$$\mathcal{D}_{\mu,m}^j(\alpha, \beta, \gamma) \equiv \langle j, \mu | \hat{R}(\alpha, \beta, \gamma) | j, m \rangle \quad (1.11)$$

$$= \langle j, \mu | e^{-\frac{i}{\hbar}\alpha\hat{J}_z} e^{-\frac{i}{\hbar}\beta\hat{J}_y} e^{-\frac{i}{\hbar}\gamma\hat{J}_z} | j, m \rangle \quad (1.12)$$

$$= e^{-\frac{i}{\hbar}\mu\alpha} \langle j, \mu | e^{-\frac{i}{\hbar}\beta\hat{J}_y} | j, m \rangle e^{-\frac{i}{\hbar}m\gamma} \quad (1.13)$$

$$= e^{-\frac{i}{\hbar}(\alpha\mu+\gamma m)} d_{\mu,m}^j(\beta) \quad (1.14)$$

ove la $d_{\mu,m}^j(\beta)$ è detta matrice di rotazione ridotta.

Si ricorda che due sono i sistemi di riferimento che si stanno considerando, quello del laboratorio e quello intrinseco, generalmente non coincidenti. Pertanto vi saranno due diverse proiezioni del momento angolare, una sull'asse originale z che denotiamo M e una sull'asse intrinseco z' che denotiamo K . Quindi le autofunzioni associate alla rotazione $|J, M, K\rangle$ obbediscono alle equazioni agli autovalori [4]

$$\hat{J}^2 |J, M, K\rangle = \hbar^2 J(J+1) |J, M, K\rangle \quad (1.15)$$

$$\hat{J}'_z |J, M, K\rangle = \hbar K |J, M, K\rangle \quad (1.16)$$

$$\hat{J}_z |J, M, K\rangle = \hbar M |J, M, K\rangle \quad (1.17)$$

Con le notazioni adottate, la relazione (1.10) diventa

$$|J, K\rangle = \sum_M \mathcal{D}_{MK}^J(\alpha, \beta, \gamma) |J, M\rangle \quad (1.18)$$

Si può dimostrare [7] che le \mathcal{D}_{MK}^J , considerate come funzioni degli angoli di Eulero, sono autofunzioni degli operatori \hat{J}^2 , \hat{J}_z e \hat{J}'_z e che conseguentemente le equazioni agli autovalori si trasformano in

$$\hat{J}^2 \mathcal{D}_{MK}^{J*} = \hbar^2 J(J+1) \mathcal{D}_{MK}^{J*} \quad (1.19)$$

$$\hat{J}'_z \mathcal{D}_{MK}^{J*} = \hbar K \mathcal{D}_{MK}^{J*} \quad (1.20)$$

$$\hat{J}_z \mathcal{D}_{MK}^{J*} = \hbar M \mathcal{D}_{MK}^{J*} \quad (1.21)$$

A questo punto è necessario sottolineare che la scelta del sistema di riferimento intrinseco non è univoca. Procediamo fissando passo dopo passo gli assi z' , y' e x' , mantenendo la loro direzione parallela agli assi principali di simmetria. Per z' esistono 6 possibili scelte, 2 per ogni asse, che puntano una nel verso positivo e una nel verso negativo. La direzione y' presenta 4 diverse configurazioni, ancora una volta 2 per ogni asse rimanente: stabiliti questi, la scelta di x' è obbligata dal momento che si considerano sistemi di riferimento destrorsi. Complessivamente quindi le terne disponibili sono 24 ed è possibile mostrare che queste sono legate tra loro da tre operatori, \hat{R}_1 , \hat{R}_2 , \hat{R}_3 , che se combinati opportunamente ci consentono di passare da un sistema di riferimento ad un altro. La conseguenza principale dell'esistenza di tale possibilità è che la funzione d'onda rotazionale valutata in un punto stabilito dello *space-fixed* deve assumere lo stesso valore in tutti 24 i casi *body-fixed*, condizione che implica l'invarianza della \mathcal{D}_{MK}^{J*} sotto l'azione di una combinazione degli operatori \hat{R}_i introdotti in precedenza [10]. Valutando l'intero processo e imponendo le simmetrie descritte, si ricava una funzione d'onda rotazionale come combinazione lineare delle \mathcal{D}^* [7]:

$$|J, M, K\rangle = c \left[\mathcal{D}_{MK}^{J*}(\alpha, \beta, \gamma) \pm (-1)^{J+K} \mathcal{D}_{M-K}^{J*}(\alpha, \beta, \gamma) \right] \quad (1.22)$$

dove il segno positivo è preso se la funzione d'onda è pari e quello negativo se dispari, sotto un'inversione degli assi, e c rappresenta il fattore di normalizzazione. Dal momento che nell'espressione considerata vi sono indici K positivi e negativi, per etichettare una funzione d'onda rotazionale indicheremo esclusivamente valori $K \geq 0$. Supponendo di lavorare in uno stato caratterizzato da $K = 0$ e parità positiva, si nota che l'unico modo per evitare una funzione d'onda nulla è avere un J pari e analogamente per uno stato a parità negativa sono ammessi esclusivamente valori dispari di J . Si ha quindi

$$\begin{cases} J = 0, 2, 4, \dots & \text{se } K^\pi = 0^+ \\ J = 1, 3, 5, \dots & \text{se } K^\pi = 0^- \end{cases}$$

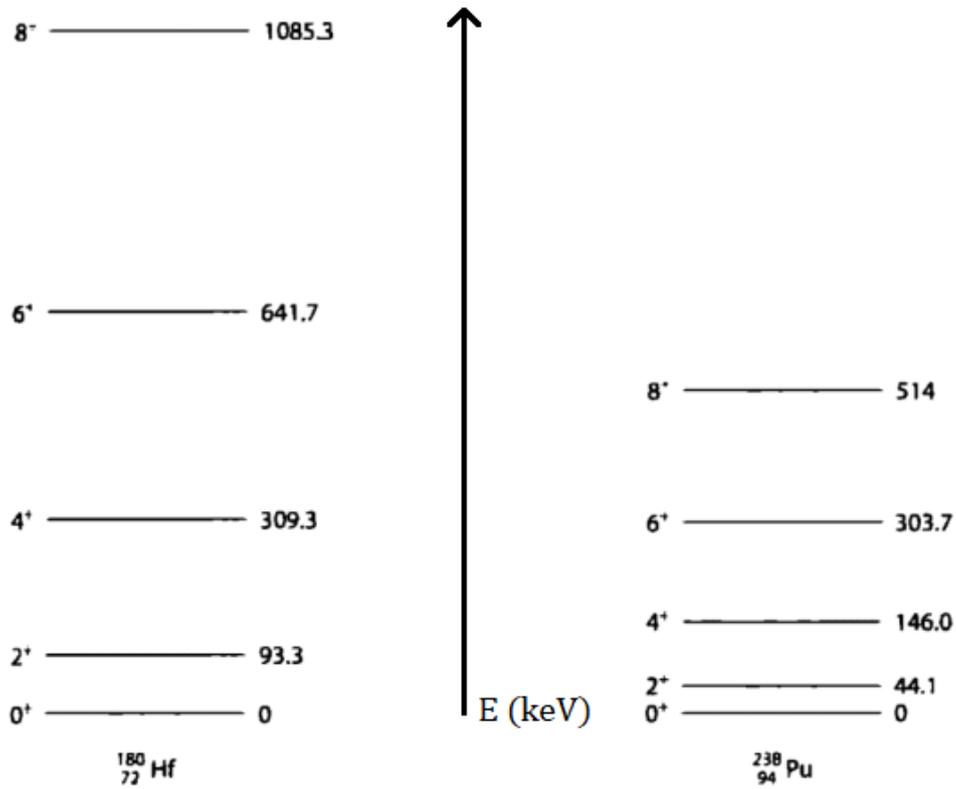


Figura 1.3: Bande rotazionali $K = 0^+$ per l'afnio-180 e il plutonio-238, entrambi nuclei pari-pari; le energie sono espresse in keV [4]

Il caso in cui $K > 0$ invece è più semplice, dato che l'unico vincolo imposto sul momento angolare J è legato al fatto che K è la proiezione di J sull'asse z' intrinseco del nucleo: matematicamente la condizione da rispettare è $J \geq K$ [18].

