

Università degli Studi di Padova – Dipartimento di Ingegneria Industriale

Corso di Laurea in Ingegneria Aerospaziale

***Relazione per la prova finale
«Integrazione simplettica di
sistemi hamiltoniani»***

Tutor universitario: Prof. Massimiliano Guzzo

Laureando: Mattia Gregnanin

Padova, 18/09/2024

Sia $\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) - V(\mathbf{q}, t)$ la **funzione di Lagrange** associata a un sistema meccanico olonomo di energia cinetica $T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ ed energia potenziale $V(\mathbf{q}, t)$. Ogni moto del sistema soddisfa le **equazioni di Lagrange**

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{q}}$$

Si introduce il vettore dei **momenti coniugati**

$$\mathbf{p} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \mathbf{A}(\mathbf{q}, t)\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{b}(\mathbf{q}, t)$$

dove \mathbf{A} e \mathbf{b} sono rispettivamente la matrice cinetica e il vettore dei termini cinetici lineari in $\dot{\mathbf{q}}$ del sistema sopra definito.

Tale sistema è invertibile rispetto alle $\dot{\mathbf{q}}$, pertanto si può definire la **funzione di Hamilton**:

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) = \left[\mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{q}} - \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \right]_{\dot{\mathbf{q}}=\dot{\mathbf{q}}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)}$$

ovvero la trasformata di Legendre della lagrangiana.

Derivando esplicitamente l'hamiltoniana rispetto alle variabili (\mathbf{q}, \mathbf{p}) :

$$\frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} = \left[\dot{\mathbf{q}} + \nabla_{\mathbf{p}} \dot{\mathbf{q}}^T \left(\mathbf{p} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) \right]_{\dot{\mathbf{q}}=\dot{\mathbf{q}}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)} \quad \frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} = \left[-\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{q}} + \nabla_{\mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}}^T \left(\mathbf{p} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) \right]_{\dot{\mathbf{q}}=\dot{\mathbf{q}}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)}$$

e calcolando tali derivate lungo $(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t), t)$, ove $\mathbf{q}(t)$ è una soluzione delle equazioni di Lagrange e $\mathbf{p}(t) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}}(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t), t)$, si ottengono le **equazioni di Hamilton**:

$$\frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t), t) = \dot{\mathbf{q}}(t) \quad \frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t), t) = -\dot{\mathbf{p}}(t)$$

Posto $\mathbf{z} = (\mathbf{q}, \mathbf{p})$, le due equazioni possono essere riscritte con la notazione compatta:

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{E} \nabla H(\mathbf{z}, t)$$

dove $\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{I} \\ -\mathbf{I} & 0 \end{bmatrix}$ è la **matrice simplettica standard**.

Siano f e g due funzioni di variabili (\mathbf{q}, \mathbf{p}) , si definisce l'operatore **parentesi di Poisson**

$$\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}} \cdot \frac{\partial g}{\partial \mathbf{p}} - \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} \cdot \frac{\partial g}{\partial \mathbf{q}} = \nabla f \cdot \mathbf{E} \nabla g$$

dove il gradiente viene effettuato rispetto alla variabile $\mathbf{z} = (\mathbf{q}, \mathbf{p})$.

Le equazioni di Hamilton possono anche essere espresse nella forma

$$\dot{\mathbf{z}} = \{\mathbf{z}, H(\mathbf{z}, t)\}$$

Tra le proprietà soddisfatte dalle parentesi di Poisson viene citata l'**identità di Jacobi**:

$$\{\{f, g\}, h\} + \{\{g, h\}, f\} + \{\{h, f\}, g\} = 0$$

Detti:

- $\phi_H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ il **flusso hamiltoniano**, ovvero la soluzione al tempo t del problema di Cauchy con dato iniziale (\mathbf{q}, \mathbf{p}) ;
- ψ_τ una **mappa** dipendente dal passo $\tau > 0$;

ψ_τ è detta **integratore** di ordine $n \in \mathbb{N}$ se esistono $K > 0$ e $\tau^* > 0$:

$$\|\phi_H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, \tau) - \psi_\tau(\mathbf{q}, \mathbf{p})\| \leq K\tau^{n+1}, \quad \forall(\mathbf{q}, \mathbf{p}), \tau \in [0, \tau^*)$$

ψ_τ è detta **simplettica** se preserva le parentesi di Poisson:

- **Conservazione dei volumi** nello spazio delle fasi;
- **Conservazione di un'hamiltoniana** \tilde{H} (Dragt & Finn 1976) (Yoshida 1990, 1993) (Neishtadt 1984) (Benettin & Giorgilli 1994).

Sia H autonoma e separabile:

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = T(\mathbf{p}) + V(\mathbf{q})$$

Introdotta l'**operatore di Lie** $D_F = \{\cdot, F\}$, esiste $\tau^* > 0$ per cui ogni soluzione $\mathbf{z}(t)$ del problema di hamiltoniana $H(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ ammette la rappresentazione formale

$$\mathbf{z}(\tau) = [\exp(\tau D_H)]\mathbf{z}(0) = \exp[\tau(D_T + D_V)]\mathbf{z}(0)$$

con $\tau \in [0, \tau^*]$, dove $\exp[\tau(D_T + D_V)]$ è la **serie di Lie** di $\tau(D_T + D_V)$, ovvero

$$\exp[\tau(D_T + D_V)] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{[\tau(D_T + D_V)]^k}{k!}$$

Si vuole ora approssimare tale esponenziale a un prodotto finito di operatori **esattamente computabili**

$$\exp[\tau(D_T + D_V)] = \prod_{i=1}^k \exp(c_i \tau D_T) \exp(d_i \tau D_V) + o(\tau^n), \quad \text{per opportuni } c_i, d_i$$

Poiché i singoli fattori sono **mappe simplettiche**, anche il loro prodotto lo è, le cui singole soluzioni sono date da

$$\begin{pmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{p} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \mathbf{q} + c_i \tau \frac{\partial T}{\partial \mathbf{p}}(\mathbf{p}) \\ \mathbf{p} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{p} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{p} - d_i \tau \frac{\partial V}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}) \end{pmatrix}$$

Si ottiene l'integratore

$$\tilde{\mathbf{z}}(\tau) = \left[\prod_{i=1}^k \exp(c_i \tau D_T) \exp(d_i \tau D_V) \right] \mathbf{z}(0)$$

riconducibile alla successione di $2k$ mappe simplettiche

$$\mathbf{q}_i = \mathbf{q}_{i-1} + c_i \tau \left(\frac{\partial T}{\partial \mathbf{p}} \right)_{\mathbf{p}=\mathbf{p}_{i-1}} \quad \mathbf{p}_i = \mathbf{p}_{i-1} - d_i \tau \left(\frac{\partial V}{\partial \mathbf{q}} \right)_{\mathbf{q}=\mathbf{q}_i}$$

Si nota infine che deve essere necessariamente

$$\sum_{i=1}^k c_i = \sum_{i=1}^k d_i = 1$$

Il **metodo di Eulero simplettico (SE)** si ottiene per $n = 1$ ($k = 1$), $c_1 = d_1 = 1$:

$$\exp(\tau D_H) = \exp(\tau D_T) \exp(\tau D_V) + o(\tau)$$

- Il metodo splitting permette di costruire integratori simplettici espliciti **di ogni ordine**, risolvendo semplici sistemi algebrici per i coefficienti (Yoshida 1990, 1993);
- Le soluzioni ottenute tramite metodi splitting rimangono **esponenzialmente vicine** alle soluzioni di un'hamiltoniana \tilde{H} , che è una piccola perturbazione dell'hamiltoniana H .