Nel caso di un rotore assiale, simmetrico rispetto alle rotazioni attorno all'asse intrinseco z e tale che $J_{xx} = J_{yy} = \mathcal{J}$, l'hamiltoniana diventa

$$\hat{H} = \frac{\hat{J}'_x{}^2 + \hat{J}'_y{}^2}{2\mathcal{J}} + \frac{\hat{J}'_z{}^2}{2\mathcal{J}_{zz}} = \frac{\hat{J}^2 - \hat{J}'_z{}^2}{2\mathcal{J}} + \frac{\hat{J}'_z{}^2}{2\mathcal{J}_{zz}} \quad (1.23)$$

dove si è sfruttata la relazione per cui $\hat{J}^2 = \hat{J}'^2 = \hat{J}'_x{}^2 + \hat{J}'_y{}^2 + \hat{J}'_z{}^2$. Valutandone il valor medio $\langle J, M, K | \hat{H} | J, M, K \rangle$ e considerate le precedenti equazioni agli autovalori, si ricava che

$$E = \hbar^2 \left[\frac{J(J+1)}{2\mathcal{J}} + \frac{K^2}{2} \left(\frac{1}{\mathcal{J}_{zz}} - \frac{1}{\mathcal{J}} \right) \right] \quad (1.24)$$

È evidente che per un K assegnato esiste un insieme di stati la cui energia è linearmente dipendente dal fattore $J(J+1)$: questa "serie" è detta banda rotazionale. Si nota come la costante di proporzionalità è una funzione del momento di inerzia \mathcal{J} del nucleo e come l'energia associata al numero K non sia coinvolta nella separazione degli stati all'interno di una singola banda rotazionale: infatti tale valore risulta essere importante nell'individuazione della cosiddetta *band head*, cioè lo stato meno energetico in una banda. Nel caso in cui $K > 0$, a questa è associata un'energia rotazionale pari a

$$E = \hbar^2 \left[\frac{K}{2\mathcal{J}} + \frac{K^2}{2\mathcal{J}_{zz}} \right] \quad (1.25)$$

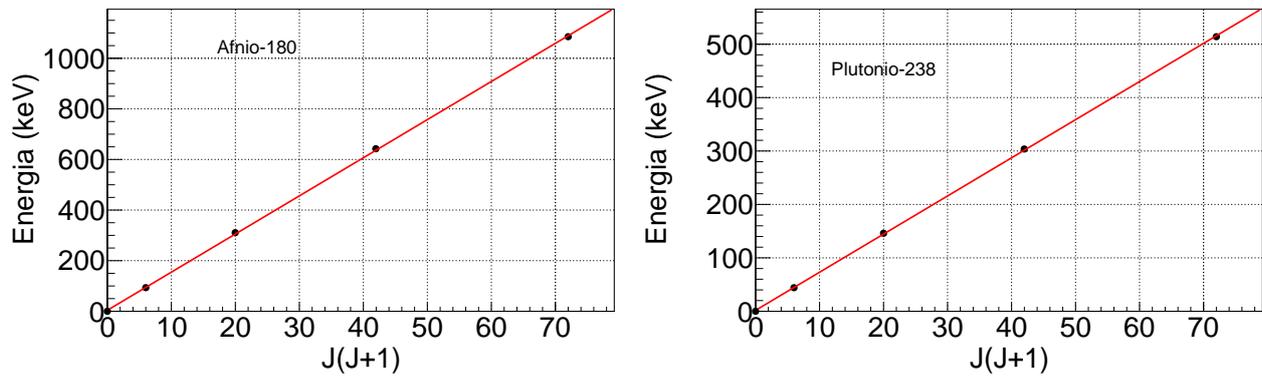


Figura 1.4: Dipendenze lineari delle energie della banda fondamentale con $K=0$ dal fattore $J(J+1)$ per l'afnio-180 e il plutonio-238

ottenuta ponendo $J = K$. In figura (1.3) si possono osservare i livelli di due bande rotazionali relative a specie nucleari diverse: la conferma che lo spettro rappresentato appartenga ad una banda si ha dalla valutazione del rapporto tra le energie associate al livello 4^+ e 2^+ . Infatti dalla 1.24, ponendo $K = 0$, si ha che $\frac{E_{J=4}}{E_{J=2}} = \frac{10}{3} \simeq 3.33$ e in entrambi i casi, per l'afnio e per il plutonio, si ottiene $\frac{309.3}{93.3} \simeq 3.31 \simeq \frac{146.0}{44.1}$, valore confrontabile con quello calcolato analiticamente dalla teoria. In figura (1.4) invece si può osservare la buona dipendenza lineare delle energie dal fattore $J(J+1)$ che però inizia ad essere imprecisa quando si raggiungono elevati J a cui corrispondono elevate velocità di rotazione del nucleo. Si assiste quindi ad un incremento del momento d'inerzia associato all'asse considerato: tale fenomeno viene definito *rotational stretching*. Al cambiamento della struttura interna nucleare corrisponde la comparsa di nuove bande rotazionali, dette *excited bands* [4].

Capitolo 2

Bande rotazionali nel Neon-20

Il neon è presente naturalmente sotto forma di diversi isotopi, tre dei quali risultano essere stabili, in particolare il ^{20}Ne , il ^{21}Ne e il ^{22}Ne , mentre gli altri possiedono tempi di dimezzamento che vanno dai 10^{-21}s ai 10^2s [19]. L'origine degli isotopi di massa 20 e 21 è conosciuta ed è in parte primordiale, in parte da attribuire a reazioni nucleari: al contrario considerando il neon-20 ancora non si hanno informazioni chiare riguardo la sua provenienza e la discussione è ancora aperta [5]. Concentrandoci su quest'ultimo, è possibile verificare che il suo nucleo riveste un importante ruolo in ambito nucleare, sia dal punto di vista dei processi di scattering, ma anche relativamente all'astrofisica nucleare. Il neon-20 infatti è spesso impiegato come "proiettile" nelle reazioni nucleari ma consente anche, ad esempio, di ricavare informazioni rilevanti sulle cosiddette *novae*, ossia fenomeni in cui si verificano esplosioni nucleari derivanti da un eccesso di idrogeno sulla superficie delle nane bianche [3] [20].