Per capire cosa accade all'energia utilizzando l'integratore di primo ordine, si può determinare la vera hamiltoniana \tilde{H} che viene conservata. Usando la formula BCH:

$$\begin{aligned}\exp(\tau D_{\tilde{H}}) &= \exp(\tau D_T) \exp(\tau D_V) \\ &= \exp\left[\tau(D_T + D_V) + \frac{1}{2}\tau^2 D_{\{V,T\}} + \mathcal{O}(\tau^3)\right]\end{aligned}$$

da cui la serie converge formalmente a

$$\tilde{H} = T + V + \frac{\tau}{2}\{V, T\} + \mathcal{O}(\tau^2)$$

Ponendo $n = 2$ ($k = 2$) si ottengono $c_1 = c_2 = 1/2, d_1 = 1, d_2 = 0$:

$$\exp[\tau(D_T + D_V)] = \exp\left(\frac{1}{2}\tau D_T\right) \exp(\tau D_V) \exp\left(\frac{1}{2}\tau D_T\right) + o(\tau^2)$$

Con un approccio equivalente a quello precedente è possibile calcolare l'hamiltoniana che rimane conservata, che risulta essere (Yoshida 1993)

$$\tilde{H}_{2\text{nd}} = H + \tau^2 \left(\frac{1}{12} \{\{T, V\}, V\} - \frac{1}{24} \{\{V, T\}, T\} \right) + \mathcal{O}(\tau^4)$$

L'integratore di ordine due è **simmetrico** e rispetta le inversioni temporali:

$$S_{2\text{th}}(\tau)S_{2\text{th}}(-\tau) = S_{2\text{th}}(-\tau)S_{2\text{th}}(\tau) = \mathbf{I}$$

Conseguenza di ciò è che il termine che va con il cubo del passo nell'hamiltoniana perturbata è nullo, così come tutti i termini di esponente dispari (Yoshida 1990).

Yoshida (1990) espone un metodo alternativo per ottenere i coefficienti esatti di integratori simmetrici, **basato sulla composizione d'integratori** già noti. Ad esempio

$$S_{4\text{th}}(\tau) = S_{2\text{th}}(x_1\tau)S_{2\text{th}}(x_0\tau)S_{2\text{th}}(x_1\tau)$$

è **l'integratore di ordine quattro**, ottenuto tramite la composizione dell'integratore di ordine due, dove i coefficienti x_0 e x_1 soddisfano le condizioni

$$x_0 + 2x_1 = 1 \qquad x_0^3 + 2x_1^3 = 0$$

e sono

$$x_0 = -\frac{2^{1/3}}{2 - 2^{1/3}} \qquad x_1 = \frac{1}{2 - 2^{1/3}}$$

In maniera ricorsiva è possibile costruire l'integratore $S_{(2n+2)\text{th}}$ partendo da $S_{(2n)\text{th}}$ come

$$S_{(2n+2)\text{th}}(\tau) = S_{(2n)\text{th}}(y_1\tau)S_{(2n)\text{th}}(y_0\tau)S_{(2n)\text{th}}(y_1\tau)$$

ove

$$y_0 = -\frac{2^{1/(2n+1)}}{2 - 2^{1/(2n+1)}} \qquad y_1 = \frac{1}{2 - 2^{1/(2n+1)}}$$

L'integratore di ordine $2n$, ottenuto con il metodo di Yoshida fa riferimento a $S_{2\text{th}}$ ben 3^{n-1} volte. Tuttavia, esistono metodi che forniscono integratori con un numero minore di step, ma i coefficienti sono determinabili solo **numericamente**.