Anche per tali motivazioni, una conoscenza approfondita e meno confusa dello spettro del neon-20 rappresenta un aspetto rilevante per una migliore comprensione dei fenomeni descritti. Infatti, il nucleo considerato è caratterizzato da una vastissima presenza di stati eccitati, i quali, all'aumentare dell'energia, sono associati ad una larghezza. Tale fatto provoca inoltre una sovrapposizione tra questi ed una confusione maggiore. Inoltre, bisogna sottolineare che un numero significativo di stati eccitati non possiede un'assegnazione certa bensì dubbia, già a partire da circa 8 MeV [1]. In questo complicato panorama uno strumento utile è costituito dalle bande rotazionali: la loro individuazione, associata alla realizzazione di un fit lineare in un grafico $(J(J+1), E_{ex})$, consente, come visto, di ricavare una stima del momento di inerzia del nucleo. Si ricorda che una banda rotazionale viene individuata dalla *band head*, ossia dal numero K e dalla rispettiva parità positiva o negativa, che stabiliscono i J^π appartenenti ad una certa banda. Dalla relazione (1.24) risulta analiticamente un'intercetta diversa per ogni numero K , mentre è semplice verificare che per ogni banda i coefficienti angolari che moltiplicano la variabile $J(J+1)$ sono generalmente diversi, fatto che necessariamente impone una variazione del momento di inerzia nucleare \mathcal{J} . Associando al nucleo una struttura a cluster e partendo dagli J ricavati si può allora fornire una possibile configurazione assunta dalle particelle α all'interno del volume nucleare. Per il caso del ^{20}Ne in esame un importante esempio di quanto descritto si ha dal lavoro di Paul Hauge e George Duffey [6], in cui si forniscono alcune possibili strutture generate dalle α : nell'articolo, inoltre, si evidenzia come ad ogni configurazione considerata sia associata una determinata simmetria, la quale si riflette sulle eccitazioni rotazionali consentite. In effetti vi sono alcuni casi in cui si afferma l'impossibilità dal punto di vista teorico dell'attuarsi di alcuni stati eccitati che tuttavia sono sperimentalmente rivelati. Stabilire una struttura rigida e quindi imporre una determinata simmetria al nucleo è però una forzatura, considerato che i nucleoni che lo costituiscono sono in continuo movimento e le fluttuazioni sono dello stesso ordine di grandezza del nucleo stesso. Occorre pertanto formulare un modello in cui i punti di equilibrio siano associati ad una certa geometria, attorno alla quale si verificano oscillazioni di grande portata.

Nelle successive pagine, a partire dai dati sperimentali degli stati eccitati del ^{20}Ne si cercherà di evidenziare gli spettri tipici delle bande rotazionali, associando a ciascuno di essi il proprio K^π , considerando esclusivamente le nozioni precedentemente introdotte ed evitando di assegnare al nucleo

una qualsiasi simmetria a priori. Per ogni banda, le coppie di punti $(J(J+1), E_{ex})$, ove E_{ex} rappresenta l'energia di eccitazione dello stato, saranno sottoposte a un'interpolazione lineare con un'equazione del tipo

$$E_{ex} = mJ(J+1) + q, \quad (2.1)$$

in cui dalla (1.24) risulta chiaro che il parametro q è una funzione di K^2 . Inoltre sarà eseguita un'ulteriore operazione di fit parabolico, data la relazione

$$E_{ex} = a(J(J+1))^2 + bJ(J+1) + c. \quad (2.2)$$

In effetti, l'equazione (2.1) si basava sull'assunto che il nucleo fosse un corpo rigido, caratterizzato quindi da un tensore d'inerzia con componenti costanti. In realtà la rotazione del nucleo comporta una deformazione nella sua struttura (*rotational stretching*), che a sua volta implica un lieve aumento delle J_{kk} : un accordo migliore tra dati e teoria si ottiene considerando l'equazione appena descritta [4]. Si precisa che nella realizzazione dei successivi grafici e fit si è deciso di associare come incertezza di misura alle energie il maggiore tra l'errore della misura stessa, rappresentato dalle barre d'errore in nero, e la larghezza di decadimento Γ , indicata dalle barre rosse. Come si potrà osservare, spesso le incertezze non saranno visibili, dal momento che risultano essere molto piccole se paragonate alla scala energetica tipica associata alle eccitazioni, fatto individuabile anche osservando i dati riportati nelle tabelle.

2.1 $K^\pi = 0^+$

Tabella 2.1: Livelli per $K^\pi = 0^+$

$E_{ex}(\text{keV})$	J^π	$\Gamma(\text{keV})$
0 ± 0	0^+	—
1633.67 ± 0.02	2^+	—
4248 ± 1	4^+	—
8778 ± 2	6^+	0.11 ± 0.02
11951 ± 4	8^+	0.035 ± 0.01

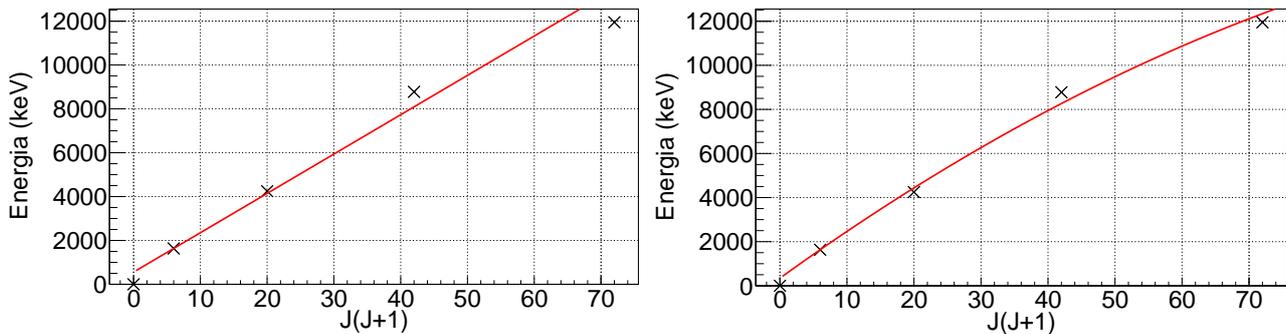


Figura 2.1: Fit lineare (*sinistra*) e parabolico (*destra*) per la banda $K^\pi = 0^+$

Tabella 2.2: Parametri fit lineare

$m(\text{keV})$	$q(\text{keV})$	χ_{lin}^2
179.40 ± 0.04	557.3 ± 0.2	≈ 250000

Tabella 2.3: Parametri fit parabolico

$a(\text{keV})$	$b(\text{keV})$	$c(\text{keV})$	χ_{par}^2
-0.732 ± 0.002	219.3 ± 0.1	344.1 ± 0.6	≈ 93000

La banda 0^+ è quella fondamentale, ossia innestata sul *ground state* del nucleo: essendo questo a parità positiva, per le regole precedentemente enunciate, ci si aspetta di trovare una banda costituita

esclusivamente da stati eccitati J^+ con J numero pari. In effetti, considerando i primi stati eccitati 2^+ , 4^+ , 6^+ e 8^+ si osserva come questi costituiscano una cascata di decadimenti elettromagnetici di tipo $E2$ tale che $8^+ \rightarrow 6^+ \rightarrow 4^+ \rightarrow 2^+ \rightarrow 0^+$ [19]. Inoltre, osservando a primo impatto un andamento approssimativamente lineare in figura, si può concludere che la banda $K^\pi = 0^-$ è costituita dagli stati elencati in tabella (2.1) e graficati nella figura (2.1). Tuttavia, si rivela un'incongruenza con quanto aspettato teoricamente, poiché il rapporto tra le energie degli stati 4^+ e 2^+ , pari a $\frac{4248}{1633.67} \simeq 2.60$ è ben lontano dall'attesa $\frac{10}{3} \simeq 3.33$. Inoltre, anche i risultati dei fit eseguiti sono insoddisfacenti, osservando l'elevato valore del χ^2 ottenuto in entrambi i casi.

2.2 $K^\pi = 0^-$

 Tabella 2.4: Livelli per $K^\pi = 0^-$

E_{ex} (keV)	J^π	Γ (keV)
5788 ± 3	1^-	0.028 ± 0.003
7156.3 ± 0.5	3^-	8.2 ± 0.3
10262 ± 5	5^-	$(15 \pm 4) \cdot 10$
$(1369 \pm 1) \cdot 10$	7^-	$(31 \pm 3) \cdot 10$

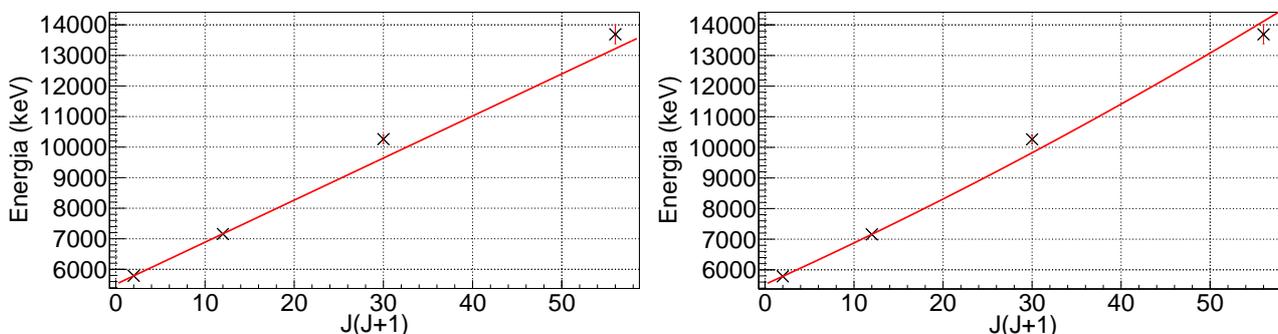

 Figura 2.2: Fit lineare (*sinistra*) e parabolico (*destra*) per la banda $K^\pi = 0^-$

Tabella 2.5: Parametri fit lineare

m (keV)	q (keV)	χ^2_{lin}
137.6 ± 0.8	5512 ± 3	21

Tabella 2.6: Parametri fit parabolico

a (keV)	b (keV)	c (keV)	χ^2_{par}
0.4 ± 0.1	132 ± 2	5523 ± 5	11

La banda 0^- ha un andamento simile a quello della 0^+ , con stati a parità negativa e numeri J dispari. La *band head* è rappresentata dal primo 1^- eccitato mentre il secondo termine si può identificare osservando che il secondo 3^- eccitato vi decade γ tramite una $E2$ con probabilità $\simeq 40\%$: il restante $\simeq 60\%$ è associato ad un decadimento sul 4^+ della 0^+ , ma dal momento che tale stato, come visto, non appartiene alla banda in oggetto, non ci sono ambiguità nell'assegnazione. La scelta del 5^- è stata effettuata tra due livelli a energie pari a 8820 keV e 10262 keV, il primo di questi con assegnazione dubbia: dando per corretti i livelli già stabiliti della banda e considerando singolarmente gli stati appena citati, si prevede rispettivamente un 7^- attorno a una $E_{ex} \approx 12000$ keV e a una $E_{ex} \approx 14100$ keV, che è sperimentalmente rivelato a 13692 keV. Di conseguenza, la scelta del 5^- è ricaduta sul livello a 10262 keV, in accordo con quanto elaborato in [17]. Il 9^- non è stato assegnato: data la banda costruita, la previsione per quest'ultimo era di ≈ 19000 keV, mentre lo stato più vicino rivelato è a un'energia di 17430 keV, quindi significativamente lontano. Anche in questo caso, si osservano dei χ^2 grandi per entrambi i fit realizzati nonostante l'allineamento mostrato in figura (2.2) appaia ottimo.

2.3 $K^\pi = 1^-$ Tabella 2.7: Livelli per $K^\pi = 1^-$

$E_{ex}(\text{keV})$	J^π	$\Gamma(\text{keV})$
8708 ± 7	1^-	2.1 ± 0.8
9318 ± 2	2^-	—
10406 ± 5	3^-	80
11528 ± 6	4^-	—
12713 ± 5	5^-	84 ± 8
$(1658 \pm 2) \cdot 10$	7^-	92 ± 8

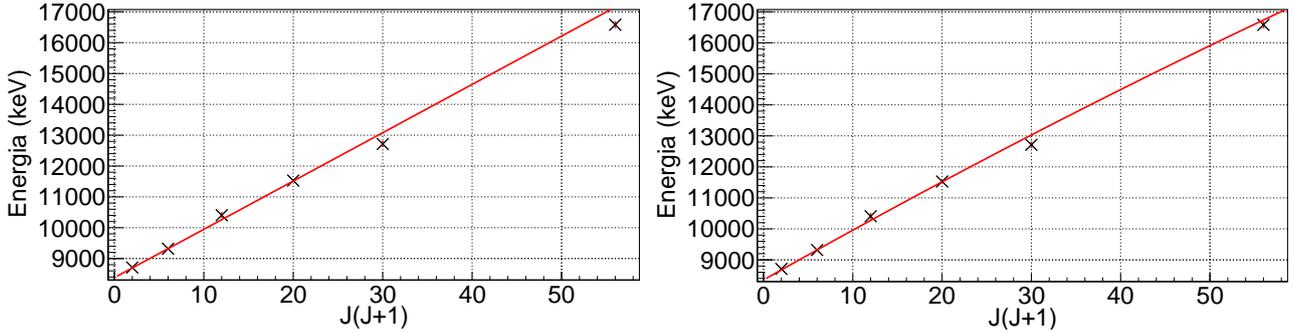
Figura 2.3: Fit lineare (*sinistra*) e parabolico (*destra*) per la banda $K^\pi = 1^-$

Tabella 2.8: Parametri fit lineare

$m(\text{keV})$	$q(\text{keV})$	χ_{lin}^2
156.6 ± 0.4	8380 ± 3	72

Tabella 2.9: Parametri fit parabolico

$a(\text{keV})$	$b(\text{keV})$	$c(\text{keV})$	χ_{par}^2
-0.24 ± 0.05	165.7 ± 0.2	8352 ± 6	46