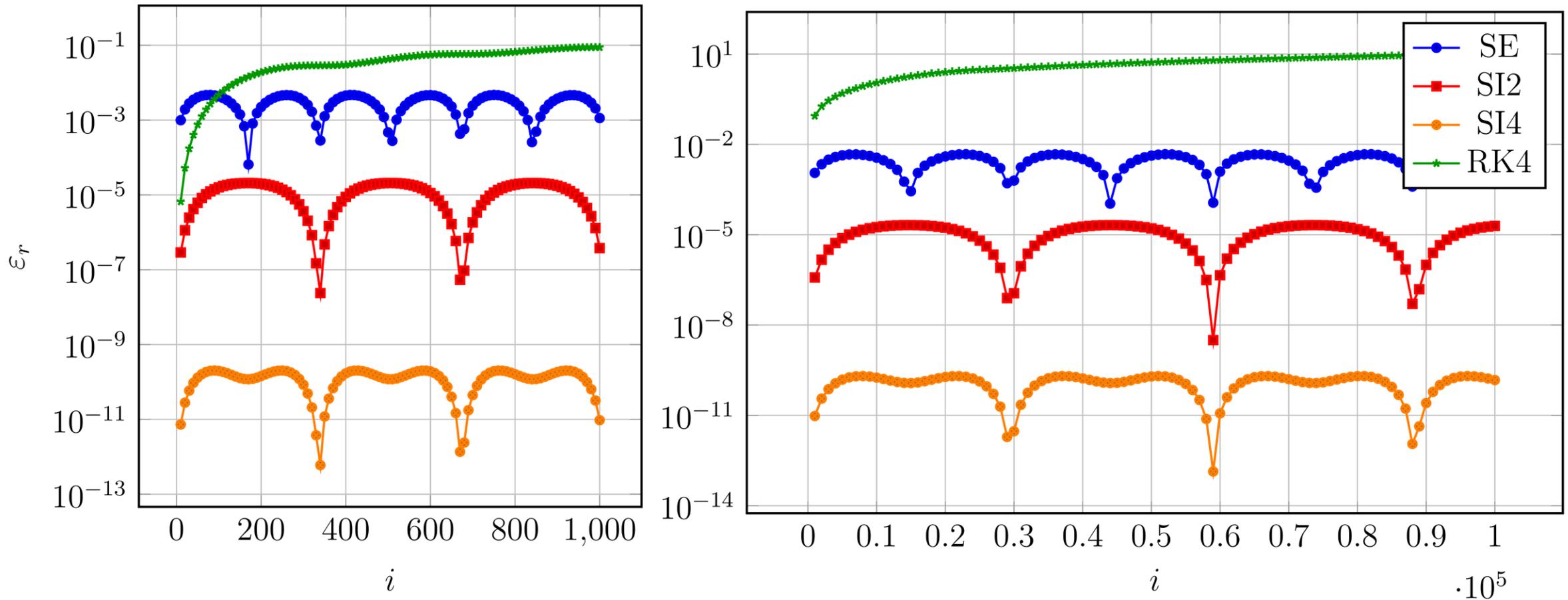
Per quanto concerne l'aspetto energetico, si può dimostrare che (Yoshida 1993)

$$\tilde{H}_{n\text{th}} = H + \tau^n H_n + \mathcal{O}(\tau^{n+1})$$

Un risultato più forte, ottenuto attraverso la teoria delle perturbazioni, è (Neishtadt 1984, Benettin & Giorgilli 1994)

$$\|\psi_\tau(\mathbf{q}, \mathbf{p}) - \phi_{H+\tau^n H_n}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, \tau)\| \leq C e^{-1/\tau}$$

dove ψ_τ è un integratore splitting e la sua mappa, a meno di errori esponenzialmente piccoli, rappresenta un vero flusso hamiltoniano. Le differenze tra il flusso originale ϕ_H e $\phi_{H+\tau^n H_n}$ sono quelle indotte dal termine perturbativo $\tau^n H_n$ sul sistema hamiltoniano H .

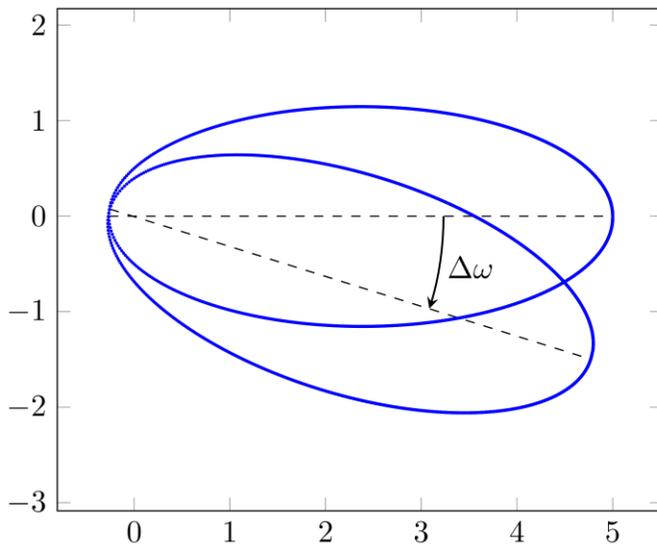


Confronto tra gli errori relativi ε_r dell'energia in funzione del numero d'iterazione i , di vari metodi d'integrazione applicati al pendolo meccanico di hamiltoniana $H = \frac{1}{2}p^2 - \cos q$, con $\tau = 0.01$.