La banda 1^- sottostà alla regola per cui $K \leq J$, in cui si considerano esclusivamente stati a parità negativa. Nella referenza [1] si evidenziano però livelli con J dispari: il probabile motivo di questa stranezza risiede nel fatto che i J^- pari attesi sono di assegnazione dubbia. Con ordine, si osserva la presenza di un 2^- incerto a 9318 keV, il quale però ben si rapporta con l' 1^- della *band head* e il 3^- a 10406 keV, come si può osservare in figura (2.3). Allo stesso modo, prevedendo un 4^- nella regione ≈ 11500 keV, si registra un'eccitazione pari a 11528 keV, la cui associazione è in gioco tra un 3^+ e un 4^- : quest'ultimo allineamento con la banda in questione era già stato osservato nell'articolo [2]. Sebbene non si abbiano ulteriori conferme, il buon allineamento con la previsione potrebbe rappresentare un indizio significativo per l'assegnazione definitiva di questi due livelli, che pertanto considereremo rispettivamente come un 2^- e un 4^- . I successivi stati 5^- e 7^- non hanno comportato problemi poiché in linea con l'aspettazione teorica, mentre non sono stati trovati i restanti livelli con J pari. Si nota che come diretta conseguenza di ciò, nel caso in cui l'assegnazione del 2^- e del 4^- dovesse risultare sperimentalmente errata, cambierebbe completamente la natura della banda dal momento che, avendo esclusivamente J dispari a parità negativa, si avrebbe a che fare con una $K^\pi = 0^-$. Infine, si sottolinea un ulteriore esito insoddisfacente dei fit lineare e parabolico con i dati raccolti.

2.4 $K^\pi = 2^-$

 Tabella 2.10: Livelli per $K^\pi = 2^-$

E_{ex} (keV)	J^π	Γ (keV)
4966.5 ± 0.2	2^-	—
5621 ± 2	3^-	—
7004 ± 4	4^-	—
8453 ± 4	5^-	0.013 ± 0.004
10609 ± 6	6^-	—
13338 ± 5	7^-	$(31 \pm 3) \cdot 10$
$(1570 \pm 2) \cdot 10$	8^-	—

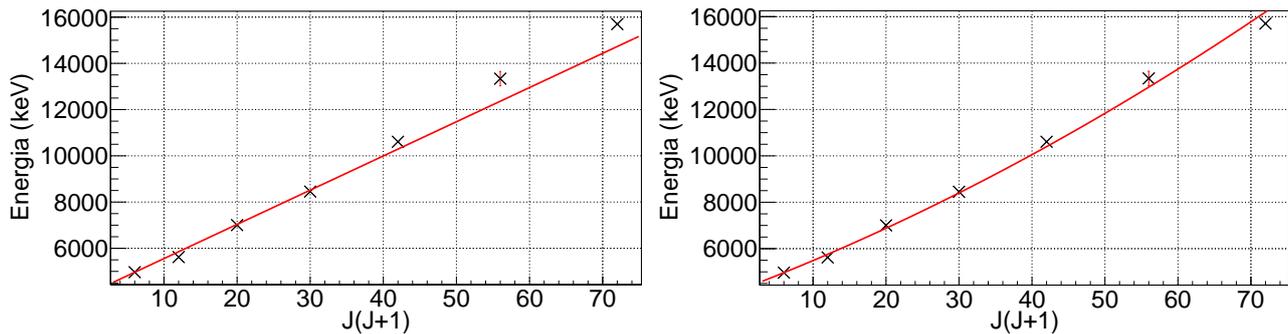

 Figura 2.4: Fit lineare (*sinistra*) e parabolico (*destra*) per la banda $K^\pi = 2^-$

Tabella 2.11: Parametri fit lineare

m (keV)	q (keV)	χ_{lin}^2
147.97 ± 0.09	4075.8 ± 0.6	≈ 26000

Tabella 2.12: Parametri fit parabolico

a (keV)	b (keV)	c (keV)	χ_{par}^2
0.645 ± 0.005	120.0 ± 0.2	4218 ± 1	≈ 9000

Anche la banda 2^- segue le stesse regole imposte per la 1^- : partendo dal 2^- a 4966.5 keV, le successive due assegnazioni relative agli stati 3^- e 4^- sono evidenti, data la catena di decadimenti $4^- \rightarrow 3^- \rightarrow 2^-$ di tipo $M1$ [19]. La proiezione per il livello seguente si ha attorno a un'energia di ≈ 8500 keV, pertanto si può affermare che il 5^- rivelato a 8453 keV appartiene alla banda in oggetto: inoltre dalla [19] tale stato decade $E2$ sul 3^- , elemento che rinforza l'assegnazione appena eseguita. Mentre per i 6^- e 7^- non sono state riscontrate ambiguità, date le previsioni rispettivamente a ≈ 10000 keV e ≈ 12500 keV, la scelta del possibile 8^- è dubbia, dal momento che è proprio il J^π dello stato stesso ad essere incerto, come viene sottolineato in [17]. Tuttavia tale livello rappresenterebbe l'unico 8^- nella regione dei 15000 keV, in cui ci si aspetta la presenza del termine successivo della banda. Questo fatto potrebbe rappresentare una conferma dell'assegnazione del J^π in discussione [16]. Sebbene la figura (2.4) evidenzi un allineamento soddisfacente, lo stesso non si può affermare partendo dai valori dei χ^2 estratti.

2.5 $K^\pi = 0_2^+$ Tabella 2.13: Livelli per $K^\pi = 0_2^+$

E_{ex} (keV)	J^π	Γ (keV)
6725 ± 5	0^+	19 ± 0.9
7422 ± 1	2^+	15.1 ± 0.7
9990 ± 8	4^+	$(15 \pm 3) \cdot 10$
13105 ± 5	6^+	102 ± 5
$(1730 \pm 2) \cdot 10$	8^+	$(20 \pm 3) \cdot 10$

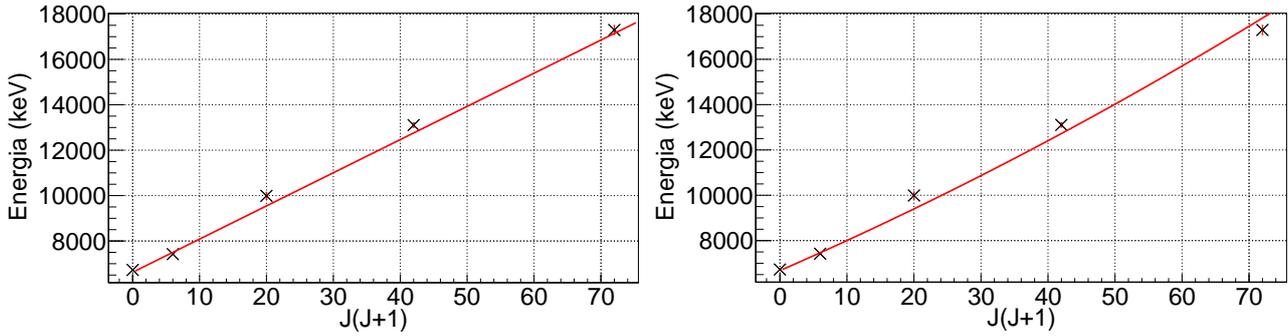
Figura 2.5: Fit lineare (*sinistra*) e parabolico (*destra*) per la banda $K^\pi = 0_2^+$