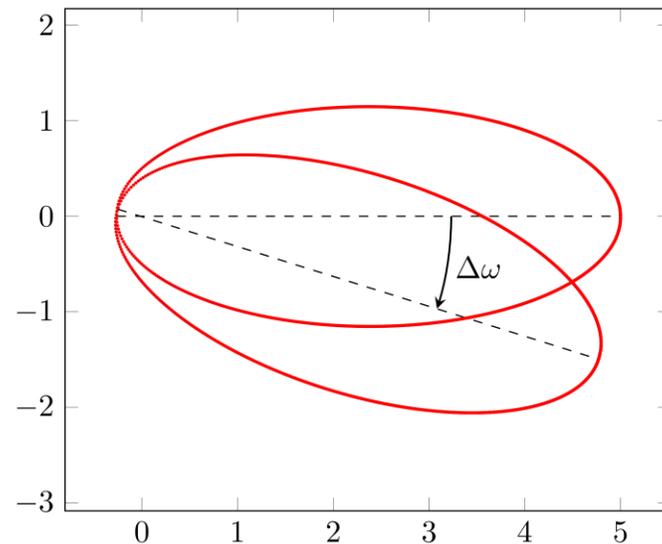
Si consideri l'hamiltoniana del problema ridotto di Keplero in coordinate cartesiane:

$$H = \frac{1}{2\mu} (p_x^2 + p_y^2) - \frac{Gm_1m_2}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \text{ove } \mu = \frac{m_1m_2}{m_1 + m_2}$$

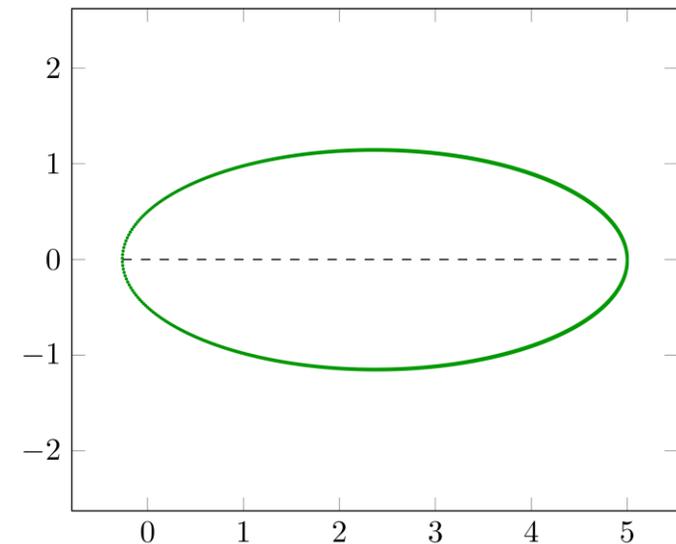
Essa è autonoma e separabile, dunque si possono applicare gli integratori prima descritti:



(a) SE.