Tabella 2.14: Parametri fit lineare

m (keV)	q (keV)	χ_{lin}^2
146 ± 2	6623 ± 1	76

Tabella 2.15: Parametri fit parabolico

a (keV)	b (keV)	c (keV)	χ_{par}^2
0.36 ± 0.07	129 ± 4	$(668 \pm 2) \cdot 10$	49

La $K^\pi = 0_2^+$ è la banda basata sul primo 0^+ eccitato: la prima ambiguità nell'assegnazione si riscontra valutando lo stato 4^+ , poiché attorno alla previsione dei 9000 keV si trovano due livelli compatibili a 9031 keV e 9990 keV. Un discorso analogo può essere effettuato per il successivo 6^+ , con energie pari a 12585 keV e 13105 keV. Considerando il minore tra i 2^+ , ci si aspetta l'eccitazione successiva per ≈ 11500 keV, quindi ad una energia inferiore rispetto a quanto riscontrato sperimentalmente. Invece, supponendo corretta l'assegnazione a 9990 keV, si dovrebbe trovare un 6^+ per ≈ 13000 keV, come effettivamente accade: si risolve così anche la seconda ambiguità. Con tali scelte, l'ultimo stato 8^+ si dovrebbe stabilire intorno ai 16900 keV, mentre il livello compatibile più vicino risulta a 17295 keV, il quale presenta una larghezza significativa [19]: pertanto è lecito considerarlo appartenente alla banda in analisi. Sebbene “visivamente” l'allineamento sembri essere buono, come si può osservare nella figura (2.5), lo stesso non si può dire dalla valutazione dei χ^2 , significativamente elevati.

2.6 $K^\pi = 0_3^+$ Tabella 2.16: Livelli per $K^\pi = 0_3^+$

E_{ex} (keV)	J^π	Γ (keV)
7191 ± 3	0^+	3.4 ± 0.2
7833 ± 2	2^+	2
9031 ± 7	4^+	3
12137 ± 5	6^+	—
15874 ± 9	8^+	$(10 \pm 2) \cdot 10$

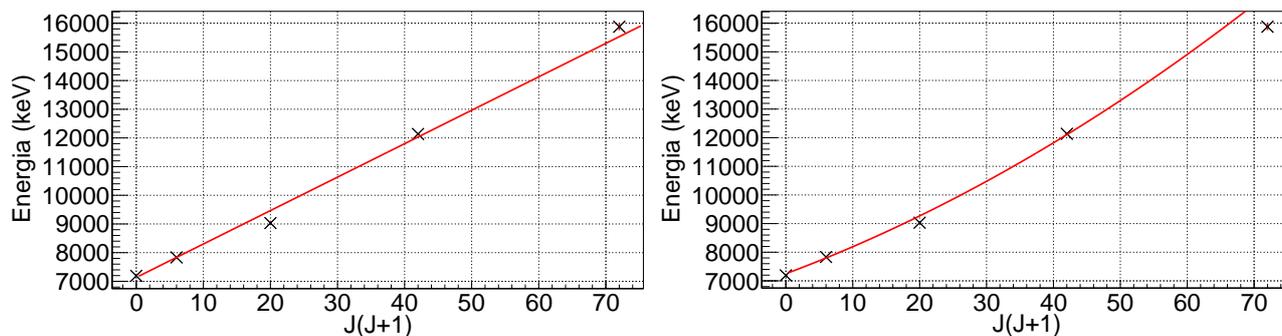

 Figura 2.6: Fit lineare (*sinistra*) e parabolico (*destra*) per la banda $K^\pi = 0_3^+$

Tabella 2.17: Parametri fit lineare

$m(\text{keV})$	$q(\text{keV})$	χ_{lin}^2
116.6 ± 0.1	7135 ± 2	≈ 4600

Tabella 2.18: Parametri fit parabolico

$a(\text{keV})$	$b(\text{keV})$	$c(\text{keV})$	χ_{par}^2
0.67 ± 0.01	87.6 ± 0.6	7249 ± 3	≈ 1900

La risoluzione delle problematiche incontrate nella trattazione della banda 0_2^+ conduce ad una semplificazione per quanto riguarda la 0_3^+ ; infatti determinati i primi due livelli, ossia il secondo 0^+ eccitato e il 2^+ a 7833 keV, la previsione a ≈ 9300 keV si risolve nella scelta del 4^+ a 9031 keV, poiché, come precedentemente spiegato, lo stato a 9990 keV è già stato attribuito alla banda precedente. L'attribuzione del livello successivo è dubbia dato che l'eccitazione rivelata è piuttosto lontana da quella prevista di ≈ 11200 keV: tuttavia si tratta dell'unico 6^+ presente nella regione interessata, per cui si suppone corretta la scelta. La stessa conclusione vale per l' 8^+ , atteso ad un'eccitazione minore nell'ordine dei 15200 keV. La figura (2.6) mostra le energie appena descritte in funzione della variabile $J(J+1)$: i fit realizzati producono un χ^2 molto elevato e di conseguenza insoddisfacente.

2.7 Considerazioni generali

Come osservato, una caratteristica comune a tutti i casi affrontati è la scarsa compatibilità dei risultati sperimentali trattati con la teoria descritta delle bande rotazionali, sia nel caso dell'assunzione del nucleo come rotore rigido, secondo la (2.1), sia in quello più realistico che considera un effetto centrifugo, dettato dalla (2.2). Infatti, si sono sempre ottenuti dei χ^2 che conducono ad un rigetto del principio in esame come descrittore di alcune eccitazioni nel nucleo del neon-20. Osservando con più attenzione i risultati delle regressioni, un aspetto evidenziato in tutte le casistiche è quello per cui $\chi_{par}^2 < \chi_{lin}^2$, indice del fatto che sicuramente un'equazione quadratica si adatti meglio alla situazione affrontata: tuttavia bisogna anche sottolineare che il comportamento delle bande non è uniforme, poiché i coefficienti a che moltiplicano $(J(J+1))^2$ sono sia negativi che positivi. Potremmo dire che "visivamente" i punti dei grafici realizzati si dispongono in modo abbastanza soddisfacente nei pressi delle rette e delle parabole ottenute, ma analizzando statisticamente i dati, che dalle fonti adottate risultano essere associati a errori casuali esigui nella scala considerata, l'affermazione è categoricamente smentita. Quanto detto ed evidenziato suggerisce che le bande rotazionali possono essere un buon inizio per l'analisi dello spettro di una specie nucleare, in particolare se molto complesso e ricco come quello del neon-20, ma che assolutamente rappresentano un modello semplicistico nel momento in cui si vuole effettuare uno studio più approfondito. Quindi l'hamiltoniana quantistica relativa ad un rotore rigido assiale ottenuta in (1.23) è certamente molto semplice da ricavare, ma anche poco fedele al caso reale e ovviamente le stesse conclusioni valgono per la (1.24).

Sempre considerando la relazione (1.24), si ricorda che il coefficiente che moltiplica la parte lineare nella variabile $J(J+1)$ è una funzione del momento di inerzia del nucleo considerato: in particolare,

le due quantità sono tra loro inversamente proporzionali e di conseguenza un aumento della prima implica necessariamente una riduzione della seconda e viceversa. Pertanto è interessante valutare qualitativamente l'andamento dei parametri m e b per ogni banda, rispettivamente associati ai fit lineare e parabolico. I risultati ottenuti nelle pagine precedenti sono raccolti nei seguenti grafici.