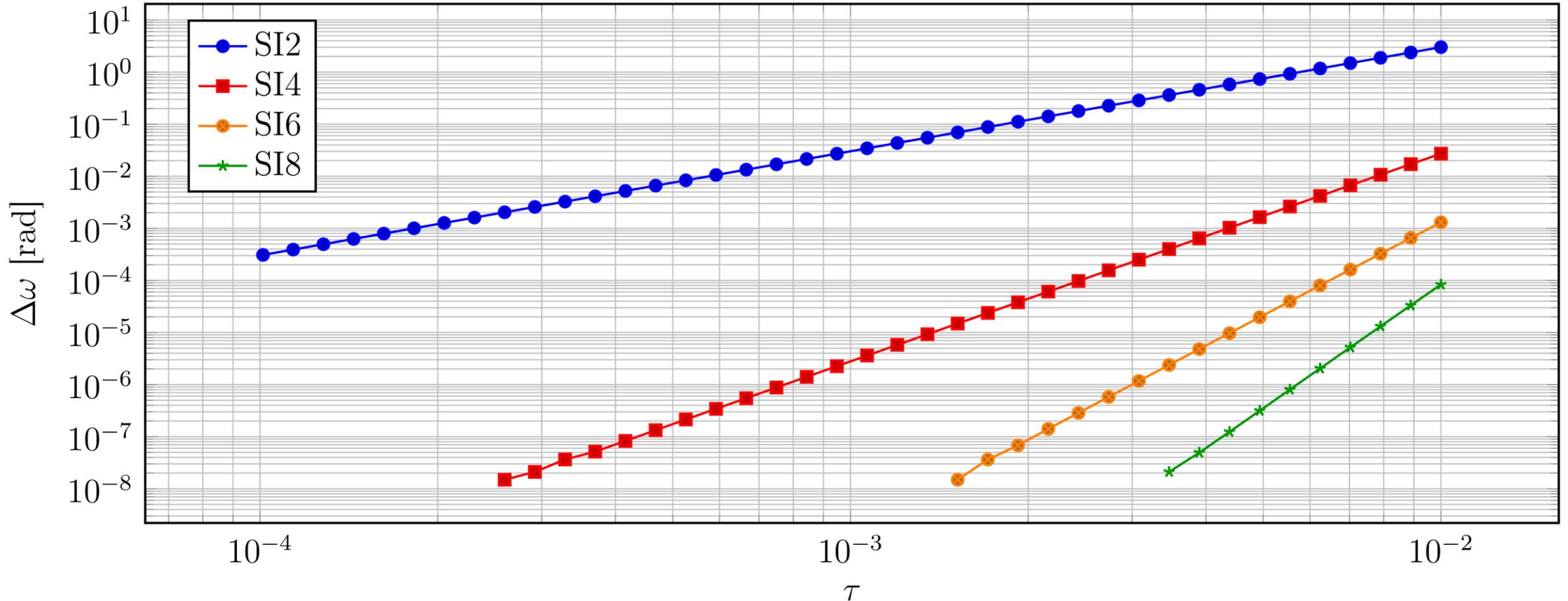


(b) SI2.



(c) SI4.

Integrazione numerica del problema di Keplero ridotto, con masse $m_1 = m_2 = 1$ e costante $G = 1$, di un'orbita ellittica molto eccentrica ($e = 0.9$). Il passo d'integrazione è $\tau = 0.01$. Le figure di precessione $\Delta\omega$ sono rappresentate dopo un intervallo pari a 100 periodi.



Rappresentazione della variazione dell'argomento del pericentro $\Delta\omega$, dopo un intervallo pari a 1000 periodi, in funzione del passo d'integrazione τ . L'orbita è la stessa descritta precedentemente.

Si consideri un sistema costituito da tre corpi, rispettivamente di massa m_1 , m_2 e m_3 , che si attraggono gravitazionalmente tra di loro. Denotando con \mathbf{x}_1 , \mathbf{x}_2 e \mathbf{x}_3 le rispettive posizioni in un sistema di riferimento fisso, valgono le equazioni:

$$\begin{aligned}\frac{d^2 \mathbf{x}_1}{dt^2} &= -Gm_2 \frac{\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2}{\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|^3} - Gm_3 \frac{\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_3}{\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_3\|^3} \\ \frac{d^2 \mathbf{x}_2}{dt^2} &= -Gm_1 \frac{\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1}{\|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1\|^3} - Gm_3 \frac{\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_3}{\|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_3\|^3} \\ \frac{d^2 \mathbf{x}_3}{dt^2} &= -Gm_1 \frac{\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_1}{\|\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_1\|^3} - Gm_2 \frac{\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_2}{\|\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_2\|^3}\end{aligned}$$