Si osserva come in due bande, nella 0^+ e nella 1^- , b risulta essere maggiore di m , mentre nelle

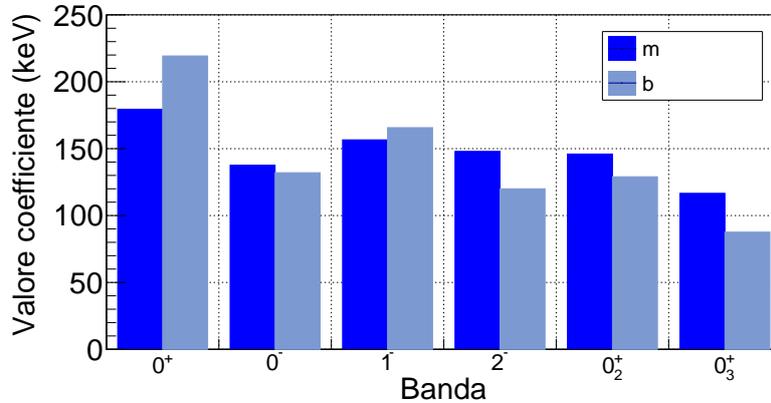


Figura 2.7: Confronto tra i valori in keV dei coefficienti m e b estratti dai fit lineare e parabolico

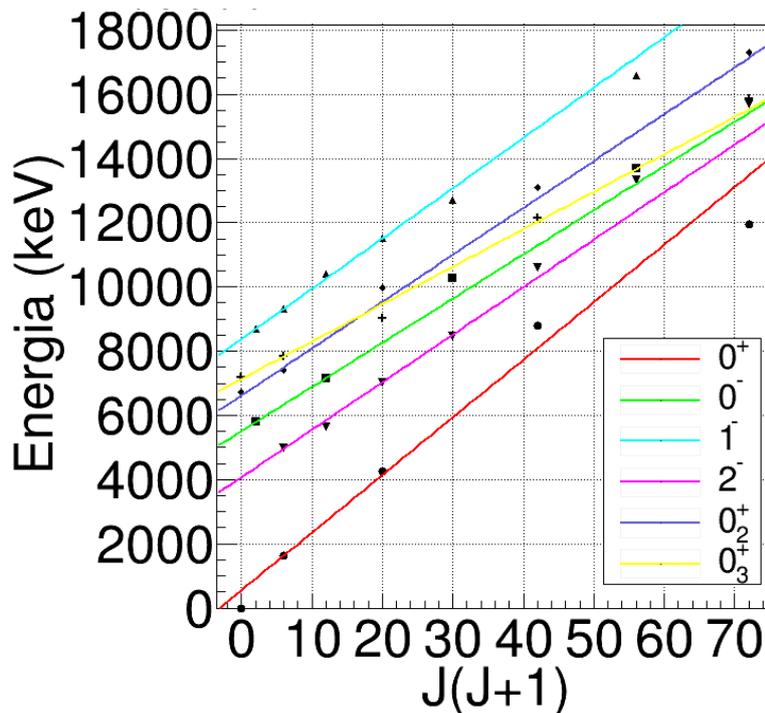


Figura 2.8: Bande rotazionali analizzate raccolte in un unico grafico

restanti situazioni si osserva il contrario. Il fatto che la diminuzione del coefficiente b rispetto a m si registri con una frequenza maggiore rispetto al caso opposto è positivo, dal momento che generalmente un'eccitazione rotazionale comporterà un allontanamento delle masse dall'asse di rotazione, quindi un aumento del momento di inerzia e infine, come detto, una diminuzione del coefficiente ad esso associato. Inoltre, un ragionamento analogo può essere effettuato osservando come si comportano m e b passando da una banda all'altra. Per esempio, dalla figura (2.7) si nota la diminuzione progressiva dei coefficienti passando dalla prima alla terza banda 0^+ , come è logico aspettarsi visto l'aumento delle energie di eccitazione, mostrate nelle tabelle (2.1), (2.13) e (2.16). Lo stesso fenomeno può essere osservato anche in figura (2.8), in cui graficamente si nota la diminuzione del coefficiente angolare all'aumentare dell'energia di eccitazione. Un ulteriore elemento di interesse associato alle bande di tipo 0^+ è quello legato alle intercette q e ai coefficienti c , che partendo dai dati sperimentali devono rappresentare le

energie della *band head*. Queste eccitazioni sono però già conosciute, poiché costituite dagli stati 0^+ da cui si è partiti per la costruzione della banda stessa.

Tabella 2.19: Confronto tra la *band head*, q e c per le bande 0^+ , 0_2^+ e 0_3^+

Banda	Energia 0^+ (keV)	q (keV)	c (keV)
0^+	0	557.3 ± 0.2	344.1 ± 0.6
0_2^+	6725 ± 5	6623 ± 1	$(668 \pm 2) \cdot 10$
0_3^+	7191 ± 3	7135 ± 2	7249 ± 3

Dalla tabella soprastante si nota come per le 0_2^+ e 0_3^+ l'accordo tra i valori è buono in entrambi i casi, dato che la differenza tra questi è contenuta entro i 100 keV, mentre analizzando la banda fondamentale si riscontra un gap significativo tra l'energia aspettata e quella sperimentale: ricordando che il modello lineare, rappresentato dall'equazione (2.1), non è quello che meglio descrive la situazione in esame, si spiega il motivo per cui c risulta essere più vicino al valore della *band head* rispetto a q . Infatti, come già ampiamente affermato, l'introduzione del termine quadratico in $J(J+1)$ come descritto in (2.2) comporta una maggiore adesione del modello teorico ai dati sperimentali.

Rimane da spiegare il comportamento assunto dai coefficienti a del fit parabolico, che moltiplicando il fattore $(J(J+1))^2$ influenzano la concavità della parabola descritta. Da un punto di vista teorico si attende un parametro negativo e la motivazione trova le sue basi nuovamente nella relazione che intercorre tra eccitazione rotazionale e momento d'inerzia J . Come già detto, all'aumentare dell'energia associata alla rotazione segue l'aumento di J , il quale comporta una riduzione del coefficiente angolare valutato tra coppie di punti contigui nel grafico $(J(J+1), E_{ex})$. Necessariamente, tale fatto deve condurre ad una parabola caratterizzata da concavità verso il basso, quindi con un coefficiente a negativo. Tale condizione è però rispettata solamente nei casi della banda 0^+ e della 1^- ; proviamo dunque a dare alcune spiegazioni in grado di giustificare la discrepanza appena rilevata. Una possibile causa si identifica nell'operazione di fit: infatti spesso tale operazione è stata applicata tramite un numero esiguo di punti, come ad esempio nel caso delle bande 0_2^+ , 0_3^+ ma in particolare nella 0^- , composta solamente da 4 dati. In questo caso, l'eventuale presenza di un livello 9^- ad un'energia inferiore alla previsione calcolata dal modello lineare può essere in grado di cambiare il segno del parametro a . Considerando il caso della 2^- , l'anomalia in oggetto può essere indice di un'errata assegnazione dell'ultimo livello 8^- , che ricordiamo essere stato trovato ad un'energia decisamente maggiore rispetto a quanto atteso, aspetto descritto più precisamente nel paragrafo 2.4. La rivelazione di tale stato ad un'eccitazione minore rispetto a quanto stabilito precedentemente e l'individuazione di un ulteriore livello, un 9^- , potrebbero eliminare il problema sul segno del coefficiente. Infine, è necessario fare una precisazione: è già stato detto che nel momento in cui le energie in gioco aumentano, gli stati diventano molto "fitti", ovvero si riscontra un'elevata densità di livelli energetici e può accadere che due di questi siano caratterizzati da stesso numero J e da energie molto vicine. Si assiste allora ad una mescolanza tra questi, da cui deriva una repulsione delle energie: lo stato originariamente più basso decresce in energia, quello più alto aumenta. Ma allora questo significa che il livello "reale" non è individuato: quindi i dati su cui ci si è basati per la costruzione delle bande presentano effetti di questo tipo che non possono essere trascurati nella discussione.

Capitolo 3

Conclusioni

Partendo da un punto di vista generale e ricordando alcune problematiche nello spettro nel caso di nuclei leggeri adottando gli usuali modelli, si è suggerita la possibilità di sfruttare in tali casi un modello a cluster α , rifacendosi ai pionieri di questo semplice modello molecolare e fornendo una breve giustificazione della sua validità. Si è poi passati ad un'introduzione del rotore rigido, partendo dal caso classico ed allargando la trattazione al caso quantistico, in cui è risultata essere di fondamentale importanza la relazione intercorrente tra i sistemi di riferimento *space-fixed* e *body-fixed*. Infatti, come descritto, è questo che conduce alla definizione delle matrici di Wigner \mathcal{D} , che come dimostrato in [7] sono simultaneamente autofunzioni per gli operatori \hat{J}^2 , \hat{J}_z e \hat{J}'_z , caratteristica fondamentale per la definizione delle bande rotazionali nel momento in cui si introducono le simmetrie a cui le funzioni d'onda devono sottostare. È infatti dal risultato finale (1.22) che si ottengono le regole per J e K elencate nel capitolo precedente. L'attenzione si è poi spostata sul caso del neon-20 e su una prima classificazione dei suoi stati, molto numerosi, in bande. Si è visto che la loro individuazione non è scontata, data la presenza di ambiguità sulle assegnazioni e di effetti non considerati dal modello che alterano le energie in gioco.

Alla luce dei risultati finali ottenuti e delle osservazioni effettuate, sarebbe sbagliato affidarsi ciecamente ai test statistici, rigettando completamente l'ipotesi avanzata come questi suggerirebbero di fare. Il comportamento dei parametri estratti dalle operazioni di fit è generalmente quello atteso dall'interpretazione teorica del problema, fatto già discusso nel paragrafo 2.7; inoltre, si ricorda la presenza di effetti trascurati dal punto di vista teorico ma sempre presenti sperimentalmente. In più, osservando i grafici realizzati in precedenza, è innegabile l'influenza del modello del rotore rigido, dato che i punti ben si distribuiscono attorno alle rette e parabole disegnate.

Il lavoro realizzato ben si assocerebbe alla ricerca delle possibili strutture geometriche assunte dagli α cluster nel volume nucleare, sfruttando i momenti di inerzia che possono essere ottenuti dai parametri calcolati, sulla falsariga del lavoro di Hauge e Duffey [6]. Lo studio e la classificazione delle bande rotazionali, in particolare relativamente al neon-20, presenta un picco intorno agli anni '70 e '80, salvo poi essere progressivamente trascurato: sicuramente, al giorno d'oggi, uno studio approfondito e migliorato del caso in esame sarebbe in grado di fornire ulteriori elementi utili alla definizione di un modello più efficiente in grado di rappresentare al meglio le conclusioni sperimentalmente ricavate.

Bibliografia

- [1] Ajzenberg-Selove F., *Energy Levels of Light Nuclei: A=20*, Nuc. Phys. A 475, (1987), revisione del 2018
- [2] Balamuth D.P., Fifield L.K., Zurmühle R.W., *Unnatural parity levels at high excitation in ^{20}Ne* , Phys. Rev. C 14, 1010-1015, (1976)
- [3] Bardayan D.W., Chipps K.A., Ahn S., Blackmon J.C., Carmichael S., Greife U., Jones K.L., José J., Kontos A., Kozub R.L., Linhardt L., Manning B., Matoš M., O'Malley P.D., Ota S., Pain S.D., Peters W.A., Pittman S.T., Sachs A., Schmitt K.T., Smith M.S., Thompson P., *Spectroscopic study of $^{20}\text{Ne}+p$ reactions using the JENSA gas-jet target to constrain the astrophysical $^{18}\text{F}(p,\alpha)^{15}\text{O}$ rate*, Phys. Rev. C 96, 055806, (2017)
- [4] Bertulani C.A., *Nuclear Physics in a Nutshell*, (2007), Princeton University Press, Princeton
- [5] Dickin A.P., *Radiogenic Isotope Geology*, (2018), Cambridge University Press, Cambridge
- [6] Duffey G.H., Hauge P.S., *Alpha particle model for ^{20}Ne and ^{24}Mg* , Phys. Rev. 152, 1023-1027, (1966)
- [7] Eisenberg J.M., Greiner W., *Nuclear Theory 1*, (1975), North Holland Publishing Company, Amsterdam
- [8] Freer M., *Clustering in Light Nuclei; from the Stable to the Exotic*, in Scheidenberger C., Pfützner M., *The Euroschool on Exotic Beams, Vol. IV.*, Lecture Notes in Physics, vol 879, (2014), Springer-Verlag, Berlino
- [9] Freer M., Horiuchi H., Kanada-En'yo Y., Lee D., Meißner U.G., *Microscopic clustering in light nuclei*, Rev. Mod. Phys. 90, 035004, (2018)
- [10] Greiner W., Marhun J.A., *Nuclear Models*, (1996), Springer-Verlag, Berlino
- [11] Hafstad L.R., Teller E, *The Alpha-Particle Model of the Nucleus*, Phys. Rev. 54, 681-692, (1938)
- [12] Ikeda K., Takigawa N., Horiuchi H., *The Systematic Structure-Change into the Molecule-like Structures in the Self-Conjugate $4n$ Nuclei*, Progress of Theoretical Physics Supplement, Volume E68, 464–475, (1968)
- [13] McClure W., Wildermuth K., *Cluster Representations of Nuclei*, (1966), Springer-Verlag, Berlino
- [14] Morinaga H., *Interpretation of Some of the Excited States of $4n$ Self-Conjugate Nuclei*, Phys. Rev. 101, 254-258, (1956)
- [15] Morrison M., Parker G., *A Guide to Rotations in Quantum Mechanics*, Australian Journal of Physics, 40, 465-497, (1987)
- [16] Panagiotou A.D., *Observation of an 8^- level in ^{20}Ne* , Phys. Lett. B 31, 6, 361-362, (1970)
- [17] Richards H.T., *Rotational bands in ^{20}Ne* , Phys. Rev. C 29, 276-283, (1984)
- [18] Wong S.S.M., *Introductory Nuclear Physics*, (1998), WILEY-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, Weinheim

- [19] *List of levels for ^{20}Ne* , URL: <https://www.nndc.bnl.gov/nudat2/getdataset.jsp?nucleus=20NE&unc=nds>
- [20] *Nova*, URL: <https://it.wikipedia.org/wiki/Nova>