Ci si pone in un sistema di riferimento centrato in m_1 considerando $\mathbf{r}_2 = \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1$ e $\mathbf{r}_3 = \mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_1$ come le posizioni relative. Derivandole si ottengono:

$$\begin{aligned}\frac{d^2 \mathbf{r}_2}{dt^2} &= -G(m_1 + m_2) \frac{\mathbf{r}_2}{\|\mathbf{r}_2\|^3} - Gm_3 \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3}{\|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3\|^3} - Gm_3 \frac{\mathbf{r}_3}{\|\mathbf{r}_3\|^3} \\ \frac{d^2 \mathbf{r}_3}{dt^2} &= -G(m_1 + m_3) \frac{\mathbf{r}_3}{\|\mathbf{r}_3\|^3} - Gm_2 \frac{\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2}{\|\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2\|^3} - Gm_2 \frac{\mathbf{r}_2}{\|\mathbf{r}_2\|^3}\end{aligned}$$

Il problema ristretto si ottiene ponendo $m_3 = 0$. Le equazioni diventano:

$$\frac{d^2 \mathbf{r}_2}{dt^2} = -G(m_1 + m_2) \frac{\mathbf{r}_2}{\|\mathbf{r}_2\|^3}$$

$$\frac{d^2 \mathbf{r}_3}{dt^2} = -Gm_1 \frac{\mathbf{r}_3}{\|\mathbf{r}_3\|^3} - Gm_2 \left(\frac{\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2}{\|\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2\|^3} + \frac{\mathbf{r}_2}{\|\mathbf{r}_2\|^3} \right)$$

e, imponendo ad m_2 un'orbita circolare data da $\mathbf{r}_2 = r_2(\cos \omega_2 t, \sin \omega_2 t)$, si ottiene un'unica equazione differenziale di incognita $\mathbf{r} = \mathbf{r}_3$ che è equivalente al sistema di hamiltoniana

$$H = \frac{\|\mathbf{p}\|^2}{2} - \frac{Gm_1}{\|\mathbf{r}\|} - Gm_2 \left(\frac{1}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_2\|} - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_2}{\|\mathbf{r}_2\|^3} \right)$$

\mathbf{r}_2 è funzione del tempo e perciò H è nonautonoma. Si rende necessario introdurre una coordinata τ e relativo momento coniugato \mathcal{T} , in modo che l'hamiltoniana

$$H' = H(\mathbf{r}, \mathbf{p}, \tau/\omega_2) + \omega_2 \mathcal{T}$$

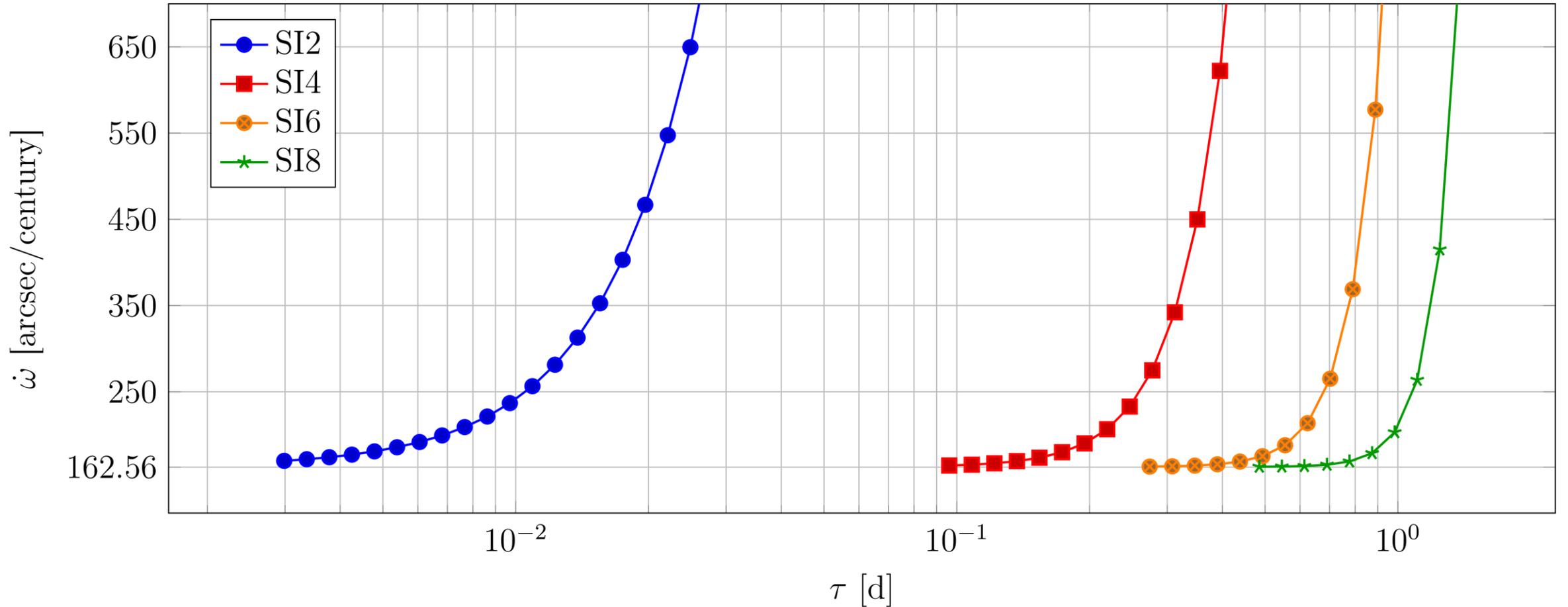
sia **autonoma e separabile ed associata al medesimo problema**. Nel caso in considerazione:

$$H' = \frac{p_x^2 + p_y^2}{2} - \frac{Gm_1}{\sqrt{x^2 + y^2}} - Gm_2 \left(\frac{1}{\sqrt{(x - r_2 \cos \tau)^2 + (y - r_2 \sin \tau)^2}} - \frac{x \cos \tau + y \sin \tau}{r_2^2} \right) + \omega_2 \mathcal{T}$$

Un'applicazione dell'integrazione numerica del problema dei tre corpi è il **calcolo della perturbazione dell'asse degli absidi**, indotta da un terzo corpo, su un'orbita kepleriana.

Ad esempio, la perturbazione dovuta a **Giove** sull'orbita di **Mercurio** calcolata con l'integratore di ordine quattro, mediata in un tempo pari a 1 000 000 di orbite (2410.1 secoli) e con un passo d'integrazione $\tau = 0.1$ d, risulta pari a $\dot{\omega} = 162.56$ arcsec/century. Il valore è molto prossimo a quello classico calcolato con la teoria delle perturbazioni.

Nel calcolo della vera precessione di Mercurio, vanno considerate le interazioni con tutti i pianeti e un **termine correttivo relativistico** $\delta\dot{\omega} \simeq 43$ arcsec/century.



Comparazione tra gli integratori simplettici nel calcolo di $\dot{\omega}$ del problema Sole-Mercurio-Giove al variare del passo d'integrazione τ . $\dot{\omega}$ è mediato in un periodo pari a 100 000 orbite (241 secoli).

- Benettin, G., & Giorgilli, A. (1994). On the Hamiltonian interpolation of near-to-the identity symplectic mappings with application to symplectic integration algorithms. *Journal of Statistical Physics*, 74(5-6), 1117–1143.
- Dragt, A. J., & Finn, J. M. (1976). Lie series and invariant functions for analytic symplectic maps. *Journal of Mathematical Physics*, 17(12), 2215–2227.
- Guzzo, M. (2023). *Meccanica Analitica*. Università degli Studi di Padova.
- Lubich, C., Wanner, G., & Hairer, E. (2013). *Geometric Numerical Integration*. Springer Science & Business Media.
- Morbidelli, A. (2002). *Modern Celestial Mechanics*. Taylor & Francis.
- Neishtadt, A. I. (1984). The separation of motions in systems with rapidly rotating phase. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 48(2), 133–139.
- Trevisan, M. (2006). *Calcolo della precessione del perielio di Mercurio nel problema ristretto dei tre corpi*. Università degli Studi di Padova.
- Yoshida, H. (1990). Construction of higher order symplectic integrators. *Physics Letters A*, 150(5-7), 262–268.
- Yoshida, H. (1993). Recent progress in the theory and application of symplectic integrators. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 56(1-2), 27–43.